(Gerade) Isometrien und das semidirekte Produkt

Matteo Mertz

13. Oktober 2024

Zusammenfassung

Der folgende Text ist eine Ausarbeitung einer in *From Groups to Geometry and Back* von Climenhaga und Katok [1] präsentierten Sichtweise auf die Gruppentheoretische Struktur der geraden Isometrien des $\mathbb{R}^2$. Sie ist im Rahmen des Hurwitz Seminars 2024 der TU München entstanden. Der Haupttext wird auf die wesentlichen Motivationen des semidirekten Produkts reduziert und dabei um entscheidende Gedankengänge, Erkenntnisse und Einordnungen meinerseits ergänzt.

Anmerkungen

- Die Notationen richten sich weitestgehend nach den Notation aus dem Referenzwerk *From Groups to Geometry and Back* [1].
- Die Nummerierung aller Propositionen, Gleichungen und Aufgaben entspricht jener aus dem Referenzwerk. Hilfsaussagen meinerseits sind mit einem (*) markiert und folgen einer eigenen Nummerierung für dieses Skript.

1 Erste gruppentheoretische Überlegungen

Im vorherigen Vortrag hat Jan Eickhoff elementar geometrisch eine Klassifikation der Isometrien in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ hergeleitet. Sie sagt in Kurzform aus:

	orientierungserhaltend	orientierungsumkehrend
Mit Fixpunkt(en)	Rotationen	Spiegelungen
Fixpunktfrei	Translationen	Gleitspiegelungen

Wir wollen uns nun mit der Gruppenstruktur der orientierungserhaltenden Isometrien auseinandersetzen, geschrieben $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$. Die obige Klassifizierung erleichtert uns diese Untersuchung enorm. So ist es alleine für diesen Vortrag nicht einmal notwendig genau zu verstehen, was *orientierungserhaltend* bedeutet. Es ist vollkommen ausreichend unter orientierungserhaltenden Isometrien einfach *genau* die Translationen und Rotationen zu verstehen (im $\mathbb{R}^2$)[1].

Die beiden (einzigen!) Akteure in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ sind uns nun bekannt. Im Folgenden gilt es also diese Akteure im Kontext der $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ zu untersuchen. Dazu gehören die *Struktur der Translationen und Rotationen* selbst und die *Interaktionen der beiden miteinander*. Dafür führen wir zunächst Notationen ein:

[1] Beim genauen Lesen dieses Skripts wird auffallen, dass wir tatsächlich an keiner Stelle irgendwie mit der orientierungserhaltenden Eigenschaft argumentieren.

Die Menge aller Translationen wird mit $\mathcal{T}$ bezeichnet. Sie ist eine Untergruppe der $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ und isomorph zu $(\mathbb{R}^2, +)$ und damit abelsch. Das sieht man leicht daran, dass wir jede Translation schreiben können als Abbildung $T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto x + v$.

Die Menge aller Rotationen um einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ liegt in der Fixgruppe $G_p = \{I \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2) \mid I(p) = p\}$ (denn Rotationen haben immer genau einen Fixpunkt). Da sie nach der obigen Klassifizierung genau den orientierungserhaltenden Anteil der Fixgruppe ausmachen, schreiben wir für sie G_p^+.

Es wird sich herausstellen, dass wir die gesamte Struktur der $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ „fast" vollständig aus der Struktur der Translationen und Rotationen rekonstruieren können. Das wird die große Erkenntnis dieses Vortrags sein und uns auf den Begriff der semidirekten Produkte führen.

2 Gruppentheoretische Klassifikation

Damit wir uns im Folgenden größtenteils von elementargeometrischen Überlegungen lösen können, müssen wir erst eine „Brücke" von der Elementar-Geometrie hin zur Gruppentheorie schlagen[2]. Dafür beginnen wir nun mit einer relativ willkürlichen Konstruktion:

Wir betrachten zwei orientierte(!) Geraden ℓ und ℓ'. Für den Winkel von der positiven Richtung von ℓ zur positiven Richtung von ℓ' schreiben wir $\alpha(\ell, \ell')$. Sind ℓ und ℓ' parallel (und gleichorientiert!), so setzen wir $\alpha(\ell, \ell') = 0$.

Dann können wir jetzt natürlich nicht nur irgendwelche Geraden betrachten, sondern eine beliebige (aber feste) Ausgangsgerade ℓ und die von einer orientierungserhaltenden Isometrie I transformierte Gerade $I\ell$.

Translationen sind in diesem Kontext einfach nur Parallelverschiebungen, d.h. für eine Translation T haben wir $\alpha(\ell, T\ell) = 0$.

Durch die elementargeometrische Konstruktion aus Abbildung 1, bzw. Abbildung 2 erkennen wir, dass für eine Rotation R_θ^p um einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel $\theta \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha(\ell, R_\theta^p \ell) = \theta$.

Wir können also jedem Element $I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ einen sinnvollen Wert zuordnen. Aber noch ist Vorsicht geboten. Denn für eine Rotation R_θ^p gilt $R_{\theta+2\pi k}^p = R_\theta^p$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\alpha(\ell, R_{\theta+2\pi k}^p \ell) = \theta + 2\pi k \neq \theta = \alpha(\ell, R_\theta^p \ell)$ für $k \neq 0$. Um hier also tatsächlich eine wohldefinierte Abbildung zu erhalten, müssen wir den Output von α bis auf Vielfache von 2π betrachten, d.h. in $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Dann können wir nun definieren

$$\alpha : \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad I \to \alpha(\ell, I\ell) \tag{2.1*}$$

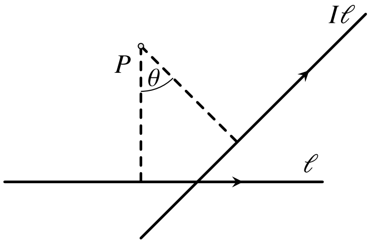
für eine beliebige, aber feste Gerade ℓ. Diese Abbildung ist sogar ein Homomorphismus:

Proposition(*) 2.1. *Die in (2.1*) definierte Abbildung $\alpha : \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ist ein Homomorphismus.*

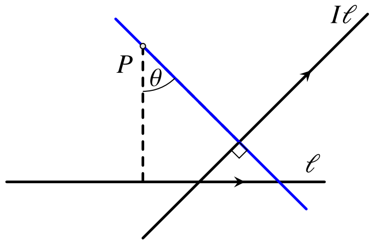
Beweis. Diesen Beweis müssen wir noch elementargeometrisch führen. Er ermöglicht uns allerdings später, dass wir uns (fast) nur in der gruppentheoretischen Welt bewegen können, ohne elementargeometrische Überlegungen.

Zu zeigen ist $\alpha(I_1, I_2) = \alpha(I_1) + \alpha(I_2)$ für alle $I_1, I_2 \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

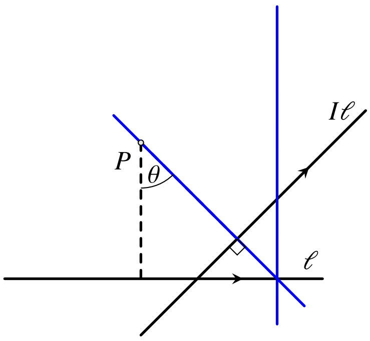
[2]Genaugenommen „müssen" wir das nicht, aber es wird sich als äußerst praktisch erweisen.



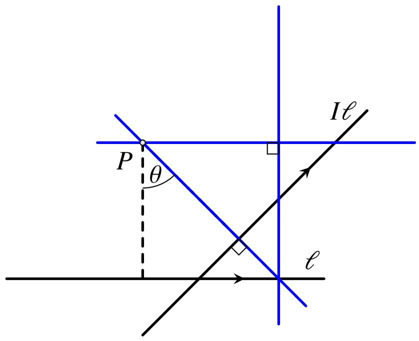
(a) Ausgangssituation



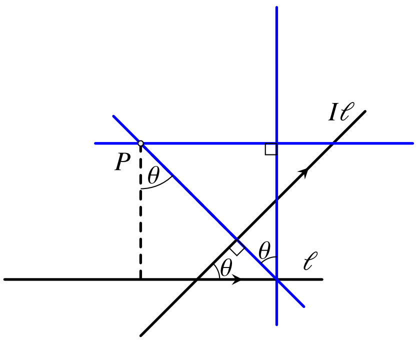
(b) Orthogonale von $I\ell$ durch P



(c) Orthogonale von ℓ durch Schnittpunkt von Orthogonalen aus 1b mit ℓ



(d) Orthogonale von neuer Orthogonale aus 1c durch P



(e) θ durch Winkelsätze (oder Winkelsummen im Dreieck) an die gewollte Stelle bringen.

Abbildung 1: Konstruktion des Winkels zwischen ℓ und $I\ell$ aus dem Drehwinkel θ um P (falls $\theta < 180°$).

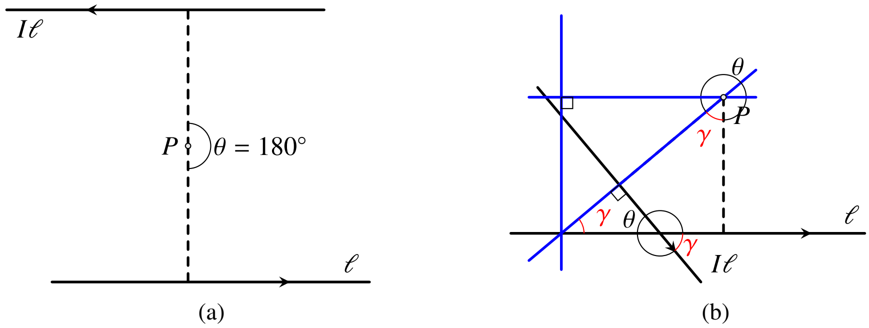


Abbildung 2: Sonderfälle der Konstruktion aus Abbildung 1 für (a) $\theta = 180°$ und (b) $\theta > 180°$ durch den Hilfswinkel $\gamma := 360° - \theta$.

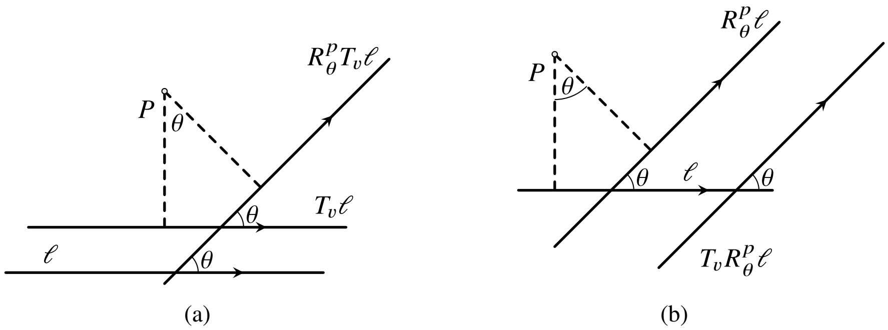


Abbildung 3: Verknüpfung einer Rotation mit einer Translation mit orientierten Geraden: (a) Erst Translation, dann Rotation; (b) Erst Rotation, dann Translation. In beiden Fällen finden wir den Winkel θ mithilfe des Stufenwinkelsatzes an den gewünschten Positionen.

1. I_1 und I_2 sind Translationen. Beides sind lediglich Parallelverschiebungen (aus Sicht der Gerade ℓ), also folgt sofort $\alpha(I_1 I_2) = 0 = 0 + 0 = \alpha(I_1) + \alpha(I_2)$.

2. I_1 ist eine Translation und I_2 ist eine Rotation oder I_1 ist eine Rotation und I_2 ist eine Translation. Wir müssen beide Fälle separat betrachten, da Translationen und Rotationen im Allgmeinen nicht kommutieren. Abbildung 3 zeigt jedoch, dass die Argumentation in beiden Fällen die gleiche ist.

3. I_1 und I_2 sind Rotationen. Abbildung 4 zeigt eine entsprechende Konstruktion, die zusammen mit den Winkelsätzen die Behauptung liefert.

□

Noch weitaus interessanter ist allerdings, dass uns α zusätzlich eine Klassifizierung der orientierungserhaltenden Isometrien liefert

Proposition(*) 2.2. *Der Homomorphismus* $\alpha : \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ *charakterisiert die geraden Isometrien eindeutig. Genauer: Für* $I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ *gilt*

$$I \in \mathcal{T} \iff \alpha(I) = 0$$

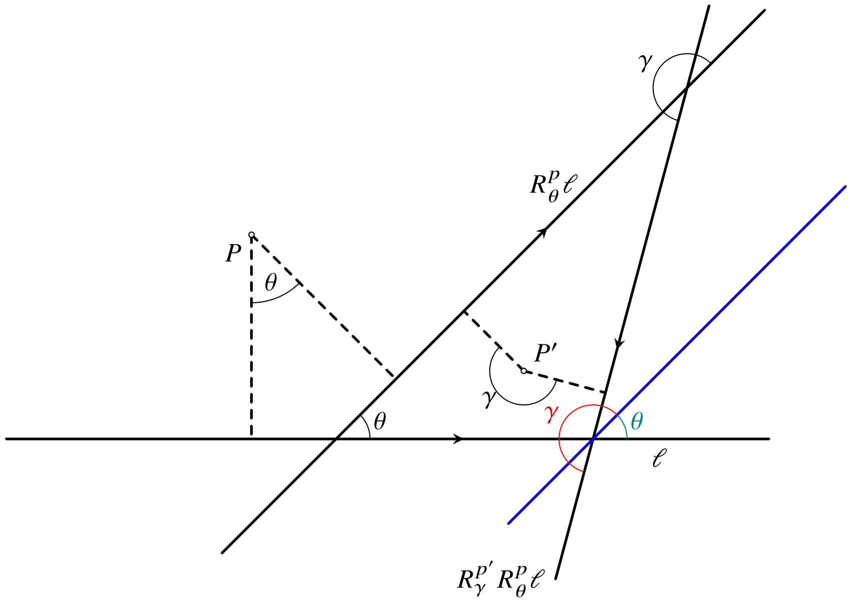


Abbildung 4: Verknüpfung zweier Rotationen mit orientierten Geraden: Über die blaue Hilfs-Parallele zu $R^p_\theta \ell$ lassen sich die Winkel θ und γ mit den Winkelsätzen zwischen $R^{p'}_\gamma R^p_\theta \ell$ und ℓ finden. Die Summe $\theta+\gamma$ ergibt dann den Gesamtdrehwinkel von $R^{p'}_\gamma R^p_\theta$.

und

$$\exists p \in \mathbb{R}^2 : I = R^p_\theta \iff \alpha(I) = \theta$$

Insbesondere gilt

$$\ker(\alpha) = \mathcal{T}$$

Beweis. Die Hinrichtungen sind klar aus den Überlegungen vor Proposition(*) 2.1.

Ist $\alpha(I) = 0$, so sind ℓ und $I\ell$ entweder identisch oder liegen parallel zueinander. Im identischen Fall gilt $I = \mathrm{id} \in \mathcal{T}$. Dies deckt auch den zweiten Teil für $\theta = 0$ ab, denn $R^p_0 = \mathrm{id}$ für alle $p \in \mathbb{R}^2$.

Hätte I im nicht-identischen Fall einen Fixpunkt, so wäre I eine Rotation um einen Winkel ungleich null, also $I = R^p_\gamma$ mit $\gamma \neq 0$. Dann haben wir $0 = \alpha(I) = \alpha(R^p_\gamma) = \gamma$, also einen Widerspruch. Damit hat I in diesem Fall keinen Fixpunkt und muss eine Translation sein.

Sei nun $\alpha(I) = \theta \neq 0$. Hätte I keinen Fixpunkt, so wäre I eine Translation. Insbesondere gilt dann $\alpha(I) = 0$, Widerspruch. Also hat I einen Fixpunkt und muss damit eine Rotation R^p_γ sein. Dann folgt $\theta = \alpha(I) = \alpha(R^p_\gamma) = \gamma$, was den Beweis abschließt. □

Der zweite Teil der Proposition ist auch tatsächlich eine Klassifizierung. A priori ist erst einmal nicht ausgeschlossen, dass im Fall $\alpha(I) = \theta$ noch weitere $\gamma \in \mathbb{R}, \gamma \neq \theta$ und $q \in \mathbb{R}^2, q \neq p$ existieren mit $I = R^q_\gamma$. Dann hätten wir jedoch eine Rotation auf zwei verschiedene Arten beschrieben: $R^p_\theta = R^q_\gamma$. Allerdings gilt $\theta = \alpha(R^p_\theta) = \alpha(R^q_\gamma) = \gamma$, womit dieser Fall nicht eintreten kann. Alternativ hätten wir $p = R^p_\theta(p) = R^q_\gamma(p) \neq p$, also einen noch direkteren Widerspruch.

Anmerkung(*) 2.1. Diese Klassifikation wirkt vielleicht auf den ersten Blick etwas willkürlich. Sie ergibt sich allerdings tatsächlich ganz natürlich aus der Struktur des Quotienten $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T}$. Das wird eine der großen Erkenntnisse des nächsten Abschnitt 3 sein.

3 Die Struktur von $\mathcal{T}$

Nach der Vorarbeit aus dem vorausgegangenen Abschnitt 2 erkennen wir nun leicht:

Proposition 2.8. *$\mathcal{T}$ ist normal in* $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$.

Beweis. Nach Proposition(*) 2.2 gilt $\mathcal{T} = \ker(\alpha)$ und Kerne von Homomorphismen sind normal. □

Anmerkung(*) 2.2. Den Beweis von Proposition 2.8 hätten wir auch ganz ohne den Homomorphismus α rein elementargeometrisch führen können. Das ist in gewisser Weise auch ein Weg, der über den Quotienten $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T}$ ganz natürlich auf den Homomorphismus α führt, ohne diesen im vorhinein zu kennen! Darauf spielte bereits Anmerkung(*) 2.1 an.

Jetzt wissen wir, welche Struktur sich hinter den Translationen verbirgt: Normalität in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$. Die nächste natürliche Frage ist nun, ob wir irgendwie die Faktorgruppe $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T}$ genauer bestimmen können.

Mithilfe unseres Homomorphismus α geht das sogar ziemlich leicht: Denn der Homomorphiesatz aus der Gruppentheorie liefert uns die Isomorphie

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T} = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\ker(\alpha) \cong \mathrm{Im}(\alpha) = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Halten wir einen beliebigen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ fest, so liefert uns die Klassifikation aus Proposition(*) 2.2 durch die Einschränkung $\alpha|_{G_p^+}$ eine eindeutige Zuordnung der Rotationen um p und $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. In anderen Worten: $\alpha|_{G_p^+}$ realisiert die Isomorphie $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong G_p^+$. Zudem können wir leicht mit der Identifikation des $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und der Darstellung in Polarkoordinaten erkennen, dass $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$. Wir halten fest:

Proposition(*) 2.3. *Es gilt*

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T} \cong S^1$$

Damit hätten wir nun bereits in gewisser Weise die Faktorgruppe ausreichend verstanden. Die folgende alternative Betrachtung, ganz ohne den Homomorphismus α wird jedoch fruchtbar sein und sogar etwas strukturelles über α offenlegen.

Da jeder orientierungserhaltende Isomorphismus des $\mathbb{R}^2$ entweder eine Translation oder eine Rotation ist, haben wir folgende Zerlegung

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \mathcal{T} \cup \left(\bigcup_{p\in\mathbb{R}^+} G_p^+\right)$$

Die Elemente der Faktorgruppe $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T} = \{I\mathcal{T} : I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)\}$ können wir uns als bezüglich dieser Zerlegung anschauen:

- Wenn $I \in \mathcal{T}$, so folgt sofort $I\mathcal{T} = \mathcal{T}$ nach der Konstruktion der Äquivalenzrelation auf dem Quotienten.

- Wenn $I \in \bigcup_{p\in\mathbb{R}^+} G_p^+$, so ist I eine Rotation um irgendeinen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$, d.h. $I = R_\theta^p$ mit $\theta \in \mathbb{R}$. Dann gilt für beliebige $q \in \mathbb{R}^2$

$$T_{q-p} R_\theta^p T_{p-q}(q) = T_{q-p} R_\theta^p(p) = T_{q-p}(p) = q \tag{2.2*}$$

  also $T_{q-p} R_\theta^p T_{p-q} = R_\theta^q$ wegen Proposition(*) 2.2. Damit haben wir

$$R_\theta^p T_{p-q} = T_{-(p-q)} R_\theta^q \in \mathcal{T} R_\theta^q = R_\theta^q \mathcal{T}$$

  wobei die letzte Gleichheit gilt, da $\mathcal{T}$ ein Normalteiler ist. Insgesamt folgt so $R_\theta^p \mathcal{T} = R_\theta^q \mathcal{T}$ für beliebige $p, q \in \mathbb{R}^2$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

Zusammen folgt für einen beliebigen, aber fest gewählten Punkt $p \in \mathbb{R}^2$

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T} = \{I\mathcal{T} \mid I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)\} = \{R\mathcal{T} \mid R \in G_p^+\}$$

Diese Zerlegung ist sogar disjunkt! Denn geometrisch ist leicht ersichtlich, dass für $R_{\theta_1}^p \neq R_{\theta_2}^p$ gilt $R_{\theta_2}^p \circ T(p) \neq p$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Allerdings ist $R_{\theta_1}^p(p) = p$, also $R_{\theta_1}^p \notin R_{\theta_2}^p \mathcal{T}$. Die Äquivalentklassen-Konstruktion des Quotienten liefert dann direkt die Disjunktheit.

Damit wird die Einschränkung $\Phi = \iota|_{G_p^+}$ der kanonischen Einbettung

$$\iota : \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T}, I \mapsto I\mathcal{T}$$

zu einem Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1} : \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T} \to G_p^+, I\mathcal{T} \mapsto \begin{cases} \mathrm{id} & , I \in \mathcal{T} \\ R_\theta^p & , I \in G_p^+ \setminus \{\mathrm{id}\} \end{cases}$$

Weiter haben wir einen (wohldefinierten!) Isomorphismus

$$\Psi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to G_p^+, [\theta] \mapsto R_\theta^p$$

Das folgende Diagramm veranschaulicht die Situation:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \\ \big\downarrow \iota & & \Psi \big\uparrow \\ \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\mathcal{T} & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & G_p^+ \end{array}$$

Tatsächlich kommutiert dieses Diagramm auch, d.h.

$$\alpha = \Psi \circ \Phi^{-1} \circ \iota$$

Also liefert der zu Beginn dieses Abschnitts eingeführte Homomorphismus α einfach eine elementargeometrische Interpretation dieser Verknüpfung.

Anmerkung(*) 2.3. Irgendwo ist die Wahl des Homomorphismus α eigentlich nicht sonderlich überraschend. Bereits mit Proposition(*) 2.3 haben wir jedoch herausgefunden, dass α entscheidend mit der Stuktur des Quotienten zusammenhängt. Die der

Proposition folgenden strukturellen Erkenntnisse sind tatsächlich bereits im Homomorphiesatz enthalten. Das veranschaulicht das folgende (kommutierende) Diagram:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)/\ker(\alpha) \arrow[r, "\Upsilon"] & \mathrm{im}(\alpha) \arrow[d, "="] \\
\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

wobei $\alpha = \Upsilon \circ \iota$. Die Überlegungen nach Proposition legen noch offen, wie der Isomorphismus Υ im Homomorphiesatz entsteht (als $\Upsilon = \Psi \circ \Phi^{-1}$) und wie sich daraus der klassifizierende Homomorphismus α erkennen lässt. In anderen Worten: Ein bisschen „Rumgraben" in der Struktur des Quotienten liefert „direkt" den klassifizierenden Homomorphismus α.

4 Konjugiertenklassen von Elementen aus $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$

Nachdem wir nun die Translationen und Rotationen separat betrachtet haben, widmen wir uns nun den Interaktionen ebendieser miteinander.

4.1 Konjugatiertenklassen von Translationen

Da $\mathcal{T}$ normal in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ ist, ist jede Konjugation einer Translation ebenfalls eine Translation. Da $\mathcal{T} \cong (\mathbb{R}^2, +)$, ist $\mathcal{T}$ abelsch, also gilt für Konjugationen mit Translationen:

$$T_w T_v T_w^{-1} = T_v T_w T_w^{-1} = T_v$$

Der andere „Konjugiertentyp" von Translationen, welcher in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ auftreten kann ist der durch Rotationen. Sei also $R = R^p_\theta$ eine solche um einen Punkt p um den Winkel θ. Dann gilt

$$(RT_vR^{-1})(p) = (RT_vR^p_{-\theta})(p) = RT_v(p) = R^p_\theta(p+v) = p + R^0_\theta v$$

Die letzte Gleichheit mag zunächst irritierend sein. Doch Rotationen um Punkte ungleich dem Nullpunkt sind nicht linear! Stattdessen gilt nach den Überlegungen um (2.2*) $R^p_\theta = T_p R^0_\theta T_{-p}$, womit die Behauptung folgt. Da $\mathcal{T}$ nach Proposition 2.8 normal ist, ist auch RT_vR^{-1} eine Translation, also $RT_vR^{-1} = T_w$ für ein $w \in \mathbb{R}^2$. Insbesondere gilt auch

$$p + w = T_w(p) = RT_vR^{-1}(p) = p + R^0_\theta v$$

also $w = R^0_\theta v$. Damit ist die Konjugiertenklasse einer Translation T_v gegeben als die Menge aller Translationen um Vektoren mit derselben Länge wie v. Denn genau diese Vektoren werden von den Rotationen um den Nullpunkt getroffen.

4.2 Konjugiertenklassen von Rotationen

Nun zu den Konjugiertenklassen von Rotationen. Für eine Rotation $R = R^p_\theta$ und beliebige Isometrien $I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ gilt wegen der Homomorphismus-Eigenschaft von α

$$\alpha(IRI^{-1}) = \alpha(I) + \alpha(R) - \alpha(I) = \alpha(R)$$

Also ist IRI^{-1} eine Rotation um den Winkel θ (siehe Proposition(*) 2.2), welche jedoch den Punkt Ip statt p fixiert, denn

$$IRI^{-1}(Ip) = IR(p) = Ip$$

und Rotationen haben nur genau einen Fixpunkt (sind in der Fixgruppe G_p vollständig enthalten, siehe Abschnitt 1).

Insgesamt können wir nun zusammen mit den Ergebnissen aus Abschnitt 4.1 festhalten:

$$R^p_\theta T_v = T_{R^0_\theta v} R^p_\theta, \quad \text{und} \quad IR^p_\theta = R^{Ip}_\theta I \tag{2.2}$$

5 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ als (inneres) semidirektes Produkt

5.1 Motivation

Die folgenden Aussagen gelten auch alle im $\mathbb{R}^n$ und nicht nur $\mathbb{R}^2$!

Proposition 2.10. *Sei $p \in \mathbb{R}^2$ fest. Dann existieren für jede Isometrie $I \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ ein eindeutiges $v \in \mathbb{R}^2$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ sodass $I = T_v R^p_\theta$.*

Beweis. Dass eine Darstellung $I = T_v R^p_\theta$ existiert, ist gleichbedeutend damit, dass $v \in \mathbb{R}^2$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ existieren, sodass $T_v = I(R^p_\theta)^{-1} = IR^p_{-\theta}$. Mit der Homomorphismus-Eigenschaft aus Proposition(*) 2.1 erhalten wir

$$\alpha(IR^p_{-\theta}) = \alpha(I) - \alpha(R^p_\theta)$$

Damit die gewünschte Darstellung existieren kann, muss $IR^p_{-\theta}$ eine Translation sein. Das ist nach Proposition(*) 2.2 genau dann der Fall, wenn $\alpha(IR^p_{-\theta}) = 0$, also mit der obigen Gleichheit genau dann, wenn $\alpha(I) = \alpha(R^p_\theta) = \theta$. Das zeigt: Wählen wir $\theta := \alpha(I)$, so existiert ein $v \in \mathbb{R}^2$ mit $I = T_v R^p_\theta$ und diese Wahl von θ ist die einzige Wahl, sodass ein solches $v \in \mathbb{R}^2$ existiert. Translationen sind über ihren Verschiebungsvektor eindeutig bestimmt. Also ist v durch $v = T_v(0) = (IR^p_{-\theta})(0)$ eindeutig bestimmt. □

Ab jetzt betrachten wir nur noch $p = 0$. Mit Propositionen 2.8 und 2.10 haben wir nun bereits entscheidende Aussagen darüber gesammelt, wie die Untergruppen G^+_0 und $\mathcal{T}$ in $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ liegen:

1. Sie erzeugen die Gruppe: Nach Proposition 2.10 können wir jede gerade Isometrie des $\mathbb{R}^2$ als Produkt $I = TR$ einer Translation T und einer Rotation R um 0 verstehen.
2. $\mathcal{T} \cap G^+_0 = \{e\}$ (Klassifikation nach Fixpunkten, Abschnitt 1)
3. $\mathcal{T}$ ist nach Proposition 2.8 normal, aber G^+_0 ist wegen (2.2) nicht normal

Die ersten beiden Eigenschaften erinnern an die Konstruktion des (inneren) direkten Produkts:

Definition(*) 2.1 (Innere direkte Produkte)**.** *Eine Gruppe G heißt* inneres direktes Produkt *zweier Untergruppen $H, K \leq G$, falls*

1. *$G = HK$*
2. *$H \cap K = \{e\}$ und*

3. *$hk = kh$ für alle $h \in H, k \in K$*

gilt.

Anmerkung(*) 2.4. Die zweite Eigenschaft aus Definition(*) 2.1 garantiert bereits die Eindeutigkeit der Zerlegung aus der ersten Eigenschaft. Dafür machen wir zunächst eine Vorbemerkung: Punkt 2 ist äquivalent dazu, dass für alle $h \in H, k \in K$ mit $hk = e$ folgt $h = k = e$: Seien für die Hinrichtung $h \in H, k \in K$ mit $hk = e$. Dann ist $h = k^{-1}$, also $h, k \in H \cap K = \{e\}$ und damit $h = k = e$. Sei für die Rückrichtung $g \in H \cap K$. Dann ist $gg^{-1} = e$ wobei $g \in H \cap K \subseteq H$ und $g^{-1} \in H \cap K \subseteq K$. Es folgt $g = g^{-1} = e$ und damit die Behauptung.

Nun zur eigentlichen Eindeutigkeits-Aussage: Ist $H \cap K = \{e\}$ und $h_1k_1 = h_2k_2$, so haben wir $h_2^{-1}h_1k_1k_2^{-1} = e$ wobei $h_2^{-1}h_1 \in H$ und $k_1k_2^{-1} \in K$. Mit der Vorbemerkung folgt $h_2^{-1}h_1 = e$ und $k_1k_2^{-1} = e$, also $h_1 = h_2$ und $k_1 = k_2$.

Anmerkung(*) 2.5. Die letzte Eigenschaft aus Definition(*) 2.1 wird häufig auch spezifischer gefasst: Sind H und K sogar Normalteiler von G, die Punkt 2 erfüllen, so kommutieren deren Elemente im Sinne von Punkt 3. Ist einer der beiden Untergruppen in diesem Fall jedoch kein Normalteiler, so ist Punkt 3 im Allgemeinen auch nicht erfüllt!

Eine der Fragen hinter „inneren Strukturen" ist: *Können wir die Struktur der ganzen Gruppe alleine durch die Strukturen kleinerer Untergruppen verstehen?*

Antwort: JA! Ein bekanntes Beispiel dafür sind innere direkte Produkte: In diesen können wir das Produkt über der gesamten Gruppe vollständig („direkt") aus dem Produkt über den kleineren Untergruppen H und K rekonstruieren:

$$g_1 \cdot g_2 = (h_1k_1) \cdot (h_2k_2) = h_1(k_1h_2)k_2 = (h_1h_2)(k_1k_2) \tag{2.3*}$$

Können wir so auch für $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ vorgehen? Auf jeden Fall nicht sofort. Denn zunächst ist G_0^+ kein Normalteiler von $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$. Ferner kommutieren die Elemente von $\mathcal{T}$ und G_0^+ nach (2.2) nicht.

Trotzdem versuchen wir das Produkt einfch soweit zu rekonstruieren, wie es uns möglich ist: Mit der ersten Relation aus (2.2) erhalten wir für das allgemeine Produkt gerader Isometrien $I_1 = T_{v_1} \circ R^0_{\theta_1}$ und $I_2 = T_{v_2} \circ R^0_{\theta_2}$

$$\begin{aligned} I_1 \circ I_2 &= (T_{v_1} \circ R^0_{\theta_1}) \circ (T_{v_2} \circ R^0_{\theta_2}) \\ &= T_{v_1} \circ (R^0_{\theta_1} \circ T_{v_2}) \circ R^0_{\theta_2} \\ &\overset{(2.2)}{=} T_{v_1} \circ T_{R^0_{\theta_1} v_2} \circ R^0_{\theta_1} \circ R^0_{\theta_2} \end{aligned} \tag{2.3}$$

da Verkettungen assoziativ sind.

Proposition(*) 2.4. *Für alle $\theta \in \mathbb{R}$ ist durch $\psi_\theta : \mathcal{T} \to \mathcal{T}, T_v \mapsto T_{R^0_\theta v}$ ein Automorphismus gegeben. Die Abbildung $\psi : G_0^+ \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T}), R^0_\theta \mapsto \psi_\theta$ ist ein Homomorphismus.*

Beweis. Rechnet man leicht nach. □

Anmerkung(*) 2.6. Der Automorphismus ψ_θ aus Proposition(*) 2.4 steht in einem breiteren Kontext. Seine „abstrakte" Form ist bisher nicht direkt zu erkennen. In Abschnitt 5.2 werden wir feststellen, dass dieser Automorphismus tatsächlich ein bestimmter *innerer Automorphismus* ist (und das nicht zufällig!).

Mit der Abbildung ψ aus Proposition(*) 2.4, können wir die Multiplikation über $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ aus (2.3) etwas anders darstellen:

$$\begin{aligned} I_1 \circ I_2 &= T_{v_1} \circ \psi_{\theta_1}(T_{v_2}) \circ R^0_{\theta_1} \circ R^0_{\theta_2} \\ &= T_{v_1} \circ (\psi(R^0_\theta))(T_{v_2}) \circ R^0_{\theta_1} \circ R^0_{\theta_2} \end{aligned}$$

Wir erhalten also nicht das direkte Produkt, sondern nur ein „fast-direktes" Produkt (eben bis auf den Homomorphismus ψ).

Anmerkung(*) 2.7. Aus Proposition(*) 2.4 erhalten wir, dass G^+_0 auf $\mathcal{T} \cong \mathbb{R}^2$ durch Automorphismen operiert, also durch

$$R^0_\theta.x := (\psi(R^0_\theta))(x) = \psi_\theta(x)$$

Denn für alle $R^0_\theta, R^0_\gamma \in G^p_0$ und alle $x \in \mathcal{T}$ gilt

$$(R^0_\theta \circ R^0_\gamma).x = (\psi(R^0_\theta \circ R^0_\gamma))(x) = (\psi(R^0_\theta) \circ \psi(R^0_\gamma))(x) = R^0_\theta.(R^0_\gamma.x)$$

und

$$R^0_0.x = (\psi(R^0_0))(x) = \mathrm{id}(x) = x$$

wegen der Homomorphismuseigenschaft von ψ.

5.2 Innere semidirekte Produkte

Wir verfolgen nun die Idee, eine Gruppe aus Untergruppen zu rekonstruieren (Wie bei inneren direkten Produkten – aber mit abgeschwächten Voraussetzungen). In (2.3) erkennen wir, dass die Struktur der $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ nicht für ein direktes Produkt ausreicht. Es wird sich trotzdem als äußerst fruchtbar erweisen, die drei vor Definition(*) 2.1 aufgelisteten Eigenschaften zu abstrahieren und als Anlass für die Definition einer neuen Struktur zu nehmen:

Definition(*) 2.2 (Innere semidirekte Produkte)**.** *Eine Gruppe G heißt* inneres semidirektes Produkt *der Untergruppen H, K, falls:*

1. *$G = HK$, also für jedes $g \in G$ existieren $h \in H$ und $k \in K$, sodass $g = hk$.*
2. *$H \cap K = \{e\}$*
3. *H ist normal in G.*

In diesem Fall schreiben wir auch $G = H \rtimes K$.

Anmerkung(*) 2.8. Wie bereits in Anmerkung(*) 2.4 gezeigt, macht die zweite Eigenschaft aus Definition(*) 2.1 die Zerlegung aus Punkt 1 eindeutig. So hätten wir den Beweis von Proposition 2.10 auch weitaus allgemeiner führen können, da ganz allgemein $\mathcal{T} \cap G^+_p = \{e\}$ gilt wegen der Klassifizierung aus Abschnitt 1.

Unter diesen Voraussetzungen sind wir dann auch tatsächlich in der Lage das Produkt über G analog zu (2.3) zu rekonstruieren (ähnlich wie bei den inneren direkten Produkten):

$$g_1 g_2 = h_1 k_1 h_2 k_2 = (h_1 \underbrace{k_1 h_2 k_1^{-1}}_{\in H})(k_1 k_2) = (h_1 \psi_{k_1}(h_2))(k_1 k_2) \tag{2.5}$$

mit $\psi_k : H \to H, h \mapsto khk^{-1}$. Hier erhalten wir die Verknüpfung über G also nur „semidirekt" aus den Elementen aus H und K. Definition(*) 2.1 und Definition(*) 2.2 unterscheiden sich tatsächlich alleinig in der Kommutativität der Untergruppen (bzw. Normalteiler in Anmerkung(*) 2.5). Ohne diese Kommutativität können wir (im Allgemeinen) also die Verknüpfung über G nicht länger „direkt" aus den Produkten $h_1 h_2$ und $k_1 k_2$ rekonstruieren.

Anmerkung(*) 2.6 hat bereits angedeutet, dass die Automorphismen ψ_θ aus Proposition(*) 2.4 in einem breiteren Kontext stehen. Diesen können wir nun verstehen:

Beispiel(*) 2.1. In der allgemeinen Konstruktion des (inneren) semidirekten Produkts spielen Automorphismen der Form $\psi_k : H \to H, h \mapsto khk^{-1}$ (also *innere* Automorphismen) eine entscheidende Rolle. Wir betrachten nun $G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2), H = \mathcal{T}$ und $K = G_0^+$. Per Konstruktion haben wir $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \mathcal{T} \rtimes G_0^+$. Damit können wir auch hier ganz allgemein das Produkt über $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ semi-vollständig aus dem Produkt über $\mathcal{T}$ und G_0^+ rekonsruieren. Nach (2.5) erhalten wir also für gerade Isometrien $I_1 = T_{v_1} R^0_{\theta_1}, I_2 = T_{v_2} R^0_{\theta_2}$

$$I_1 \circ I_2 = (T_{v_1} \circ \psi_{R^0_{\theta_1}}(T_{v_2})) \circ (R^0_{\theta_1} \circ R^0_{\theta_2})$$

mit

$$\psi_{R^0_\theta}(T_v) = R^0_\theta T_v (R^0_\theta)^{-1} \overset{(2.2)}{=} T_{R^0_\theta v} R^0_\theta (R^0_\theta)^{-1} = T_{R^0_\theta v}$$

Also finden wir unter der Identifikation von R^0_θ mit θ den inneren Automorphismus $\psi_{R^0_\theta}$ tatsächlich als Automorphismus ψ_θ in Proposition(*) 2.4 wieder. Dieser ergibt sich also nicht einfach nur zufällig in dieser Situation, sondern tatsächlich aus den elementareren algebraischen Eigenschaften 1–3 in Definition(*) 2.2. Aus (2.5) erkennen wir zudem die entscheidende Rolle dieses inneren Automorphismus für diese algebraische Struktur.

Insgesamt legen wir so durch die Darstellung

$$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \mathcal{T} \rtimes G_0^+$$

eine tiefere algebraische Struktur von $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ frei.

5.3 Äußere semidirekte Produkte

Eine grundlegende Idee hinter „äußeren" Strukturen ist: Neue Gruppen aus zwei bekannten Gruppen konstruieren. Wir wollen das jetzt hier aber nicht *direkt* aus dem jeweiligen Produkt der einzelnen Gruppen, sondern nur *semidirekt*. Das bedeutet hier vor allem: Einen Freiheitsgrad mehr bei der Wahl eines die Stuktur des Produkts bestimmenden Automorphismus (nicht nur innere Automorphismen)!

Die Konstruktur innerer semidirekter Produkte hängt genau von einer bestimmten Familie von Automorphismen ab, nämlich $\psi_k : H \to H, h \mapsto khk^{-1}$. Indem wir uns jetzt von dieser festen Familie lösen und allgemeine Familien $\psi : K \to \mathrm{Aut}(H), k \mapsto \psi_k$ betrachten mit einer analogen Produktstruktur, also

$$(h_1, k_1) \cdot (h_2, k_2) := (h_1 \psi_{k_1}(h_2), k_1 k_2) = (h_1(\psi(k_1))(h_2), k_1 k_2) \tag{2.4*}$$

können wir noch weitaus mehr Strukturen beschreiben. Dafür definieren wir nun zunächst in Analogie zu den äußeren direkten Produkten:

Definition(*) 2.3 (Äußere semidirekte Produkte)**.** *Seien H und K Gruppen und $\psi : K \to \mathrm{Aut}(H), k \mapsto \psi_k$ ein Homomorphismus. Dann ist das* äußere semidirekte Produkt *von H und K bezüglich der Automorphismen-Familie durch ψ gegeben als die Menge $H \times K$ zusammen mit der Multiplikation nach* (2.4*)*. Wir schreiben auch $H \rtimes_\psi K$.*

Interessieren wir uns nicht für ein bestimmtes Produkt, sondern ganz allgemein für ein äußeres semidirektes Produkt zu einer Familie $\psi : K \to \mathrm{Aut}(H), k \mapsto \psi_k$, so schreiben wir einfach nur $H \rtimes K$.

Aus diesem neuen Produkt erhalten wir leicht bereits bekannte Produkte:

Beispiel(*) 2.2. Äußeres semidirektes Produkt als äußeres direktes Produkt: Einfachste Automorphismen-Familie durch $\psi(k) = \mathrm{id}$ für alle $k \in K$.

Beispiel(*) 2.3. Äußeres semidirektes Produkt als inneres semidirektes Produkt: Spezialfall, wenn die Automorphismen-Familie ψ genau die inneren Automorphismen sind. Dann gilt $G = H \rtimes K \cong H \rtimes_\psi K$ für $H \trianglelefteq G, K \leq G$.

Äußere semidirekte Produkte leisten jedoch weitaus mehr, als nur bereits bekannte Strukturen aus einer neuen Perspektive zu beleuchten. So definieren äußere semidirekte Produkte immer bestimmte *kurze exakte Sequenzen*, also *Gruppenerweiterungen*. Genauer lassen sich sogar *spaltende* Gruppenerweiterungen als bestimmte äußere semidirekte Produkte charakterisieren. Auf diese Art lassen sich abelsche Gruppenerweiterungen sogar immer als direkte Produkte auffassen. Das setzt zum Beispiel den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen aus der Gruppentheorie in einen breiteren Kontext. So können endlich erzeugte abelsche Gruppen durch die Zerlegung in die Torsionsgruppe und den Quotienten über ebendiese als semidirekte Produkte aufgefasst werden – da gerade diese Zerlegung eine spaltende Gruppenerweiterung liefert.

Literatur

[1] Vaughn Climenhaga und Anatole Katok. *From Groups to Geometry and Back*. American Mathematical Society, 2017. ISBN: 9781470434793.