Schnupperstunde Mathematik

Ein Mathematik Abitur Skript, das die Schul-Mathematik etwas mathematischer angeht.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorwort

1.1 Für wen ist dieses Buch?

Hallo, liebe Leserin, lieber Leser! Schön, dass du es bis in dieses Buch hinein in die Begrüßung geschafft hast. Ob du hier durch eigene Recherche, oder über die Empfehlung von Freunden hingefunden hast, in jedem Fall hast du dich bestimmt schon gefragt, warum dieses Abitur-Skript nicht einfach *Abiturskript Mathematik*, sondern *Schnupperstunde Mathematik* heißt. Nun, in diesem Skript soll nicht einfach nur der Schul-Stoff heruntergebetet, sondern zusätzlich in einen mathematischeren Kontext gebettet werden. Wir wollen den Schulstoff vom Fach Mathematik etwas mathematischer in Augenschein nehmen, als in der Schule üblich. Gleichzeitig wollen wir trotzdem ein *Schul*-Skript sein. Damit meinen wir insgesamt:

- Einen stärkeren Fokus auf mathematisches Denken und die mathematische Vorgehensweise legen. Das umfasst insbesondere das Betrachten und Formulieren von grundlegenden mathematischen Beweisen.

- Einige Rezepte formulieren, mit denen gut zwei Drittel der Schul-Mathematik-Aufgaben bereits gut gemeistert werden können. Es sollte also trotz des ersten Punktes für jederman möglich sein, dieses Skript einfach nur als Kochbuch oder Rezeptesammlung zu verwenden.

1.2 Aufbau dieser „Schnupperstunde“

Aufteilung der Kapitel in die Bereiche Analysis, Lineare Algebra, Geometrie und Stochastik/Statistik.

Kapitel 2

Einführung

2.1 Grundlegende Bezeichnungen in der Mathematik

Hier wollen wir erstmal noch ein Akronym erwähnen: Greatest Common Divisor (GCD).

Das typische Vorgehen in einer Mathematik-Vorlesung ist:

1. Eine Definition wird eingeführt.
2. Eigenschaften des neu eingeführten Objektes werden bewiesen.
3. Beispiele.

In einer guten Vorlesung weiß man bereits vor der Definition, warum man sich denn überhaupt für das eingeführte Objekt interessieren sollte oder zumindest wurde einmal davor angekündigt, dass diese Objekte sich im weiteren Verlauf als hilfreich erweisen werden. Untersucht man Eigenschaften von bestimmten Objekten oder etwa wie gewisse Objekte miteinander „interagieren“, so gibt es verschiedene „Ebenen“, auf denen dies mathematisch geschieht. Viele Autoren entscheiden sich bewusst dagegen, diese verschiedenen Ebenen klar zu trennen, ich halte es jedoch für sinnvoll die folgende Trennung vorzunehmen:

- *Definition*: Eine Definition benennt ein mathematisches Objekt mit bestimmten Eigenschaften. Oft werden auch neue Notationen oder Sprechweisen um ein mathematisches Objekt eingeführt. Eine einfache Formulierung hierfür ist „Erfüllt ein Objekt A die Eigenschaften E1, E2, ..., so nennen wir es B“.
- *Satz*: Sätze sind die Herzstücke der Mathematik, das „große Kino“. In Sätzen finden sich die wichtigeren Aussagen.
- *Proposition*: Eine Proposition ist eine praktische, für sich selbst stehende Aussage über ein oder mehrere mathematische Objekte.
- *Lemma*: Ein Lemma ist eine Hilfsaussage, etwa für den Beweis einer Proposition oder eines Satzes. Die Aussage eines Lemmas ist meist primär für den Beweis einer weiteren (wichtigeren) Aussage relevant. Oftmals sind jedoch bereits Lemmas so bedeutsam, dass ihre Aussagen auch losgelöst von Sätzen zitiert und referenziert werden.
- *Korollar*: Korollare sind direkte Folgerungen aus Propositionen, Lemmas oder Sätzen, also aus bereits zuvor bewiesenen Aussagen. Sie lassen sich meist sehr direkt aus einer zuvor bewiesenen Aussage herleiten und werden deshalb auch von vielen Autoren eher unter dem Begriff „Folgerung“ geführt.

Diese Trennung ist extrem fruchtbar. Denn in Sätzen, Propositionen, Lemmas oder Korollaren werden Aussagen über mathematische Objekte formuliert, die zuvor in einer Definition eingeführt wurden. Weiß man also, dass ein betrachtetes Objekt einer Definition genügt, so lassen sich die über das Objekt formulierten Sätze, Propositionen, Lemmas und Korollare einfach anwenden.

Im Verlauf des Buches tauchen viele verschiedene Definitionen, Propositionen, Lemmas, Sätze und Korollare auf. Damit man bei alle diesen nicht den Überblick verliert und auch im weiteren Verlauf diese Aussagen referenzieren kann, sind diese alle durchnummeriert.

Neben Sätzen, Propositionen, Lemmas und Korollaren gibt es noch einen weiteren zentralen Begriff in der Mathematik, der erst seit ca. dem 19ten Jahrhundert von enormer Bedeutung sind: **Axiome**. Sie sind so zentral, dass es keine Untertreibung ist, von ihnen als Fundament aller Mathematik zu sprechen. Denn sie bilden den entscheidenden Baustein, der es ermöglicht wirklich rigoros Mathematik zu betreiben. Aber hier müssen wir nun die leicht unterschiedliche Verwendung dieses Begriffs unterscheiden. Man sieht den Begriff „Axiom" einmal oft in mathematischen Definitionen und dann noch auf einer weitaus grundlegenderen Ebene. Beginnen wir erst mit zweiterem, um anschließend die Verwendung im ersteren Kontext zu erklären.

Was sind Axiome nun also? Das lässt sich tatsächlich trotz ihrer schwerwiegenden Bedeutung sehr einfach beantworten: Ein Axiom ist eine Aussage, die von der man festlegt, dass sie korrekt ist, ohne zu beweisen, dass sie gelten würde. Der Grundgedanke ist folgender: Beweise sind im Endeffekt nur eine Anreihung von Folgerungen und Begründungen für diese Folgerungen. Wenn man nun also jede Folgerung mit einer Aussage begründen kann, dann muss man ja zunächst wissen, dass diese Aussage, die man für seine Begründung verwendet auch tatsächlich gilt. Wie zeigt man also dass eine solche Aussage gilt? Wieder durch eine Folge aus Folgerungen und Begründungen für diese Folgerungen. Dieses Spiel kann man nun bis in die Unendlichkeit weiterführen. Das ist aber ein Problem. Denn auch hier muss man sich die Frage stellen: Wann kommt man denn dann zu einem Ende? Wann ist man beim Anfang, bei der fundamentalsten Aussage von allen angekommen? Kann es so eine fundamentalste Aussage, die vor allen anderen Aussagen steht überhaupt geben? Nein! Denn woher sollen wir denn wissen, dass diese Aussage tatsächlich stimmt? Dafür müssten wir sie ja wieder begründen durch neue Aussagen. Mist, wir haben hier unseren ersten Widerspruchsbeweis geführt. Wenn wir erfolgreich Mathematik betreiben wollen, dann sind wir also dazu gezwungen, an irgendeiner „geeigneten" Stelle Stop zu machen und dann diese Aussage als so fundemantal anzusehen, dass wir sie als allgemein gegebenen, d.h. immer geltend annehmen. Eine solche Aussage nennen wir dann Axiom.

Jetzt stellt sich zwingend die Frage: Wenn wir einmal einen solchen Stop eingelegt und damit bestimmte Axiome festgelegt haben, können wir dann wissen, dass wir diese Axiome niemals durch andere noch fundamentaleren Aussagen begründen könnten? Nein! Dafür gibt es auch einige prominente Beispiele aus der Geschichte der Mathematik. Für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gibt es zum Beispiel die *Peano-Axiome*. Diese Axiome wurden 1889 von dem italienischen Mathematiker Giuseppe Peano formuliert. Sie beschreiben alle die grundlegenden Eigenschaften, die man benötigt, um mit den natürlichen Zahlen umgehen zu können. Und davon gibt es einige. Es stellte sich allerdings heraus, dass sich die natürlichen Zahlen mithilfe der 1930 entwickelten *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre* tatsächlich aus diesem System an Axiomen eindeutig konstruieren lassen. Man hatte also mit der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre eine Sammlung an Axiomen gefunden, aus denen man insbesondere die Existenz der natürlichen Zahlen in ihrer bereits bekannten Form folgern konnte. Somit sind die Peano-Axiome in diesem System hinfällig - sie müssen nicht länger als einfach gegeben angenommen werden, sondern können rigoros aus elementarerern Aussagen hergeleitet werden. Das zeigt aber auch: Man könnte in bestimmten Kontexten auch einfach die Peano-Axiome als gegeben annehmen und trotzdem ausreichen flexibel sein, um sehr viele Probleme sinnvoll angehen zu können.

Damit kommen wir auch zur Verwendung des Begriffs „Axiom" in mathematischen

Definitionen. So spricht man zum Beispiel von den Eigenschaften einer Gruppe auch oft als Axiome. Denn in bestimmten Kontexten reicht es, von vornerein anzunehmen, dass ein Objekt eine Gruppe ist. Was ist damit genau gemeint? Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden zusammen mit der gewöhnlichen Addition eine Gruppe. Darunter muss man sich jetzt nichts vorstellen können, nur so viel: Das bedeutet einfach nur, dass die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zusammen mit der gewöhnlichen Addition bestimmte Eigenschaften erfüllen. Wenn man sich jetzt mit den ganzen Zahlen auseinandersetzt, dann reicht es in bestimmten Kontexten, von vorneherein vorauszusetzen, dass die ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition eine Gruppe bilden. In anderen Worten: Wir nehmen einfach ohne Beweis an, dass die ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition die Eigenschaften einer Gruppe erfüllen. Das ist genau der axiomatische Zugang, den wir zuvor genauer erläutert haben. Wir definieren quasi die natürlichen Zahlen als Objekt, dass zusammen mit der Addition bestimmte Eigenschaften erfüllt. Das veranschaulicht, warum man in manchen Definitionen und einigen Autoren noch den Begriff „Axiom“ in Definitionen wiederfindet. Man könnte so in gewisser Art und Weise jedes Objekt über seine Eigenschaften axiomatisch einführen. Wichtig ist dabei nur, dass sich durch das Einführen dieses Objekts keine Widersprüche zu anderen Axiomen entstehen.

Der folgende Exkurs geht auf eine entscheidende Frage ein, die sich ganz fundamental aus der allgemeinen Betrachtung von axiomatischen Systemen und damit auch der Mathematik ergibt.

Exkurs 2.1 (Vollständigkeit der Mathematik)**.** Als die axiomatische Formalisierung der Mathematik zu Beginn des 20ten Jahrhunderts zu einem großen Anliegen der Mathematik im allgemeinen wurde, beschäftigten sich viele Mathematiker mit einer entscheidenden Frage: Kann eine Sammlung von Axiomen gefunden werden, sodass man mit Sicherheit davon ausgehen kann, dass basierend auf dieser Sammlung jede beliebige Aussage garantiert bewiesen oder widerlegt werden kann? Etwas formaler formuliert: Existiert eine Sammlung an Axiomen, sodass jede Aussage eindeutig bewiesen oder widerlegt werden kann? Viele bedeutende Mathematiker des 20ten Jahrhunderts hatten die Hoffnung, dass diese Frage tatsächlich mit Ja beantwortet werden könnte. Denn mit dieser Frage geht eine andere Frage einher, die der deutsche Mathematiker David Hilbert um 1920 herum im sogenannten *Hilbertprogramm* verfolgte: Ist die axiomatische Mathematik widerspruchsfrei? Diese Frage lässt sich auch etwas anders formulieren: Können wir allgemein beweisen, dass es in axiomatischen Systemen keine gefolgerten Aussagen geben kann, die sich widersprechen? Der österreichische Mathematiker Kurt Gödel beantwortete diese Frage 1931 mit einem gleichermaßen eindeutigen und ernüchternden Nein! Nach Gödel gibt es in bestimmten formalen logischen Systemen, d.h. in bestimmten Sammlung an Axiomen, Aussagen, die weder bewiesen noch widerlegt werden können. Unter diese bestimmten Systeme fällt auch die „moderne Mathematik“. Es kann also immer passieren, dass die größten Probleme der Mathematik zu diesen Aussagen zählen, d.h. dass man diese nie lösen kann.

Nach diesem kurzen Umriss möchte ich noch betonen, dass dieser Exkurs nur eine stark vereinfachte Darstellung enthält, die moderne elementare Probleme der Mathematik aufzeigen soll. $\triangleleft$

Obwohl wir jetzt recht einfach erklären können, was Axiome eigentlich sind, merken wir schnell, dass das Formulieren von „guten“ Axiomen gar nicht so einfach ist. Denn hieran scheiterte selbst einer der Grundväter der Axiomatik: der griechische Mathematiker Euklid. Vielleicht hast du schon einmal etwas von *euklidischer Geometrie* gehört. Die uns bereits vertraute, zwei- und dreidimensionale Geometrie ist typischerweise euklidisch.

2.2 Logik und Beweise

Logik-Tabellen, Knobel-Logik-Rätsel?, Beweis-Arten mit Verweisen auf Anwendungen im Skript

2.3 Logische Begriffe in der Mathematik

Den Begriff „Äquivalenzumformung" ist dir bestimmt schon längst ein Begriff. Wahrscheinlich kennst du auch schon das mathematische Symbol für eine Äquivalenzumformung: $\iff$. In der Schule wird es meist einfach so benutzt und nicht weiter auf dessen eigentliche Bedeutung eingegangen. Aber indem man sich bewusst macht, für was dieses Symbol eigentlich steht, klärt man gleichzeitig in der größtmöglichen Allgemeinheit die Bedeutung der Begriffe „notwendige Bedingung" und „hinreichende Bedingung". Diese werden vor allem in der Kurvendiskussion beim Bestimmen von Extremstellen/-punkten eine große Rolle spielen. Wir beginnen nun mit einer Definition, um logische Zusammenhänge konkret in Worten fassen zu können.

Definition 2.2. *(Folgerung/Implikation, Äquivalenz) Seien A und B irgendwelche logischen Aussagen. Wir schreiben $A \implies B$, wenn aus der Aussage A die Aussage B folgt. Folgt zusätzlich noch aus der Aussage B die Aussage A, d.h. $A \impliedby B$, so sagen wir A ist* **äquivalent** *zu B und schreiben $A \iff B$. Folgt aus A nicht die Aussage B, so schreiben wir auch manchmal $A \not\Longrightarrow B$. Alternativ zu Folgerungen sprechen wir auch oft von* **Implikationen**. *Entsprechend sagen wir zu $A \implies B$ auch „A impliziert B".*

Diese Definition ist nun zunächst noch sehr abstrakt. Bereits aus einigen einfachen „unmathematischen" Alltags-Beispielen lässt sich aber schon veranschaulichen, warum die obige Genauigkeit enorm wichtig ist.

Beispiel 2.3. (1) Jeder Apfel ist eine Frucht, d.h. wir können für irgendein „Objekt" A schreiben

$$A \text{ ist ein Apfel} \implies A \text{ ist eine Frucht}$$

Allerdings wissen wir auch, dass nicht jede Frucht ein Apfel ist. Denn auch eine Banane ist eine Frucht, aber offenbar kein Apfel. Also wissen wir ebenfalls, dass für irgendein Objekt A gilt

$$A \text{ ist eine Frucht} \not\Longrightarrow A \text{ ist ein Apfel}$$

denn mit der Banane haben wir bereits ein Gegenbeispiel für die Implikation gefunden. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass die Aussage „A ist ein Apfel" *nicht* äquivalent ist zu der Aussage „A ist eine Frucht".

(2) Analog zum ersten Teil dieses Beispiels bemerken wir: Selbst wenn Politiker meistens Juristen sein sollten, die Umkehrung nicht automatisch gilt. Nicht jeder Jurist muss also handeln wie die meisten Politiker. Das ist auch klar, wenn man auf die Statistiken schaut: Der Anteil der politisch stark engagierten Juristen ist gering. Nimmt man nun also an, dass alle Politiker „schlecht" sind, so folgt nicht automatisch, dass alle Juristen schlecht sind. Hier widerspricht die Logik meinem Onkel also massivst.

◁

Definition 2.4 (Notwendige Bedingung, Hinreichende Bedingung)**.**

Neben den obigen Sprechweisen und Notationen sind die folgenden für abstrakte und kompakte mathematische Formulierungen elementar. Ich werde zwar versuchen, von dieser

Form in diesem Buch eher weniger Gebrauch zu machen, allerdings sollte man erstens keine Angst vor diesen Symbolen[1] und zweiten sie einfach einmal gesehen haben.

Definition 2.5 (Logische Symbole)**.**

2.4 Mengentheoretische Begriffe und Symbole

Eine Mengenlehre, die in der modernen Mathematik ziemlich der Standard geworden ist, ist die in Kapitel 2.1 angesprochene *Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre*. Sie formuliert insgesamt 10 Axiome, die allesamt Eigenschaften allgemeiner mathematischer Objekte bezüglich der Beziehung $\in$ beschreiben. Man spricht dann auch von $A \in B$ als A ist Element von B. Axiomatisch ist hier nur wichtig, dass man sich eigentlich noch gar nichts unter dieser Beschreibung vorstellen darf. A und B sind tatsächlich einfach irgendwelche mathematischen Objekte. Im Kontext der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre nennt man dann jedoch jedes mathematische Objekt einfach *Menge*. Damit muss man hierbei wirklich alles über Bord schmeißen, was man denkt über Mengen zu wissen. Mengen sind nun keine Boxen mehr, die irgendwelche Elemente enthalten - Alles ist eine Menge. Und Mengen haben die Eigenschaften, die in den Zermelo-Fraenkel-Axiomen abstrakt beschrieben werden.

Das alles ist für uns in der Schule (und auch für die meisten Mathematiker) allerdings gar nicht so relevant. Denn es reicht uns, dass Zermelo und Fraenkel diese Axiome aufgestellt haben und diese uns genau die Vorstellung liefern, die wir von vornerein gerne von Mengen hätten. Wir können uns also Mengen abstrakt vorstellen als eine Art von Behältnis, das bestimmte Elemente beinhalten kann. Wichtig dabei ist nur, dass eine Menge ein Element nur genau einmal enthalten kann.

Definition 2.6 (Mengen, Elemente, Teilmengen)**.** *Für eine Menge A, die die Elemente $a_1, a_2, \dots$ enthält, schreiben wir*

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

Weiter schreiben wir für diese Menge auch $a_i \in A$ für alle Elemente a_i und sagen „a_i ist Element von A“. Liegt ein b nicht in der Menge A, so schreiben wir analog $b \notin A$. Liegen alle Elemente von A in einer Menge B, so sagen wir „A ist **Teilmenge** *von B“ und schreiben $A \subseteq B$. Gibt es ein Element in B, das garantiert nicht in A liegt, so schreiben wir auch nur $A \subsetneq B$ und sagen A ist eine* **echte Teilmenge** *von B.*

Wir führen nun eine kompakte Notation für kompliziertere Mengen ein.

Definition 2.7 (Auswahl)**.** *Für die Menge A, die alle Elemente einer Obermenge B enthält, welche eine Aussage $\mathscr{A}$ erfüllen, schreiben wir*

$$A = \{x \in B \mid \mathscr{A}(x) \text{ gilt}\}$$

Definition 2.8 (Komplement)**.**

Beispiel 2.9. (1) *Einfache Mengen*: Die Menge A, welche die Elemente $5, 5, 5, 5, 5$ enthält, notiert man als $A = \{5\}$. Die Menge B, welche die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ enthält, notieren wir als $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

[1] Ich erinnere mich noch sehr gut daran, als ich die ersten Male im Mathestudium mit der ε-δ-Definition von Stetigkeit arbeiten sollte. Diese formuliert sich nämlich kompakt wie folgt: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ über metrischen Räumen $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ und $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^m$, wenn $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D : \|x - x_0\| < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

(2) *Auswahlmengen*:

◁

Definition 2.10 (Kartesisches Produkt)**.**

Zuletzt wollen wir nun noch Begriffe einführen, um Funktionen besser beschreiben zu können. Was sind eigentlich Funktionen genau? Bestimmt kannst du dich noch daran erinnern, dass dein Leherer, bzw. deine Lehrerin zu Skizzen von Funktionen gesagt hat, dass diese insofern sauber sein müssen, dass jedem x-Wert immer nur *genau ein* y-Wert zugeordnet wird.

2.5 Weitere arithmetische Symbole (*)

Neben den griechischen Buchstaben und mengentheoretischen Symbolen wie dem Durchschnitt $\cap$ oder der Vereinigung $\cup$ gibt es noch einige arithmetische Symbole, die zunächst sehr einschüchternd aussehen. Sie sind aber eigentlich total harmlos und helfen eher sogar dabei kompakt Ausdrücke aufzuschreiben.

Bevor wir allerdings mit den „gruseligen“ Symbolen beginnen, müssen wir noch einige Dinge beachten. Denn in der Mathematik muss man mit allgemeinen Aussagen immer aufpassen. Sieht ein Mathematiker das Plus-Symbol + ohne irgeneinen Kontext, muss er sich als allererstes fragen, wie dieses denn definiert ist, bzw. noch viel eher, mit welchen mathematischen Objekten er es überhaupt zu tun hat. Denn Multiplikation und Addition kann man auch für andere mathematische Objekte als Zahlen definieren (wie zum Beispiel Funktionen, Matrizen und Vektoren). Der Titel dieses Kapitels nimmt es allerdings schon vorne weg: Wir beschäftigen uns hier mit *arithmetischen* Symbolen, d.h. mit Symbolen zum Rechnen mit Zahlen. Wie wir mit Zahlen und den arithmetischen Verknüpfungen auf ihnen, d.h. Addition, Multiplikation (und Subtraktion und Division), umgehen können, haben wir uns bereits in Kapitel 3.1 genauer angeschaut. Für dieses Kapitel und alle folgenden Kapitel gehen wir dann davon aus, dass wir *nur* Zahlen aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ betrachten, sofern wir nicht explizit erwähnen, dass wir andere Objekte betrachten. Denn im folgenden werden wir häufig die *Kommutativität*, die *Assoziativität* oder die *Distributivität* über diesen Zahlen zusammen mit den zuvor genannten arithmetischen Operationen benötigen. Diese Eigenschaften gelten nicht für irgendwelche Mengen mit irgendwelchen Verknüpfungen! Wir werden später sehen, dass z.B. Funktionen bezüglich der Verkettung, bzw. Verknüpfung *nicht* kommutativ, aber sehrwohl assoziativ sind.

Definition 2.11 (Summen, Doppelsummen, Mehrfachsummen)**.** *Für eine Summe aus n Summanden a_i, also $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ schreiben wir*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Dabei heißt der Index i in der Summe **Laufvariable** *und man sagt „wir summieren die a_i über $i = 1$ bis n“. Der* **Startindex** *s der Summe kann beliebig gewählt werden. Dann schreiben wir*

$$\sum_{i=s}^{n} a_i = a_s + a_{s+1} + \cdots + a_n$$

Ist $s > n$, so sprechen wir von einer **leeren Summe** *und setzen*

$$\sum_{i=s}^{n} a_i = 0$$

Zwei ineinander verschachtelte Summen $\sum_{i=s_i}^{n}\sum_{j=s_j}^{n} a_{ij}$ nennen wir **Doppelsummen** *und schreiben im Fall $s_i = s_j$, d.h. wenn die Summationsindexe i und j denselben Startindex haben, auch*

$$\sum_{i,j=s_i}^{n} a_{ij} := \sum_{i=s_i}^{n}\sum_{j=s_i}^{n} a_{ij}$$

Betrachten wir mehr als zwei verschachtelte Summen, d.h. Summen der Gestalt $\sum_{i_1=s_1}^{n}\cdots\sum_{i_m=s_m}^{n} a_{i_1\ldots i_m}$, so sprechen wir von **Mehrfachsummen** *und schreiben*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m=s_1}^{n} a_{i_1\ldots i_n} := \sum_{i_1=s_1}^{n}\cdots\sum_{i_m=s_m}^{n} a_{i_1\ldots i_m}$$

Die Summenglieder/Summanden a_i in einer Summe hängen dabei meist direkt von dem Summationsindex ab, können aber auch unabhängig davon sein. Außerdem wird Teil (2) in Proposition 2.13 die Definition von Doppel-, bzw. Mehrfachsummen rechfertigen. Denn eigentlich müssten wir uns zwingend die Frage stellen, Zunächst wollen wir uns jedoch einige Beispiele anschauen, um mit diesem neuen Symbol etwas warm zu werden.

Beispiel 2.12 (Kompakte Summen). (1) *Konstante Summanden*: Wir schreiben die reelle Zahl 10 als Summe von dem Summanden 2, also $10 = 2+2+2+2+2$. Alternativ können wir kompakt schreiben

$$\sum_{i=1}^{5} 2 = 2+2+2+2+2 = 10$$

Auffällig ist hier, dass gilt $\sum_{i=1}^{5} 2 = 5\cdot 2 = (5-1+1)\cdot 2$. Wir erkennen zudem, dass der Term $(5-1+1)$ genau der Anzahl an Summanden in der Summe $\sum_{i=1}^{5} 2$ entspricht. Das sehen wir auch, wenn wir die obige Summe etwas anders aufschreiben:

$$\sum_{i=3}^{7} 2 = 2+2+2+2+2 = (7-3+1)\cdot 2 = 10$$

Es stellt sich also die Frage, ob diese Beobachtung auch in voller Allgemeinheit gilt.

(2) *Multiplikation*: Formalisieren wir unsere Beobachtung aus Teil (1) dieses Beispiel-Blocks in den erst folgenden Proposition 2.13, so können wir die arithmetische Multiplikation einfacher definieren:

$$n\cdot m := \sum_{i=1}^{n} m = \underbrace{m+\cdots+m}_{n-\text{mal}}$$

(3) *Summe der Quadratzahlen*: Nun wollen wir eine etwas kompliziertere Summe betrachten.

◁

In den Beispielen haben wir bereits einige Vermutungen für allgemeinere Aussagen aufgestellt. Diese untermauern wir nun mit folgender Proposition.

Proposition 2.13 (Rechnen mit Summen). (1) Konstante Summen: *Ist der Summand a_i in einer Summe $\sum_{i=s}^{n} a_i$ konstant, also immer gleich, d.h. $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$, so gilt*

$$\sum_{i=s}^{n} a_i = (n-s+1)\cdot a_1$$

Der Faktor $(n-s+1)$ ist dabei genau die Anzahl an Summanden, die in der Summe auftreten.

(2) Kommutativität von Summen: *Für ineinander geschachtelte Summen mit den Summanden a_{ij} gilt*

$$\sum_{i=s_i}^{n}\sum_{j=s_j}^{n} a_{ij} = \sum_{j=s_j}^{n}\sum_{i=s_i}^{n} a_{ij}$$

(3) Indexshift nach unten*: Es gilt*

$$\sum_{k=n}^{N} a_k = \sum_{k=n-i}^{N-i} a_{k+i}$$

sofern a_{k+i} für alle $k \in \{n-i, \dots, N-i\}$ definiert ist.

(4) Indexshift nach oben*: Es gilt*

$$\sum_{k=n}^{N} a_k = \sum_{k=n+i}^{N+i} a_{k-i}$$

Warum Indexshifts sehr praktisch sein können, zeigt folgendes Beispiel:

Beispiel 2.14 (Geschickte Indexshifts)**.** Wir betrachten die zusammengesetzte Summe

$$\sum_{k=5}^{15} \frac{1}{k} + \sum_{i=0}^{10} \frac{1}{i}$$

und wollen diese als eine Summe schreiben, d.h. nur mit einem Summationszeichen Σ. Dafür führen wir in der ersten Summe einen Indexshift nach unten durch:

$$\sum_{k=5}^{15} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k+5}$$

Wir summieren jetzt also über die gleichen Grenzen wie in der zweiten Summe. Damit können wir schreiben

$$\sum_{k=5}^{15} \frac{1}{k} + \sum_{i=0}^{10} \frac{1}{i} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k+5} + \sum_{i=0}^{10} \frac{1}{i} = \sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k+5} + \frac{1}{k}$$

Wir haben nun also eine ganz gute Idee, wie wir mit unserer neu gewonnenen Schreibweise für Summen umgehen können. Nun betrachten wir eine kompakte Notation, jetzt aber für Produkte.

Definition 2.15 (Produkte)**.**

Beispiel 2.16. (1) **Fakultät**: Mit unserem neuen Symbol können wir die Fakultät einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ einfach definieren:

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-2)(n-1)n$$

(2)

◁

Proposition 2.17 (Rechnen mit Produkten)**.**

Kapitel 3

Zahlen

3.1 Was sind eigentlich Zahlen?

In der Mathematik haben die Zahlen eine lange Geschichte. Die meisten haben wahrscheinlich schon einmal am Rande von dem alten Streit über die Null mitbekommen. Denn lange bevor die Mathematik formalisiert wurde in der Form, in der wir heute mit ihr umgehen, bliblablub, bla bla bla, von natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

3.1.1 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Definition 3.1 (Menge der natürlichen Zahlen)**.**

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Können wir in den natürlichen Zahlen addieren? => Ja

Können wir subtrahieren? => Nein! Denn $0 - 1 = -1 \notin \mathbb{N}$.

3.1.2 Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Definition 3.2 (Menge der ganzen Zahlen)**.**

$$\mathbb{Z} := \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \mathbb{N}$$

Der Satz vom Nullprodukt ($\mathbb{Z}$ als Integritätsbereich, d.h. ohne Nullteiler -> Warum ist das nicht selbstverständlich -> Exkurs: Restklassenringe)

Satz 3.3 (Satz vom Nullprodukt)**.** *Keine Nullteiler*

Können wir addieren? Ja. Können wir subtrahieren? Ja. Können wir multiplizieren? Ja. Können wir dividieren, d.h. teilen? Fast => Division mit Rest.

Satz 3.4 (Division mit Rest)**.** *Division mit Rest => Problem: Es gibt Reste, d.h. nicht genaue Teiler!*

Definition 3.5 (Teiler einer ganzen Zahl)**.**

Definition 3.6 (Primzahl)**.**

Warum sind Primzahlen besonders? Weil sie auf eine bestimmte Art *elementar* sind: Jede ganze Zahl lässt sich *eindeutig* als Produkt von Primzahlen darstellen.

Satz 3.7 (Eindeutige Primfaktorzerlegung)**.** *Primfaktorzerlegung! (v.a. formale Notation)*

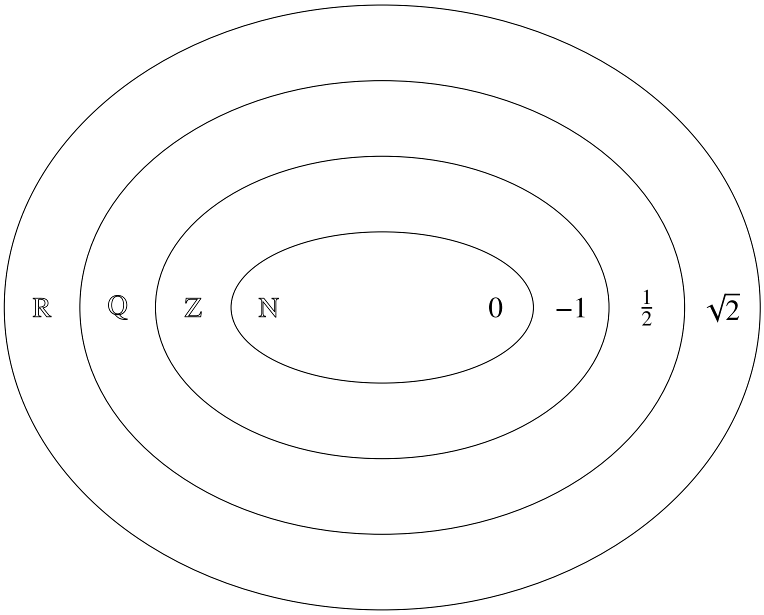

Abbildung 3.1: Die grundlegenden Zahlenmengen sind ineinander enthalten.

3.1.3 Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Definition 3.8 (Menge der rationalen Zahlen)**.**

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_{\geq 1} \right\}$$

Können wir addieren? Ja. Können wir subtrahieren? Ja. Können wir multiplizieren? Ja. Können wir dividieren, d.h. teilen? Ja!

3.1.4 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Irrationale Zahlen: Berühmter Irrationalitätsbeweis von Euklid von $\sqrt{2}$.

Können wir addieren? Ja. Können wir subtrahieren? Ja. Können wir multiplizieren? Ja. Können wir dividieren, d.h. teilen? Ja!

Definition 3.9 ((Quadrat-, Kubik-)Wurzeln, Radikanten)**.** *Sei $r \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ein Exponent. Dann heißt die reelle Zahl $w \in \mathbb{R}, w > 0$ für die gilt*

$$w^n = r$$

n-te **Wurzel** *von r. Im Fall $n = 2$ sprechen wir auch von* **Quadratwurzeln** *und für $n = 3$ von* **Kubikwurzeln**. *Ist w die n-te Wurzel von r, so schreiben wir $w = \sqrt[n]{r}$. Ferner nennen wir dann r* **Radikant** *der Wurzel w.*

Wir kennen bereits einige Wurzeln aus der Grundschule. Zum Beispiel gilt $5^2 = 25$. Also ist 5 die Quadratwurzel von 25 und 25 der Radikant von $\sqrt{25} = 5$. Eine weitere bekannte Quadratwurzel ist die Diagonallänge des Einheitsquadrats: $\sqrt{2}$. Diese Quadratwurzel ist zusätzlich interessant, da sie irrational ist, also $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ gilt. Diese Tatsache hatte bereits Euklid durch einen Widerspruch zeigen können:

Satz 3.10. *Die Quadratwurzel von 2 ist irrational.*

Bevor wir diesen Satz jedoch rigoros beweisen können, beweisen wir zunächst eine kleine Hilfsaussage.

Lemma 3.11. *Sei $a \in \mathbb{Z}$. Ist $p \in \mathbb{Z}$ ein Primteiler von a^2, d.h. p prim und p teilt a^2, so ist p auch ein Teiler von a.*

Beweis. Dass p ein Teiler von a^2 ist, bedeutet, dass ein $m \in \mathbb{Z}$ existiert mit $p \cdot m = a^2 = a \cdot a$. Mit der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt, dass p ein Primfaktor von a ist: Wir können a in seine *eindeutigen* Primfaktoren zerlegen. Dadurch erhalten wir die eindeutige Zerlegung von a^2. Genauer: Sei $a = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von a. Dann ist

$$a^2 = \left(\prod_{i=1}^n p_i^{e_i}\right)^2 = \prod_{i=1}^n (p_i^{e_i})^2 = \prod_{i=1}^n p_i^{2\cdot e_i}$$

Wir haben also eine Primfaktorzerlegung von a^2 gefunden. Da Primfaktorzerlegungen eindeutig sind, haben wir *die* Primfaktorzerlegung von a^2 gefunden. Unser vorausgesetzter Primteiler muss also einer dieser Faktoren sein. Es gibt also ein j, sodass $p = p_j$. Damit ist p auch ein Primfaktor von a. In anderen Worten: p teilt a. □

Beispiel 3.12. Ein „Gegenbeispiel" für die obige Aussage ist das folgende: 25 teilt 100, denn $4 \cdot 25 = 100$. Weiter gilt $100 = 10^2$. Allerdings teilt 25 nicht 10. Das ist kein Widerspruch zum vorausgegangenen Lemma, da $\sqrt{25} = 5 \cdot 5$, wir aber im Lemma verlangen, dass 25 eine Primzahl ist. Also können wir das Lemma hier nicht anwenden. ◁

Ausgerüstet mit dieser Hilfsaussage können wir den Euklidschen Widerspruchsbeweis rigoros führen.

Beweis von Satz 3.10. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, dass $\sqrt{2}$ rational wäre. Dann existieren $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, sodass $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Indem wir den Bruch soweit kürzen, dass wir nicht weiter kürzen können, erhalten wir $r \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, sodass

$$\left(\frac{r}{s}\right)^2 = 2 \tag{3.1}$$

Dass wir nicht weiter kürzen können, bedeutet, dass r und s keine *gemeinsamen Teiler* mehr haben. Denn sonst könnten wir diese ausklammern und weiter kürzen. Wir sprechen hierbei auch davon, dass r und s *teilerfremd* sind. Darauf wird unser Widerspruch aufbauen.

Indem wir beide Seiten der Gleichung (3.1) mit s^2 multiplizieren, erhalten wir $r^2 = 2s^2$. Damit ist r^2 durch 2 teilbar. Jetzt kommt unsere Hilfsaussage ins Spiel: 2 ist eine Primzahl und teilt r^2 und $r \in \mathbb{Z}$. Damit liefert Lemma 3.11, dass 2 auch r teilt. Es existiert also ein $t \in \mathbb{Z}$, sodass $r = 2t$. Einsetzen in $r^2 = 2s^2$ liefert $4t^2 = 2s^2$ und damit $s^2 = 2t^2$. Also ist 2 ein Teiler von s^2. Wieder können wir Lemma 3.11 anwenden und erhalten, dass 2 auch s teilt.

Insgesamt haben wir also, dass 2 sowohl r, als auch s teilt. In anderen Worten: 2 ist ein gemeinsamer Teiler von r und s. Wir hatten jedoch r und s so gebaut, dass sie *keine* gemeinsamen Teiler haben. Also haben wir einen Widerspruch gefunden. □

Natürlich hatte Euklid diesen Beweis zu seiner Zeit nicht in dieser formellen Sprache formuliert, die wir heute verwenden. Viel eher hatte er über diese Aussage geometrisch nachgedacht. Denn dank dem Satz des Pythagoras war bereits lange vor Euklid bekannt, dass für die Länge d der Diagonalen im Einheitsquadrat (Abbildung) gilt

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Existiert zu jeder reellen Zahl eine n-te Wurzel? Ist n gerade, also z.B. $n = 2$, so gilt $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$. Allgemein gilt für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}_{>0}$, dass $\sqrt{-r} \notin \mathbb{R}$ - Also in Worten: $-r$

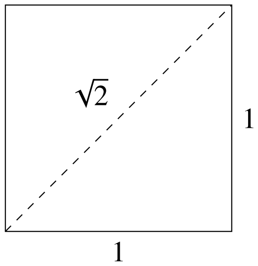

Abbildung 3.2: Die Diagonale im Einheitsquadrat hat die Länge $\sqrt{2}$.

hat keine Quadratwurzel in $\mathbb{R}$. Denn dafür müsste $(\sqrt{-r})^2 = -r < 0$ gelten. Allerdings ist das Quadrat jeder reellen Zahl positiv[1], also auch $(\sqrt{-r})^2 \geq 0$.

Proposition 3.13. *Für gerade n-te Wurzeln, d.h. $n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sqrt[n]{r^n} = |r|$$

für alle $r \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $\sqrt{(-r)^2} = |-r| = r$.

Beweis. Die Aussage gilt per Definition: In Definition (...) haben wir gerade Wurzeln als positive Werte definiert. Warum? Damit wir Wurzelfunktionen als Funktionen betrachten können. Sonst gäbe es nämlich immer zwei gerade Wurzeln! Haben wir eine, so ist deren Negatives ebenfalls eine valide Wurzel. Konkret: Hier ist sowohl $r^n = r^n$ – also könnten wir auch $\sqrt[n]{r^n} = r$ schreiben, sofern wir das Vorzeichen ignorieren –, als auch $(-r)^n = (-r)^{2m} = (-1)^{2m} \cdot r^{2m} = r^n$ – also auch $\sqrt[n]{r^n} = -r$. Siehe auch Math StackExchange. □

Welche Gleichungen kann man in den reellen Zahlen noch nicht lösen? Alles mit negativen Radikanten! => Komplexe Zahlen (Exkurs).

3.2 Teilbarkeit und Primzahlen

3.3 Die binomischen Formeln

Satz 3.14 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Für eine Potenz $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

3.4 Unendlichkeiten (*)

3.5 Grenzwerte (*)

[1]Das sieht man leicht durch eine Fallunterscheidung: Sei $r \in \mathbb{R}, r \neq 0$. Ist $r > 0$, so gilt auch $r^2 > 0$. Ist $r < 0$, setzen wir $p := -r$. Dann gilt insbesondere $p > 0$ und $r = -p$. Es folgt $r^2 = r \cdot r = (-p) \cdot (-p) = ((-1) \cdot p)((-1) \cdot p) = (-1)(-1) \cdot p \cdot p = p^2 > 0$.

Kapitel 4

Funktionen

4.1 Grundbegriffe

Was ist eine Funktion? -> Definition, Notation für Beispiele und Gegenbeispiele Urbild, Bild, Injektiv, Surjektiv, Bijektiv, Verkettung/Verknüpfung, Graph

Gleichheitsbegriff -> Wann sind zwei Funktionen "gleich"?

Was heißt es wenn sich zwei Funktionen schneiden?

Betrachten von bestimmten Arten von Funktionen in den nächsten Abschnitten.

Definition 4.1 (Definitionsbereich, Wertebereich, Bildbereich)**.** *Sei f eine Funktion. Dann heißt die Menge D aller Werte, für die f definiert ist,* **Definitionsbereich** *von f. Die Menge W aller Werte, die f über seinem Definitionsbereich annehmen kann, heißt* **Wertebereich** *von f. Jede Menge, die den Wertebereich von f enthält, heißt* **Bildbereich** *von f.*

Vereinfacht gesagt besteht der Definitionsbereich aus den Werten, für die man f überhaupt betrachten möchte. Dabei muss man natürlich darauf Acht geben, dass f für einen dieser Werte auch tatsächlich einen Wert annehmen kann. Das folgende Beispiel 4.3 verdeutlicht dies. Der Wertebereich kann auch als „minimaler“ Bildbereich von f verstanden werden. Manchmal wird auch $\mathbb{D}$ für den Definitionsbereich und $\mathbb{W}$ für den Wertebereich geschrieben. Diese Schreibweisen werden wir allerdings nicht weiter verfolgen.

Damit wir später möglichst genau Eigenschaften um Funktionen herum fassen können, empfiehlt sich folgende Notation, die in der Universitäts-Mathematik Standard ist. Dabei wollen wir nicht darauf eingehen, wie Funktionen elementar definiert werden.

Definition 4.2 (Funktions-Notation)**.** *Sei f eine Funktion. Ist D ihr Definitionsbereich und B ihr Bildbereich, so schreiben wir*

$$f : D \to B, \quad x \mapsto f(x)$$

und sagen „f bildet x auf $f(x)$ ab“.

Alternativ schreibt man statt $x \mapsto f(x)$ auch oft direkt die Vorschrift von f, das heißt zum Beispiel im Falle einer Parabel $f(x) = x^2$ statt $x \mapsto x^2$. Zudem gibt man den Bildbereich meist großzügig an, da es oft zunächst nicht ganz klar ist, wie der Wertebereich zu einem speziellen Definitionsbereich genau aussieht. Um uns im Folgenden die Notation „Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich D zu sparen“ schreiben wir auch häufig „Sei $D \subseteq R$ und $f : D \to \mathbb{R}$“ oder wenn ein spezifisches D gegeben ist auch nur „Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion“.

Beispiel 4.3 (Definitionsbereich, Unterschied von Wertebereich und Bildbereich)**.** Sei $f(x) = \frac{1}{x}$. Diese Schreibweise ist mathematisch fahrlässig. Denn würde man die Funktion f allein durch diese Angabe definieren, so könnte man noch auf die Idee kommen, auch 0 in die

Funktion einzusetzen. Wir wissen aber: Das Teilen durch 0 ist nicht definiert! Damit kann f in 0 gar keinen Wert annehmen. Streng genommen müssen wir also 0 aus den Werten ausschließen, die wir in f einsetzen können. Der Definitionsbereich von f kann also nicht die 0 enthalten. Für jede andere reelle Zahl ist f gibt es jedoch keine Probleme. Manchmal ist es aber trotzdem sinnvoll eine Funktion nur auf einem Teil der Werte zu betrachten, für die sie eigentlich rein mathematisch gesehen einen Wert annehmen könnte. Wir können dabei für unser spezielles f situationsabhängig jede beliebige Teilmenge $0 \notin I \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Zahlen als Definitionsbereich von f wählen, die nicht die 0 enthält.

Abhängig davon, über welchen Werten wir f betrachten, also welchen Definitionsbereich wir genau wählen, nimmt f verschiedene Werte an. Hier ist es also erst einmal von vorne hinein oft gar nicht genau klar, was genau der Wertebereich zu einem speziellen Definitionsbereich eigentlich ist. Deshalb gibt man in der Definition einer Funktion auch oft den Bildbereich großzügig an, also „maximal". Betrachten wir in unserem Fall zum Beispiel den Definitionsbereich $D = (0, 1]$. Der dazugehörige Wertebereich ist $[1, \infty)$. Das lässt sich jetzt in unserem Fall noch relativ leicht erkennen, allerdings ist das bei komplizierteren Funktionen schon schwieriger. Deshalb schreiben wir dann f auch häufig als

$$f : (0, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

statt

$$f : (0, 1] \to [1, \infty), \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

Es sei zudem angemerkt, dass die Schreibweise $f : (0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ ebenfalls gängig ist. ◁

Die folgende Sprechweise wird bei Extremstellen und Extrempunkten noch relevanter werden. Häufig spricht man aber auch einfach synonym von Stellen als Punkten.

Definition 4.4 (Stelle, Punkt)**.** *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so spricht man oft von Elementen $x \in D$ aus dem Definitionsbereich D als* **Stellen** *und von $(x, f(x))$ als zugehörigen* **Punkt***.*

4.2 Geraden (Lineare Funktionen)

Geraden, Sekanten, Tangenten (Nur erwähnen und auf Ableitungskapitel verweisen).

Steigung (Noch keine genaue Vorstellung was Steigung eigentlich heißt, mehr bei Ableitungen) => Steigungsdreieck

Definition 4.5 (Gerade, Konstante Funktion)**.** *Eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form*

$$g(x) = mx + c, \quad m \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

heißt **Gerade***. Ist $m = 0$, so hat g die Form $g(x) = c$ und wird dann auch* **konstante Funktion** *genannt.*

Beispiel 4.6. Wir betrachten die spezielle Gerade $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$, auch *Identitätsfunktion* genannt. Dann nennen wir etwa $1 \in \mathbb{R}$ eine Stelle im Definitionsbereich von g, während $(1, g(1)) = (1, 1)$ ein Punkt ist. ◁

Eine spezielle Form von Gerade, die für die Definition und Intuition der Tangente (siehe Abschnitt Ableitung) eine entscheidende Rolle spielt, ist die Sekante.

Definition 4.7 (Sekante)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion über einer Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$. Für zwei beliebige verschiedene Stellen $a, b \in D$ heißt die Gerade s durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$* **Sekante** *von f an den Stellen a und b.*

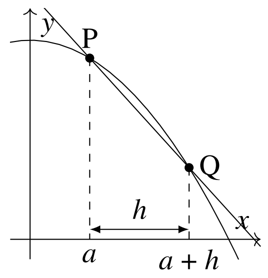

Abbildung 4.1: Schematische Darstellung einer Sekante.

Welche Form hat eine Sekante jetzt genau? Wir fordern in unserer Definition, dass die Sekante s eine spezielle Gerade ist. Damit wissen wir, dass s allgemein die Form

$$s(x) = mx + c$$

hat für ein bestimmtes $m \in \mathbb{R}$ und ein bestimmtes $c \in \mathbb{R}$. Nun wollen wir herausfinden, welche Form m und c genau haben müssen. Anhand unserer Definition wissen wir, dass für die Sekante s durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gelten muss

$$\begin{aligned} ma + c &= s(a) = f(a) \\ mb + c &= s(b) = f(b) \end{aligned} \tag{4.1}$$

denn, dass die Sekante durch diese Punkte „geht“ bedeutet nichts anderes, als dass sie an den Stellen $\tilde{x}$ und y mit der Funktion f übereinstimmt. Indem wir die erste Zeile von der zweiten Zeile anziehen, erhalten wir das System

$$\begin{aligned} ma + c &= f(a) \\ mb - ma &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Nun können wir in der zweiten Zeile auf der linken Seite m ausklammern und sofern $b-a \neq 0$ auch durch $b - a$ teilen. Damit erhalten wir für m

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Wenn aber doch $b - a = 0$, dann ist das für uns kein Problem. Denn dies ist nur genau dann der Fall, wenn $b = a$. Diesen Fall haben wir aber per Definition der Sekante ausgeschlossen. Es kann jedoch natürlich trotzdem $f(b) - f(a) = 0$ gelten und damit $m = 0$. Ein einfaches Beispiel dafür ist in Beispiel 4.9 aufgeführt. Wir können also allgemein davon ausgehen, dass m die oben angegebene Form hat. Dann stellen wir die erste Zeile von (4.1) nach c um und erhalten

$$\begin{aligned} c = f(a) - ma = f(a) - \frac{af(b) - af(a)}{b - a} &= \frac{(b - a)f(a)}{b - a} - \frac{af(b) - af(a)}{b - a} \\ = \frac{bf(a) - af(a) + af(a) - af(b)}{b - a} &= \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} \end{aligned}$$

Damit haben wir insgesamt gezeigt

Proposition 4.8 (Form der Sekante)**.** *Sei s die Sekante einer Funktion f an den Stellen a und b. Dann gilt*

$$s(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

Beispiel 4.9 (Konstante Sekante)**.** Sei $f(x) = x^2$ die Parabel. Dann gilt für die Stellen -1 und 1, dass $f(-1) = 1 = f(1)$. Nach Proposition 4.8 gilt dann für die Sekante s von f an den Stellen -1 und 1

$$s(x) = 0 \cdot x + \frac{1 \cdot f(-1) - (-1) \cdot f(1)}{1 - (-1)} = 2$$

◁

Aus unserer Herleitung von Proposition 4.8 über die Form einer Sekante können wir sogar allgemein ablesen, wie wir die Geradengleichung einer beliebigen Gerade durch zwei beliebige Punkte aufstellen können.

Problem 4.10 (Bestimmen einer Geradengleichung). *Existiert eine Gerade $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche durch gegebene Punkte geht? Und wenn ja, wie erhält man ihre Form? Um diese Fragen vollständig zu beantworten, betrachten wir drei Fälle:*

1. *Ein Punkt (a, b) ist gegeben. In diesem Fall finden wir* beliebig viele *Geraden, die durch diesen Punkt gehen.*

   Dies ist anschaulich klar. Rein mathematisch gesehen können wir uns folgendes überlegen: Sei (a, b) ein vorgegebener Punkt und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine allgemeine Gerade, d.h. $g(x) = mx + c$ für ein $m \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$. Es muss dann gelten

   $$ma + c = g(a) = b$$

   Wir haben also eine Gleichung mit zwei Unbekannten m, c. Lösen wir diese nach c auf, so ist $c = b - ma$. Damit sind alle Geraden der Form $g(x) = mx + (b - ma)$ für beliebiges $m \in \mathbb{R}$ Geraden, auf welchen der Punkt (a, b) liegt.

2. *Zwei Punkte (a_1, b_1) und (a_2, b_2) sind gegeben. In diesem Fall finden wir* genau eine *Gerade, die durch diese beiden Punkte geht.*

   Hier können wir exakt so vorgehen wir beim Bestimmen der allgemeinen Form der Sekante. Proposition 4.8 liefert dann also für die die gesuchte Gerade $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als Sekante von der Identitätsfunktion $f(x) = x$ durch die Punkte (a_1, b_1) und (a_2, b_2) die Form

   $$g(x) = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}x + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2 - a_1}$$

3. *Mehr als zwei Punkte $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ sind gegeben. In diesem Fall muss nicht zwingend eine Gerade existieren, auf der alle gegebenen Punkte liegen.*

4.3 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Anwendung: Ordnung eines Polynoms aus einem logarithmischen Plot bestimmen.

Exkurs: Algebraische Relevanz => Polynomringe, Polynomräume, Alles sind Polynome (Taylor-Entwicklung!), Numerische Interpolation

Definition 4.11 (Ganzrationale Funktion/Polynomfunktion)**.**

Linearfaktoren: Zerlegung in Nullstellen, Fundamentalsatz der Algebra, Grad eines Polynoms und maximale Anzahl an Nullstellen.

Satz 4.12 (Linearfaktorzerlegung)**.**

Satz 4.13 (Maximale Anzahl an Nullstellen)**.**

Satz 4.14 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**

Nullstellen bestimmen: abc-/Mitternachtsformel, pq-Formel, Satz von Vieta (Verweis auf Merksongs von Dorfuchs) + Beweise!

Satz 4.15 (abc-/Mitternachtsformel)**.**

Satz 4.16 (pq-Formel)**.**

Satz 4.17 (Satz von Vieta)**.**

Satz 4.18 (Polynomdivision)**.**

4.4 Gebrochenrationale Funktionen

Definition 4.19 (Gebrochenrationale Funktion)**.**

Grundbegriffe: Definitionslücken und Polstellen + Asymptoten (Verweis auf später)

Definition 4.20 ((Hebbare) Definitionslücke)**.**

Definition 4.21 (Polstelle)**.**

4.5 Exponentialfunktionen und Logarithmen

Allgemeine Exponentialfunktionen und deren Umkehrfunktionen! => Rechnen mit Logarithmen: Gleichungen mit unbekannten im Exponenten lösen (Oft benötigt für Wahrscheinlichkeiten => Verweis auf entsprechende Probleme).

Logarithmusgesetze

Was bedeutet es, mit einer irrationalen Zahl zu potenzieren, z.b. 2^π? => Wie ist das rigoros definiert? => Mehr später im Abschnitt zur eulerschen Zahl e

Herleitung durch gleichbleibende Ableitung (Vorgreifen).

In Beispielen in Ableitungskapitel (Oder Proposition), die Ableitungen bestimmen.

4.6 Trigonometrische Funktionen

4.6.1 Sinus, Kosinus und Tangens

Historische Definition von sin, cos, tan am Einheitskreis: Hypotenuse, Ankathete, Gegenkathete => Hint auf späteren Exkurs mit der Exponentialfunktion und den komplexen Zahlen

Definition 4.22 (Historische Definition von Sinus und Cosinus)**.**

Exkurs: Sinus, Cosinus, Tangens in Reihendarstellung

Definition 4.23 (Analytische Definition von Sinus und Cosinus)**.**

Eigenschaften von sin und cos: Nullstellen, Extremstellen, Ableitung, Stammfunktion, Umkehrfunktion (arcsin, arccos)

Die Kreiszahl π: Historische Definition: Verhältnis von Kreisumfang zu irgendwas anderem VS. analytische Definition als kleinste Nullstelle des Cosinus.

Interessantes Beispiel: Anwendung der irrationalität von π.

Satz: Additionstheoreme (Verweis auf Dorfuchs-Video für Merksong)

Satz 4.24 (Additionstheoreme)**.**

Korollar 4.25 (Doppelwinkelformeln)**.**

Untersuchung von periodischen Funktionen: Wie kann man die Periode aus einem veränderten sin, cos ablesen? Wie verändert sich die Periode bei Streckungen/Stauchungen?

Wie berechnet der Taschenrechner Sinus und Kosinus => Taylor-Entwicklung! (Fehlerabschätzung)

4.6.2 Bogenmaß und Gradmaß

4.7 Funktionsscharen

Typische Aufgaben: Bestimme Gemeinsamkeiten usw.

Bestimmen von Ortskurven

Kapitel 5

Lineare Gleichungssysteme

Lösungsverfahren: Einsetzungs-, Gleichsetzungs- und Additionsverfahren

5.1 Was macht ein Gleichungssystem linear?

Beispiel 5.1. Existiert für das folgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?
(hässliches LGS einfügen, das aber homogen ist) ◃

Beispiel dafür, dass man bei Wurzeln aufpassen sollte:

Beispiel 5.2. Wir betrachten die Gleichung

$$\sqrt{x+4} = -5$$

und wollen ihre reellen Lösungen bestimmen. Man könnte jetzt auf die Idee kommen, die Gleichung einfach auf beiden Seiten zu quadrieren und dann nach x umzustellen, also

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+4} &= -5 && \mid (\ldots)^2 \\
(\sqrt{x+4})^2 &= (-5)^2 \\
x+4 &= 25 && \mid -4 \\
x &= 21
\end{aligned}$$

◃

5.2 Warum sind LGS eigentlich so wichtig?

Matrixschreibweise

Verbindung mit räumlicher Geometrie: Lösungsmengen von LGS sind Untervektorräume (Ebenen)!

5.3 Das Gauß-Verfahren

Systematisches Lösen von LGS

Lösungen: Existenz und Eindeutigkeit

5.4 Bestimmen von allgemeinen Funktionsgleichungen

Große Beispielgallerie: Bestimmen von Polynomen oder ganz allgemein Funktionen mit Parameter anhand von Eigenschaften in Texten (siehe Schulklausur) oder Schaubildern.

Kapitel 6

Differentialrechnung

Wir beginnen zunächst mit der formalen Klärung einiger Begrifflichkeiten.

6.1 Ableitungen

Anwendung: Knickfrei in eine Gerade übergehen.

6.2 Tangente und Normale

Heranführung durch Anwendungen: Mittlere Änderungsrate und Momentane Änderungsrate.

Herleitung der Tangente über Sekante => Das erste Mal Grenzwerte erwähnen und auf Exkurs verweisen.

Definition 6.1 (Differenzenquotient)**.**

Definition 6.2 (Differenzierbar, Ableitung)**.**

Herleitung der Tangente

Definition 6.3 (Tangente, Allgemeine Tangentengleichung)**.**

Herleitung der Normalen: Intuitiv (drehen, mal schauen was passiert an 3 Beispielen), dann rigoros mit Vektoren und Orthogonalität (Vorwegnehmen, aber für genaueres auf später verweisen).

Definition 6.4 (Normale, Allgemeine Normalengleichung)**.**

6.3 Ableitungsregeln

Einige mit dem Differenzenquotienten bestimmte Ableitungen.

Beispiel 6.5. 1.

◁

Weitere besondere Ableitungen (sin, cos, exp, log).

Großer Satz mit Potenzregel, Faktorregel, Summenregel, Kettenregel, Produktregel, Quotientenregel

Satz 6.6 (Grundlegende Ableitungsregeln)**.** *1.* **Potenzregel***:*

2. **Faktorregel***:*

3. **Summenregel**:

Satz 6.7 (Produktregel)**.**

Definition 6.8 (Verkettung)**.** *v.a. Notation* $\circ$

Satz 6.9 (Kettenregel)**.**

Satz 6.10 (Quotientenregel)**.**

6.4 Die Eulersche Zahl e, die Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus

Geschichte der eulerschen Zahl: Als Grenzwert

Definition 6.11 (Historische Definition der eulerschen Zahl)**.** *Die* **eulersche Zahl** e *ist definiert als der folgende Grenzwert:*

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Es ist absolut nicht offensichtlich, dass der obige Grenzwert überhaupt existiert, d.h. ob die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ überhaupt konvergiert.

Definition 6.12 (Historische Definition der Exponentialfunktion)**.** *Die Exponentialfunktion für rationale Werte ist definiert als*

$$e^{(\cdot)} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$$

Warum schränken wir uns bei dieser Definition noch auf rationale Werte ein? Bisher haben wir noch keinen Weg gefunden, Potenzierung mit reellen Potenzen zu definieren. Für die Potenzierung mit ganzzahligen Exponenten (siehe ...) und rationalen Exponenten (siehe ...) haben wir bereits rigorose Definitionen.

Satz 6.13 (Darstellung der Exponentialfunktion)**.** *Für alle* $x \in \mathbb{Q}$ *gilt*

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \tag{6.1}$$

Die obige Aussage ist bemerkenswert. Denn die Exponentialfunktion konnten wir bisher nur durch Potenzierung mit rationalen Potenzen definieren (siehe Definition). Bisher hatten wir noch keinen Weg, Potenzierung mit *reellen* Potenzen zu definieren. Die rechte Seite aus der Darstellung (6.1) ist jedoch auch für reelle $x \in \mathbb{R}$ definiert. So können wir diese rechte Seite einfach als Definition der Exponentialfunktion über den reellen Zahlen verwenden, d.h.

Definition 6.14 (Erweiterung der Exponentialfunktion auf reelle Werte)**.** *Die Exponentialfunktion für reelle Werte ist definiert als*

$$e^{(\cdot)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Schreiben wir e^x *mit* $x \in \mathbb{R}$*, so meinen wir stehts diese Definition, d.h. für* $x \in \mathbb{R}$ *setzen wir*

$$e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Satz 6.15 (Ableitung der Exponentialfunktion)**.**

Beweis (vgl. Proof Wiki). □

Analytische Herleitung als Exponentialfunktion, deren Ableitung sie selbst ist: Graphisch motivieren, dann explizit Ableitung einer allgemeinen Exponentialfunktion bestimmen.
Exkurs: Exponentialfunktion über Taylor-Entwicklung als Reihe

Definition 6.16 (Analytische Definition der Exponentialfunktion)**.**

Eigenschaften der Exponentialfunktion: Ableitung, Extrempunkte, Verhalten gegen pm Unendlich, Summe zu Produkt

Satz 6.17 (Ableitung der e-Funktion)**.**

Korollar 6.18 (Extrempunkte der Exponentialfunktion)**.**

Satz 6.19 (Funktionalgleichung der e-Funktion)**.**

Natürlicher Logarithmus als Umkehrfunktion => Warum ist e^x bijektiv?

Definition 6.20 (Natürlicher Logarithmus)**.**

Eigenschaften des natürlichen Logarithmus: Produkt zu Summe, Logarithmusgesetze, Ableitung

Satz 6.21 (Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus)**.**

Frage aufgreifen: Was bedeutet es, mit einer irrationalen Zahl zu potenzieren, z.b. 2^π?

Definition 6.22 (Potenzieren mit irrationalen Zahlen)**.**

6.5 Exponentielles Wachstum beschreiben

Anwendung: Exponentielles Wachstum beschreiben: Exponentialfunktion finden durch Ansatz $f(t) = f(0)a^t$.
Anwendung: Beschränktes exponentielles Wachstum
Anwendung: Logistisches Wachstum
Exkurs: Zusammenhang mit Sinus, Cosinus und den Complexen Zahlen

Kapitel 7

Lösen von Gleichungen

Verschiedene Arten von Gleichungstypen und Techniken um Gleichungen zu lösen: Im Allgemeinen gibt es keine sicheren Lösungsverfahren mehr wie das Gauß-Verfahren (Verweis). Trotzdem gibt es einige Tricks und allgemeine Vorgehensweisen, die man auf Lager haben sollte, um ëinfache"Gleichungen verschiedenster Art zu lösen.

7.1 Nullstellen bestimmen

7.2 Näherungsweise Lösungen finden (Newton-Verfahren)

Newton-Verfahren: Herleitung, Konvergenzbedingungen + Problemdiskussion und große Beispielgallerie

Kapitel 8

Integration

8.1 Das Riemann-Integral

Intuitive Herleitung: Fläche unter Graphen. => Flächeninhalt auf verschiedene Arten abschätzen an konkreten Beispielen (Konstante Funktion, Gerade, Parabel, Gebrochenrationale Funktion: Problem => Was machen bei Polstellen?). Insbesondere Betrachtung durch Riemann vs Betrachtung durch Lebesgue.

Einfaches Riemann-Integral Definition (auch Exkurs mit formaler Definition).

Orientierter Flächeninhalt! => Große Beispiel Gallerie mit den verschiedenen Fällen

8.2 Stammfunktionen

„Integration als Umkehrung von Ableiten“ => Rechtfertigen durch Stammfunktionen und Hauptsatz. => Fundamentaler Zusammenhang: Hauptsatz

Definition, Existenz, (Nicht-)Eindeutigkeit

Definition 8.1 (Stammfunktion, Integrieren)**.** *Sei f eine Funktion. Eine auf einem offenen Intervall (a, b) differenzierbare Funktion F heißt dann* **Stammfunktion** *von f, falls $F' = f$.*

Stammfunktionen sind *garantiert nie* eindeutig!

Beispiel 8.2 (Nicht-Eindeutigkeit von Stammfunktionen)**.** ◁

Warum sind Stammfunktionen relevant? => Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Satz 8.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.**

8.3 Integrationsregeln

Ableiten ist einfach: Man kann konkret den Differenzenquotienten betrachten oder einfacher mit den Ableitungsregeln arbeiten. Integrieren ist da um einiges schwieriger. Hier muss man sehr viel raten.

Großer Satz: Potenzregel, Faktorregel, Summenregel, Lineare Substitution.

Satz 8.4 (Integrationsregeln)**.**

Besondere Stammfunktionen: 1/x, sin, cos, exp, log

Satz 8.5 (Rechenregeln für Integrale)**.**

8.4 Integralfunktionen

Definition 8.6 (Integralfunktion)**.**

8.5 Anwendungen des Integrals

Fläche zwischen zwei Graphen

Satz 8.7 (Fläche zwischen zwei Graphen)**.**

Mittelwert einer Funktion: Motivieren durch diskrete Beispiele von arithmetischen Mittel => Verallgemeinerung auf unendlich viele unendlich feine gemittelte Werte

Definition 8.8 (Mittelwert einer Funktion)**.**

8.6 Uneigentliche Integrale

Definition 8.9 (Uneigentliches Integral)**.**

8.7 Rotationskörper

Einstieg mit vielen Beispielen (auch Gabriels Horn) => Volumen und FLächeninhalt bestimmen.

Heuristische Herleitung des Volumens (Bohrmaschine).

Volumen des Rotationskörpers zwischen zwei Funktionen: ACHTUNG, leicht falsch machen.

Definition 8.10 (Rotationskörper)**.**

Satz 8.11 (Volumen von Rotationskörpern)**.**

Proposition 8.12 (Volumen eines von zwei Funktionen begrenzten Rotationskörpers)**.**

Kapitel 9

Kurvendiskussion

Genug Tools in den vorausgegangenen Kapiteln gesammelt, um Funktionen auf einige Eigenschaften zu untersuchen.

9.1 Monotonie

Definition von Monotonie

Definition 9.1 (Monotonie)**.**

Monotoniesatz (über den Mittelwertsatz): Auch Gegenbeispiel für Umkehrung

Satz 9.2 (Monotoniesatz)**.**

Graphisches und rechnerisches Bestimmen von Monotonie-Intervallen

9.2 Krümmung

Konvexe und konkave Funktionen, bzw. Funktionsbereiche (Rechts- und Linkskurven).

Definition 9.3 (Links-/Rechtskrümmung)**.**

Charakterisierung konvexer Funktionen liefert den Krümmungssatz!
Krümmungssatz: Wann liegt Rechtskurve vor, wann Linkskurve?

Satz 9.4 (Krümmungssatz)**.**

9.3 Extrempunkte, Sattelpunkte und Wendestellen

Definition Lokale und Globale Extrema

Definition 9.5 (Lokale/Globale Extrema)**.**

Satz: Notwendige Bedingung (Nullstellen der Ableitung => Vorzeichenwechsel in der Ableitung)

Satz 9.6 (Notwendige Bedingung für Extremstellen)**.**

Satz: Hinreichende Bedingungen (Vorzeichen der zweiten Ableitung, Vorzeichenwechsel) => Beispiele für jeden Fall (Warum braucht man manchmal das Vorzeichenwechsel-Kriterium?)

Satz 9.7 (Hinreichende Bedingungen für Extremstellen)**.**

Exkurs: Existenz von Maxima/Minima => Satz von Max/Min
Definition: Nur notwendige Bedingung erfüllt, aber kein Extrempunkt => Sattelpunkte

Definition 9.8 (Sattelpunkt)**.**

Definition: Wendestellen

Definition 9.9 (Wendestelle)**.**

Satz: Notwendige und hinreichende Bedingung für Wendestellen.

Satz 9.10 (Notwendige und hinreichende Bedingung für Wendestellen)**.**

NEW-Schema

9.4 Asymptoten

Definition 9.11 (Waagerechte, senkrechte, schiefe, sonstige Asymptoten)**.**

Waagerechte Asymptoten und Senkrechte Asymptoten
Definition?
Bestimmen an verschiedensten Beispielen: exp, log (Existenz), Gebrochenrationale Funktionen

9.5 Symmetrie

Definition: Achsensymmetrie (zu beliebiger Achse) => Herleitung anhand von Beispielen für Achsensymmetrie zu x-, bzw. y-Achse durch Manipulation des Graphen auf den einfachen Fall zurückführen!

Definition 9.12 (Achsensymmetrische Funktionen)**.**

Definition: Punktsymmetrie (zu beliebigen Punkt) => Analog zu Achsensymmetrie Herleitung usw.

Definition 9.13 (Punktsymmetrische Funktionen)**.**

9.6 Untersuchen von gebrochenrationalen Funktionen

Polstellen, Definitionslücken und „einfache“ Asymptoten.

9.7 Manipulieren von Graphen

Wir haben bereits einige Male die Graphen von Funktionen auf bestimmte Weisen "manipuliert". Etwa, um einen ßchwierigeren"Fall auf einen einfacheren Fall zurückzuführen (Siehe Symmetrien).

9.8 Extremwertprobleme

Gehört nicht wirklich zur klassischen Kurvendiskussion, allerdings einfache Klausuraufgaben mit Extremwertbestimmung (Anwendung davon).

Grundlegend zwei verschiedene Arten: Geometrische vs. funktionale Nebenbedingungen.

VIELE Beispiele!

Kapitel 10

Geometrie in 2D

„Geometrie der Griechen“ => Euklid, Pythagoras, Thales
Erste Form der Mathematik
Siehe „The wonder book of geometry“.

10.1 Kongruenzen und Ähnlichkeit

10.2 Strahlensätze

10.3 Dreiecke

Gleichschenklig, usw: Später ausweitung in 3D.
Satz von Pythagoras

10.4 Kreise

Satz von Thales

Kapitel 11

Räumliche Geometrie

11.1 Grundbegriffe

Dreht sich alles um Vektoren: Definition

Besondere Vektoren: Ortsvektor, Nullvektor

Addition und Multiplikation (Was geht schief?)

Skalarmultiplikation => Gegenvektor

Linearkombinationen => Exkurs: Vektorräume und Basen (Lineare Unabhängigkeit als eindeutige Darstellungseigenschaft)

Betrag (Norm) eines Vektors => Normierte Vektoren

Kollineartität

Strecken: Mittelpunkte

Orthogonalität

11.1.1 Vektorprodukte

Was geht bei der naiven punktweisen Multiplikation schief? => Talk von Freya Holmér

Skalarprodukt

Kreuzprodukt

11.2 Geraden im Raum

11.2.1 Geradengleichung

Gerade $y = mx + c$ als Bild von Kurve in 2D durch Vektoren auffassen => Verallgemeinern auf 3D.

11.2.2 Lagebeziehungen

Parallel und identisch, Parallel und verschieden, Schnitt, Windschief

Definition 11.1 (Lagebeziehungen)**.**

Beispielgallerie!

11.2.3 Zeit-Ort-Gleichungen

Beschreibung von geradlinigen Bewegungen: Vogelperspektive auf Boot im Wasser (2D), Flugzeuge in der Luft, fast kollidieren.

11.3 Ebenen im Raum

11.3.1 Darstellungen von Ebenen (Ebenengleichungen)

Generell werden in der Schule drei verschiedene Darstellungen für Ebenen verwendet. Alle haben ihre Vor- und Nachteile.

Problem 11.2 (Parameterform $\rightsquigarrow$ Normalenform)**.**

Problem 11.3 (Normalenform $\rightsquigarrow$ Koordinatenform)**.** *Gegeben ist eine Ebene E in Parameterform, d.h. $E : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$.*

Indem wir das Vorgehen aus Problem 11.2 und Problem 11.3 kombinieren, können wir eine Ebene in Parameterform in eine Ebene in Koordinatenform umwandeln:

Problem 11.4 (Parameterform $\rightsquigarrow$ Koordinatenform)**.**

Wir fassen zusammen:

Problem 11.5 (Normalenvektor einer Ebene bestimmen)**.** *Gegeben ist eine Ebene E. Den Normalenvektor bestimmen wir abhängig von der gegebenen Darstellung:*

- Parameterform*: Sei $E : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v} + s\vec{w}$. Dann ist ein Normalenvektor $\vec{n}$ gegeben durch das Kreuzprodukt der Spannvektoren v und w:*

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$$

- Normalenform*: Sei $E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$. Ein Normalenvektor ist bereits in der Darstellung als $\vec{n}$ enthalten.*

- Koordinatenform*: Sei $E : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$. Dann ist ein Normalenvektor gegeben durch*

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Definition 11.6 (Hauptebenen)**.** *Die Ebenen, die von dem Ursprung und zwei Richtungsvektoren, die jeweils in die Richtung verschiedener Koordinatenachsen zeigen, aufgespannt werden, heißen* **Hauptebenen***. Konkret nennen wir*

$$E_1 : \vec{0} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

x_1x_2-Ebene,

$$E_2 : \vec{0} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x_2x_3-Ebene und

$$E_3 : \vec{0} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x_1x_3-Ebene.

Wir definieren hier Hauptebenen über ihre Parameterform. Genauso valide wäre es, sie über ihre Normalen- oder Koordinatenform zu definieren. Diese können wir ausgehend von der jeweiligen Parameterform mithilfe der zuvor besprochenen Verfahren ableiten:

Proposition 11.7 (Darstellung von Hauptebenen)**.**

11.3.2 Visualisierung von Ebenen im Koordinatensystem

Spurpunkte, Spurgeraden

11.3.3 Lagebeziehungen von Ebenen und Geraden

Echt parallel, Parallel (in Ebene) und Schnitt => Schnittpunkt bestimmen bei verschiedenen Ebenengleichungen

11.3.4 Lagebeziehungen von Ebenen und Ebenen

Echt parallel, Parallel (identisch) und Schnitt => Schnittgeraden bestimmen!

11.4 Abstände

Abstand von Punkt zu Punkt

Abstand von Punkt zu Ebene: Lotfußpunkt und Lotfußgerade oder Hessesche Normalform (Herleitung davon)

+ Orientierter Abstand (auf welcher Seite der Ebene liegt ein Punkt?)

Abstand von Punkt zu Gerade: Hilfsebene

Abstand von Geraden

Problem 11.8 (Abstand eines Punktes von einer Ebene)**.** *Gegeben ist ein Punkt* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *und eine Ebene E in beliebiger Darstellung, d.h. Parameterform, Normalenform oder Koordinatenform. Sei* $\vec{p}$ *der zum Punkt* (a, b, c) *gehörende Ortsvektor.*

1. *Normalenvektor* $\vec{n}$ *der Ebene bestimmen. Für die Ebene in Normalen- oder Koordinatenform lässt sich dieser direkt ablesen.*
2. *Lotfußgerade g durch den Punkt* (a, b, c) *bestimmen. Diese erhalten wir durch*
$$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{n}$$
3. *Lotfußpunkt L der Lotfußgerade g mit der Ebene E bestimmen.*
4. *Der Abstand von* (a, b, c) *zu E ist dann gegeben durch* $|L|$.

Wir wollen uns überlegen, wie groß der Abstand eines allgemeinen Punktes (a, b, c) von einer der drei Hauptebenen x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 ist.

Proposition 11.9 (Abstand von Hauptebenen)**.** *Der Abstand eines Punktes* (a, b, c) *von*

- *der* x_1x_2*-Ebene beträgt genau* $|c|$
- *der* x_1x_3*-Ebene beträgt genau* $|b|$
- *der* x_2x_3*-Ebene beträgt genau* $|a|$

Beweis. Wir verwenden das Vorgehen aus □

11.5 Geometrische Figuren

In diesem Abschnitt widmen wir uns einigen grundlegenden geometrischen Figuren im dreidimensionalen Raum, wie Quadern, Kugeln, Zylindern, Kegeln, Pyramiden, Parallelotopen und weiteren. Insbesondere wollen wir geometrische Eigenschaften dieser Figuren, wie etwa Flächeninhalte und Volumen, sammeln und besser mit Anwendungsproblemen dieser Figuren umgehen können.

11.5.1 Besondere Figuren

Parallelogramme und Spaten => Flächeninhalt, Volumen über Kreuzprodukt, etc.

11.6 Projektionen

Punkt auf Gerade, Punkt auf Ebene, Gerade auf (beliebige) Ebene

Oft möchte man eine Gerade auf eine Ebene, einen Punkt auf eine Ebene oder einen Punkt auf eine Gerade projezieren. Anschaulich verstehen wir unter einer *Projektion* folgendes: Wir betrachten die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Projektionen von Punkten auf Ebenen haben wir bereits als Lotfußpunkte kennengelernt.

11.7 Spiegelungen

Spiegelung von Punkt über Punkt

Spiegelung von Punkt über Gerade

Spiegelung von Punkt über Ebene

Spiegelung von Gerade über Ebene

Spiegelung von Ebene über Ebene

11.8 Schnittwinkel

Winkel zwischen zwei Vektoren

Winkel zwischen zwei Geraden oder zwei Ebenen

Winkel zwischen einer Gerade und einer Ebene

Kapitel 12

Kombinatorik

12.1 Permutationen

Zählen von Konfigurationen: Ziehen aus Urnen (mit/ohne Zurücklegen)

12.2 Der Binomial-Koeffizient

Herleitung, Vorkommen (z.B. in Binomischen Lehrsatz), Eigenschaften, Intuition dahinter, Pascallsches Dreieck

12.3 Mehrstufiges Auswählen

Strategien für kombinatorische Probleme

Kapitel 13

Stochastik

13.1 Was sind eigentlich Wahrscheinlichkeiten?

Intuitiver Umgang mit Wkeiten => Rigorose Rechtfertigung davon: Gesetz der großen Zahlen

Axiomatische Wkeitsannahmen

Grundbegriffe um Wahrscheinlichkeiten: Wahrscheinlichkeitsraum, Ergebnisse, Ereignisse, Gegenereignisse, Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

13.2 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

Definition 13.1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)**.** *Für zwei Ereignisse A und B ist die* **bedingte Wahrscheinlichkeit von** *A auf B gegeben durch*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Diese Definition fällt nun zunächst etwas von Himmel. Leider geben die meisten Einführungen rund um bedingte Wahrscheinlichkeiten wenig bis keine mathematische rigorose Intuition dafür, $P(A|B)$ tatsächlich als genau die Wahrscheinlichkeit zu interpretieren, dass A passiert, wobei B bereits geschehen ist.

Satz 13.2 (Zweite Pfadregel/Multiplikationsregel/Produktregel)**.** *Für beliebige Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ gilt*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)}{P(A_k)}$$

Insbesondere gilt also

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{13.1}$$

Beweis. Siehe Anhang B, Seite 52. □

13.2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Im Alltag begegnen uns nicht nur „Einzelereignisse“, sondern wie bereits zuvor angeschnitten auch „zusammengesetzte Ereignisse“, d.h. Ereignisse, die aus der Beziehung mehrerer weiterer Ereignisse hervorgehen. Beispielsweise interessieren wir uns in manchen Fällen nicht nur für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$, bzw. $P(B)$, dass das Ereignis A, bzw. B eintritt, sondern auch für die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$, dass sowohl das Ereignis A, als auch das Ereignis B eintritt.

13.3 Zufallsvariablen

Was ist das eigentlich? => definition
Diskrete Zufallsvariablen vs. kontinuierliche Zufallsvariablen und deren Verteilungen

13.4 Verteilungen von Zufallsvariablen

13.4.1 Bernoulli-Verteilung

(Einstufige) Bernoulli-Experimente!

13.4.2 Binomialverteilung

Betrachten ein spezielles Zufallsexperiment: Mehrstufige Bernoulli-Experimente

13.4.3 Normalverteilung

13.4.4 Geometrische Verteilung

13.4.5 Poisson-Verteilung

13.5 Erwartungswert und Standardabweichung

13.6 Typische Zufallsexperimente

Vierfeldertafel
Mehrstufig mit Zurücklegen
Mehrstufig ohne Zurücklegen
Fairness bei Glücksspiel untersuchen

13.7 Stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen

13.8 Hypothesentests

13.8.1 Links- und rechtsseitige Hypothesentests

Anhang A

Exkurse

Anhang B

Wahrscheinlichkeitstheorie

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi. Wir beweisen nun die Muliplikationsregel für Wahrscheinlichkeiten.

Beweis von Satz 13.2. Zunächst machen wir dies, dann machen wir das. □

Anhang C

Mengenlehre und Logik

Anhang D

Analysis

Akronyme

GCD Greatest Common Divisor. 3, 5

LCM Least Common Multiple. 3

Index