Projekt 1 - sprawozdanie

Sebastian Deręgowski
Dawid Janus
grupa 1

22 lutego 2021

Spis treści

1 Temat i treść zadania

Wizualizacja szybkości zbieżności metody Newtona (w dziedzinie zespolonej) zastosowanej do znalezienia zera wielomianu w_n reprezentowanego w bazie wielomianów Legendre'a

$$w_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k L_k(z).$$

Uwaga. Nie należy sprowadzać wielomianu w_n do postaci naturalnej! Do obliczania wartości wielomianu w_n oraz jego pochodnej należy wykorzystać związek rekurencyjny spełniany przez wielomiany Legendre'a.

2 Opis metody

2.1 Wielomiany Legendre'a

W naszym programie do wizualizacji szybkości zbieżności metody Newtona korzystamy z wielomianów zapisanych w bazie wielomianów Legendre'a. Do obliczania wartości n-tego wielomianu Legendre'a w punkcie skorzystaliśmy z poniższego wzoru rekurencyjnego:

$$L_0(z) = 1,\ L_1(z) = z,\ L_n(z) = \frac{2n-1}{n} \cdot z \cdot L_{n-1}(z) - \frac{n-1}{n} \cdot L_{n-2}(z), \qquad n = 2, 3, ...$$

Natomiast do obliczania wartości pochodnej n-tego wielomianu Legendre'a w punkcie z skorzystaliśmy z następujących własności pochodnej:

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

i wyprowadziliśmy zależność rekurencyjną:

$$L_0'(z) = 0,\ L_1'(z) = 1,\ L_n'(z) = \frac{2n-1}{n} \cdot (L_{n-1}(z) + z \cdot L_{n-1}'(z)) - \frac{n-1}{n} \cdot L_{n-2}'(z), \qquad n = 2, 3, ...$$

2.2 Metoda Newtona

Metoda Newtona (zwana rownież metodą stycznych) to algorytm iteracyjny wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji. W pierwszym kroku metody wybierany jest punkt startowy x_0, z którego wyprowadzana jest styczna w $f(x_0)$. Pierwsza współrzedna punktu, w którym styczna przecina oś OX jest kolejnym przybliżeniem (x_1). W związku z powyższym wyprowadzany jest następujący wzór rekurencyjny:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad k = 0, 1, ...$$

W naszej implementacji jako warunek stopu przyjęliśmy:

$$|x_{k+1} - x_k| < \epsilon.$$

3 Opis programu obliczeniowego

Program obliczeniowy składa się z pięciu funkcji, które zostały szczegółowo opisane poniżej.

3.1 wielomiany(x,n)

Funkcja służy do obliczenia wartości n-tego wielomianu Legendre'a i jego pochodnej w punkcie x. Przyjmuje następujące argumenty:

- x - punkt, dla którego liczymy wartość wielomianu i jego pochodną;
- n - n-ty wielomian Legrende'a.

Funkcja zwraca:

- w - wartość n-tego wielomianu Legendre'a w punkcie x;
- p - wartość pochodnej w tym punkcie,

obliczając je przy pomocy rekurencyjnego związku spełnianego przez wielomiany Legendre'a. Złożoność obliczeniowa jest rzędu $O(n)$.

3.2 wartosc(x,a)

Funkcja służy do obliczenia wartości wielomianu i jego pochodnej w punkcie x zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a. Przyjmuje następujące argumenty:

- x - punkt, dla którego liczymy wartość wielomianu i jego pochodną;
- a - wektor współczynników kolejnych wielomianów Legendre'a.

Funkcja zwraca:

- w - wartość wielomianu w punkcie x;
- p - wartość pochodnej w tym punkcie,

obliczając je przez sumowanie wartości wielomianu i jego pochodnej dla kolejnych wielomianów Legendre'a (wspiera się przy tym funkcją *wielomiany(x,n)*). Złożoność obliczeniowa jest rzędu $O(n)$.

3.3 metoda_newtona(x,a)

Funkcja oblicza następny wyraz równania rekurencyjnego metody Newtona dla punktu x wielomianu o współczynnikach a w bazie Legendre'a. Przyjmuje następujące argumenty:

- x - punkt, dla którego liczymy metodę Newtona;
- a - wektor współczynników kolejnych wielomianów Legendre'a.

Funkcja zwraca:

- value - punkt, do którego doprowadzi nas metoda Newtona z punktu x,

obliczając ją przy pomocy funkcji $wartosc(x, a)$. Złożoność obliczeniowa jest rzędu $O(1)$.

3.4 iteracja(x,a,eps,n)

Funkcja zwraca ilość iteracji równania rekurencyjnego metody Newtona potrzebnych do osiągnięcia miejsca zerowego z daną dokładnością i limitem. Przyjmuje następujące argumenty:

- x - punkt, dla którego liczymy liczbę iteracji;
- a - wektor współczynników kolejnych wielomianów Legendre'a.

Opcjonalnie przyjmuje też następujące argumenty:

- eps - dokładność obliczeń (domyślna wartość: 10^{-6});
- n - maksymalna liczba iteracji (domyślna wartość: 30).

Funkcja zwraca:

- index - liczba iteracji potrzebna do osiągnięcia miejsca zerowego,

obliczając ją poprzez wykonywanie funkcji $metoda\_Newtona(x, a)$ tak długo, dopóki różnica między kolejnymi punktami nie będzie mniejsza od eps. W przypadku, gdy metoda Newtona potrzebuje więcej iteracji niż n bądź jest rozbieżna dla danego punktu, za liczbę iteracji przyjmuje się n. Złożoność obliczeniowa jest rzędu $O(n)$.

3.5 wykres(a,n,eps,max)

Docelowy punkt działania całego programu. Funkcja rysuje wykres przedstawiający wizualizację szybkości zbieżności metody Newtona w dziedzinie zespolonej dla danego wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a. Wykres przedstawia płaszczyznę zespoloną ograniczoną punktami $(-5-5i)$, $(-5+5i)$, $(5-5i)$, $(5+5i)$. Funkcja przyjmuje następujące argumenty:

- a - współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a;
- n - ilość punktów, dla których obliczana jest szybkość zbieżności metody Newtona w jednej osi.

Opcjonalnie przyjmuje też następujące argumenty:

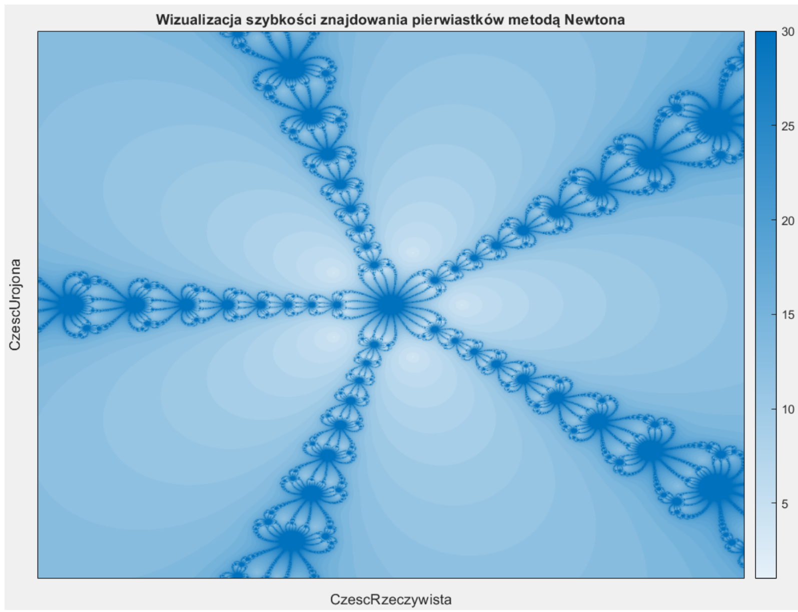
- eps - dokładność obliczeń (domyślna wartość: 10^{-6});
- max - maksymalna liczba iteracji (domyślna wartość: 30).

Dla danego n funkcja tworzy siatkę punktów na płaszczyźnie, a następnie dla każdego z nich oblicza liczbę iteracji, korzystając z funkcji $iteracja(x, a, eps, n)$. Następnie wyświetla obliczone dane na wykresie mapy ciepła, w której osie X i Y to odpowiednio części rzeczywiste i urojone danego punktu, a wartością punktu jest kolor, którego intensywność jest proporcjonalna do liczby iteracji. Złożoność obliczeniowa jest rzędu $O(n^2)$.

4 Przykłady obliczeniowe

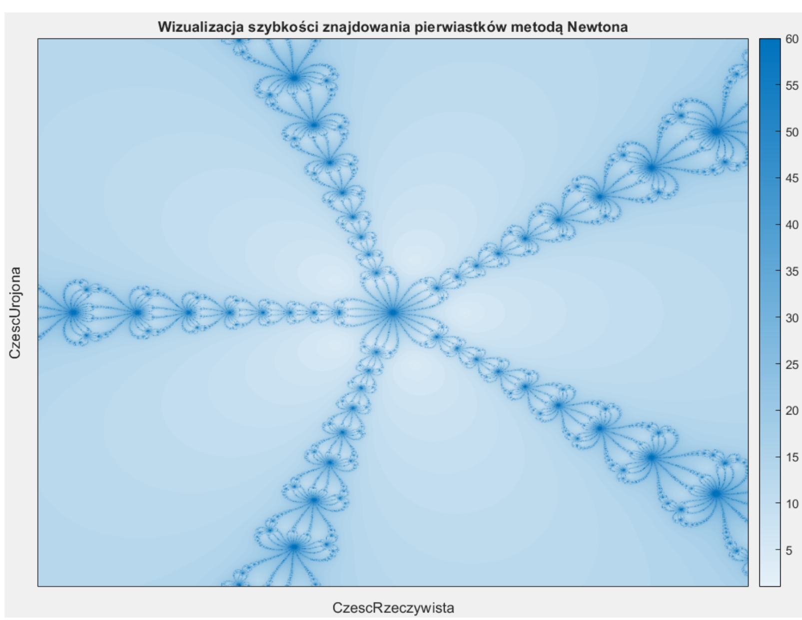
4.1 Przykład nr 1

Współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a: -1, $\frac{27}{63}$, 0, $\frac{28}{63}$, 0, $\frac{8}{63}$
Wielomian zapisany w postaci naturalnej: $W(x) = x^5 - 1$
Wywołanie funkcji: $wykres([-1, 27/63, 0, 28/63, 0, 8/63], 1000)$



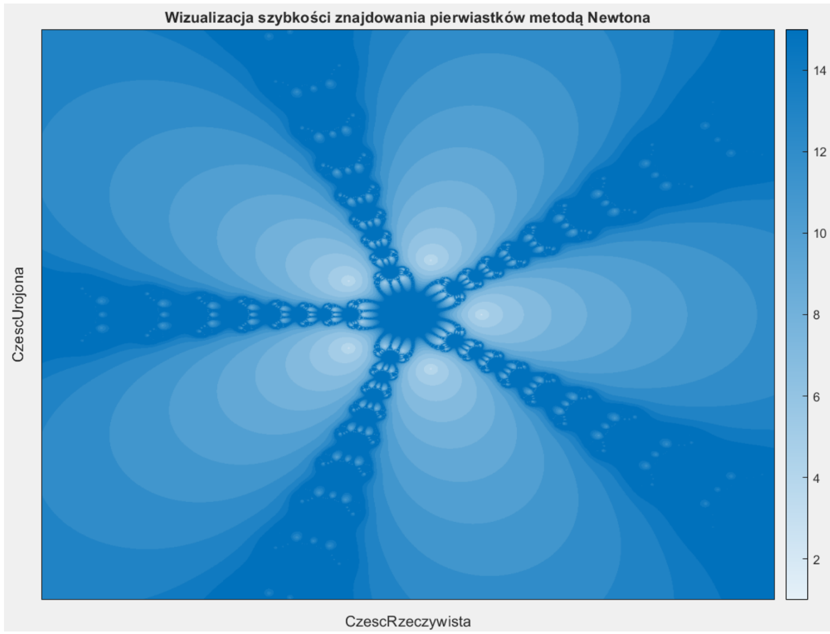
4.2 Przykład nr 2

Współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a: -1, $\frac{27}{63}$, 0, $\frac{28}{63}$, 0, $\frac{8}{63}$
Wielomian zapisany w postaci naturalnej: $W(x) = x^5 - 1$
Wywołanie funkcji: $wykres([-1, 27/63, 0, 28/63, 0, 8/63], 1000, 10\hat{}(-6), 60)$



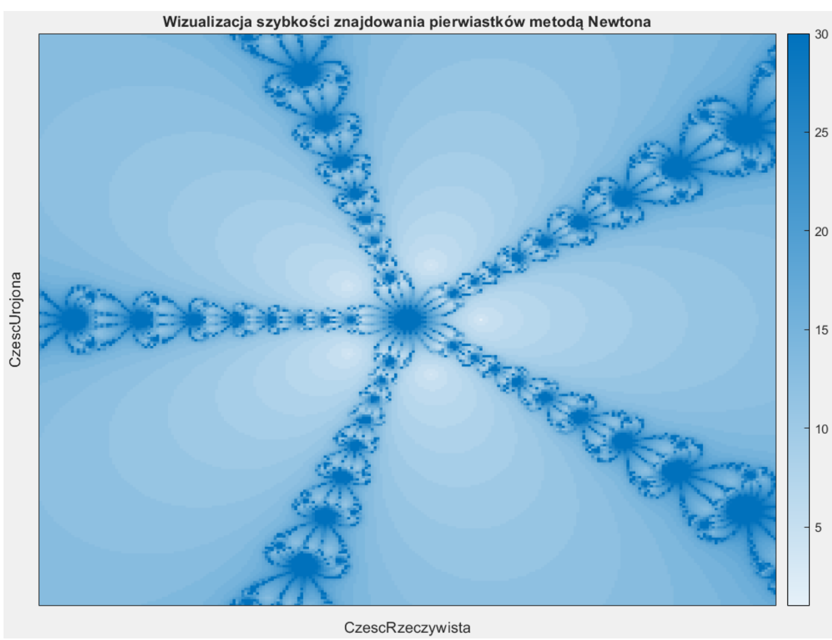
4.3 Przykład nr 3

Współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a: $-1,\ \frac{27}{63},\ 0,\ \frac{28}{63},\ 0,\ \frac{8}{63}$
Wielomian zapisany w postaci naturalnej: $W(x) = x^5 - 1$
Wywołanie funkcji: $wykres([-1, 27/63, 0, 28/63, 0, 8/63], 1000, 10\hat{}(-6), 15)$



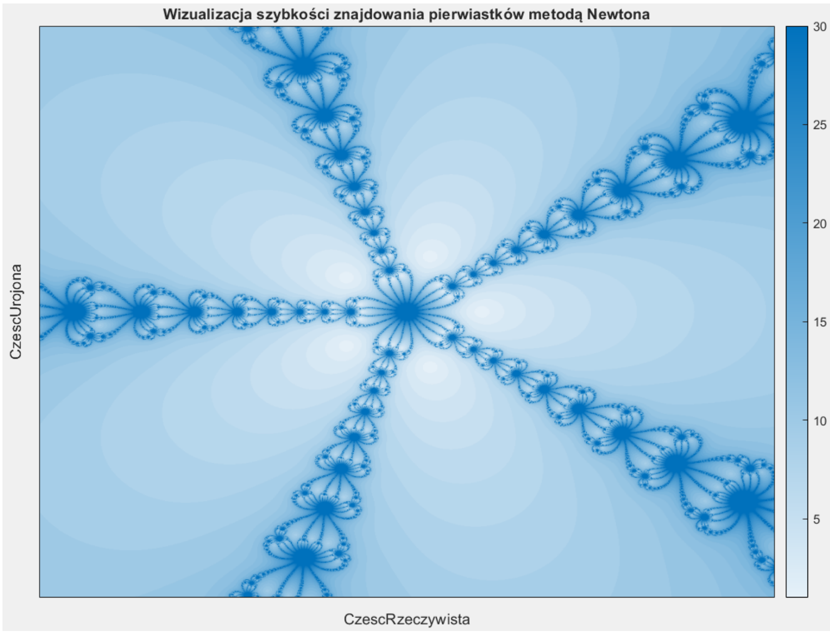
4.4 Przykład nr 4

Współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a: $-1,\ \frac{27}{63},\ 0,\ \frac{28}{63},\ 0,\ \frac{8}{63}$
Wielomian zapisany w postaci naturalnej: $W(x) = x^5 - 1$
Wywołanie funkcji: $wykres([-1, 27/63, 0, 28/63, 0, 8/63], 250)$



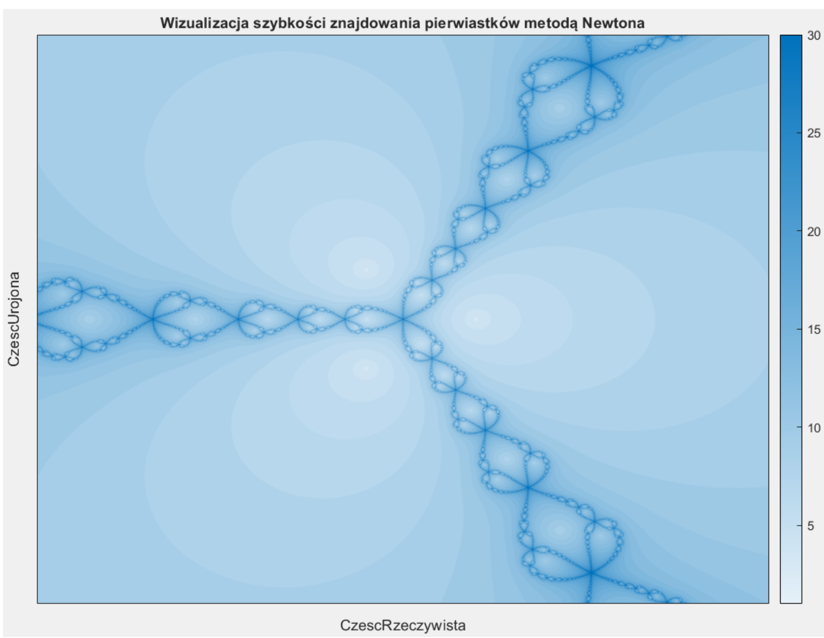
4.5 Przykład nr 5

Współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a: $-1,\ \frac{27}{63},\ 0,\ \frac{28}{63},\ 0,\ \frac{8}{63}$
Wielomian zapisany w postaci naturalnej: $W(x) = x^5 - 1$
Wywołanie funkcji: $wykres([-1, 27/63, 0, 28/63, 0, 8/63], 1000, 10\hat{}(-1), 30)$



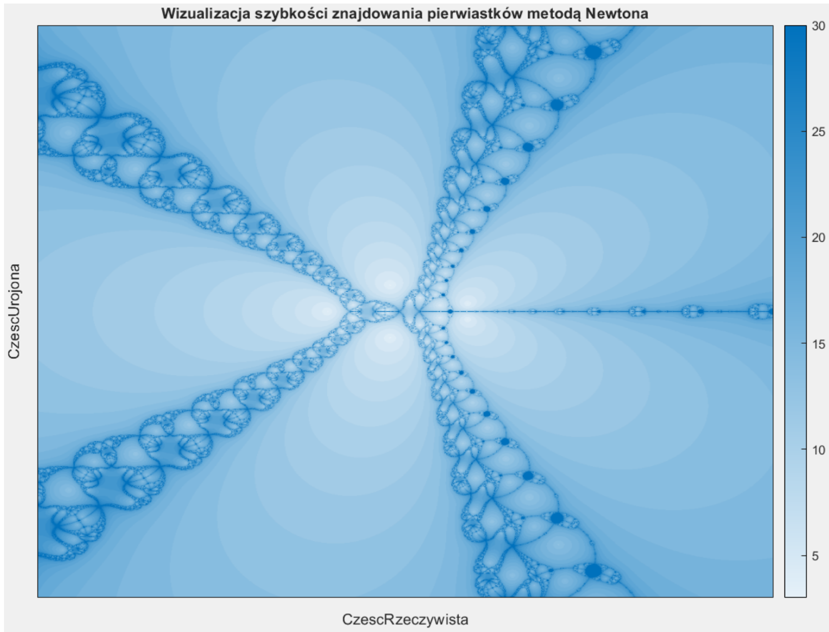
4.6 Przykład nr 6

Współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a: $-1,\ \frac{3}{5},\ 0,\ \frac{2}{5}$
Wielomian zapisany w postaci naturalnej: $W(x) = x^3 - 1$
Wywołanie funkcji: $wykres([-1, 0.6, 0, 0.4], 2000)$



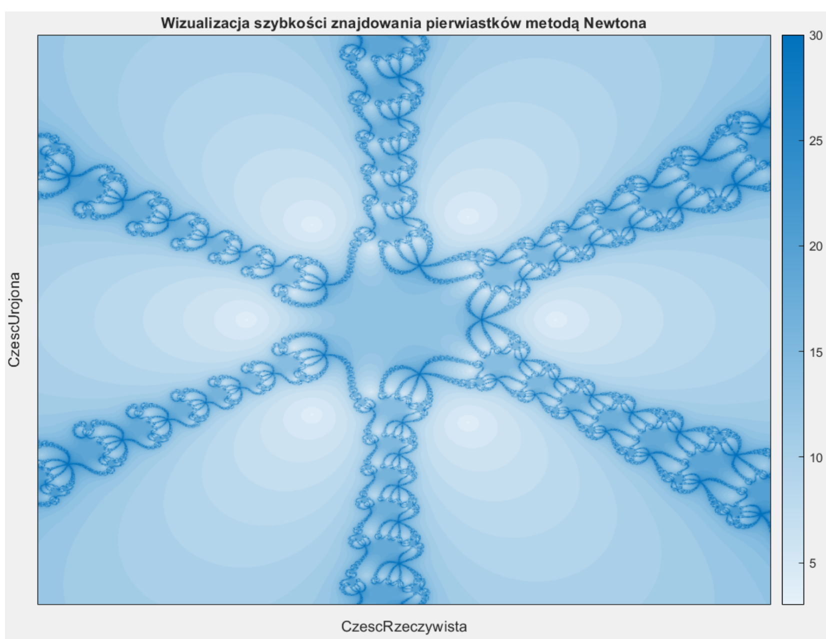
4.7 Przykład nr 7

Współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a: $-500,\ 367,\ 24,\ -50,\ 120,\ -300$
Wielomian zapisany w postaci naturalnej: $W(x) = ?$
Wywołanie funkcji: $wykres([-500, 367, 24, -50, 120, -300], 1000)$



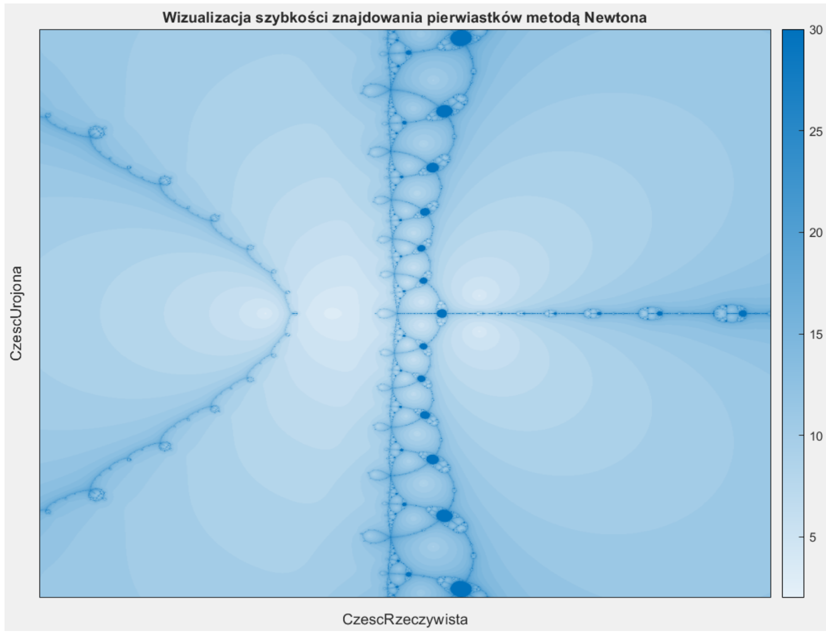
4.8 Przykład nr 8

Współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a: $-8,\ -1,\ \frac{1}{43},\ -\frac{1}{65},\ \frac{1}{43},\ -\frac{1}{89},\ \frac{1}{139}$
Wielomian zapisany w postaci naturalnej: $W(x) = ?$
Wywołanie funkcji: $wykres([-8, -1, 1/43, -1/65, 1/43, -1/89, 1/139], 1000)$



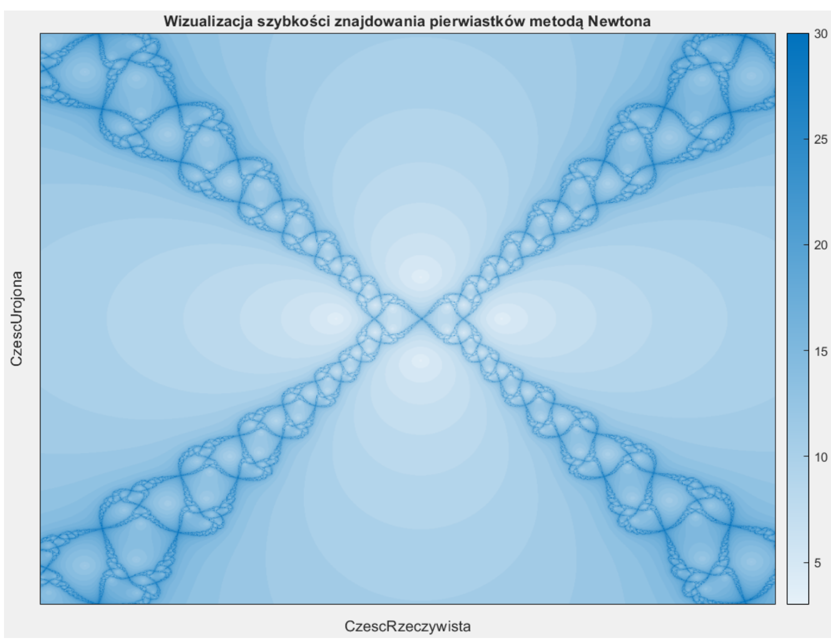
4.9 Przykład nr 9

Współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a: $-8,\ \frac{3}{4},\ \frac{22}{3},\ 2,\ -\frac{5}{4}$
Wielomian zapisany w postaci naturalnej: $W(x) = ?$
Wywołanie funkcji: $wykres([-8, 3/4, 22/3, 2, -5/4], 1000)$



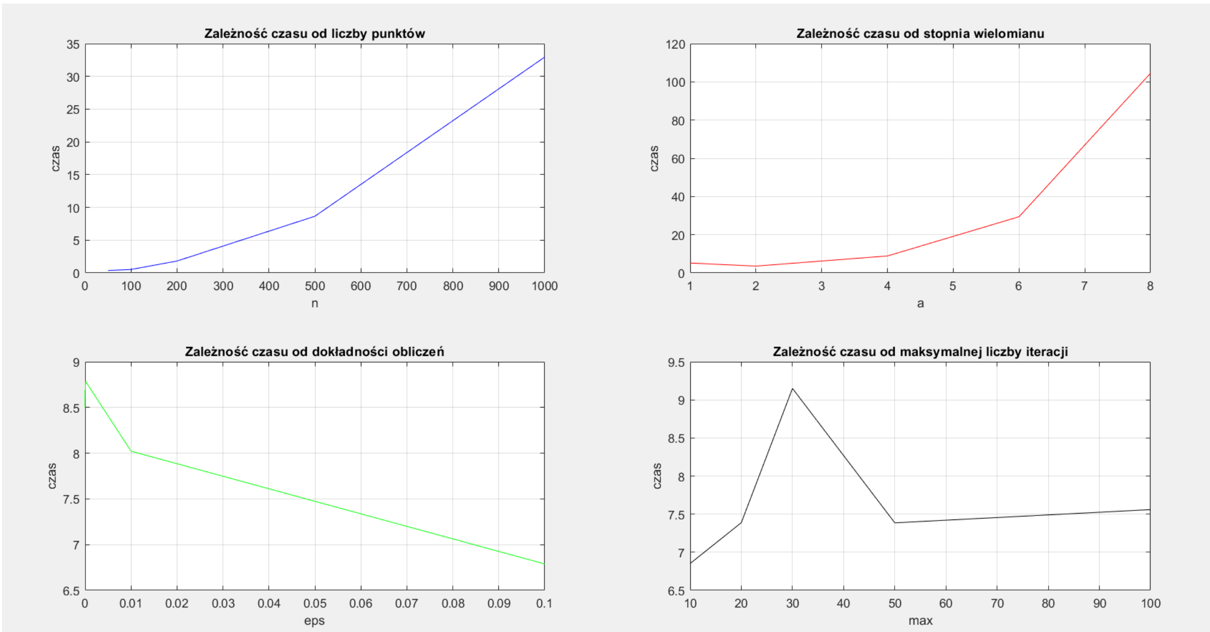
4.10 Przykład nr 10

Współczynniki wielomianu zapisanego w bazie wielomianów Legendre'a: $15,\ \frac{34}{12},\ -\frac{25}{6},\ \frac{74}{13},\ -5$
Wielomian zapisany w postaci naturalnej: $W(x) = ?$
Wywołanie funkcji: $wykres([15, 34/12, -25/6, 74/13, -5], 1000)$



5 Analiza wyników obliczeniowych

Na czas działania programu wpływ mają wszystkie cztery argumenty przyjmowane przez funkcję *wykres(a,n, eps,max)*. Przy pomocy funkcji *tic...toc* mierzyliśmy czas wykonywania programu, biorąc ze zmienną jeden z argumentów. Każdy pomiar powtarzaliśmy trzykrotnie, a wyniki są średnią arytmetyczną uzyskanych pomiarów. Dokładne wyniki znajdują się w pliku *czasy.m*.



Jak łatwo zauważyć, największy wpływ na czas działania programu ma stopień wielomianu, którego wizualizację tworzymy. Szczególnie dla wielomianów stopnia większego niż 6, czas rośnie w coraz szybszym tempie. Co ciekawe, wielomiany drugiego stopnia wizualizują się szybciej niż pierwszego.

Nieco mniejsze znaczenie ma liczba punktów, dla których przeprowadzamy wizualizację. Zważywszy na to, że już dla 500 punktów w jednej osi wykres jest w bardzo dobrej "jakości" (nie widać pojedynczych punktów), nie warto jest przesadnie tym argumentem manewrować.

Jeśli chodzi o znaczenie dokładności obliczeń, to czas wykonania programu zwiększa się niemal asymptotycznie im bardziej dokładność jest bliska zeru, jednak wciąż różnice wynoszą od kilku do maksymalnie kilkunastu sekund, więc nie jest to czynnik decydujący.

Ostatnim elementem, jaki braliśmy pod uwagę, była maksymalna liczba iteracji dla pojedynczego punktu. Spośród wszystkich badanych przez nas czynników, ten ma najmniejszy wpływ na czas działania programu. Okazuje się jednak, że w wyniku skalowania koloru dla liczby iteracji większej niż 50 wykres staje się mało czytelny. Z kolei dla liczby iteracji mniejszej niż 20, wykres jest zniekształcony i nie odzwierciedla dobrze rzeczywistości.

6 Bibliografia

1. *https://www.mathworks.com/help/matlab/* [dostęp: 2020-11-26]

2. *https://pl.wikipedia.org/* [dostęp: 2020-11-26]

3. *http://www.mini.pw.edu.pl/(tylda)iwrobel/MADMN_zima_2020-21/* [dostęp chroniony hasłem: 2020-11-26]