

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ОПТИКЕ

Выполнил:
Деревянченко Михаил
Группа:
Б03-106

Долгопрудный, 2023

1. Теоретические сведения

Рассмотрим дифракцию плоской монохроматической волны на синусоидальной амплитудной решётке. Пусть решётка с периодом d расположена в $t = 0$, а её штрихи ориентированы вдоль OY . Тогда функция пропускания:

$$t(x) = \beta + \alpha \cos(ux) = \beta + \alpha \frac{e^{iux} + e^{-iux}}{2}$$

где $\alpha, \beta = \text{const}$, $u = 2\pi/d$.

Если на решётку падает плоская моноволна вдоль OZ :

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{-i(\omega t - kz)},$$

то на выходе получим три плоских волны:

$$\begin{aligned} E_1 &= \beta E_0 e^{-i(\omega t - kz)}, \\ E_2 &= \frac{\alpha}{2} E_0 e^{-i(\omega t - ux - \sqrt{k^2 - u^2} z)}, \\ E_3 &= \frac{\alpha}{2} E_0 e^{-i(\omega t + ux - \sqrt{k^2 - u^2} z)}, \end{aligned}$$

где ω — круговая частота, $k = 2\pi/\lambda$ — волновой вектор, E_0 — амплитуда. Каждая из этих трёх волн фокусируется линзой в точку в задней фокальной плоскости. Волна E_1 (вдоль OZ) фокусируется в начало координат, волны E_2 и E_3 (распространяются в направлении $\sin \theta = \pm u/k$) фокусируются в точке $x_1 = \pm Fu/k = \pm F\lambda d$, где F — фокусное расстояние линзы.

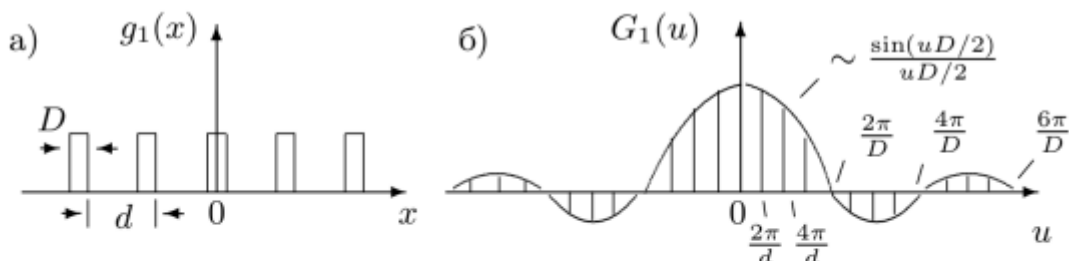
Теорема Фурье в комплексной форме:

$$t(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inu x},$$

сумма бесконечного множества канонических составляющих, имеющие кратные частоты. Картина, наблюдаемая в фурье-плоскости, представляет собой эквидистантный набор точек с координатами и амплитудами, пропорциональными C_n :

$$x_n = \frac{Fu}{k} = \frac{F\lambda}{d} n.$$

При освещении транспаранта плоской моно волной картина, наблюдаемая в задней фокальной плоскости линзы, установленной за транспарантом, представляет собой фурье-образ функции пропускания транспаранта. Для того, чтобы найти фурье-образ функции пропускания, достаточно определить только пространственные частоты и соотношение между амплитудами плоских волн на выходе. Для амплитудной синусоидальной решётки получаем три плоских волны с частотами $0, +u, -u$ и амплитудами, пропорциональными $\beta, \alpha/2, \alpha/2$.



а) функция пропускания дифракционной решётки (последовательности прозрачных и непрозрачных полос);
б) $G_1(u)$ — спектр функции пропускания дифракционной решётки

Пространственное преобразование Фурье может осуществляться и в свободном пространстве при наблюдении дифракции Фраунгофера. Если размеры дифракционной решётки неограничены, то дифракционные максимумы бесконечно узки. Чем меньше размер решётки (полное число щелей), тем шире каждый отдельный максимум.

Направление на главные максимумы $\theta_n = un/k = \lambda nd$ (n — целое число) определяется периодом решётки d , а распределение амплитуд в спектре — фурье-образом функции пропускания отдельного штриха:

$$g_2(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{D}{2} \leq x \leq \frac{D}{2} \\ 0, & -\frac{D}{2} > x > \frac{D}{2} \end{cases}$$

Вследствие неперерывности $g_2(x)$, её фурье-образ представляется непрерывным множеством точек и определяется интегральным преобразованием Фурье:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(u) e^{iux} du,$$

$$G(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-iux} dx.$$

В таком виде $g(x)$ и $G(u)$ представляют собой пару преобразований Фурье: $G(u)$ — спектр или фурье-образ функции $g(x)$.

$$G_2(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(x) e^{-iux} dx = \int_{-D/2}^{+D/2} e^{-iux} dx = D \frac{\sin \frac{uD}{2}}{\frac{uD}{2}}.$$

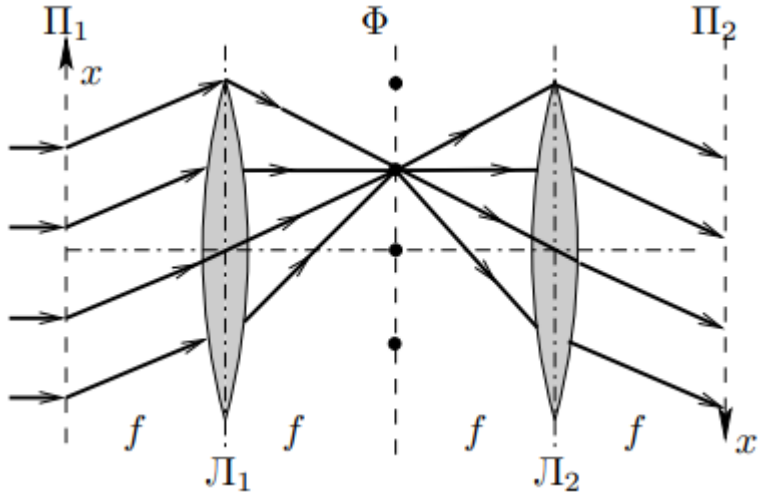
Введём понятие протяженности функции пропускания транспаранта (Δx) и ширины её спектра (Δu), тогда соотношение неопределённости принимает вид:

$$\Delta x \cdot \Delta u = \frac{2\pi}{D} \cdot D = 2\pi.$$

Размер же малого объекта можно рассчитать, увеличив его изображение с помощью линзы.

Мультипликация (размножение) изображения

Расположим в фурье-плоскости Φ оптической системы (схема справа) фильтрующий транспарант-решётку с узкими щелями и периодом d . Во входной плоскости Π_1 находится объект-транспарант с функцией пропускания $f_0(x)$, освещённый слева плоской нормально падающей волной. В плоскости, примыкающей к объекту справа, возникает световое поле, комплексная амплитуда которого $f_0(x)$ представляется в общем случае непрерывной суммой плоских волн — интегралом Фурье:



$$f_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int C_0(u) e^{iux} dx.$$

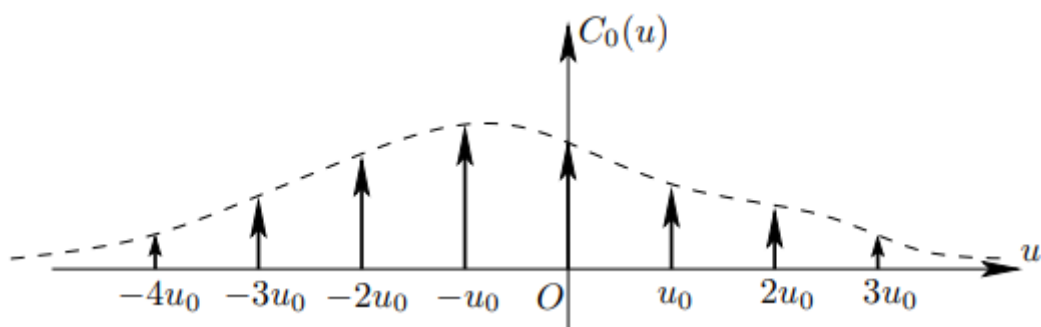
На щелях фильтрующей решётки, расположенных в точках фурье-плоскости $x_n = nd$, фокусируются плоские волны с пространственными частотами

$$u_n = k \sin \alpha_n = k \frac{x_n}{f} = \frac{knd}{f} = 2\pi n \frac{d}{\lambda f}$$

Только эти волны, отфильтрованные (т. е. пропущенные) решёткой, формируют изображение $f(x)$, возникающее в выходной плоскости Π_2 оптической системы:

$$f(x) \sim \sum C_0(nu_0) e^{inu_0 x}.$$

Таким образом, из непрерывного спектра $C_0(u)$ объекта, показанного на рисунке снизу пунктиром, фильтрующая решётка пропускает дискретный спектр компонент, показанный стрелками.



2. Экспериментальная установка

Щель переменной ширины D , снабжённая микрометрическим винтом B , освещается параллельным пучком света, излучаемым лазером (радиус кривизны фронта волны велик по сравнению с фокусными расстояниями используемых в схеме линз).

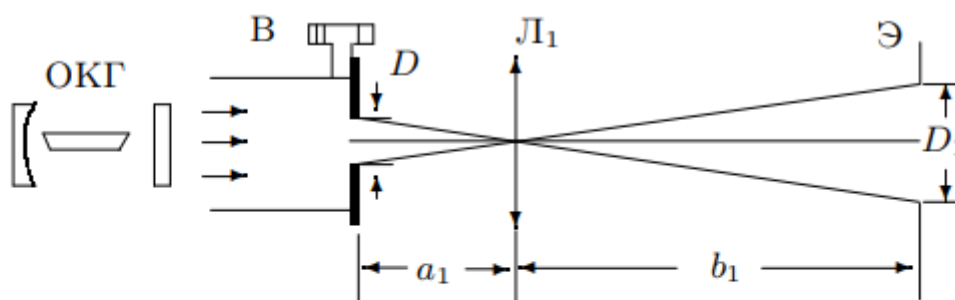


Рис. 1. Схема для определения ширины щели с помощью линзы

Увеличенное изображение щели с помощью линзы L_1 проецируется на экран Э. Величина изображения D_1 зависит от расстояний от линзы до предмета — a_1 и до изображения — b_1 , т. е. от увеличения Γ системы:

$$\Gamma = \frac{D_1}{D} = \frac{b_1}{a_1}.$$

Изображение спектра щели образуется в задней фокальной плоскости Φ линзы L_1 . Размещая в плоскости Φ двумерные решётки-сетки, можно влиять на первичное изображение и получать мультиплицированное изображение щели. Убрав линзу, можно наблюдать на экране спектр щели (рис. 2), а если заменить щель решёткой — спектр решётки. Крупные решётки дают на экране очень мелкую картину спектра, которую трудно промерить. В этом случае используют две линзы (рис. 3): первая (длиннофокусная) формирует первичное изображение — спектр, вторая (короткофокусная) — проецирует на экран увеличенное изображение спектра.

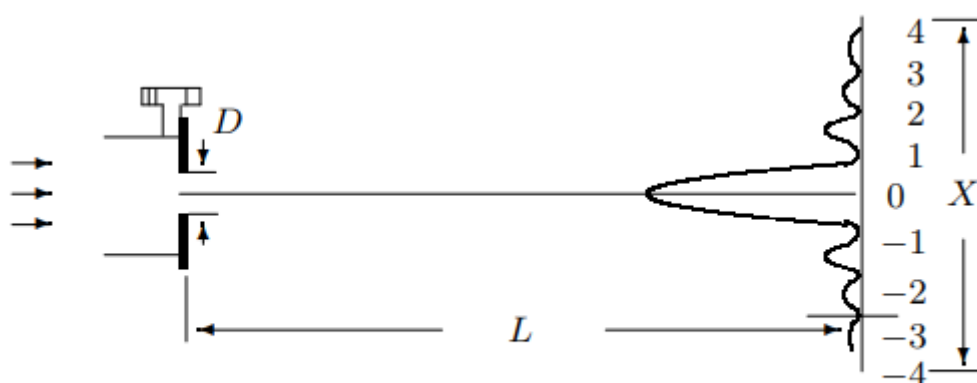


Рис. 2. Схема для определения ширины щели по спектру

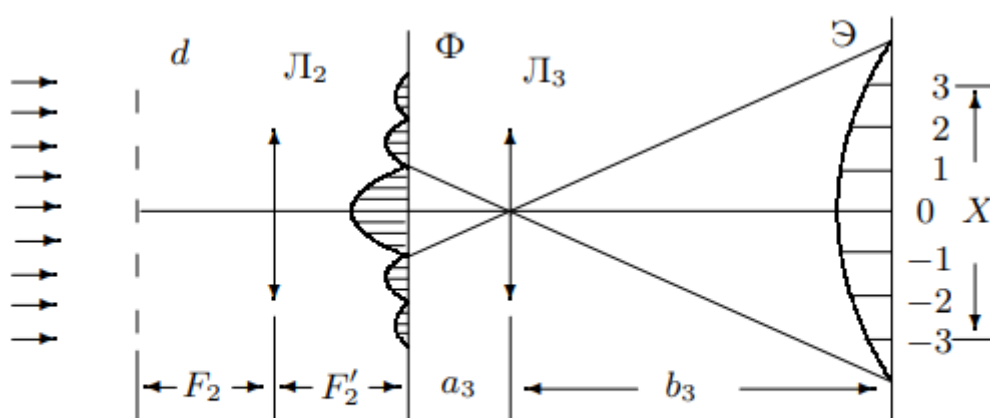


Рис. 3. Схема определения периода решётки по увеличенному изображению спектра

3. Проведение измерений и обработка результатов

3.1 Определение ширины щели

А. Определение ширины щели с помощью линзы

Работая на первой установке, с помощью короткофокусной линзы ($F_1 = 3.8\text{см}$) получаем на экране Э увеличенное изображение щели. Определив начало отсчета ширины щели по ее открытию $D_0 = 120\text{ мкм}$, измеряем зависимость размера изображения D_1 от ширины щели D .

D — D₀, мкм	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
D₁, мм	1.5	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12.5	14	15.5
σ, мм	0.25									

Измерим линейные размеры системы:

$$a_1 = 3.9 \pm 0.2 \text{ см}$$

$$b_1 = 130.1 \pm 0.5 \text{ см}$$

$$L = 134.8 \pm 0.5 \text{ см}$$

Наконец, по формуле увеличения Γ системы рассчитаем $D_{\text{л}}$.

$$\Gamma = \frac{b_1}{a_1} = 33.3 \pm 1.6$$

D₁, мм	1.5	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12.5	14	15.5
D_л, мкм	45.0	92.1	140.2	184.7	231.2	276.3	324.4	374.8	420.5	470.1
D — D₀, мкм	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
σ_л, мкм	6.8	8.8	10.3	11.7	13.3	15.0	16.4	19.5	20.9	22.7

Б. Определение ширины щели по ее спектру

Убрав линзу, изменяя размер щели ($D_0 = 140 \text{ мкм}$), измерим расстояние между удаленными от центра минимумами X и найдем ширину щели по формуле:

$$D_c = 2 \frac{\lambda L m}{X}$$

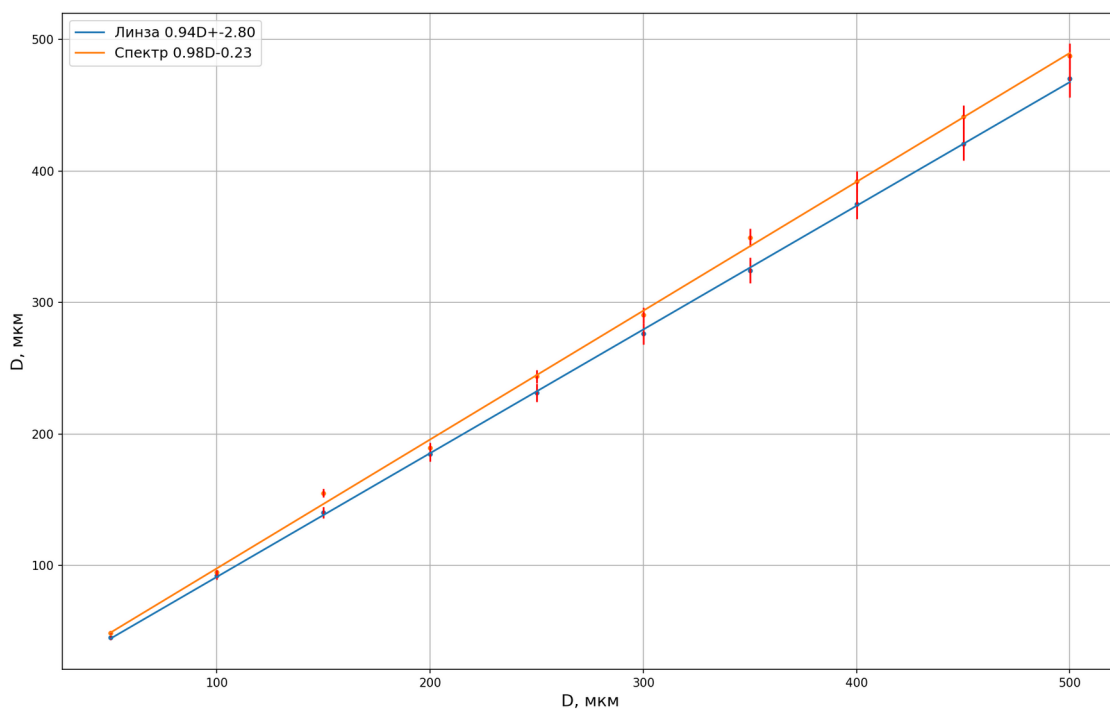
m — порядке минимума,

$\lambda = 532 \text{ нм}$,

$L = 134.8 \pm 0.5 \text{ см}$ — расстояние от щели до экрана.

D — D₀, мкм	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
X, мм (m=4)	140.5	72	44	36	28	23.5	19.5	17.5	15.5	14
σ_X, мм	0.25									
D_c, мкм	48.8	94.8	155.1	189.6	243.7	290.4	349.2	392.2	441.3	487.5
σ_c, мкм	2.2	3.4	4.1	5.0	5.5	6.2	7.3	8.1	8.6	9.4

Зависимость измеренной ширины щели от установленной



Как можно видеть по графику, спектральный способ измерения щели получился точнее. Это можно объяснить тем, что размеры изображения в первом случае были слишком малы, из-за чего относительная погрешность измерений линейкой была значительно больше относительной погрешности измерений в спектральном способе.

Последним способом измерим диаметр волоса:

m	X, мм	L, см	D, мм
2	46	134.8	0.062

3.2 Определение периода решетки

А. Определение периода по спектру на удалённом экране

Заменяем щель кассету с двумерными решетками и измеряем расстояние между максимумами. В таблице приведены расстояния в мм для $m = 1$.

Решетка	1	2	3
Верхняя	74	30	15
Нижняя	74	30	15
σ_x , мм	0.25		

Вычисляем период каждой сетки:

$$d_c = 2 \frac{\lambda L m}{X}$$

$$L = 134.2 \pm 0.5 \text{ см}$$

Решетка	1	2	3
X, мм	74	30	15
d_c , мкм	9.6	23.4	47.6
σ_d , мм	0.4	1.2	1.9

Б. Определение периода решёток по увеличенному изображению спектра

Собираем установку согласно рисунку 3.

F_2 , мм	F_3 , мм	a_3 , мм	b_3 , см
110	38	40 ± 1	107.3 ± 0.5

Увеличение системы:

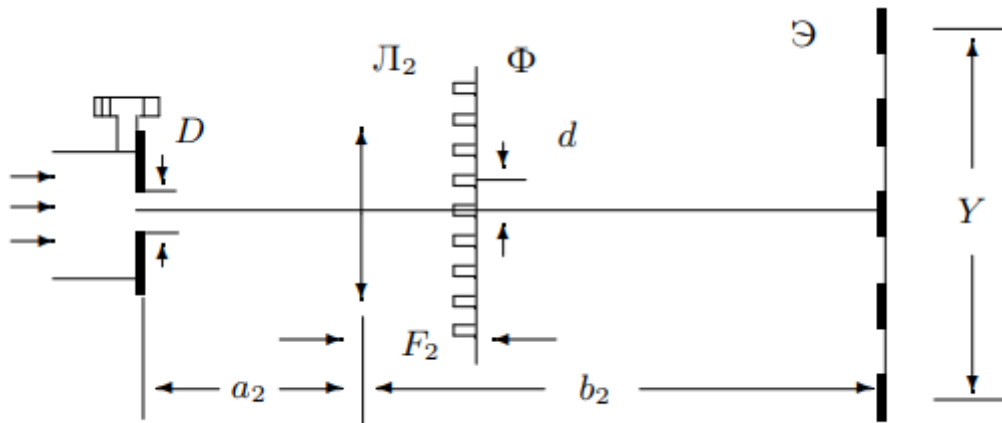
$$\Gamma_3 = \frac{b_3}{a_3} = 26.8 \pm 0.8$$

Аналогично измеряем расстояние между максимумами. В таблице приведены расстояния для $m = 1$.

Решетка	1	2	3
X, мм	145	56	28
d _c , мкм	10.6	27.0	54.0
σ _d , мм	0.4	1.1	1.7

Значения периодов решеток, полученные в данных методах, близки по значению.

3.3 Мультиплицирование



Соберем схему, показанную выше.

F ₂ , мм	b ₂ , см	a ₃ , мм	D ₀ , см
85	122.2±0.5	120±1	210

$$\Gamma_2 = \frac{b_2}{a_2} = 10.2 \pm 0.2$$

Снимем зависимость Y (расстояние между удалёнными изображениями щели) и K (число промежутков между изображениями) от № (номер сетки) для фиксированной ширины входной щели, а также рассчитаем периоды Δy «фиктивных» решёток:

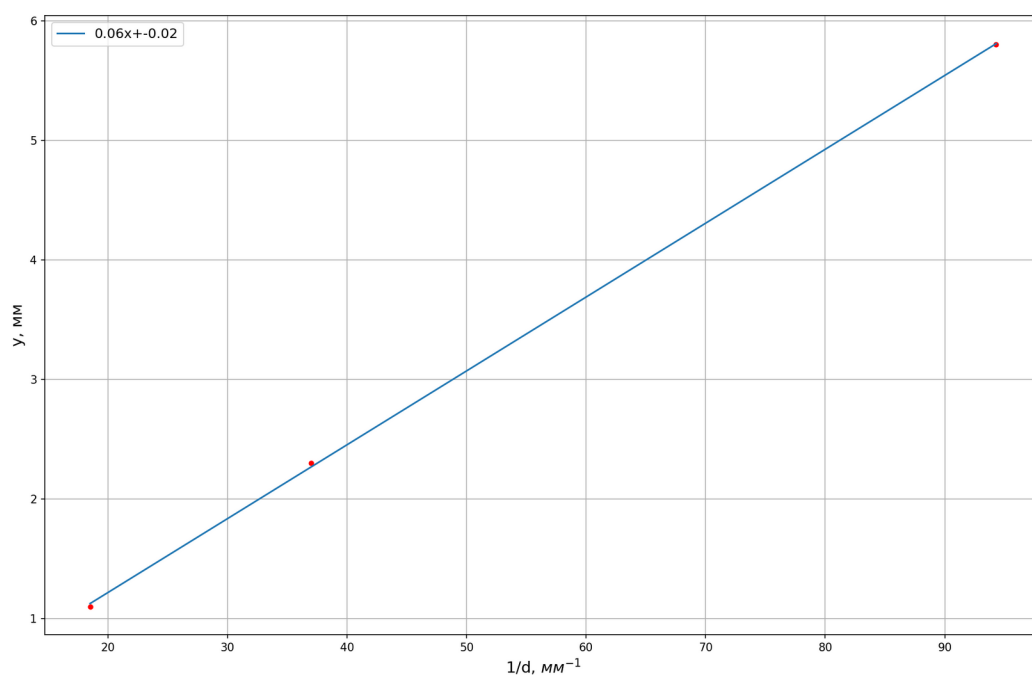
$$\Delta y = \frac{Y}{\Gamma_2 K}$$

Далее строим график зависимости Δy(1/d_c). Зависимость должна получиться линейной, так как

$$\frac{\lambda}{\Delta y} F_2 = d_c$$

Как можно видеть из графика снизу, полученные точки ложатся на одну прямую (линейная зависимость), что говорит о точных проведенных измерениях.

Решетка	1	2	3
Y, мм	118.9	93.5	67.9
K	2	4	6
Δy , мм	5.8	2.3	1.1
d , мкм	10.6	27.0	54.0
$1/d$, мм ⁻¹	94.3	37.0	18.5



3.4 Влияние щелевой диафрагмы на изображение сетки

Рассмотрим изображение сетки при различных углах наклона щели



Как мы можем наблюдать, при повороте щели на тот же угол поворачиваются полосы. Это должно быть связано с тем, что из-за не идеальной точечности источника свет более протяжен вдоль щели, а значит ее составляющая носит больший вклад в картину, чем перпендикулярная составляющая щели. Помимо этого при изменении ширины щели, изображение начинает сужаться или расширяться вдоль линий, параллельных щели, и превращаться в ромб, так как при данном расположении щели свет падает не на «квадраты» решетки, а на «ромбы», то есть максимальный и минимальный размеры(линии, параллельные щели) фигуры решетки изменяются(максимальный размер становится равным диагонали ромба).

4. Вывод

В данной работе было исследовано преобразование Фурье в оптике, с помощью которого, используя фурье-плоскости и фурье-образы, были рассчитаны размеры щели и периоды сеток, значения которых довольно точно согласуются как друг с другом, так и с теорией.