CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
MMAP-R0-100-2305

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:

- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią.

DATA: **12 maja 2023 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

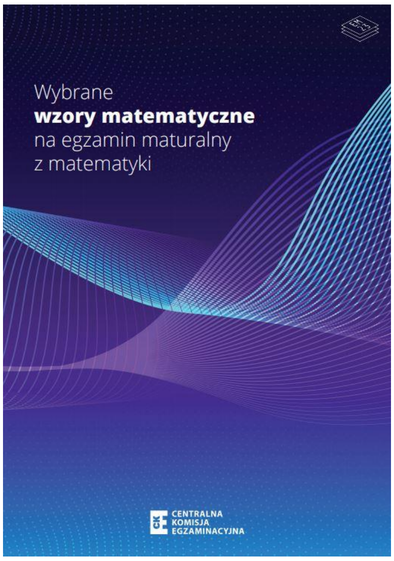
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 27 stron (zadania 1–13). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Nie wpisuj żadnych znaków w tabelkach przeznaczonych dla egzaminatora. Tabelki umieszczone są na marginesie przy każdym zadaniu.
8. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
9. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.

Zadanie 1. (0–2)

W chwili początkowej $(t = 0)$ masa substancji jest równa 4 gramom. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 19% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Dla każdej liczby całkowitej $t \geq 0$ funkcja $m(t)$ określa masę substancji w gramach po t pełnych dobach (czas liczymy od chwili początkowej).

1.
0–1–2

Wyznacz wzór funkcji $m(t)$. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza od $1,5$ grama.
Zapisz obliczenia.

$100\% - 19\% = 81\% = 0,81$

$m(1) = 4 \cdot 0,81$
$m(2) = (4 \cdot 0,81) \cdot 0,81 = 4 \cdot 0,81^2$
$m(3) = (4 \cdot 0,81^2) \cdot 0,81 = 4 \cdot 0,81^3$

$m(t) = 4 \cdot 0,81^t$

$4 \cdot 0,81^t < 1,5 \quad / : 4$
$0,81^t < 0,375$

$0,81^5 \approx 0,3487 < 0,375$

$t = 5$

Będzie mniejsza po 5 dobach

Zadanie 2. (0–3)

Tomek i Romek postanowili rozegrać między sobą pięć partii szachów. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez Tomka jest równe $\frac{1}{4}$.

Oblicz prawdopodobieństwo wygrania przez Tomka co najmniej czterech z pięciu partii. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego. Zapisz obliczenia.

2.
0–1–2–3

$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

$p = \frac{1}{4}$ $\quad n = 5$

$q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\quad k = 4 \lor k = 5$

$P_5(4) + P_5(5) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 5 \cdot \frac{1}{4^4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4^5} =$

$= \frac{15}{4^5} + \frac{1}{4^5} = \frac{16}{4^5} = \frac{16}{1024} = \frac{1}{64}$

Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{64}$

Zadanie 3. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Punkt $P = (x_0\,, 3)$ należy do wykresu funkcji f.

3.
0–1–2–3

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P. Zapisz obliczenia.

$$f(x) = \frac{3x^2-2x}{x^2+2x+8}\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x_0) = \frac{3x_0^2-2x_0}{x_0^2+2x_0+8} = 3 \quad / \cdot (x_0^2+2x_0+8)$$

$$\cancel{3x_0^2} - 2x_0 = \cancel{3x_0^2} + 6x_0 + 24$$

$$-2x_0 - 6x_0 = 24$$

$$-8x_0 = 24 \quad /:(-8)$$

$$x_0 = -3$$

$$P = (\underbrace{-3}_{x_0},\underbrace{3}_{f(x_0)})$$

$y = a(x-x_0)+f(x_0)$ gdzie $a = f'(x_0)$ – równanie stycznej

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$ – pochodna ilorazu

$f(x) = ax^2+bx+c$ $\quad f'(x) = 2ax + b$ – pochodna funkcji kwadratowej

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2x)'\cdot(x^2+2x+8)-(3x^2-2x)\cdot(x^2+2x+8)'}{(x^2+2x+8)^2} =$$

$$= \frac{(6x-2)\cdot(x^2+2x+8)-(3x^2-2x)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+8)^2} =$$

$$= \frac{(6\cdot(-3)-2)\cdot((-3)^2+2\cdot(-3)+8)-(3(-3)^2-2(-3))\cdot(2(-3)+2)}{((-3)^2+2(-3)+8)^2} =$$

$$= \frac{(-20)\cdot 11 - 33\cdot 4}{11^2} = \frac{-220+132}{121} = \frac{-88}{121} = -\frac{8}{11}$$

$$y = -\frac{8}{11}(x-(-3))+3 = -\frac{8}{11}x - \frac{24}{11} + 3 = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$$

$$y = -\frac{8}{11}x + \frac{9}{11}$$

Zadanie 4. (0–3)

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 4$ i nierówność $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$.

Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 2$.

4.
0–1–2–3

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^3 - x^2y \leqslant xy^2 - y^3 \end{cases}$$

$x^3 - x^2y \leqslant xy^2 - y^3$

$x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 \leqslant 0$

$x^2(x-y) - y^2(x-y) \leqslant 0$

$(x^2 - y^2)(x-y) \leqslant 0$

$(x-y)(x+y)(x-y) \leqslant 0$

$(x-y)^2(x+y) \leqslant 0$

$(x-y)^2 \cdot 4 \leqslant 0 \quad /:4$

$(x-y)^2 \leqslant 0$

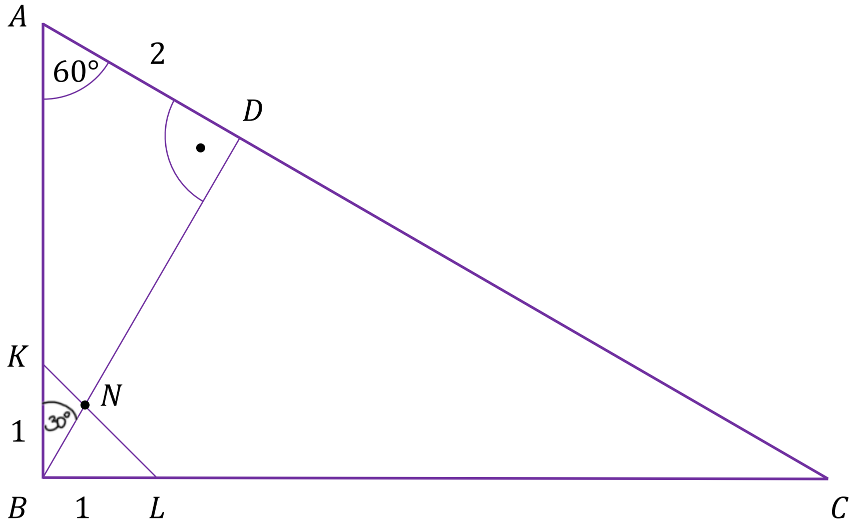
$$+\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$2x = 4$
$x = 2$

$2 + y = 4$
$y = 2$ c.n.d.

Zadanie 5. (0–3)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ABC| = 90°$ oraz $|\sphericalangle CAB| = 60°$. Punkty K i L leżą na bokach – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = |BL| = 1$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina wysokość BD tego trójkąta w punkcie N, a ponadto $|AD| = 2$.



5.
0–1–2–3

Wykaż, że $|ND| = \sqrt{3} + 1$.

2 $\triangle ABD$: $|\sphericalangle ABD| = 180° - 90° - 60° = 30°$

$|AD| = 2 \Rightarrow |BD| = 2\sqrt{3}$

$\triangle KBL$ – prostokątny równoramienny

$|\sphericalangle BKN| = (180° - 90°) : 2 = 45°$

2 $\triangle BKN$: $|\sphericalangle BNK| = 180° - 30° - 45° = 105$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

$\frac{|BN|}{\sin 45°} = \frac{|BK|}{\sin 105°}$

$\sin 105° = \sin(60° + 45°) =$
$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \cdot \sin 45° =$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$\frac{|BN|}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

$|BN| = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{12} - 4}{6 - 2} = \frac{4\sqrt{3} - 4}{4} = \sqrt{3} - 1$

$|ND| = |BD| - |BN| = 2\sqrt{3} - (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + 1$ c.n.d.

6. 0–1–2–3

Zadanie 6. (0–3)

Rozwiąż równanie

$$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x) + 1$$

Zapisz obliczenia.

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

$4\sin(4x)\cos(6x) = 2\sin(10x)+1$

$\alpha = 4x \quad \beta = 6x$

$4 \cdot \frac{1}{2}\left[\sin(4x+6x) + \sin(4x-6x)\right] = 2\sin(10x)+1$

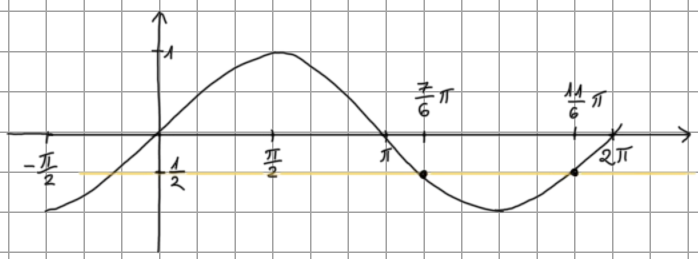
$2\left[\sin(10x) + \sin(-2x)\right] = 2\sin(10x)+1$

$2\sin 10x + 2\sin(-2x) = 2\sin(10x)+1$

$2\sin(-2x) = 1$ $\quad\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \;,\; \alpha \in \mathbb{R}$

$-2\sin(2x) = 1 \quad /:(-2)$

$\sin(2x) = -\frac{1}{2}$

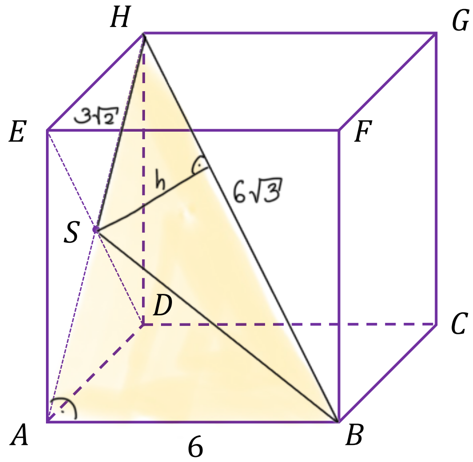


$2x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \;,\; k\in\mathbb{Z}$

$x = \frac{7}{12}\pi + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{12}\pi + k\pi \;,\; k\in\mathbb{Z}$

Zadanie 7. (0–4)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 6. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).



Oblicz wysokość trójkąta SBH poprowadzoną z punktu S na bok BH tego trójkąta. Zapisz obliczenia.

7.
0–1–2–3–4

$|BH| = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$|AH| = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$|SH| = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$P_{ABH} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AH| = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$

$P_{SBH} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABH} = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$

$P_{SBH} = \frac{1}{2} \cdot |BH| \cdot h$

$9\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot h$

$3\sqrt{3} \cdot h = 9\sqrt{2} \quad /: 3\sqrt{3}$

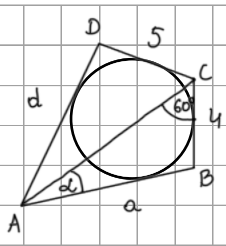
$h = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$

Zadanie 8. (0–4)

Czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = 4$ i $|CD| = 5$, jest opisany na okręgu. Przekątna AC tego czworokąta tworzy z bokiem BC kąt o mierze $60°$, natomiast z bokiem AB – kąt ostry, którego sinus jest równy $\frac{1}{4}$.

8.
0–1–2–3–4

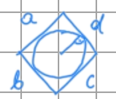
Oblicz obwód czworokąta $ABCD$. Zapisz obliczenia.



$\alpha \in (0°, 90°)$ $\quad \sin\alpha = \frac{1}{4}$

w czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są sobie równe

$$a + c = b + d$$



$$a + 5 = d + 4$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin 60°} = \frac{4}{\sin\alpha}$$

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{4}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \quad / \cdot 4$$

$$a = 8\sqrt{3}$$

$$8\sqrt{3} + 5 = d + 4$$
$$d = 8\sqrt{3} + 1$$

$$Obw = 8\sqrt{3} + 4 + 5 + 8\sqrt{3} + 1 = 16\sqrt{3} + 10$$

9.

0–1–2–3–4

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$$

Zapisz obliczenia.

Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\sqrt{a^2} = |a|$ *dla każdej liczby rzeczywistej* a.

$\sqrt{x^2+4x+4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2-6x+9}$

$(a^2+2ab+b^2) = (a+b)^2$

$(a^2-2ab+b^2) = (a-b)^2$

$\sqrt{(x+2)^2} < \frac{25}{3} - \sqrt{(x-3)^2}$

$|x+2| < \frac{25}{3} - |x-3|$

$|x+2| + |x-3| < \frac{25}{3}$

$x_1 = -2 \quad x_2 = 3$

$x \in (-\infty, -2\rangle$

$-x-2-x+3 < \frac{25}{3}$

$-2x+1 < \frac{25}{3}$

$-2x < \frac{22}{3} \quad / : (-2)$

$x > -\frac{11}{3}$

$x \in (-\frac{11}{3}, -2\rangle$

$x \in (-2, 3\rangle$

$x+2-x+3 < \frac{25}{3}$

$5 < \frac{25}{3}$

$5 < 8\frac{1}{3}$

$x \in (-2, 3\rangle$

$x \in (3, +\infty)$

$x+2+x-3 < \frac{25}{3}$

$2x-1 < \frac{25}{3}$

$2x < \frac{28}{3} \quad / : 2$

$x < \frac{14}{3}$

$x \in (3, \frac{14}{3})$

$x \in (-\frac{11}{3}, -2\rangle \cup (-2, 3\rangle \cup (3, \frac{14}{3}) \Rightarrow x \in (-3\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3})$

Zadanie 10. (0–4)

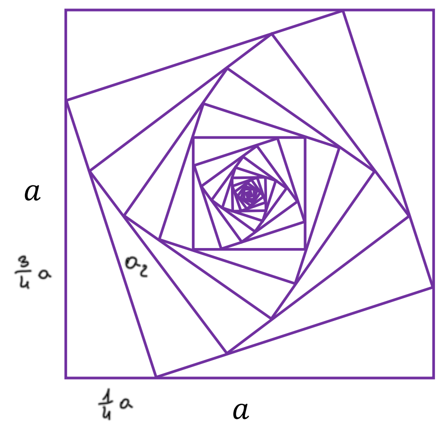
Określamy kwadraty K_1, K_2, K_3, … następująco:

- K_1 jest kwadratem o boku długości a
- K_2 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_1 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$
- K_3 jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_2 i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$

i ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 2$,

- K_n jest kwadratem, którego każdy wierzchołek leży na innym boku kwadratu K_{n-1} i dzieli ten bok w stosunku $1 : 3$.

Obwody wszystkich kwadratów określonych powyżej tworzą nieskończony ciąg geometryczny.
Na rysunku przedstawiono kwadraty utworzone w sposób opisany powyżej.



10.
0–1–2–3–4

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego nieskończonego ciągu. Zapisz obliczenia.

$a_1 = a$

$a_2^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{4}a\right)^2 = \frac{9}{16}a^2 + \frac{1}{16}a^2$ $\quad a_2^2 = \frac{10}{16}a^2$ $\quad a_n > 0 \quad n \in \mathbb{N}$

$a_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}a$

$a_3 = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 a$

$a_4 = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^3 a$

$q = \frac{\sqrt{10}}{4}$

q dla długości boków = q dla obwodów $\quad L_1 = 4a$

$L_2 = 4a \cdot \frac{\sqrt{10}}{4}$

$L_3 = 4a \cdot \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2$

jeżeli $|q| < 1$ to ciąg (S_n) ma granicę równą

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{10}}{4}} = \frac{4a}{\frac{4}{4}-\frac{\sqrt{10}}{4}} = 4a \cdot \frac{4}{\frac{4-\sqrt{10}}{4}} = 4a \cdot \frac{4}{4-\sqrt{10}} = \frac{16a}{4-\sqrt{10}} \cdot \frac{4+\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}} =$$

$$= \frac{16a(4+\sqrt{10})}{16-10} = \frac{8a(4+\sqrt{10})}{3}$$

11.

0–1–2–3–4–5

Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 2$, dla których równanie

$$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -28$. Zapisz obliczenia.

$x^2 + 4x - \frac{m-3}{m-2} = 0$

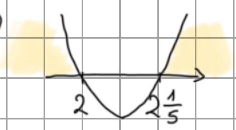
$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1^3 + x_2^3 > -28 \end{cases}$ $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{m-3}{m-2}\right) = 16 + 4 \cdot \frac{m-3}{m-2} = \frac{16m-32}{m-2} + \frac{4m-12}{m-2} = \frac{20m-44}{m-2} > 0$

$(20m-44)(m-2) > 0$

$4(5m-11)(m-2) > 0$

$m_1 = 2\frac{1}{5}$ $m_2 = 2$



$m \in (-\infty, 2) \cup (2\frac{1}{5}, +\infty)$

wzory Viete'a: $\Delta \geq 0$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2) =$

$= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = (-\frac{b}{a})((-\frac{b}{a})^2 - 3 \cdot \frac{c}{a}) =$

$= -4((-4)^2 - 3 \cdot (-\frac{m-3}{m-2})) = -4(16 + \frac{3m-9}{m-2})$

$-4(16 + \frac{3m-9}{m-2}) > -28$ $/:(-4)$

$16 + \frac{3m-9}{m-2} < 7$

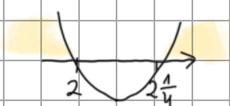
$9 + \frac{3m-9}{m-2} < 0$

$\frac{9m-18}{m-2} + \frac{3m-9}{m-2} < 0$

$\frac{12m-27}{m-2} < 0$ $/:3$

$\frac{4m-9}{m-2} < 0$ $(4m-9)(m-2) < 0$

$m_3 = 2\frac{1}{4}$ $m_4 = 2$



$m \in (2, 2\frac{1}{4})$

$m \in (2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{4})$

Zadanie 12.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$ dla każdej liczby dodatniej x.

12.1.
0–1–2

Zadanie 12.1. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x wyrażenie

$$81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$$

można równoważnie przekształcić do postaci $x^4 + x^2 - 6x$.

$$81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$81^{\log_3 x} = (3^4)^{\log_3 x} = 3^{4\log_3 x} = 3^{\log_3 x^4} = x^4$$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \qquad \log_a b = c \Rightarrow a^c = b$$

$$\frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} = \frac{\log_2 27 \cdot \log_3 2}{3} = \frac{\frac{\log_3 27}{\log_3 2} \cdot \log_3 2}{3} = \frac{\log_3 27}{3} = \frac{\log_3 3^3}{3} =$$

$$= \frac{3}{3} = 1$$

$$81^{\log_3 x} + \frac{2 \cdot \log_2 \sqrt{27} \cdot \log_3 2}{3} \cdot x^2 - 6x = x^4 + 1 \cdot x^2 - 6x = x^4 \cdot x^2 - 6x$$

c.n.d.

Zadanie 12.2. (0–4)

12.2. 0–1–2–3–4

Oblicz najmniejszą wartość funkcji f określonej dla każdej liczby <u>dodatniej</u> x. Zapisz obliczenia.

Wskazówka: przyjmij, że wzór funkcji f można przedstawić w postaci $f(x) = x^4 + x^2 - 6x$.

$f(x) = x^4 + x^2 - 6x \qquad x \in (0, +\infty)$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 + 0 - 0 = 0$

$f(x) = x^r \qquad f'(x) = r \cdot x^{r-1}$ – wzór na pochodną

$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 2x - 6 = 0 \quad / : 2$

$2x^3 + x - 3 = 0$

$q \in \{\pm 1, \pm 2\} \qquad p \in \{\pm 1, \pm 3\} \qquad \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\}$

	2	0	1	-3
		2	2	3
1	2	2	3	0

$(x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 4 - 24 = -20 < 0$

$f'(x) = 0$ dla $x = 1$

$f'(x)$:

$f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 1)$

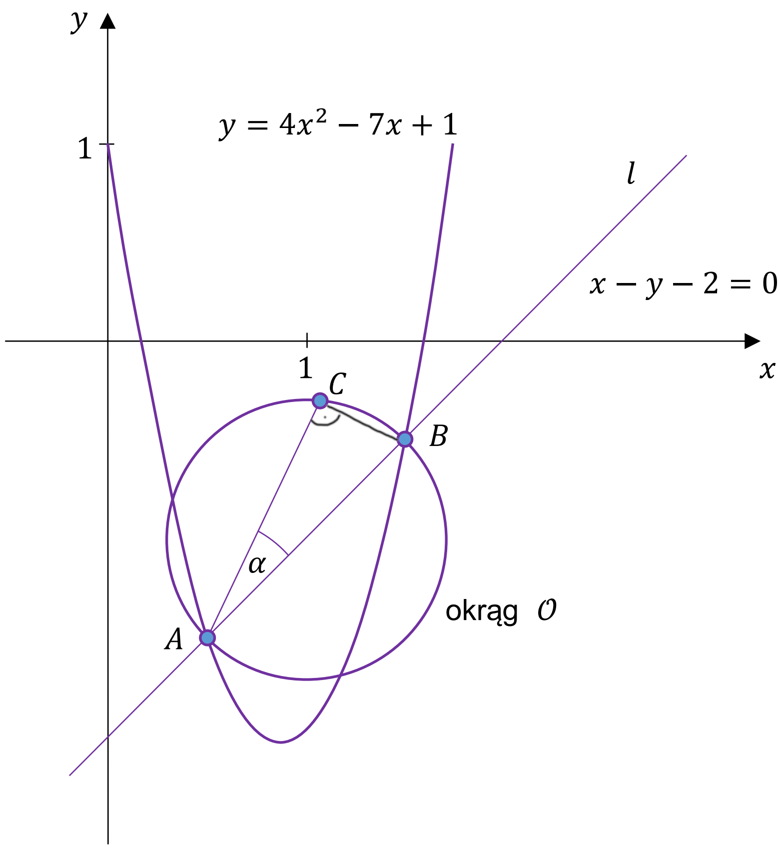
$f \searrow$ dla $x \in (0, 1\rangle$

$f \nearrow$ dla $x \in \langle 1, +\infty)$

$f_{min} = f(1) = 1^4 + 1^2 - 6 \cdot 1 = 1 + 1 - 6 = -4$

Zadanie 13. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta l o równaniu $x - y - 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = 4x^2 - 7x + 1$ w punktach A oraz B. Odcinek AB jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$. Punkt C leży na okręgu $\mathcal{O}$ nad prostą l, a kąt BAC jest ostry i ma miarę α taką, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ (zobacz rysunek).



13.
0–1–2–3–4–5–6

Oblicz współrzędne punktu C. Zapisz obliczenia.

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y = 4x^2 - 7x + 1 \end{cases}$$

$x - (4x^2 - 7x + 1) - 2 = 0$

$x - 4x^2 + 7x - 1 - 2 = 0$

$-4x^2 + 8x - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \quad x_1 = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 8^2 - 4\cdot(-4)\cdot(-3) = 16$

$x_1 = \frac{-8+4}{2\cdot(-4)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-8-4}{2\cdot(-4)} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$

$y = x - 2$

$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2} \\ y_A = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$A = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{cases} x_B = \frac{3}{2} \\ y_B = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$X_S = \frac{X_A + X_B}{2}$ $\quad Y_S = \frac{Y_A + Y_B}{2}$ – współrzędne środka odcinka

$S = \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} ; \frac{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (1, -1)$

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ – długość odcinka

$r = |AS| = \sqrt{(1-\frac{1}{2})^2 + (-1+\frac{3}{2})^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

ΔACB jest prostokątny (oparty na średnicy okręgu)

$tg\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{1}{3}$ $\quad |AC| = 3|BC|$ $\quad C(x, y)$

$\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{3}{2})^2} = 3\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2} \quad /^2$

$(x-\frac{1}{2})^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = 9((x-\frac{3}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2)$

$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = 9(x^2 - 3x + \frac{9}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4})$

$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + 3y + \frac{9}{4} = 9x^2 - 27x + \frac{90}{4} + 9y^2 + 9y$

$0 = 8x^2 - 26x + \frac{80}{4} + 8y^2 + 6y \quad /:2$

$0 = 4x^2 - 13x + 10 + 4y^2 + 3y$

$r = |CS| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad /^2$

$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$

$x^2 - 2x + y^2 + 2y + 1\frac{1}{2} = 0$

$$\begin{cases} 4x^2 - 13x + 4y^2 + 3y + 10 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 + 2y + 1\frac{1}{2} = 0 \quad /\cdot(-4) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 4x^2 - 13x + 4y^2 + 3y + 10 = 0 \\ -4x^2 + 8x - 4y^2 - 8y - 6 = 0 \end{cases}$$

$-5x - 5y + 4 = 0$

$5y = -5x + 4$

$y = -x + \frac{4}{5}$

$$\begin{cases} 4x^2 - 13x + 4y^2 + 3y + 10 = 0 \\ y = -x + \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$4x^2-13x+4\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+3\cdot\left(-x+\frac{4}{5}\right)+10=0$$

$$4x^2-13x+4\left(x^2-\frac{8}{5}x+\frac{16}{25}\right)-3x+\frac{12}{5}+10=0$$

$$4x^2-13x+4x^2-\frac{32}{5}+\frac{64}{25}-3x+\frac{12}{5}+10=0$$

$$8x^2-\frac{112}{5}x+\frac{374}{25}=0$$

$$\Delta=\frac{576}{25}$$

$$x_1=\frac{11}{10} \quad \vee \quad x_2=\frac{17}{10}$$

$$\frac{11}{10}<x_B<\frac{17}{10} \quad \Rightarrow \quad x_C=\frac{11}{10}$$

$$y=-\frac{11}{10}+\frac{4}{5}=-\frac{3}{10}$$

$$C\left(\frac{11}{10},-\frac{3}{10}\right)$$

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2023