(Gerade) Isometrien und semidirekte Produkte

Anmerkungen:

- Die Notationen richten sich weitestgehend nach den Notation aus dem Referenzwerk *From Groups to Geometry and Back*.
- Die Nummerierung aller Propositionen, Gleichungen und Aufgaben entspricht jener aus dem Referenzwerk. Hilfsaussagen meinerseits sind mit einem (*) markiert und folgen einer eigenen Nummerierung für diesen Vortrag.

Verlauf:

1. Kurze Wiederholung der Begriffe und Hauptresultate aus den Vorträgen von Benedikt und Jan
2. Normalität der Translationen $\mathcal{T}$
3. Der Quotient $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T}$
4. Konjugiertenklassen in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$
5. $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ als (inneres) semidirektes Produkt

Geraden Isometrien $Isom^+(\mathbb{R}^2)$

(1) Fixgruppe $G_p := \{ I \in Isom(\mathbb{R}^2) \mid I(p) = p \}$

orientierungserhaltend → Rotationen G_p^+ um p

orientierungsumkehrend → Spiegelungen um Achse durch p

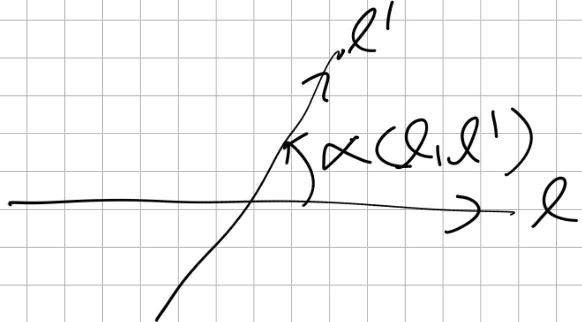
(2) Gerade Isometrien $Isom^+(\mathbb{R}^2)$

fixpunktfrei → Translationen

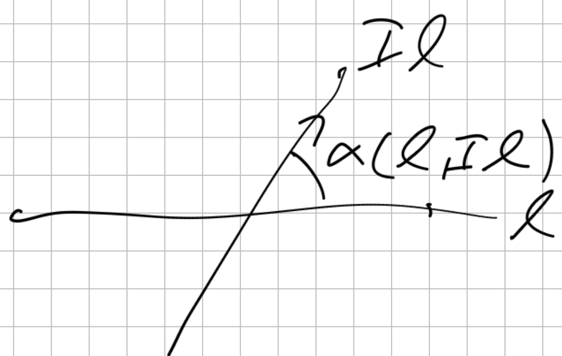
genau ein Fixpunkt → Rotationen

Ziel: Translationen und Rotationen besser verstehen und dadurch die $Isom^+(\mathbb{R}^2)$

→ „Bessere" Klassifikation!

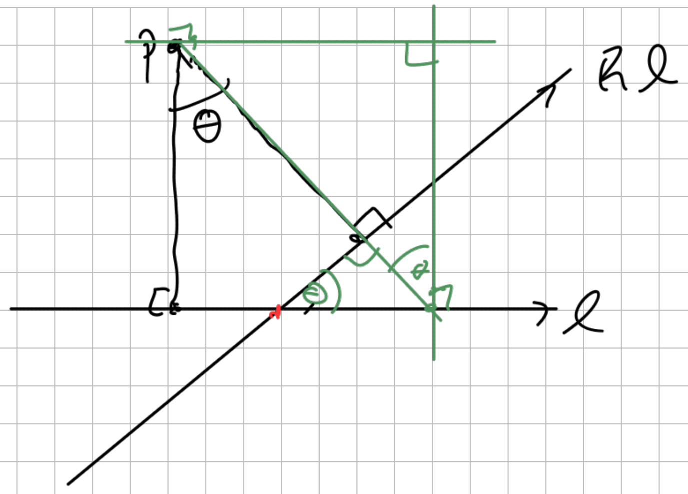


$\alpha(\ell, \ell') = 0$ wenn ℓ, ℓ' parallel, gleich orientiert

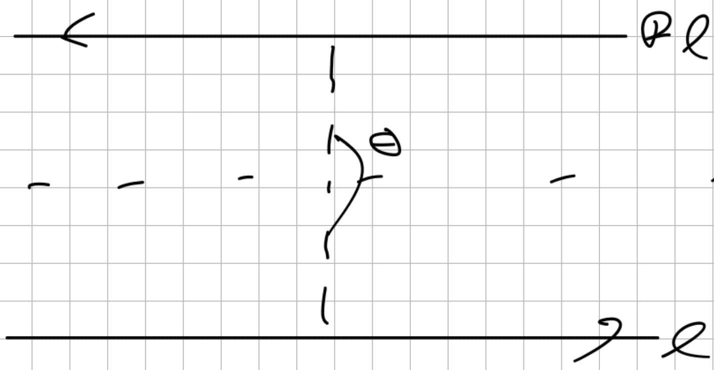


, $I \in Isom^+(\mathbb{R}^2)$

$\alpha(T) = \alpha(\ell, T\ell) = 0$



$$\alpha(R_\theta^p) = \alpha(l, R_\theta^p) = \theta$$



$\alpha : \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Prop.(*) 2.1: α ist Homomorphismus, $\ker \alpha = T$

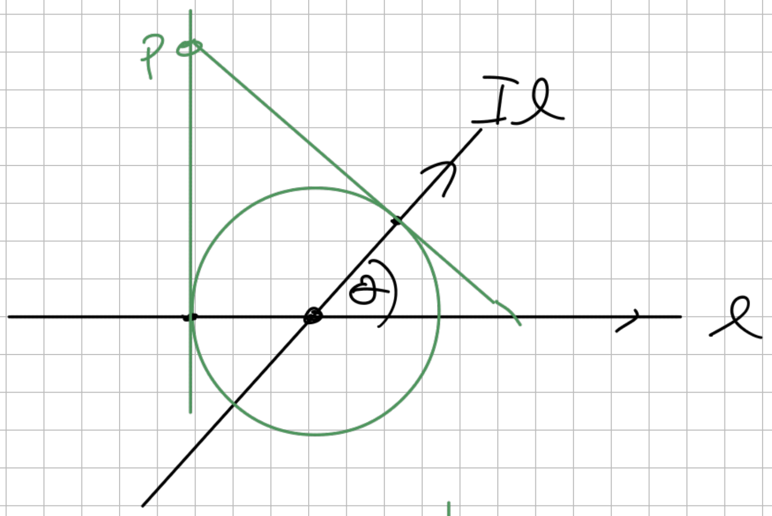
Prop.(*) 2.2: α charakterisiert geraden Isometrien eindeutig: $I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$

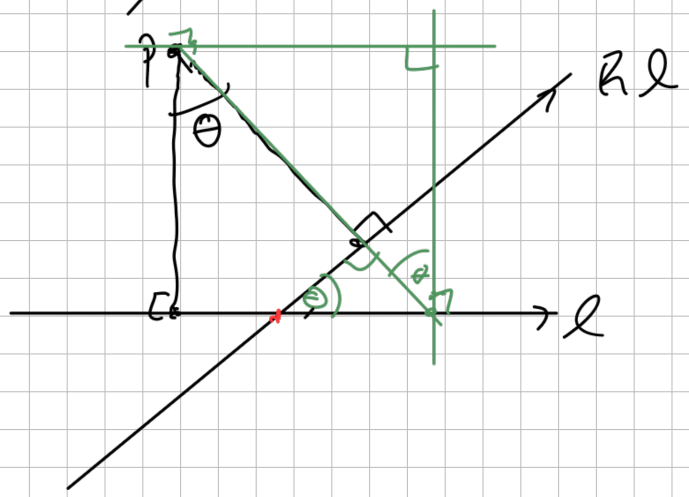
- $\alpha(I) = 0 \iff I \in T$
- $\alpha(I) = \theta \neq 0 \implies \exists\, p \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{R}: \; I = R_\theta^p$

Prop. 2.8: T Normalteiler in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$.

Bew: In Prop(*) 2.1: $\ker \alpha = T$, α Hom.

$\implies$ als Kern von Hom Normalteiler.


P
Iℓ
θ
ℓ


P
Rℓ
θ
ℓ

Was ist $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T}$?

$\alpha: \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\ker\alpha = \mathcal{T}$

$\Rightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T} = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\ker\alpha$
$\cong \mathrm{Bild}(\alpha) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong G_p^+$

$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T} = \{I\mathcal{T} : I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)\}$
$= \{R\mathcal{T} : R \in G_p^+\}$

bijektiv?

$I \in \mathcal{T} \Rightarrow I\mathcal{T} = \mathcal{T}$

$\Phi: G_p^+ \longrightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T}$, $R \mapsto R\mathcal{T}$

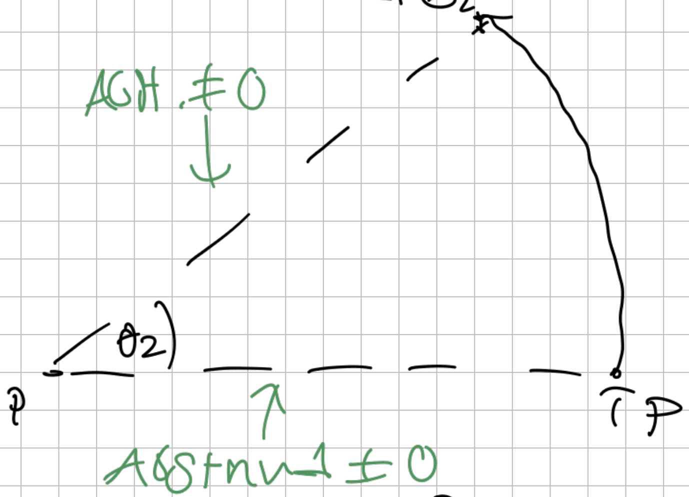
$R^p_{\theta_1} \neq R^p_{\theta_2} \in G_p^+$

Können wir $R^p_{\theta_1} = R^p_{\theta_2} \circ T$ für ein $T \in \mathcal{T}$?

$\Leftrightarrow R^p_{\theta_1} \in R^p_{\theta_2}\mathcal{T} \Leftrightarrow R^p_{\theta_1}\mathcal{T} \cap R^p_{\theta_2}\mathcal{T} = \emptyset$

$(R^p_{\theta_2} \circ T)(p) \neq p$

für $T = \mathrm{id}$ ist $R^p_{\theta_1} \neq R^p_{\theta_2} \circ \mathrm{id}$



$R^p_{\theta_1}(p) = p \Rightarrow R^p_{\theta_1} \notin R^p_{\theta_2}\mathcal{T}$

$\Rightarrow$ Φ Isomorphismus!

$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong G_p^+ \leftarrow \psi : G_p^+ \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$\iota : \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/T,\ I \mapsto IT$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\
\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/T \arrow[r, "\Phi^{-1}", "\cong"'] & G_p^+ \arrow[u, "\psi", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Diagramm kommutiert: $\alpha = \psi \circ \Phi^{-1} \circ \iota$

Prop(*) 2.3: $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/T \cong G_p^+ \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$

Konjugiertenklassen von Translationen in $Isom^+(\mathbb{R}^2)$

$I \in Isom^+(\mathbb{R}^2),\ T \in \mathcal{T}:\ I \circ T \circ I^{-1}$

$\overset{\text{Prop. 2.8}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{T}$ normal in $Isom^+(\mathbb{R}^2)$

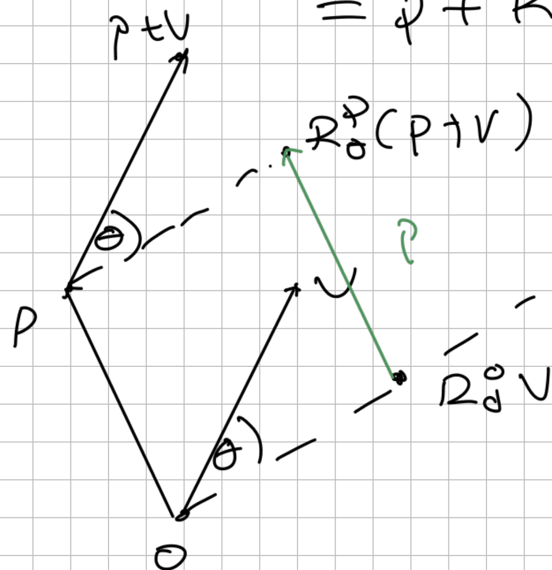
$\Rightarrow \forall I \in Isom^+(\mathbb{R}^2),\ T \in \mathcal{T}:\ I \circ T \circ I^{-1} \in \mathcal{T}$

$T_w \in \mathcal{T}$: $(\mathcal{T}, \circ) \cong (\mathbb{R}^2, +)$

$$T_w T_v T_w^{-1} = T_v T_w T_w^{-1} = T_v$$

$R = R_\theta^p \in G_p^+$

$$\begin{aligned}(R T_v R^{-1})(p) &= (R T_v R_{-\theta}^p)(p) \\ &= (R T_v)(p) \\ &= R_\theta^p(p+v) \\ &= p + R_\theta^0 v\end{aligned}$$



wissen: $R T_v R^{-1} = T_w$ für $T_w \in \mathcal{T}$

$$\cancel{p} + w = T_w(p) = R T_v R^{-1}(p) = \cancel{p} + R_\theta^0 v$$

$\Leftrightarrow\ w = R_\theta^0 v$

$\Rightarrow$ Transaltion T_v, dann enthält Konj.kl. alle Translation um Vektoren derselben Länge wie v.

Konjugiertenkl. von Rotationen (in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$)

$R = R_\theta^p \in G_p^+$, $I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow \alpha(IRI^{-1}) = \cancel{\alpha(I)} + \alpha(R) - \cancel{\alpha(I)} = \alpha(R)$

$\Rightarrow IRI^{-1}$ ist Rotation um θ (Prop (*) 2.2)

$$(IRI^{-1})(Ip) = (IR)(p) = Ip$$

$\Rightarrow$ Konj.-kl. einer Rotation R_θ^p enthält alle Rotationen R_θ^{Ip} für alle $I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$, d.h. alle Rotationen $R_\theta^{p'}$, $p' \in \mathbb{R}^2$ bel.

$\Rightarrow R_\theta^p T_v (R_\theta^p)^{-1} = T_{R_\theta^0 v} \Leftrightarrow \boxed{R_\theta^p T_v = T_{R_\theta^0 v} R_\theta^p}$ (2.2)

$I R_\theta^p I^{-1} = R_\theta^{Ip} \Leftrightarrow I R_\theta^p = R_\theta^{Ip} I$

Prop 2.10: Sei $p \in \mathbb{R}^2$ fest. Dann ex. für jede Isometrie $I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ ein eindeutiges $v \in \mathbb{R}^2$ und $\theta \in [0, 2\pi)$, sodass $I = T_v R^p_\theta$.

Bew: Beobachtung:

$$\alpha(T_v R^p_\theta) = \alpha(T_v) + \alpha(R^p_\theta) = 0 + \theta = \theta$$

$\Rightarrow$ wenn $I = T_v R^p_\theta$, dann $\alpha(I) = \theta$ die einzige Wahl

$$I = T_v R^p_\theta \iff T_v = I(R^p_\theta)^{-1} = I R^p_{-\theta}$$

$$\alpha(I(R^p_\theta)^{-1}) = \alpha(I) - \alpha(R^p_\theta) = \theta - \theta = 0$$

$\overset{\text{Prop.}(*)}{\underset{2.2.}{\Longrightarrow}}$ $I(R^p_{-\theta})^{-1}$ ist Translation! $\Rightarrow I(R^p_{-\theta})^{-1} = T_v$ für ein $v \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow I(R^p_{-\theta})^{-1}(0) = T_v(0) = v$

Insgesamt haben wir:

(1) $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = T G_0^+$

(2) $T \cap G_0^+ = \{e\}$

(3) T normal in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$, G_0^+ ist nicht normal!

und $T, G_0^+ \leq \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$

Vgl.: innere direkte Produkte:

Def(*) 2.1: Gruppe G heißt inneres direktes Produkt zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls

(1) $G = HK$

(2) $H \cap K = \{e\}$ und

(3) $hk = kh \quad \forall h \in H, k \in K$

Anmerkung(*) 2.2: Wenn $H, K \trianglelefteq G$, und $H \cap K = \{e\}$, dann ist (3) automatisch erfüllt.

Frage: Können wir die Struktur von der ganzen Gruppe durch die Struktur kleinerer Untergr. verstehen? $\Longrightarrow$ JA, manchmal:

Gruppe G, $H, K \leq G$, $G = HK$,

$g_1 = h_1 k_1$, $g_2 = h_2 k_2$

Produkt:

$$g_1 \cdot g_2 = h_1 k_1 \cdot h_2 k_2$$
$$= (h_1 h_2)(k_1 \cdot k_2)$$

Frage: Geht das auch bei $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$?

$I_1 = T_{v_1} \circ R^0_{\theta_1}$, $I_2 = T_{v_2} \circ R^0_{\theta_2}$

$$I_1 \circ I_2 = (T_{v_1} \circ R^0_{\theta_1}) \circ (T_{v_2} \circ R^0_{\theta_2})$$

$$= T_{v_1} \circ (R^0_{\theta_1} \circ T_{v_2}) \circ R^0_{\theta_2} \quad (2.3)$$

$\boxed{R^p_\theta T_v = T_{R^0_\theta v} R^p_\theta}$ (2.2) mit $p = 0$

$$= (T_{v_1} \circ T_{R^0_\theta v_2}) (R^0_{\theta_1} \circ R^0_{\theta_2})$$

$$= T_{v_1} \circ (\psi(R^0_\theta))(T_{v_2}) \circ (R^0_{\theta_1} \circ R^0_{\theta_2})$$

Prop(*) 2.5: $\forall \theta \in \mathbb{R}$ ist durch $\psi_\theta : T \to T$, $T_v \mapsto T_{R^0_\theta v}$ ein Automorphismus gegeben. Die Abb. $\psi : G^+_0 \to \mathrm{Aut}(T)$, $R^0_\theta \mapsto \psi_\theta$ ist ein Homomorph.

Def(*) 2.2: Gruppe G heißt inneres semidirektes Produkt der Untergr. $H, K \leq G$, falls
(1) $G = HK$
(2) $H \cap K = \{e\}$
(3) H normal in G.
Dann schreiben wir $G = H \rtimes K$.

$g_1 = h_1 k_1$, $g_2 = h_2 k_2$

$$\Rightarrow g_1 \cdot g_2 = h_1 k_1 h_2 k_2$$

$$= h_1 k_1 h_2 (k_1^{-1} k_1) k_2$$

$$= h_1 (\underbrace{k_1 h_2 k_1^{-1}}_{\in H}) k_1 k_2 \quad (2.5)$$

inneres Automorphismus $\psi_k : H \to H$, $h \mapsto khk^{-1}$, da $H \trianglelefteq G$

$$= (h_1 \psi_{k_1}(h_2))(k_1 k_2)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = T \rtimes G^+_0$$

Def. (*) 2.3: Seien H, K Gruppen und $\varphi: K \to \mathrm{Aut}(H)$, $k \mapsto \varphi_k$ ein Homomorphismus. Dann ist das äußere semidirekte Produkt von H und K bezüglich der Familie φ gegeben als die Menge $H \times K$ zusammen mit dem Produkt:

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) = (h_1 \varphi_{k_1}(h_2), k_1 k_2)$$

in Analogie zu (2.5).