DM Complexité et Calculabilité

Guillaume NEDELEC et Alfred Aboubacar SYLLA

Pour le 5 Novembre 2018

1 Définition du problème

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Un triangle T dans G est une clique de taille 3, autrement dit un ensemble $T = \{u, v, w\}$, tel que $u, v, w \in V$ sont distincts et $\{(u, v), (v, w), (w, u)\} \subseteq E$.

Une partition de G en triangles est une partition $V = T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_k$ des sommets de G telle que chaque T_i est un triangle.

Problème *Triangles*
Entrée : Un graphe non-orienté G.
Sortie : Est-ce que G possède une partition en triangles ?

2 Degré 3

Vous allez montrer que le problème $Triangles$ peut être résolu en temps $O(|V|+|E|)$ (linéaire) si le degré de chaque sommet est au plus 3. Le degré d'un sommet est le nombre de voisins.

1. Que peut-on dire si G contient un sommet de degré 1 ?

REPONSE : Si G contient un sommet de degré 1, alors il ne forme pas de triangle avec d'autres sommets. On peut en déduire que G ne possède pas de partition en triangles.

2. Supposez que v est un sommet de degré 2. Montrez qu'on peut soit répondre "non" tout de suite, ou enlever des sommets de G, en obtenant G_0 tel que le G est instance positive de $Triangles$ ssi G_0 l'est.

REPONSE : Si le sommet v est de degré 2, on peut repondre "non" tout de suite si et seulement les 2 sommets adjacents à v ne sont pas reliés par une arête entre eux. Dans ce cas si on enleve des sommets de G (différent de v et de ses voisins), G_0 ne pourra pas être une instance positive de $Triangles$ étant donné que v ne forme pas de triangle avec ses 2 voisins.

3. On suppose maintenant que tous les sommets ont degré 3. Les 4 cas de la figure ci-dessus indiquent quel est le voisinage possible du sommet v. Raisonnez comme au point précédent

REPONSE :

Graphe 1 : Les sommets adjacents de v ne forment pas un triangle avec v. Donc même si ils forment des triangles avec d'autres voisins ou qu'on les retire, v ne fera partie d'aucun triangle et donc G_1 sera une instance négative de $Triangles$.

Graphe 2 : Le sommets v a deux sommets adjacents reliés par une arête. Ils forment donc un triangle. Pour vérifier que le reste du graphe est partitionné en triangles, on fait la même vérification sur le 3^{ieme} sommet adjacent à v avec ses 2 autres voisins. Si il forme un triangle, alors le graphe G_2 est une instance positive sinon non.

Graphe 3: Le graphe G_3 n'est pas une instance positive car les sommets adjacents de v forment 2 triangles où v appartient aux deux triangles. Les sommets supposés de degré 3 au maximum ne peuvent donc pas former d'autres triangles afin de n'inclure v que dans 1. On en déduit donc que G_3 est une instance négative de $Triangles$

Graphe 4: En suivant le même raisonnement qu'avec le graphe G_3, G_4 est une instance négative de $Triangles$ car tous les voisins de v forme des triangles avec v, ne formant pas des triangles disjoints. De plus tous les voisins de v sont de degré 3 et ne peuvent donc pas former d'autres triangles.

4. Proposez un algorithme linéaire pour résoudre $Triangles$ sur les graphes de degré maximal au plus 3.

REPONSE :

```
G = (V,E);
triangle = vrai;
i = 0;
Tant que (triangle == vrai ET i < |V|) {
    v = V[i];
    if (v.degre == 1 OU v.degre == 0) {
        triangle = faux;
    }
    else if (v.degre = 2) {
        Si il n'existe pas d'aretes entre les 2 voisins de v {
          triangle = faux;
        }
    }
    else if (v.degre = 3){
        Si il existe aucune OU plus d'une arete entre les 3 voisins
     de v {
            triangle = faux;
        }
    }
    i++;
}
retourner triangle;
```

Listing 1: Algortihme Triangles

La compléxité de cet algorithme est de $O(|V| + |E|)$, cette complexité est linéaire.

3 Réduction de *Triangles* vers SAT

Afin d'effectuer une réduction du problème *Triangles* vers *SAT*, nous avons utiliser des variables booléennes de la forme $x_{u,v}$. Nous allons donner une orientation à chaque triangle, ce qui permet de définir un "successeur" pour chaque noeud.

Par exemple, si $\{1, 3, 6\}$ forme un triangle, alors une orientation possible est 3, 1, 6, le "successeur" de 1 étant 6, le "successeur" de 6 étant 3, et le "successeur" de 3 étant 1. La variable $x_{u,v}$ est vraie si v est le "successeur" de u (dans le sens décrit précédemment).

Pour effectuer la réduction nous avons donc découper le problèmes en plusieurs contraintes dont voici les formules :

1. Un sommet est le successeur de son successeur

$$\bigwedge_{u,v,w \in V; u \neq v \neq w} (\neg x_{u,v} \vee \neg x_{v,w} \vee x_{w,u})$$

Complexité : $O(|V|^3 + |E|^3)$

2. Pour chaque sommet $u \in V$, il n'existe qu'un sommet $v \in V$ où v est successeur de u

$$\bigwedge_{u,v,w \in V; u \neq v \neq w} (\neg x_{u,v} \vee \neg x_{u,w})$$

Complexité : $O(|V|^3 + |E|^3)$

3. Pour chaque sommet $u \in V$, il n'existe qu'un sommet $v \in V$ où u est successeur de v

$$\bigwedge_{u,v,w \in V; u \neq v \neq w} (\neg x_{u,v} \vee \neg x_{w,v})$$

Complexité : $O(|V|^3 + |E|^3)$

4. Avec n le nombre de sommet de G, Si $n \bmod 3 \neq 0$ alors G ne possède pas une partition en triangles

Complexité : Constante

La complexité totale de la formule est donc : $O(3|V|^3+3|E|^3)$ soit $O(|V|^3+|E|^3)$
CONCLUSION : Cette réduction est donc une réduction polynomiale.