Vorlesungsmitschrieb

Streutheorie

Prof. Dr. Roland Griesmaier

SS 2023

22. August 2023

Geschrieben in LaTeX von Raphael Adalid Braun
Korrekturhinweise/Verbesserungsvorschläge bitte an raphael.adalid@web.de

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung

1 Physikalischer Hintergrund

Wir untersuchen direkte und inverse Streuprobleme für zeitharmonische, akustische Wellen in einem 3-dimensionalen Raum mit räumlich beschränkten Streukörpern und Schallquellen. Zunächst leiten wir ein linearisiertes Modell für die Ausbreitung von akustischen Wellen her, indem wir das Ganze als fluiddynamisches Problem auffassen. Wir bezeichnen mit

- $v(x,t) \in \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit,
- $p(x,t) \in \mathbb{R}$ den Druck,
- $\rho(x,t) \in \mathbb{R}$ die Dichte,

des Fluid in $x \in \mathbb{R}^3$ zur Zeit $t \in \mathbb{R}$.

Massenerhaltung: Betrachte ein glatt berandetes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$ und sei ν das äußere Einheitsnormalenfeld an ∂G. Dann beschreibt $\big(\nu \cdot (\rho v)\big)(x,t)$ die Masse, die G pro Zeiteinheit durch ein infinitesimal kleines Flächenelement $\mathrm{d}s$ im Punkt $x \in \partial G$ zur Zeit t verlässt.

$$\underbrace{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}_{\text{Masseverlust}} \underbrace{\int_G \rho \mathrm{d}x}_{\text{Gesamtmasse}} = \int_{\partial G} \nu \cdot (\rho v) \mathrm{d}s = \int_G \operatorname{div}(\rho v) \mathrm{d}x.$$

Da G beliebig war, folgt

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \tag{1.1}$$

(*Massenerhaltung*).

Impulserhaltung: Sei G wieder wie eben. Die Kraft, die auf G wirkt, sei gegeben durch

$$S = \underbrace{-\int_{\partial G} \rho \nu \mathrm{d}s}_{\text{Druck von außen}} + \underbrace{\int_G g \mathrm{d}x}_{\text{äußeres Kraftfeld}} - \underbrace{\int_G \gamma \rho v \mathrm{d}x}_{\substack{\text{linearer, viskoser}\\ \text{Dämpfungsterm}}}.$$

Bezeichnet man mit $m \coloneqq \rho v$ die (3-dim.) Impulsdichte, so folgt für $i \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{aligned}
\underbrace{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\int_G m_i \mathrm{d}x}_{\text{Gesamtimpuls}}}_{\text{Impulsänderung in } G} &= \underbrace{\int_{\partial G} \nu \cdot (m_i v) \mathrm{d}s}_{\text{Impulsfluss}} - \underbrace{S_i}_{\text{Kräfte}} \\
&= \int_{\partial G} (\nu \cdot v) m_i \mathrm{d}s + \int_{\partial G} p \nu_i \mathrm{d}s - \int_G g_i \mathrm{d}x + \int_G \gamma m_i \mathrm{d}x \\
&= \int_{\partial G} (m_i v + p e_i) \cdot \nu \mathrm{d}s - \int_G g_i \mathrm{d}x + \int_G \gamma m_i \mathrm{d}x \\
&= \int_G \operatorname{div}(m_i v + p e_i) \mathrm{d}x - \int_G g_i \mathrm{d}x + \int_G \gamma m_i \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Da G beliebig war, folgt wiederum

$$\frac{\mathrm{d}m_i}{\mathrm{d}t} + \operatorname{div}(m_i v) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i + \gamma m_i = 0, \qquad i \in \{1,2,3\}.$$

Einsetzen von $m = \rho v$ und (1.1) liefert

$$0 = v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\rho v_i) \operatorname{div} v + \big((\nabla \rho) v_i + \rho \nabla v_i\big) \cdot v + \frac{\partial p}{\partial x_i} - g_i + \gamma \rho v_i.$$

Daraus ergibt sich die *Euler-Gleichung*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma v + (v \cdot \nabla)v + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho} g, \tag{1.2}$$

mit $v \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, also

$$(v \cdot \nabla)v = \begin{pmatrix} v \cdot \nabla v_1 \\ v \cdot \nabla v_2 \\ v \cdot \nabla v_3 \end{pmatrix}.$$

Annahme: Der Druck p hängt nur von der Dichte ρ ab (isentrope gase) (*Zustandsgleichung*)

$$p = p(\rho). \tag{1.3}$$

Das nichtlineare System (1.1)-(1.3) beschreibt die Ausbreitung von Schallwellen. Da Schallwellen in der Regel durch kleine Druckänderungen verursacht werden macht es Sinn, ein um einen stationären Zustand

$$v_0 = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0 = p(\rho_0), \qquad \text{(konstant)}$$

linearisiertes Modell zu betrachten.

Ansatz:

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \varepsilon v_1(x,t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ p(x,t) &= p_0 + \varepsilon p_1(x,t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \rho(x,t) &= \rho_0 + \varepsilon \rho_1(x,t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ g(x,t) &= \varepsilon g_1(x,t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Einsetzen in (1.1)-(1.3) liefert (unter Vernachlässigung der Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 v_1) &= 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + \gamma v_1 + \frac{1}{\rho_0}\nabla p_1 &= \frac{1}{\rho_0} g_1, \\ p_1 &= \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0)\rho_1 =: c^2 \rho_1, \end{aligned}$$

wobei $c^2(x) := \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_0)$ die Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Differenzieren der letzten Gleichung erlaubt, v_1 und ρ_1 zu eliminieren:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -c^2 \operatorname{div}(\rho_0 v_1),$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} &= -c^2 \operatorname{div}\big(\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}\big) \\ &= -c^2 \operatorname{div}\Big(\rho_0\Big(\frac{1}{\rho_0} g_1 - \gamma v_1 - \frac{1}{\rho_0}\nabla p_1\Big)\Big) \\ &= -c^2 \operatorname{div}(g_1) - c^2 \gamma \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + c^2 \Delta p_1 \\ &= -c^2 \operatorname{div}(g_1) - \gamma \frac{\partial p_1}{\partial t} + c^2 \Delta p_1. \end{aligned}$$

Hier wurden Terme, die Ableitungen von γ enthalten, vernachlässigt. Daraus ergibt sich die *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(x,t) + \gamma \frac{\partial p_1}{\partial t}(x,t) - c^2(x)\Delta p_1(x,t) = -c^2(x) \operatorname{div}(g_1)(x,t). \tag{1.4}$$

Als nächstes nehmen wir an, dass p_1 und $\operatorname{div} g_1$ zeitharmonisch sind, d.h., dass

$$p_1(x,t) = \operatorname{Re}\big(u(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big), \qquad \operatorname{div} g_1(x,t) = \operatorname{Re}\big(f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\big), \tag{1.5}$$

wobei $\omega > 0$ die Frequenz genannt wird und die komplexwertigen Funktionen u und f nur von der Ortsvariable x abhängen. Einsetzen von (1.5) in (1.4) liefert, dass

$$\Delta u(x) + \frac{\omega^2}{c^2}\Big(1 + \frac{\mathrm{i}\gamma}{\omega}\Big)u(x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.6}$$

d.h. u löst die 3-dimensionale Helmholtzgleichung.

(1.6) beschreibt Ausbreitung zeitharmonischer akustischer Wellen mit kleiner Amplitude in einem (nicht zu stark) inhomogenen Medium. Wir werden oft ein homogenes, nicht absorbierendes Referenzmedium (zB. Luft) mit $c = c_0$ konstant und $\gamma = 0$ betrachten. Dafür definieren wir die **Wellenzahl**

$$k \coloneqq \frac{\omega}{c_0} > 0,$$

und den **Brechungsindex**

$$n^2(x) \coloneqq \frac{c_0^2}{c^2(x)}\Big(1 + \frac{\mathrm{i}\gamma}{\omega}\Big).$$

Damit vereinfacht sich (1.6) zu

$$\Delta u + k^2 n^2 u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \tag{1.7}$$

Wir nehmen immer an, dass $n^2 - 1$ und f kompakten Träger haben, d.h. dass wir es nur mit räumlich beschränkten Quellen und Streukörpern zu tun haben. Insbesondere existiere ein $R > 0$, sodass

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}.$$

Beispiel 1.1. Sei $f \equiv 0$ $n = n(r)$ und $u = u(r)$, $r = |x|$, radialsymmetrische Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Der Laplace-Operator in Kugelkoordinaten lautet

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\Big),$$

d.h. $u = u(r)$ erfüllt (1.7) genau dann, wenn

$$\frac{1}{r^2}\big(r^2 u'(r)\big)' + k^2 n^2(r) u(r) = 0,$$

also

$$u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) + k^2 n^2(r) u(r) = 0 \qquad \text{für } r > 0. \tag{1.8}$$

Substituiert man $u(r) = \frac{v(r)}{r}$, dann folgt

$$u' = \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2}, \qquad u'' = \frac{v''}{r} - \frac{2v'}{r^2} + \frac{2v}{r^3},$$

und damit

$$v'' - \frac{2v'}{r} + \frac{2v}{r^2} + \frac{2v'}{r} - \frac{2v}{r^2} + k^2 n^2(r) v(r) = 0. \tag{1.9}$$

Im einfachsten Fall $n^2(r) \equiv 1$ sind zwei linear unabhängige Lösungen von (1.9) gegeben durch

$$v^+(r) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}, \quad v^-(r) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}, \quad r > 0,$$

d.h.

$$u^+(r) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|}, \quad u^-(r) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|x|}}{|x|}, \quad |x| > 0,$$

sind zwei linear unabhängige Lösungen von (1.8). Die zugehörigen Lösungen der zeitabhängigen Gleichung sind

$$p_1^{\pm}(x,t) = \operatorname{Re}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} u^{\pm}(x)\big) = \operatorname{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(\pm|x| - ct)}}{|x|}\right) = \frac{\cos\big(k(|x| \mp ct)\big)}{|x|},$$

wobei

$$p_1^+ \mathrel{\widehat{=}} \text{nach außen laufende Kugelwelle,}$$
$$p_1^- \mathrel{\widehat{=}} \text{nach innen laufende Kugelwelle.}$$

Da p_1^- unphysikalisch ist, wählen wir p_1^+ als *die* Lösung aus. Für $u^\pm$ bedeutet das, wegen

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial |x|} = \pm \mathrm{i}k \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k|x|}}{|x|} - \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k|x|}}{|x|^2} = \pm \mathrm{i}ku^\pm - \frac{u^\pm}{|x|},$$

dass die physikalisch relevante Lösung u^+ durch

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial |x|} \mp \mathrm{i}ku^\pm = \mathcal{O}(|x|^{-2}),$$

von u^- unterschieden werden kann.

Definition 1.2 (Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung)**.** *Sei $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)})$ eine Lösung von*

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad \textit{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}.$$

Dann erfüllt u die ***Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung*** *(SAB), falls*

$$\lim_{r \to \infty} r\Big(\frac{\partial u}{\partial r}(x) - \mathrm{i}ku(x)\Big) = 0, \quad r = |x|, \tag{1.10}$$

wobei der Grenzwert gleichmäßig bezüglich $\widehat{x} = \frac{x}{|x|} \in \mathcal{S}^2$ angenommen wird.

Bemerkung. Da wir die Helmholtzgleichung in einem unbeschränkten Gebiet betrachten, können keine Randbedingungen vorgeschrieben werden, wie dies für elliptische Gleichungen in beschränkten Gebieten üblich ist. Die SAB entspricht einer Randbedingung „im Unendlichen".

Für eine Herleitung der SAB im ein- und zweidimensionalen Fall anhand von Kausalitätsüberlegungen für die Wellengleichung siehe [Sylvester09].

Beispiel 1.3 (ebene Wellen)**.** Weitere spezielle Lösungen von $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3$ sind sogenannte *ebene Wellen*

$$u(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{1.11}$$

mit Ausbreitungsrichtung $d \in \mathcal{S}^2$. Die zugehörige zeitabhängige Welle ist

$$p_1(x,t) = \operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}\right) = \cos(kx\cdot d - \omega t).$$

Wellenlänge $\lambda k = 2\pi \Leftrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2\pi c_0}{\omega}$. Ebene Wellen erfüllen SAB *nicht* gleichmäßig für $\widehat{x} \in \mathcal{S}^2$, da

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x) - \mathrm{i}ku(x) = \mathrm{i}k(d\cdot \widehat{x} - 1)u(x),$$

und da $|u(x)| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\cdot x}| = 1$, konvergiert das nur für $d \cdot \widehat{x} = 1$ gegen Null.

Die Lösung von (1.7) wird im Folgenden als **direktes Problem** bezeichnet. Das **inverse Problem** besteht darin, Information über Schallquellen und Streuobjekte anhand von ausgestrahlter Wellen bzw. gestreuter Wellen (außerhalb von $B_R(0)$, der alle Streukörper und Quellen enthält) zu rekonstruieren.

In diesem Zusammenhang macht es auch Sinn, die Streukörper von außen zu „beleuchten" um Messdaten zu generieren (active sensing vs. passive sensing). Betrachte dazu ein *Primärfeld* u^i, sodass

$$\Delta u^i + k^2 u^i = 0 \quad \text{ in } \mathbb{R}^3. \tag{1.12}$$

Bezeichne mit u die Lösung von (1.7) in Gegenwart von u^i, die durch u^i verursacht wird, also

$$\Delta u + k^2 n^2 u = f, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3, \tag{Gesamtfeld}$$

dann nennt man

$$u^s := u - u^i$$

das *gestreute Feld* (das durch Streuung von u^i an den Streuobjekten $n^2 \neq 1$ und durch f verursacht wird). u^s löst

$$\begin{aligned}
\Delta u^s + k^2 n^2 u^s &= \Delta(u - u^i) + k^2 n^2 (u - u^i) \\
&= f - \Delta u^i - k^2 n^2 u^i \\
&= f - \Delta u^i - k^2 u^i + k^2(1 - n^2) u^i \\
&= f - k^2(n^2 - 1) u^i, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Um die physikalisch sinnvolle (kausale) Lösung auszuwählen, soll u^s die SAB erfüllen.

2 Lösungen der Helmholtzgleichung im homogenen Medium — Darstellungssätze

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt und

$$\mathcal{C}^n(D) := \big\{w\colon D \to \mathbb{R} \mid w \text{ ist } n\text{-mal stetig differentierbar}\big\},$$
$$\mathcal{C}^n(\overline{D}) := \big\{w \in \mathcal{C}^n(D) \mid \mathrm{D}^\alpha w \text{ ist gleichmäßig stetig für alle } |\alpha| \leq n\big\},$$

d.h. ist $w \in \mathcal{C}^n(\overline{D})$, dann kann $\mathrm{D}^\alpha w$ stetig auf $\overline{D}$ fortgesetzt werden für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \leq n$.

Definition 2.1.

(i) Der Rand ∂D heißt $\boldsymbol{\mathcal{C}^n}$*, $n \in \mathbb{N}$, falls zu jedem $z_0 \in \partial D$ ein $r > 0$ und eine $\mathcal{C}^n$-Funktion $\gamma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert, sodass (bis auf Umbenennung und Umorientierung des Koordinatensystems)*

$$D \cap B_r(z_0) = \{z = (x_1, x_2, x_3) \in B_r(z_0) \mid x_3 > \gamma(x_1, x_2)\}.$$

Die Menge D heißt $\boldsymbol{\mathcal{C}^n}$*, falls ∂D $\mathcal{C}^n$ ist.*

(ii) Ist ∂D $\mathcal{C}^1$, so kann ein ***äußeres Einheitsnormalenfeld*** *$\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^\top$ definiert werden durch*

$$\nu(z_0) = \left\| \Big(\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(x_1, x_2), \frac{\partial \gamma}{\partial x_2}(x_1, x_2), 1 \Big) \right\|^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial \gamma}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad z_0 = (x_1, x_2, x_3) \in \partial D,$$

es ist $\|\nu(z_0)\| = 1$ und $\nu(z_0) \perp T_{\partial D}(z_0)$ für alle $z_0 \in \partial D$, wobei $T_{\partial D}(z_0)$ die Tangentialebene an ∂D in z_0 sei.

Satz 2.2 (Gaußscher Satz & Greensche Formeln)**.**

(i) Sei $u \in \mathcal{C}^1(\overline{D}, \mathbb{R}^3)$. Dann ist

$$\int_D \operatorname{div}(u) \mathrm{d}x = \int_{\partial D} \nu \cdot u \mathrm{d}s. \tag{2.1}$$

(ii) Sei $u \in \mathcal{C}^1(\overline{D})$ und $v \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$. Dann ist

$$\int_D u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \mathrm{d}s, \tag{2.2}$$

mit $\frac{\partial v}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla v$, also entspricht (2.2) *einfach* (2.1) *mit $u \nabla v$ anstelle von u.*

(iii) Seien $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$, dann ist

$$\int_D u \Delta v - v \Delta u \mathrm{d}x = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathrm{d}s, \tag{2.3}$$

dies entspricht (2.2) *mit u, v und v, u eingesetzt voneinander subtrahiert.*

Beweis. Analysis 3 bzw. Forster 3, §15. □

Definition 2.3 (Fundamentallösung). *Die Funktion*

$$\Phi(x) := \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}^3, x \neq 0,$$

*heißt **Fundamentallösung** für die Helmholtzgleichung.*

Wir haben bereits in Beispiel 1.1 gesehen, dass Φ eine Lösung der *Helmholtzgleichung*

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist, die die SAB erfüllt.

Satz 2.4 (Darstellungssatz im Inneren). *Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet und $\nu(x)$ die äußere Einheitsnormale an ∂D in x. Sei $u \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$ eine Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in D, dann gilt*

$$\int_{\partial D} \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)}\mathrm{d}s(y) = \begin{cases} u(x), & x \in D, \\ 0, & x \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Beweis. Schritt 1: Sei $x \notin \overline{D}$. Dann lösen u und $\Phi(x - \cdot)$ die Helmholtzgleichung in D. Aus (2.3) folgt

$$\int_{\partial D} \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)}\mathrm{d}s(y) = \int_D \Phi(x-y)\underbrace{\Delta u(y)}_{=-k^2 u(y)} - u(y)\underbrace{\Delta_y \Phi(x-y)}_{=-k^2\Phi(x-y)}\mathrm{d}y = 0.$$

Schritt 2: Sei $x \in D$. Für $\varepsilon > 0$, sodass $\overline{B_\varepsilon(x)} \subset D$ erhalten wir wie in Schritt 1, dass

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D\setminus\overline{B_\varepsilon(x)}} \Phi(x-y)\Delta u(y) - u(y)\Delta_y\Phi(x-y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial D} \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)}\mathrm{d}s(y) \\ &\quad - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)}\mathrm{d}s(y), \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale an ∂D bzw. $\partial B_\varepsilon(x)$ bezeichnet. Da auf $\partial B_\varepsilon(x)$

$$\nu(y) = \frac{y-x}{\varepsilon},$$

gilt und außerdem

$$\Phi(x-y) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi\varepsilon} \quad \text{und} \quad \nabla_y \Phi(x-y) = \Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{\varepsilon}\Big)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi\varepsilon}\frac{y-x}{\varepsilon},$$

folgt

$$\begin{aligned} &- \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)}\mathrm{d}s(y) \\ &= - \int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{\varepsilon}\Big)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi\varepsilon}\mathrm{d}s(y), \end{aligned}$$

und damit gilt für $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ mit $\overline{B_{\varepsilon_0}(x)} \subset D$

$$\left|\int_{|x-y|=\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\mathrm{d}s(y)\right| \leq \frac{1}{4\pi\varepsilon}\Big\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\|_{L^\infty(\overline{B_{\varepsilon_0}(x)})}\int_{|x-y|=\varepsilon} 1\mathrm{d}s = \varepsilon\Big\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big\|_\infty \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Analog folgt

$$\left|\int_{|x-y|=\varepsilon} u(y)\mathrm{i}k\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi\varepsilon}\mathrm{d}s(y)\right| \leq k\|u\|_{L^\infty\left(\overline{B_{\varepsilon_0}(x)}\right)}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{|x-y|=\varepsilon} 1\mathrm{d}s \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ferner ist

$$\int_{|x-y|=\varepsilon} u(y)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi\varepsilon^2}\mathrm{d}s(y) = \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon}}_{\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}1}\underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{|x-y|=\varepsilon} u(y)\mathrm{d}s(y)}_{\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}u(x)} \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} u(x).$$

Da (2.5) für alle $\varepsilon > 0$ gilt, also insbesondere im Limes $\varepsilon \to 0$, folgt die Behauptung. □

Theorem 2.5. *Ist $u \in \mathcal{C}^2(D)$ eine Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in einem Gebiet D, so ist u analytisch, d.h. es lässt sich lokal um jedes $x \in D$ in eine Potenzreihe entwickeln.*

Beweis. Sei $x \in D$ und $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(x) \subset D$. Dann ist nach Satz 2.4

$$u(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)}\mathrm{d}s(y).$$

Da $\Phi(x-y)$ und $\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}$ für $x \neq y$ analytisch sind, und der Integrand lokal gleichmäßig beschränkt ist, folgt (mit dem Satz von Lebesgue), dass u um x in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Da x beliebig war, folgt die Behauptung. □

Eine Folgerung von Theorem 2.5 ist, dass Lösungen der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in einem Gebiet D, die auf einer offenen Teilmenge verschwinden, identisch Null sind.

Lemma 2.6. *Für alle $y \in \mathbb{R}^3$ löst die Funktion $\Phi(\cdot - y)$ die Helmholtzgleichung $\Delta\Phi(\cdot - y) + k^2\Phi(\cdot - y) = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$ und erfüllt die SAB*

$$\frac{x}{|x|}\cdot\nabla_x\Phi(x-y) - \mathrm{i}k\Phi(x-y) = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big), \qquad \text{für } |x| \to \infty, \tag{2.6}$$

gleichmäßig für $\frac{x}{|x|} \in \mathcal{S}^2$ und $y \in Y$ für jede kompakte Teilmenge $Y \subset \mathbb{R}^3$. Außerdem ist

$$\Phi(x-y) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{4\pi|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big), \qquad \text{für } |x| \to \infty, \tag{2.7}$$

gleichmäßig für $\widehat{x} = \frac{x}{|x|} \in \mathcal{S}^2$ und $y \in Y \subset \mathbb{R}^3$ kompakt.

Beweis. Für festes $y \in \mathbb{R}^3$ und $x \in \mathbb{R}^3$ beliebig erhalten wir mit dem Satz von Taylor, dass

$$\begin{aligned}
|x-y| &= \sqrt{|x|^2 - 2x\cdot y + |y|^2} \\
&= |x|\sqrt{1 - 2\frac{\widehat{x}\cdot y}{|x|} + \frac{|y|^2}{|x|^2}} \\
\varepsilon = \tfrac{1}{|x|} \quad &= |x|\sqrt{1 - 2\varepsilon\widehat{x}\cdot y + \varepsilon^2|y|^2} \\
&= |x|\big(1 - \varepsilon\widehat{x}\cdot y + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\big) \\
&= |x| - \widehat{x}\cdot y + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|}\Big),
\end{aligned}$$

für $|x| \to \infty$, d.h. $\varepsilon \to 0$. Analog folgt, dass

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{|x|}\Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\Big),$$

für $|x| \to \infty$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\Phi(x-y) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|} \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\Big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\Big) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{4\pi|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{x}{|x|}\cdot\nabla_x\Phi(x-y) &= \widehat{x}\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{|x-y|}\Big)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-y|}}{4\pi|x-y|} \\
&= \widehat{x}\cdot(x-y)\frac{1}{|x|}\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\Big)\Big(\mathrm{i}k+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\Big)\Big(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{4\pi|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big)\Big) \qquad (2.8)\\
&= \mathrm{i}k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{4\pi|x|} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big).
\end{aligned}$$

Damit folgen (2.6) und (2.7). Die gleichmäßige Abhängigkeit der Restglieder von $\widehat{x}\in\mathcal{S}^2$ und $y\in Y$ erhält man unmittelbar aus der Stetigkeit der Restglieder in den Taylorentwicklungen. □

Theorem 2.7 (Darstellungssatz im Äußeren)**.** *Sei $D\subset\mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand ∂D. Ist $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3\setminus D)$ eine Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$, die die SAB erfüllt, dann gilt*

$$\int_{\partial D}\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y)\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\mathrm{d}s(y) = \begin{cases}0, & x\in D,\\ -u(x), & x\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{D},\end{cases} \qquad (2.9)$$

wobei ν die äußere Einheitsnormale an ∂D bezeichnet.

Beweis. Sei $R>0$ groß genug, sodass $\overline{D}\subset B_R(0)$. Anwenden von Satz 2.4 liefert, dass

$$\begin{aligned}
&-\int_{\partial B_R(0)}\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y)\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\mathrm{d}s(y) + \int_{\partial D}\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y)\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\mathrm{d}s(y) \\
&= \begin{cases}-u(x), & x\in B_R(0)\setminus\overline{D},\\ 0, & x\in D.\end{cases}
\end{aligned}$$

Wir müssen noch zeigen, dass das erste Integral für $R\to\infty$ verschwindet. Setze

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_{\partial B_R(0)} u(y)\Big(\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)} - \mathrm{i}k\Phi(x-y)\Big)\mathrm{d}s(y), \\
I_2 &:= \int_{\partial B_R(0)}\Phi(x-y)\Big(\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - \mathrm{i}ku(y)\Big)\mathrm{d}s(y).
\end{aligned}$$

Mit Cauchy-Schwarz folgt für I_1, dass

$$|I_1|^2 \le \left(\int_{\partial B_R(0)}|u(y)|^2\mathrm{d}s(y)\right)\left(\int_{\partial B_R(0)}\left|\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)} - \mathrm{i}k\Phi(x-y)\right|^2\mathrm{d}s(y)\right).$$

Da $\Phi(x-y)$ symmetrisch in x und y ist, gilt (2.6) auch für

$$\frac{y}{|y|}\cdot\nabla_y\Phi(x-y) - \mathrm{i}k\Phi(x-y),$$

gleichmäßig für $\frac{y}{|y|}\in\mathcal{S}^2$ und daher verschwindet das zweite Integral für $R\to\infty$. Um zu zeigen, dass das erste Integral beschränkt ist, folgern wir aus der SAB für u, dass

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R(0)}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - \mathrm{i}ku(y)\right|^2\mathrm{d}s \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R(0)}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right|^2 + k^2|u(y)|^2 + 2k\,\mathrm{Im}\Big(u(y)\frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}(y)\Big)\mathrm{d}s(y).
\end{aligned} \qquad (2.10)$$

Die Greensche Formel (2.2) angewandt auf $B_R(0) \setminus \overline{D}$ liefert

$$\int_{\partial B_R(0)} u(y) \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu}(y) \mathrm{d}s(y) = \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu}(y) \mathrm{d}s(y) + \underbrace{\int_{B_R(0) \setminus \overline{D}} |\nabla u|^2 - k^2 |u(y)|^2 \mathrm{d}y}_{\in \mathbb{R}}.$$

Damit folgt aus (2.10)

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\partial B_R(0)} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right|^2 + k^2 |u(y)|^2 \mathrm{d}s(y) = -2k \operatorname{Im} \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu}(y) \mathrm{d}s(y).$$

Da beide Terme auf der linken Seite positiv sind und ihre Summe beschränkt ist, ist auch jeder einzelne Summand beschränkt. Insbesondere ist $\int_{\partial B_R(0)} |u(y)|^2 \mathrm{d}s(y)$ beschränkt, also $|I_1| \longrightarrow 0$ für $R \to \infty$. Um zu zeigen, dass $|I_2| \longrightarrow 0$ für $R \to \infty$, wenden wieder Cauchy-Schwarz an:

$$|I_2|^2 \leq \left(\int_{\partial B_R(0)} |\Phi(x-y)|^2 \mathrm{d}s(y) \right) \underbrace{\left(\int_{\partial B_R(0)} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - \mathrm{i}ku(y) \right|^2 \mathrm{d}s(y) \right)}_{\substack{\longrightarrow 0 \text{ für } R \to \infty, \\ \text{da } u \text{ SAB erfüllt}}}. \tag{2.11}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R(0)} |\Phi(x-y)|^2 \mathrm{d}s(y) &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{\partial B_R(0)} \frac{1}{|x-y|^2} \mathrm{d}s(y) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{\partial B_R(0)} \frac{1}{|y|^2} \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|y|}\Big) \Big) \mathrm{d}s(y) \\ &= \frac{1}{16\pi^2 R^2} \int_{\partial B_R(0)} \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{R}\Big) \Big) \mathrm{d}s(y) \\ &\leq \frac{8\pi R^2}{16\pi^2 R^2} = \frac{1}{2\pi}, \end{aligned}$$

falls R groß genug ist, sodass $\mathcal{O}(\frac{1}{R}) \leq 1$. Damit ist der erste Term in (2.11) beschränkt und $|I_2| \longrightarrow 0$ für $R \to \infty$. □

Korollar. *Lösungen der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, die in ganz $\mathbb{R}^3$ definiert sind, nennt man **ganze Lösungen**. Aus Satz 2.4 und Theorem 2.7 folgt, dass ganze Lösungen, die die SAB erfüllen, identisch Null sind.*

Satz und Definition 2.8. *Sei D wie in Theorem 2.7 und $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ eine **ausstrahlende Lösung** der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ (d.h. u erfüllt die SAB gleichmäßig bzgl. $\frac{x}{|x|} \in \mathcal{S}^2$). Dann verhält sich u asymptotisch wie eine ausstrahlende sphärische Welle*

$$u(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|} u^\infty(\widehat{x}) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big), \qquad \text{für } |x| \to \infty, \tag{2.12}$$

*gleichmäßig in $\widehat{x} = \frac{x}{|x|} \in \mathcal{S}^2$. Die Funktion $u^\infty \colon \mathcal{S}^2 \to \mathbb{C}$ heißt das **Fernfeld** von u. Es gilt*

$$u^\infty(\widehat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} u(y) \frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \mathrm{d}s(y), \quad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2. \tag{2.13}$$

Beweis. Einsetzen von (2.7) und (2.8) in die Darstellungsformel (2.9). □

II Das direkte Problem

In diesem Abschnitt formulieren wir das direkte Problem und zeigen Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen.

Annahmen:

(i) Brechungsindex: $n^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, außerdem existiert ein $R > 0$, sodass $n^2 = 1$ fast überall in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ und $\operatorname{Re} n^2 > 0$, $\operatorname{Im} n^2 \geq 0$ fast überall in $\mathbb{R}^3$,

(ii) Wellenzahl: $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$,

(iii) Quellterm: $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $f = 0$ fast überall in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$,

(iv) Primärfeld: $u^i(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$, $x \in \mathbb{R}^3$, wobei $d \in \mathcal{S}^2$.

Das **direkte Problem** besteht darin, anhand der gegebenen Größen n^2, k, f und u^i eine Lösung $u = u^i + u^s$ der Helmholtzgleichung

$$\Delta u + k^2 n^2 u = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^3, \tag{3.a}$$

zu finden, sodass $u^s := u - u^i$ die SAB

$$\frac{\partial u^s}{\partial r}(x) - \mathrm{i}ku^s(x) = o\Big(\frac{1}{r}\Big), \qquad \text{für } r = |x| \to \infty, \tag{3.b}$$

gleichmäßig bzgl. $\widehat{x} = \frac{x}{|x|} \in \mathcal{S}^2$ erfüllt.

Definition. *Eine **klassische Lösung** von* (3.a)-(3.b) *ist ein* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$*, das* (3.a)-(3.b) *erfüllt.*

Unter der Annahme, dass $n^2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ und $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, kann Existenz und Eindeutigkeit von klassischen Lösungen gezeigt werden. Da wir auch nicht-glatte Brechungsindizes und Quellen zulassen, müssen wir einen allgemeineren Lösungsbegriff betrachten.

3 Sobolevräume und schwache Lösungen

Bevor wir Sobolevräume einführen, wiederholen wir einige Resultate zur Approximation von L^p-Funktionen durch glatte Funktionen. In diesem Abschnitt sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen.

Lemma 3.1. *Sei $(f_n)_n$ eine Folge in $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, und $f \in L^p(\Omega)$, sodass $\|f - f_n\|_p \longrightarrow 0$. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ und eine Funktion $h \in L^p(\Omega)$,sodass*

(a) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ fast überall in Ω,

(b) $|f_{n_k}| \leq h$ für alle $k \in \mathbb{N}$, fast überall in Ω.

Beweis. Für $p = \infty$ folgt die Behauptung unmittelbar. Sei also $1 \leq p < \infty$. Da $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$ ist, können wir eine Teilfolge (f_{n_k}) auswählen, sodass

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \qquad \text{für alle } k \geq 1.$$

Sei

$$g_m(x) := \sum_{k=1}^{m} \big|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big|,$$

dann ist $\|g_m\|_p \leq 1$ und mit dem Satz von Levi folgt, dass $g_m(x) \longrightarrow g(x)$ fast überall in Ω für ein $g \in L^p(\Omega)$. Andererseits ist für $\ell > k \geq 2$

$$\big|f_{n_\ell}(x) - f_{n_k}(x)\big| \leq \big|f_{n_\ell}(x) - f_{n_{\ell-1}}(x)\big| + \ldots + \big|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big| \leq g(x) - g_{k-1}(x),$$

und damit $f_{n_k} \longrightarrow f^*(x)$ fast überall in Ω. Wegen

$$\big|f^*(x) - f_{n_k}(x)\big| \leq g(x), \qquad \text{für } k \geq 2,$$

ist $f^* \in L^p(\Omega)$ und mit dem Satz von Lebesgue folgt, dass $f_{n_k} \longrightarrow f^*$ in $L^p(\Omega)$, also $f^* = f$ fast überall. Zusätzlich ist $\big|f_{n_k}(x)\big| \leq \big|f^*(x)\big| + g(x)$, woraus (b) folgt. □

Theorem 3.2. *Der Raum*

$$\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \mid f(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^N \setminus K, \text{ wobei } K \text{ kompakt ist}\}$$

der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^N)$ für $1 \le p < \infty$.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass zu gegebenem $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ und $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt existiert, sodass $g = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus K$ und

$$\|f - g\|_p < \varepsilon.$$

Dazu betrachten wir die Abschneidefunktion $T_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T_n(r) = \begin{cases} r, & \text{falls } |r| \le n, \\ \frac{nr}{|r|}, & \text{falls } |r| > n. \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit χ_n die charakteristische Funktion zu $B_n(0)$ und definieren $f_n := \chi_n \cdot \big(T_n \circ f\big)$. Nach dem Satz von Lebesgue folgt $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$, und wir können $g = f_n$ mit n groß genug wählen.

Nach dem Satz von Lusin (Maßtheorie) gibt es für alle $\delta > 0$ eine Funktion $g_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, sodass

$$\|g - g_1\|_1 \le \delta.$$

Wir können annehmen, dass $\|g_1\|_\infty \le \|g\|_\infty$ (sonst ersetze g_1 durch $T_n g_1$ mit $n = \|g\|_\infty$). Damit ist

$$\|g - g_1\|_p \le \|g - g_1\|_1^{\frac{1}{p}} \|g - g_1\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} \le \delta^{\frac{1}{p}} \big(2\|g\|_\infty\big)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Wählt man δ klein genug, sodass

$$\delta^{\frac{1}{p}} \big(2\|g\|_\infty\big)^{1-\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

dann folgt die Behauptung. □

Definition und Satz 3.3 (Faltung)**.** *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ mit $1 \le p \le \infty$. Dann ist für f.a. (fast alle) $x \in \mathbb{R}^N$ die Funktion*

$$y \mapsto f(x-y)g(y),$$

integrierbar auf $\mathbb{R}^N$ und wir definieren

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Dann ist $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ und

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Beweis. Siehe Funktionalanalysis. (weglassen) □

Definition 3.4. *Sei $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Betrachte die Familie $(\omega_i)_{i \in I}$ aller offenen Mengen, auf denen f f.ü. (fast überall) verschwindet. Setze $\omega := \bigcup_{i \in I} \omega_i$, dann ist $f = 0$ f.ü. in ω. Der **Träger** von f ist definiert als*

$$\operatorname{supp} f := \mathbb{R}^N \setminus \omega.$$

Lemma 3.5. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ mit $1 \le p \le \infty$. Dann ist*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}.$$

Beweis. Übung! (weglassen) □

Definition 3.6. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $1 \le p < \infty$. Eine Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ gehört zu $\boldsymbol{L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)}$, falls $\chi_K f \in L^p(\Omega)$ für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$.*

Beachte: Falls $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, dann ist $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Satz 3.7. *Sei $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N)$ und $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Dann ist $(f * g)(x)$ wohldefiniert für alle $x \in \mathbb{R}^N$ und $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$.*

Beweis. Für alle $x \in \mathbb{R}^N$ ist $y \mapsto f(x-y)g(y)$ integrierbar auf $\mathbb{R}^N$ und damit $(f*g)(x)$ wohldefiniert. Sei $(x_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}^N$ mit $x_n \to x$ und $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt, sodass

$$\big(x_n - \operatorname{supp}(f)\big) \subset K, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $f(x_n - y) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y \notin K$. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f folgt nun, dass

$$|f(x_n - y) - f(x - y)| \leq \varepsilon_n \chi_K(y),$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{R}^N$ mit $\varepsilon_n \to 0$. Daraus folgt, dass

$$|(f * g)(x_n) - (f * g)(x)| \leq \varepsilon_n \int_K |g(y)| \mathrm{d}y \longrightarrow 0.$$

$\square$

Definition 3.8 (Multiindex)**.** *Ein **Multiindex** ist ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ und*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^N \alpha_i!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N}, \quad \mathrm{D}^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_N^{\alpha_N}} u.$$

Satz 3.9. *Sei $f \in \mathcal{C}^k_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N)$, $k \geq 1$, und $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Dann ist $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)$ und*

$$\mathrm{D}^\alpha (f * g) = (\mathrm{D}^\alpha f) * g, \qquad \text{für alle } \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k.$$

Insbesondere ist für $f \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N)$ und $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ auch $f * g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Beweis. Mit Induktion genügt es, den Fall $k = 1$ zu betrachten. Sei $x \in \mathbb{R}^N$ und $h \in \mathbb{R}^N$ mit $|h| < 1$. Dann ist für alle $y \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} &\big|f(x + h - y) - f(x - y) - h \cdot \nabla f(x - y)\big| \\ &= \Big| \int_0^1 h \cdot \nabla f(x + sh - y) - h \cdot \nabla f(x - y) \mathrm{d}s \Big| \leq |h| \varepsilon(|h|), \end{aligned}$$

mit $\varepsilon(|h|) \to 0$, falls $|h| \to 0$, da ∇f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}^N$ ist. Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt, sodass $x + B_1(0) - \operatorname{supp}(f) \subset K$. Dann ist für alle $y \notin K$, $h \in B_1(0)$

$$f(x + h - y) - f(x - y) - h \cdot \nabla f(x - y) = 0,$$

und damit

$$\big|f(x + h - y) - f(x - y) - h \cdot \nabla f(x - y)\big| \leq |h| \varepsilon(|h|) \chi_K(y),$$

für alle $y \in \mathbb{R}^N$, $h \in B_1(0)$. Für $h \in B_1(0)$ gilt also

$$\big|(f * g)(x + h) - (f * g)(x) - h \cdot \big((\nabla f) * g\big)(x)\big| \leq |h| \varepsilon(|h|) \int_K |g(y)| \mathrm{d}y.$$

Daraus folgt, dass $f * g$ stetig differentierbar ist mit $\nabla (f * g) = (\nabla f) * g$. $\square$

Definition 3.10. *Eine Folge von **Glättungskernen** (Mollifiern) $(\rho_n)_{n \geq 1}$ ist eine Folge von Funktionen auf $\mathbb{R}^N$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\rho_n \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^N), \quad \operatorname{supp} \rho_n \subset \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)}, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n \mathrm{d}x = 1, \quad \rho_n \geq 0.$$

Beispiel 3.11. Sei

$$\rho(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2 - 1}}, & \text{für } |x| < 1, \\ 0, & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Dann ist durch $\rho_n(x) = c n^N \rho(nx)$ mit $c = \big(\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) \mathrm{d}x \big)^{-1}$ eine Folge von Glättungskernen gegeben.

Satz 3.12. *Sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$. Dann konvergiert $(\rho_n * f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^N$.*

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, sodass

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \text{für alle } x \in K, y \in B_\delta(0).$$

Ferner ist für alle $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}(\rho_n * f)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \big(f(x-y) - f(x)\big)\rho_n(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{B_{\frac{1}{n}}(0)} \big(f(x-y) - f(x)\big)\rho_n(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Für $n > \frac{1}{\delta}$ und $x \in K$ erhalten wir, dass

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\mathrm{d}y = \varepsilon.$$

□

Theorem 3.13. *Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ mit $1 \leq p < \infty$. Dann konvergiert $(\rho_n * f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $f_1 \in \mathcal{C}_\mathrm{c}(\mathbb{R}^N)$, sodass $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$ (siehe Theorem 3.2). Nach Satz 3.12 konvergiert $(\rho_n * f_1) \longrightarrow f$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^N$. Andererseits ist nach Lemma 3.5

$$\operatorname{supp}(\rho_n * f_1) \subset \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)} + \operatorname{supp}(f_1) \subset \overline{B_1(0)} + \operatorname{supp}(f_1),$$

wobei $\overline{B_1(0)} + \operatorname{supp}(f_1)$ eine kompakte Menge ist. Damit konvergiert

$$\|(\rho_n * f_1) - f_1\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Nun schreiben wir

$$\begin{aligned}(\rho_n * f) - f &= \big(\rho_n * (f - f_1)\big) + \big((\rho_n * f_1) - f_1\big) + f_1 - f \\ &\leq \underbrace{\|\rho_n\|_1}_{=1} \|f - f_1\|_p + \big((\rho_n * f_1) - f_1\big) + f_1 - f.\end{aligned}$$

Mit Satz 3.3 folgt

$$\|(\rho_n * f) - f\|_p \leq 2\|f_1 - f\|_p + \|(\rho_n * f_1) - f_1\|_p,$$

also

$$\limsup_{n\to\infty} \|(\rho_n * f) - f\|_p \leq 2\varepsilon, \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \|(\rho_n * f) - f\|_p = 0.$$

□

Korollar 3.14. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, sodass*

$$\int_\Omega u f \mathrm{d}x = 0,$$

für alle $f \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega) = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \mid \phi = 0 \text{ in } \Omega \setminus K \text{ für ein } K \subset \Omega \text{ kompakt}\}$. Dann ist $u = 0$ f.ü. in Ω.

Beweis. Sei $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} g \subset \Omega$, also insb. auch $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Wir setzen $g_n \coloneqq \rho_n * g$, dann ist $g_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ für n groß genug. Daher ist

$$\int_\Omega u g_n \mathrm{d}x = 0, \qquad \text{für } n \text{ groß genug.} \tag{3.1}$$

Da $g_n \longrightarrow g$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ nach Theorem 3.13, gibt es eine Teilfolge, hier mit g_{n_k} bezeichnet, sodass $g_{n_k} \longrightarrow g$ f.ü. auf Ω nach Lemma 3.1. Außerdem ist nach Young

$$\|g_{n_k}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \underbrace{\|\rho_{n_k}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}_{=1} \|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Für $k \to \infty$ folgt aus (3.1) mit dem Satz von Lebesgue, dass

$$\int_{\mathbb{R}^N} ug \mathrm{d}x = \int_\Omega ug \mathrm{d}x = 0. \tag{3.2}$$

Sei nun $K \subset \Omega$ kompakt und wähle

$$g = \begin{cases} \operatorname{sign} u, & \text{in } K, \\ 0, & \text{in } \mathbb{R}^N \setminus K. \end{cases}$$

Dann folgt mit (3.2), dass $\int_K |u| \mathrm{d}x = 0$, also $u = 0$ f.ü. in K. Da $K \subset \Omega$ beliebig war, folgt $u = 0$ f.ü. in Ω. □

Korollar 3.15. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann ist $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dicht für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis. Sei $f \in L^p(\Omega)$. Wir setzen

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{für } x \in \Omega, \\ 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}, \end{cases}$$

es gilt $\overline{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Sei $(K_n)_n$ eine Folge von kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^N$, sodass $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = \Omega$ und $\operatorname{dist}(K_n, \Omega^c) \geq \frac{2}{n}$ für alle n.

Beispielsweise

$$K_n = \left\{ x \in \Omega \mid |x| \leq n \text{ und } \operatorname{dist}(x, \Omega^c) \geq \frac{2}{n} \right\},$$

Setze $g_n \coloneqq \chi_{K_n} \overline{f}$ und $f_n \coloneqq \rho_n * g_n$, sodass

$$\operatorname{supp}(f_n) \subset \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)} + K_n \subset \Omega.$$

Es folgt, dass $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_{L^p(\Omega)} &= \|\overline{f} - f_n\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|(\rho_n * g_n) - (\rho_n * \overline{f})\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n * \overline{f}) - \overline{f}\|_{L^p(\Omega)} \\ {\scriptstyle\text{Young}} &\leq \underbrace{\|\rho_n\|_{L^1(\Omega)}}_{=1} \|g_n - \overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(\rho_n * \overline{f}) - \overline{f}\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Lebesgue und Theorem 3.13

$$\|g_n - \overline{f}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{und} \quad \|(\rho_n * \overline{f}) - \overline{f}\|_{L^p(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also

$$\|f - f_n\|_{L^p(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{für } n \to \infty.$$

□

Schwache Ableitungen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $u \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, dann ist

$$\int_\Omega u \mathrm{D}^\alpha \phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (\mathrm{D}^\alpha u)\phi \mathrm{d}x, \qquad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega). \tag{3.3}$$

(partielle Integration)

Definition 3.16. *Eine Funktion $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ besitzt eine **α-te schwache Ableitung** in Ω, wenn es ein $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gibt, sodass*

$$\int_\Omega u \mathrm{D}^\alpha \phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \mathrm{d}x, \qquad \textit{für alle } \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega).$$

Lemma 3.17. *Die schwache Ableitung ist eindeutig, falls sie existiert. Wenn eine Funktion klassisch differentierbar ist, so ist sie auch schwach differentierbar und beide Ableitungen stimmen überein.*

Beweis. Wenn v und w schwache Ableitungen von u sind, so ist

$$\int_\Omega u \mathrm{D}^\alpha \phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega w\phi \mathrm{d}x, \qquad \text{für alle } \phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega).$$

Also gilt für alle $\phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega v\phi \mathrm{d}x = \int_\Omega w\phi \mathrm{d}x.$$

Korollar 3.14 liefert $v = w$ f.ü. in Ω. Die zweite Behauptung folgt aus (3.3). □

Beispiel 3.18. Betrachte $N = 1$, $\Omega = (-1, 1)$, $u(x) = |x|$, dann gilt für alle $\phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u(x)\phi'(x)\mathrm{d}x &= -\int_{-1}^0 x\phi'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 x\phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^0 \phi(x)\mathrm{d}x - \underbrace{\big[x\phi(x)\big]_{x=-1}^0}_{=0} - \int_0^1 \phi(x)\mathrm{d}x + \underbrace{\big[x\phi(x)\big]_{x=0}^1}_{=0} \\ &= -\int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x)\phi(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

also ist sign die schwache Ableitung von u. Um zu überprüfen, ob sign schwach differentierbar ist, betrachten wir für beliebiges $\phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x)\phi'(x)\mathrm{d}x &= -\int_{-1}^0 \phi'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \phi'(x)\mathrm{d}x \\ &= -[\phi(x)]_{x=-1}^0 + [\phi(x)]_{x=0}^1 \\ &= -2\phi(0). \end{aligned}$$

Es gibt aber kein $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ mit $\int_{-1}^1 v(x)\phi(x)\mathrm{d}x = -2\phi(0)$ für alle $\phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ (verwende bspw. Theorem 3.13). Also ist sign nicht schwach differentierbar

Beispiel 3.19. Sei $N = 3$, $\Omega = B_1(0)$ und $u_\alpha(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. In Kugelkoordinaten folgt

$$\int_{B_1(0)} u_\alpha(x)\mathrm{d}x = 4\pi \int_0^1 r^{\alpha+2}\mathrm{d}r,$$

also $u_\alpha \in L^1\big(B_1(0)\big)$ für $\alpha > -3$. Wegen Lemma 3.17 ist u_α schwach differentierbar in $B_1(0) \setminus \{0\}$ mit

$$\nabla u_\alpha(x) = \alpha |x|^{\alpha-2} x.$$

Partielle Integration liefert für alle $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty\big(B_1(0)\big)$ mit (2.1) für $u = u_\alpha(\phi e_j)$

$$\int_{B_1(0)\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} u_\alpha(x)\nabla\phi(x)\mathrm{d}x = -\int_{B_1(0)\setminus\overline{B_\varepsilon(0)}} \phi(x)u_\alpha(x)\mathrm{d}x + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nu(s)u_\alpha(s)\phi(s)\mathrm{d}s(x).$$

Für $\alpha > -2$ sind $|u_\alpha\nabla\phi|$ und $|(\nabla u_\alpha)\phi|$ integrierbare Majoranten für die Volumenintegrale, und wir können mit dem Satz von Lebesgue den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durchführen. Außerdem ist

$$\Big|\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \nu(s)u_\alpha(s)\phi(s)\mathrm{d}s(x)\Big| \leq \|\phi\|_\infty \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^\alpha \mathrm{d}s(x) = \|\phi\|_\infty 4\pi\varepsilon^{\alpha+2} \longrightarrow 0, \qquad \text{für } \varepsilon \to 0.$$

Also ist u_α schwach differentierbar für $\alpha > -2$.

Soboleväume

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen.

Definition 3.20. *Für $m \in \mathbb{N}$ sei der* ***Sobolevraum*** $\boldsymbol{\mathcal{H}^m(\Omega)}$ *definiert durch*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^m(\Omega) := \big\{u \in L^2(\Omega) \mid \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^N, |\alpha| \leq m\, \exists v_\alpha \in L^2(\Omega)\, \forall\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)\colon \\ \int_\Omega u\mathrm{D}^\alpha\phi\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_\alpha\phi\mathrm{d}x\big\}.\end{aligned}$$

Ersetzt man $L^2(\Omega)$ durch $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, so erhält man $\mathcal{W}^{m,p}(\Omega)$, d.h. $\mathcal{H}^m(\Omega) = \mathcal{W}^{m,2}(\Omega)$.

Satz 3.21. *$\mathcal{H}^m(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{H}^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\leq m} \langle \mathrm{D}^\alpha u, \mathrm{D}^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Beweis. Die Skalarprodukteigenschaften übertragen sich unmittelbar vom L^2-Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$. Um Vollständigkeit zu zeigen sei $(u_k)_k \subset \mathcal{H}^m(\Omega)$ eine Cauchyfolge. Dann ist für alle $|\alpha| \leq m$ auch $(\mathrm{D}^\alpha u_k)_k \subset L^2(\Omega)$ eine Cauchyfolge mit Grenzwert $v_\alpha \in L^2(\Omega)$. Sei $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, dann ist

$$\begin{tikzcd} \int_\Omega u_k\mathrm{D}^\alpha\phi\mathrm{d}x \arrow[d, "k\to\infty"'] \arrow[r, phantom, "="] & (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega(\mathrm{D}^\alpha u_k)\phi\mathrm{d}x \arrow[d, "k\to\infty"] \\ \int_\Omega u\mathrm{D}^\alpha\phi\mathrm{d}x \arrow[r, phantom, "="] & (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v_\alpha\phi\mathrm{d}x \end{tikzcd}$$

d.h. $u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$, $\mathrm{D}^\alpha u = v_\alpha$, (wobei $u_k \longrightarrow u$ in $L^2(\Omega)$) und damit $u_k \longrightarrow u$ in $\mathcal{H}^m(\Omega)$. □

Definition 3.22. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen.*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^m_{\mathrm{loc}}(\Omega) &:= \big\{u\colon \Omega \to \mathbb{C} \mid \chi_{\Omega\cap B_R(0)}u \in \mathcal{H}^m\big(\Omega\cap B_R(0)\big) \textit{ für alle } R > 0. \textit{ sodass } \Omega\cap B_R(0) \neq \emptyset\big\} \\ &= \big\{u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \mid u\big|_{\Omega\,\cap\,B_R(0)} \in \mathcal{H}^m\big(\Omega\cap B_R(0)\big) \textit{ für alle } R > 0. \textit{ sodass } \Omega\cap B_R(0) \neq \emptyset\big\}.\end{aligned}$$

Lemma 3.23. *Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es eine Abschneidefunktion bzgl. $\{K, \Omega\}$, d.h. eine reellwertige Funktion $\tau \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq \tau \leq 1$ und $\tau = 1$ in K. Wenn $\operatorname{dist}(\partial K, \partial\Omega) = \delta$, so kann τ so gewählt werden, dass*

$$|\mathrm{D}^\alpha\tau| \leq C\delta^{-|\alpha|},$$

wobei die Konstante C von α und N, aber nicht von Ω und K abhängt.

Beweis. Da K kompakt ist, folgt $\delta > 0$. Ferner ist

$$\widetilde{K} := \overline{\bigcup_{x\in K} B_{\frac{\delta}{2}}(x)},$$

kompakt und $\operatorname{dist}(\partial\widetilde{K},\partial\Omega)=\operatorname{dist}(\partial\widetilde{K},\partial K)=\frac{\delta}{2}$.

Setze $n=\left\lceil\frac{4}{\delta}\right\rceil$, dann ist $\tau\coloneqq\rho_n*\chi_{\widetilde{K}}$ die gesuchte Abschneidefunktion: Da $|(\mathrm{D}^\alpha\rho_n)(x)|\leq C(\alpha)\delta^{-N-|\alpha|}$, folgt

$$\begin{aligned}|(\mathrm{D}^\alpha\tau)(x)|&\leq\int_{B_{\frac{1}{n}}(x)}\underbrace{|\mathrm{D}^\alpha\rho_n(x-y)|}_{\leq C(\alpha)\delta^{-N-|\alpha|}}\chi_{\widetilde{K}}(y)\mathrm{d}y\\&\leq C(\alpha)\delta^{-N-|\alpha|}\underbrace{|B_{\frac{1}{n}}(x)|}_{\sim(\delta/4)^N}\\&\leq C(\alpha,N)\delta^{-|\alpha|}.\end{aligned}$$

□

Lemma 3.24 (Zerlegung der Eins)**.** *Sei $\{\Omega_\ell\}_{\ell=1,\dots,L}$ eine offene Überdeckung einer kompakten Menge $K\subset\mathbb{R}^N$. Dann gibt es (reellwertige) Funktionen ψ_ℓ, $\ell=1,\dots,L$, sodass*

$$\psi_\ell\in\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega_\ell),\quad 0\leq\psi_\ell\leq 1,\quad\sum_{\ell=1}^L\psi_\ell=1,\qquad\textit{in } K.$$

Beweis. Für alle $x\in\Omega_\ell$ existiert ein $r=r(x,\ell)>0$, sodass $\overline{B_r(x)}\subset\Omega_\ell$, $x\in\Omega_\ell$, $\ell=1,\dots,L$. Die Mengen $B_{x,\ell}\coloneqq B_r(x)$ bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge K, also existiert eine endliche Überdeckung.

Seien $B_1^\ell,\dots,B_{n_\ell}^\ell$ die Bälle mit Index $\ell=1,\dots,L$ in dieser Teilüberdeckung, dann ist

$$K_\ell\coloneqq\overline{\bigcup_{i=1}^{n_\ell}B_i^\ell}\subset\Omega_\ell,$$

kompakt. Sei τ_ℓ eine Abschneidefunktion bzgl. $\{K_\ell,\Omega_\ell\}$ wie in Lemma 3.23, dann gilt

$$0\leq\tau_\ell\leq 1,\quad\psi\coloneqq\sum_{\ell=1}^L\tau_\ell\geq 1\quad\text{in } K\quad\text{und}\quad K\subset\Omega\coloneqq\bigcup_{\ell=1}^L\operatorname{supp}(\tau_\ell).$$

Es gibt eine offene Menge Ω_0 mit $K\subset\Omega_0$ und $\overline{\Omega}_0\subset\Omega$. Für eine Abschneidefunktion τ_0 bzgl. $\{K,\Omega_0\}$ setze

$$\psi_k(x)\coloneqq\begin{cases}\dfrac{\tau_k(x)\tau_0(x)}{\psi(x)}, & \text{für } x\in\Omega_0,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann sind $\psi_1,\dots,\psi_L$ die gesuchte Zerlegung der Eins. □

Lemma 3.25 (Produktregel)**.** *Sei $\psi\in\mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ und $u\in\mathcal{H}^m(\Omega)$, dann ist $\psi u\in\mathcal{H}^m(\Omega)$ und*

$$\mathrm{D}^\alpha(\psi u)=\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}(\mathrm{D}^\beta\psi)(\mathrm{D}^{\alpha-\beta}u),\qquad\textit{für } |\alpha|\leq m,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{\beta}\coloneqq\prod_{i=1}^N\binom{\alpha_i}{\beta_i},$$

und $\beta\leq\alpha$ genau dann, wenn $\beta_i\leq\alpha_i$ für alle $i=1,\dots,N$.

Beweis. Mit Induktion reicht es, den Fall $|\alpha| = 1$ zu betrachten. Sei also $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i}$, dann ist für alle $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \mathrm{d}x &= \int_\Omega u\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}(\psi\phi) - \phi\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\Big)\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega \Big(\psi\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\Big)\phi \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\frac{\partial(\psi u)}{\partial x_i} = \psi\frac{\partial u}{\partial x_i} + u\frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

und da ψ und $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ beschränkt sind, ist $\psi u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. □

Lemma 3.26. *Sei $u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$ und $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ offen, d.h. $\overline{\Omega}_0$ kompakt und $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. Dann gilt*

$$\mathrm{D}^\alpha(\rho_n * u) = \rho_n * \mathrm{D}^\alpha u, \qquad \text{für } |\alpha| \leq m,$$

insbesondere $\rho_n * u \longrightarrow u$ in $\mathcal{H}^m(\Omega_0)$.

Beweis. Sei $\frac{2}{n} < \mathrm{dist}(\partial\Omega_0, \partial\Omega)$. Dann ist für $|\alpha| \leq m$

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\rho_n * u)\mathrm{D}^\alpha\psi \mathrm{d}x &= \int_\Omega\int_\Omega \rho_n(x-y)u(y)\mathrm{D}^\alpha\psi(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega\int_\Omega \rho_n(z)u(x-z)\mathrm{D}^\alpha\psi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega\int_\Omega \rho_n(z)\psi(x)\mathrm{D}^\alpha u(x-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (\rho_n * \mathrm{D}^\alpha u)\psi \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

für alle $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_0)$. Also gilt

$$\mathrm{D}^\alpha(\rho_n * u) = \rho_n * \mathrm{D}^\alpha u, \qquad \text{für } |\alpha| \leq m.$$

Da außerdem $\mathrm{D}^\alpha u \in L^2(\Omega)$, liefert Theorem 3.13, dass

$$\mathrm{D}^\alpha(\rho_n * u) = \rho_n * \mathrm{D}^\alpha u \longrightarrow \mathrm{D}^\alpha u, \qquad \text{in } L^2(\Omega_0),$$

d.h. $\rho_n * u \longrightarrow u$ in $\mathcal{H}^m(\Omega_0)$. □

Theorem 3.27 (Meyers and Serrin). *$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{H}^m(\Omega)$ ist dicht in $\mathcal{H}^m(\Omega)$.*

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\Omega_n = \big\{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{2}{n} \text{ und } |x| < n\big\},$$

offen und beschränkt. Es gilt $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ und wir setzen

$$U_n \coloneqq \Omega_{n+1} \cap \big(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_{n-1}\big), \qquad \Omega_0 = \Omega_{-1} = \emptyset.$$

Dazu konstruieren wir wie im Beweis von Lemma 3.24 Abschneidefunktionen $\psi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(U_n)$ mit $\psi_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^\infty \psi_n = 1$ in Ω.

Sei $u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$, dann haben die Funktionen $\psi_n u$ kompakten Träger in Ω und aus Lemma 3.25 folgt, dass $\psi_n u \in \mathcal{H}^m(\Omega)$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wähle $\ell_n \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass

$$\mathrm{supp}\,\big(\rho_{\ell_n} * (\psi_n u)\big) \subset U_n,$$

und (mit Lemma 3.26)

$$\|\rho_{\ell_n} * (\psi_n u) - \psi_n u\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)} < 2^{-n}\varepsilon.$$

Die Funktion

$$\phi(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \big(\rho_{\ell_n} * (\psi_n u)\big)(x),$$

ist wohldefiniert, da für jedes $x \in \Omega$ nur endlich viele Terme in der Summe *nicht* verschwinden. Also ist $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und in Ω_n gilt

$$u = \sum_{i=1}^{n+2} \psi_i u, \qquad \phi = \sum_{i=1}^{n+2} \rho_{\ell_i} * (\psi_i u), \qquad \|u - \phi\|_{\mathcal{H}^m(\Omega_n)} \le \sum_{i=1}^{n+2} \|\psi_i u - \rho_{\ell_i} * (\psi_i u)\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)} < \varepsilon,$$

wobei wir in der letzten Ungleichung ausgenutzt haben, dass $\|\psi_i u - \rho_{\ell_i} * (\psi_i u)\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)} \le 2^{-i}\varepsilon$ gilt. Wenden wir den Satz von Levi auf $|\mathrm{D}^\alpha(u-\phi)|^2\chi_{\Omega_n}$ an, so folgt $\|u - \phi\|_{\mathcal{H}^m(\Omega)} \le \varepsilon$. □

Bemerkung. Man kann nicht vorgehen wie im Beweis von Korollar 3.15: Betrachte $N = m = 1$, $\Omega = (0,1)$, $u = 1$ in Ω. Setzen wir u durch 0 zu $\widetilde{u}$ auf $\mathbb{R}$ fort und betrachten $u_n = \delta_n * \widetilde{u}$, dann verhält sich u_n' in den Intervallen $\big[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\big]$ und $\big[1 - \frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{2n}\big]$ wie n. Damit gilt

$$\int_0^1 |u_n'|^2 \mathrm{d}x \ge Cn > 0,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und u_n' konvergiert nicht gegen $u' = 0$ in $L^2(\Omega)$.

Schwache Lösungen

Definition 3.28. *Eine **schwache Lösung** von* (3.a) *ist eine Funktion* $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$*, sodass*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla \psi - k^2 n^2 u \psi \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3} f\psi \mathrm{d}x, \qquad \textit{für alle } \psi \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3), \tag{3.4}$$

wobei

$$\mathcal{H}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3) \coloneqq \{\phi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3) \mid \operatorname{supp}\phi \textit{ ist kompakt}\}.$$

Bemerkung 3.29. *Sei* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ *eine klassische Lösung von* $\Delta u + k^2 n^2 u = f$ *in* $\mathbb{R}^3$*, dann ist* $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ *und* (3.4) *ist für alle* $\psi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$ *erfüllt (Greensche Formel* (2.2)*). Da* $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{H}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$ *dicht ist (Theorem 3.27), gilt* (3.4) *auch für alle* $\psi \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$*. Daher ist jede klassische Lösung von* (3.a) *auch eine schwache Lösung.*

Theorem 3.30 ((elliptische) Regularität)**.** *Sei* $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ *eine schwache Lösung von* $\Delta u + k^2 u = 0$ *in* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *offen, d.h.*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi - k^2 u \psi \mathrm{d}x = 0, \qquad \textit{für alle } \psi \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{c}}(\Omega),$$

dann ist $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$*.*

Beweis. Gilbarg-Trudinger, Kapitel 7-8. □

Da wir annehmen, dass ein $R > 0$ existiert, sodass

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)},$$

folgt, dass u und damit auch $u^s = u - u^i$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$ glatt ist. Insbesondere macht die SAB auch für schwache Lösungen von (3.a) Sinn. Eine schwache Lösung von (3.a)-(3.b) ist also ein $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, sodass (3.4) und (3.b) erfüllt sind.

4 Existenz von Lösungen des direkten Problems

Definition 4.1 (Volumenpotential)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt und $\varphi \in L^2(\Omega)$. Dann definieren wir*

$$\big(V\varphi\big)(x) \coloneqq \int_\Omega \Phi(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{4.1}$$

Lemma 4.2. *Die Fundamentallösung $\Phi(x) = \frac{1}{4\pi|x|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}$, $x \neq 0$, erfüllt*

$$\begin{aligned} |\Phi(x)| &\le C|x|^{-1}, && \textit{für } |x| \to 0,\\ \Big|\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi(x)\Big| &\le C|x|^{-2}, && \textit{für } |x| \to 0,\\ \Big|\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_\ell}\Phi(x)\Big| &\le C|x|^{-3}, && \textit{für } |x| \to 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Beweis. Es gilt

$$|\Phi(x)| = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|},$$

also für alle $|x| \le k^{-1}$

$$\Big|\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x)\Big| = \Big|\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|}\Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{|x|}\Big)\frac{x_j}{|x|}\Big| \le \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|}\Big(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|}\Big)1 \le \frac{1}{4\pi}\frac{2}{|x|^2}.$$

Außerdem

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_\ell}(x)\Big| &= \Big|\frac{1}{4\pi}\Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{|x|}\Big)^2\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|}\frac{x_j x_\ell}{|x|^2} + \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|}\frac{1}{|x|^2}\frac{x_j x_\ell}{|x|^2} + \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|}\Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{|x|}\Big)\Big(\frac{\delta_{j\ell}}{|x|} - \frac{x_j x_\ell}{|x|^3}\Big)\Big|\\ &= \Big|\frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|}\Big[\Big(-k^2 - \frac{2\mathrm{i}k}{|x|} + \frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} - \frac{\mathrm{i}k}{|x|} + \frac{1}{|x|^2}\Big)\frac{x_j x_\ell}{|x|^2} - \frac{\delta_{j\ell}}{|x|}\Big(ik - \frac{1}{|x|}\Big)\Big]\Big|\\ &= \Big|\frac{1}{4\pi}\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|}}_{\mathcal{O}(|x|^{-1})}\Big[\underbrace{-k^2 - \frac{3}{|x|}\Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{|x|}\Big)}_{\mathcal{O}(|x|^{-2})}\underbrace{\frac{x_j x_\ell}{|x|^2}}_{\mathcal{O}(1)} - \underbrace{\frac{\delta_{j\ell}}{|x|}\Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{|x|}\Big)}_{\mathcal{O}(|x|^{-2})}\Big]\Big|\\ &\le C|x|^{-3}, \end{aligned}$$

falls $|x| > 0$ klein genug. □

Lemma 4.3. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt und $\varphi \in L^\infty(\Omega)$. Dann ist $w \coloneqq V\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ und für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt*

$$\frac{\partial w}{\partial x_j}(x) = \int_\Omega \varphi(y)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x-y)\mathrm{d}y, \qquad j = 1,2,3. \tag{4.3}$$

Beweis. Aus der Abschätzung (4.2) folgt, dass

$$v(x) \coloneqq \int_\Omega \varphi(y)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x-y)\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

wohldefiniert ist. Um zu zeigen, dass $v = \frac{\partial w}{\partial x_j}$, betrachten wir eine Abschneidefunktion $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, sodass

$$0 \le \eta \le 1, \qquad 0 \le \eta' \le 2, \qquad \eta = 0 \text{ für } |t| \le 1, \qquad \eta(t) = 1 \text{ für } |t| \ge 2,$$

(vgl. Lemma 3.23) und definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$w_n(x) \coloneqq \int_\Omega \Phi(x-y)\eta_n(|x-y|)\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

wobei $\eta_n(t) \coloneqq \eta(tn)$. Dann ist $w_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ und

$$v(x) - \frac{\partial w_n}{\partial x_j}(x) = \int_{|x-y| \le \frac{2}{n}} \frac{\partial}{\partial x_j}\big((1-\eta_n(|\cdot|))\Phi\big)(x-y)\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

analog zeigt man

$$
\begin{aligned}
|w(x) - w_n(x)| &= \Big| \int_\Omega \Phi(x-y)\big(1-\eta_n(|x-y|)\big)\varphi(y)\mathrm{d}y \Big| \\
&\le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{|x-y|\le \frac{2}{n}} |\Phi(x-y)| \\
&= \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^{\frac{2}{n}} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{2}{n^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
\Big| v(x) - \frac{\partial w_n}{\partial x_j}(x) \Big| &\le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{|x-y|\le \frac{2}{n}} \Big| \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x-y) \Big| + 2n|\Phi(x-y)|\mathrm{d}y \\
&\le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} C \int_0^{\frac{2}{n}} (r^{-2} + 2nr^{-1}) 4\pi\rho^2 \mathrm{d}r \\
&\le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} C 4\pi \Big(\frac{2}{n} + \frac{4}{n} \Big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Das heißt, w_n und $\frac{\partial w_n}{\partial x_j}$ konvergieren gegen w und v gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ für $n \to \infty$, also ist $w \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ und $\frac{\partial w}{\partial x_j} = v$. □

Lemma 4.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und offen und $\varphi \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ beschränkt (und damit integrierbar). Dann ist $w := V\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$,*

$$
\Delta w + k^2 w = -\varphi, \quad \text{in } \Omega, \text{ und} \qquad \Delta w + k^2 w = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega},
$$

und für $x \in \Omega$ gilt

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial x_j \partial x_\ell}(x) = \int_{\Omega_0} \big(\varphi(y) - \varphi(x)\big) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_\ell}(x-y)\mathrm{d}y - \varphi(x) \int_{\partial\Omega_0} \nu_\ell(y) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x-y)\mathrm{d}s(y), \tag{4.4}
$$

$j, \ell = 1, 2, 3$, wobei Ω_0 ein offenes, beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet mit $\Omega \subset \Omega_0$ ist und φ durch 0 auf Ω_0 fortgesetzt wird.

Beweis. Die Abschätzung (4.2) für $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_\ell}$ und Mittelwertsatz ($\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi'(\xi) \cdot (y - x)$) zusammen mit der stetigen Differentierbarkeit von φ zeigen, dass

$$
u(x) := \int_{\Omega_0} \big(\varphi(y) - \varphi(x)\big) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_\ell}(x-y)\mathrm{d}y - \varphi(x) \int_{\partial\Omega_0} \nu_\ell(y) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x-y)\mathrm{d}s(y),
$$

für $x \in \Omega$ wohldefiniert ist. Sei $v = \frac{\partial w}{\partial x_j}$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$
v_n(x) := \int_\Omega \eta_n(|x-y|)\varphi(y) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x-y)\mathrm{d}y,
$$

wobei η_n die Abschneidefunktion aus dem Beweis von Lemma 4.3 ist. Dann ist $v_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ und

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v_n}{\partial x_\ell}(x) &= \int_\Omega \varphi(y) \frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big(\eta_n(|\cdot|)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\Big)(x-y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\Omega_0} \big(\varphi(y) - \varphi(x)\big) \frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big(\eta_n(|\cdot|)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\Big)(x-y)\mathrm{d}y + \varphi(x) \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big(\eta_n(|\cdot|)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\Big)(x-y)\mathrm{d}y \\
\overset{(2.2)}{=} & \int_{\Omega_0} \big(\varphi(y) - \varphi(x)\big) \frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big(\eta_n(|\cdot|)\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\Big)(x-y)\mathrm{d}y - \varphi(x) \int_{\partial\Omega_0} \nu_\ell(y) \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x-y)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

für n hinreichend groß (und $x \in \Omega$). In der letzten Gleichheit haben wir

$$
\begin{aligned}
\int_D \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_\ell}\mathrm{d}y &= \int_D \widetilde{u} \underbrace{\Delta x_\ell}_{=0} + \nabla \widetilde{u} \cdot \underbrace{\nabla x_\ell}_{=e_\ell} \mathrm{d}y \\
&= \int_D \mathrm{div}(\widetilde{u} \nabla x_\ell)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\partial D} \widetilde{u} \underbrace{\nabla x_\ell \cdot \nu}_{=\nu_\ell} \mathrm{d}s = \int_{\partial D} \widetilde{u} \nu_\ell \mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

verwendet mit $\widetilde{u} = \eta_n(|x-\cdot|)\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x-\cdot)$, $D = \Omega_0$ und $\eta_n(|x-y|) = 1$ auf $\partial\Omega_0$ für großes n. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\Big|u(x) - \frac{\partial v_n}{\partial x_\ell}(x)\Big| &= \Big|\int_{|x-y|\le\frac{2}{n}} \big(\varphi(y)-\varphi(x)\big)\frac{\partial}{\partial x_\ell}\Big((1-\eta_n)\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\Big)(x-y)\mathrm{d}y\Big| \\
\overset{\varphi(y)-\varphi(x)=\varphi'(\xi)\cdot(y-x)}{\le} &\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1\left(B_{\frac{2}{n}}(x)\right)}\int_{|x-y|\le\frac{2}{n}}\Big(\Big|\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_\ell}(x-y)\Big| + 2n\Big|\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x-y)\Big|\Big)|x-y|\mathrm{d}y \\
\overset{(4.2)}{\le} &\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1\left(B_{\frac{2}{n}}(x)\right)} C\int_0^{\frac{2}{n}}(r^{-3}+2nr^{-2})4\pi r^3\mathrm{d}r \\
\le &C\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1\left(B_{\frac{2}{n}}(x)\right)}\Big(\frac{2}{n}+\frac{4}{n}\Big) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Also konvergiert $\frac{\partial v_n}{\partial x_\ell}$ gleichmäßig gegen u auf kompakten Teilmengen von Ω für $n\to\infty$. Da v_n gleichmäßig gegen $v = \frac{\partial w}{\partial x_j}$ auf kompakten Teilmengen von Ω konvergiert folgt, dass $w \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ und $u = \frac{\partial^2 w}{\partial x_j\partial x_\ell}$.

Setze nun $\Omega_0 = B_R(0)$ in (4.4), dann ist für hinreichend großes R

$$\begin{aligned}
\Delta w(x) &= -k^2\int_{\Omega_0}\Phi(x-y)\big(\varphi(y)-\varphi(x)\big)\mathrm{d}y - \varphi(x)\int_{\partial\Omega_0}\sum_{\ell=1}^3\frac{y_\ell}{|y|}\frac{\partial\Phi}{\partial x_\ell}(x-y)\mathrm{d}s(y) \\
&= -k^2 w(x) + k^2\varphi(x)\int_{\Omega_0}\Phi(x-y)\mathrm{d}y + \varphi(x)\int_{\partial\Omega_0}\frac{y}{|y|}\cdot\nabla_y\Phi(x-y)\mathrm{d}s(y) \\
&= -k^2 w(x) + k^2\varphi(x)\int_{\Omega_0}\Phi(x-y)\mathrm{d}y + \varphi(x)\int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\mathrm{d}s(y),
\end{aligned}$$

da $\nabla_x\Phi(x-y) = -\nabla_y\Phi(x-y)$. Wie im Beweis von Satz 2.4 folgt, dass

$$\int_{\partial\Omega_0}\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\mathrm{d}s(y) = \int_{\Omega_0\setminus B_\varepsilon(x)}\Delta\Phi(x-y)\mathrm{d}y + \int_{\partial B_\varepsilon(x)}\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\mathrm{d}s(y) \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -k^2\int_{\Omega_0}\Phi(x-y)\mathrm{d}y - 1,$$

also $\Delta w(x) + k^2 w(x) = -\varphi(x)$. Die entsprechenden Aussagen in $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften von Φ. (Falls $x\notin\Omega$, so ist w glatt, also sind Integral und Δ vertauschbar). $\square$

Satz 4.5. *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ beschränkt und offen und $\varphi\in L^2(\Omega)$. Dann ist $w := V\varphi \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, w erfüllt SAB (glm. bzgl. $\widehat{x}\in\mathcal{S}^2$) und w ist eine schwache Lösung von $\Delta w + k^2 w = -\varphi$ in $\mathbb{R}^3$, d.h.*

$$\int_{\mathbb{R}^3}\nabla w\cdot\nabla\psi - k^2 w\psi\mathrm{d}x = \int_\Omega\varphi\psi\mathrm{d}x, \qquad \textit{für alle } \psi\in\mathcal{H}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3). \tag{4.5}$$

Außerdem gibt es für alle $R>0$ mit $\overline{\Omega}\subset B_R(0)$ ein $C>0$ (das nur von R, k und Ω abhängt), sodass

$$\|w\|_{\mathcal{H}^1(B_R(0))} \le C\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.6}$$

Beweis.

(i) Da Ω beschränkt ist und w außerhalb von Ω glatt ist, überträgt sich die SAB von der Fundamentallösung.

(ii) Die Aussage von Lemma 4.4 bleibt auch für komplexe Wellenzahlen $k\in\mathbb{C}$ richtig, und die Greensche Formel (2.2) zeigt, dass (4.5) für $\varphi\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ erfüllt ist.

(iii) Betrachte $k = \mathrm{i}$ und $\varphi\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Wegen

$$\Phi_{\mathrm{i}}(x) := \frac{1}{4\pi|x|}\mathrm{e}^{-|x|},$$

fällt das Volumenpotential

$$v(x) := \int_\Omega\varphi(y)\Phi_{\mathrm{i}}(x-y)\mathrm{d}y,$$

für $|x| \to \infty$ exponentiell ab. Sei $\tau_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ eine Abschneidefunktion mit

$$0 \leq \tau_n \leq 1, \qquad 0 \leq \tau_n' \leq 2, \qquad \tau_n(t) = 1 \quad \text{für } |t| \leq n, \text{ und } \quad \tau_n(t) = 0 \quad \text{für } |t| > 2n,$$

dann ist $\psi := \tau_n \overline{v} \in \mathcal{H}_c^1(\mathbb{R}^3)$ und für $n \to \infty$ folgt aus (4.5), dass

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla v|^2 + |v|^2 \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{v}\varphi \mathrm{d}x \\ &\leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wir folgern

$$\|v\|_{\mathcal{H}^1(B_R(0))} \leq \|v\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

daher ist

$$V_\mathrm{i} \colon \big(\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \| \cdot \|_{L^2(\Omega)}\big) \to \mathcal{H}^1\big(B_R(0)\big), \qquad \varphi \mapsto V_\mathrm{i}\varphi = v,$$

stetig, und da $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ dicht ist (Korollar 3.15), kann V_i zu einem stetigen linearen Operator $\widetilde{V}_\mathrm{i} \colon L^2(\Omega) \to \mathcal{H}^1\big(B_R(0)\big)$ fortgesetzt werden.

(iv) Da

$$\Phi_k(x) - \Phi_\mathrm{i}(x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{4\pi|x|} - \frac{\mathrm{e}^{-|x|}}{4\pi|x|} = \frac{1}{4\pi|x|}\big(1 + \mathcal{O}(|x|) - (1 - \mathcal{O}(|x|))\big) = \mathcal{O}(1), \qquad |x| \to 0,$$

und

$$\begin{aligned} \nabla\Phi_k(x) - \nabla\Phi_\mathrm{i}(x) &= \frac{x}{|x|}\frac{1}{4\pi}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}\Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{|x|}\Big) - \mathrm{e}^{-|x|}\Big(-1 - \frac{1}{|x|}\Big)\Big) \\ \text{Taylor um 0} &= \frac{x}{|x|}\frac{1}{4\pi}\Big(\mathrm{i}k - \frac{1}{|x|} + 1 + \frac{1}{|x|} + \mathcal{O}(1)\Big) \\ &= \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

für $|x| \to 0$, folgt, dass

$$V_\mathrm{diff} \colon \quad \varphi \mapsto \int_\Omega \big(\Phi_k(\cdot - y) - \Phi_\mathrm{i}(\cdot - y)\big)\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

ein beschränkter, linearer Operator von $\big(\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \| \cdot \|_{L^2(\Omega)}\big)$ nach $\mathcal{H}^1\big(B_R(0)\big)$ ist. Damit hat V_diff und auch $V = V_\mathrm{diff} + V_\mathrm{i}$ eine stetig lineare Fortsetzung von $L^2(\Omega)$ nach $\mathcal{H}^1\big(B_R(0)\big)$, insbesondere folgt (4.6). Da $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ dicht ist, gilt (4.5) für alle $\varphi \in L^2(\Omega)$.

□

Wir haben nun also die Existenz von Lösungen der Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = f, \qquad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ mit kompaktem Träger,}$$

die die SAB erfüllen,gezeigt. Als nächstes zeigen wir die Existenz von Lösungen zu (3.a)-(3.b). Dazu reduzieren wir das Problem zu einer Integralgleichung 2. Art.

Satz 4.6.

(a) Sei $u \in \mathcal{H}_\mathrm{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ eine schwache Lösung des Streuproblems (3.a)-(3.b). *Dann ist $u\big|_{B_R(0)} \in L^2\big(B_R(0)\big)$ für alle $R > 0$ und $u\big|_{B_R(0)}$ löst die* Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$u(x) = u^i(x) - k^2 \int_{B_R(0)} \big(1 - n^2(y)\big)\Phi(x - y)u(y)\mathrm{d}y - \int_{B_R(0)} \Phi(x - y)f(y)\mathrm{d}y, \tag{4.7}$$

für $x \in B_R(0)$.

(b) Sei umgekehrt $u \in L^2\big(B_R(0)\big)$ eine Lösung der Integralgleichung (4.7), *dann kann u durch die rechte Seite von* (4.7) *zu einer schwachen Lösung $u \in \mathcal{H}_\mathrm{loc}^1(\mathbb{R}^3)$ des Streuproblems* (3.a)-(3.b) *fortgesetzt werden.*

Beweis.

(a) Sei $u \in \mathcal{H}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ eine Lösung von (3.a)-(3.b) und

$$v := V\big(k^2(1-n^2)u\big|_{B_R(0)} + f\big).$$

Nach Satz 4.5 ist $v \in \mathcal{H}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ eine schwache Lösung von

$$\Delta v + k^2 v = -k^2(1-n^2)u\big|_{B_R(0)} - f,$$

die die SAB erfüllt. Aus Platzgründen werden im Folgenden starke Formulierungen geschrieben, es sind aber immer schwache gemeint. Aus $\Delta u + k^2 u = k^2(1-n^2)u + f$ und $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$ folgt, dass

$$\Delta(v+u^s) + k^2(v+u^s) = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Der Regularitätssatz Theorem 3.30 zeigt, dass $v + u^s$ eine klassische Lösung der Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^3$ ist, und da $v + u^s$ die SAB erfüllt, ist $v + u^s = 0$ in $\mathbb{R}^3$ (vgl. Kapitel 2). Also ist

$$u = u^i + u^s = u^i - v,$$

d.h. $u\big|_{B_R(0)}$ erfüllt die Lippmann-Schwinger-Gleichung (4.7).

(b) Sei $u \in L^2\big(B_R(0)\big)$ eine Lösung von (4.7). Setze $v := V\big(k^2(1-n^2)u + f\big)$. Dann ist $u = u^i - v$ in $B_R(0)$ und u kann durch die rechte Seite von (4.7) auf ganz $\mathbb{R}^3$ fortgesetzt werden. Satz 4.5 zeigt $v \in \mathcal{H}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ und $\Delta v + k^2 v = -k^2(1-n^2)u\big|_{B_R(0)} - f$ (schwach) und v erfüllt die SAB. Daher ist auch $u \in \mathcal{H}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$,

$$\Delta u + k^2 u = -(\Delta v + k^2 v) = k^2(1-n^2)u + f,$$

d.h. $\Delta u + k^2 n^2 u = f$ (schwach), also $u^s = -v$.

□

Lemma 4.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Dann ist der Integraloperator $T\colon L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$*

$$\big(T\varphi\big)(x) := \int_\Omega k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

ein kompakter Operator.

Beweis. Funktionalanalysis. □

Satz 4.8. *Seien n^2, k, f und u^i wie am Anfang von Abschnitt II eingeführt. Dann existiert eine Lösung $u \in \mathcal{H}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ zum direkten Streuproblem (3.a)-(3.b) $\big($bzw. $u\big|_{B_R(0)} \in L^2(B_R(0))$ zur Lippmann-Schwinger-Gleichung (4.7)$\big)$, falls Lösungen zu (3.a)-(3.b) $\big($bzw. zu (4.7)$\big)$ eindeutig bestimmt sind. Die Lösung hängt stetig von u^i und f ab, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass*

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(B_R(0))} \leq C\big(\|u^i\|_{L^2(B_R(0))} + \|f\|_{L^2\left(B_R(0)\right)}\big),$$

wobei C nur von k, n^2 und R abhängt.

Beweis. Wir wenden die Fredholmsche Alternative auf die Integralgleichung $u = u^i - Tu - Vf$ an, wobei

$$V\colon L^2\big(B_R(0)\big) \to L^2\big(B_R(0)\big), \qquad (Vf)(x) := \int_{B_R(0)} \Phi(x-y)f(y)\mathrm{d}y,$$

$$T\colon L^2\big(B_R(0)\big) \to L^2\big(B_R(0)\big), \qquad (Tu)(x) := k^2\int_{B_R(0)} \big(1-n^2(y)\big)\Phi(x-y)u(y)\mathrm{d}y.$$

Nach Lemma 4.7 sind diese Operatoren kompakt. Daher ist (nach der Fredholmschen Alternative) $I+T$ stetig invertierbar, falls $I+T$ injektiv ist. Daraus folgt die Behauptung, da (4.7) in der Form

$$\begin{aligned} u &= u^i - Tu - Vf, && \text{auf } B_R(0) \\ \Longleftrightarrow (I+T)u &= u^i - Vf, && \text{auf } B_R(0), \end{aligned}$$

geschrieben werden kann. □

Um Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des direkten Problems (3.a)-(3.b) zu zeigen, müssen wir also noch Eindeutigkeit zeigen. Satz 4.8 liefert dann aber auch stetige Abhängigkeit der Lösung von f und u^i.

Bevor wir zur Eindeutigkeit kommen, beschreiben wir noch das Fernfeld zur Lösung (vgl. Satz & Definition 2.8)

Satz 4.9. *Sei $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ eine schwache Lösung des Streuproblems* (3.a)-(3.b). *Dann gilt*

$$u(x) = u^i(x) + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|} u^\infty(\widehat{x}) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big), \qquad \text{für } |x| \to \infty, \tag{4.8}$$

gleichmäßig für $\widehat{x} = \frac{x}{|x|} \in \mathcal{S}^2$, wobei

$$u^\infty(\widehat{x}) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \big(1 - n^2(y)\big) u(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} \mathrm{d}y - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} \mathrm{d}y. \tag{4.9}$$

Beweis. Die Formeln (4.8) und (4.9) folgen unmittelbar aus (4.7) und dem asymptotischen Verhalten der Fundamentallösung aus (2.7). □

Existenz und Eindeutigkeit für niedrige Frequenzen und die Bornsche Näherung

Für $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ (mit kompaktem Träger $\mathrm{supp}(f) \subset B_R(0)$) kann man die Lippmann-Schwinger-Gleichung $u + Tu = u^i - Vf$ auch als Integralgleichung auf $L^\infty\big(B_R(0)\big)$ oder sogar auf $\mathcal{C}\big(\overline{B_R(0)}\big)$ betrachten, da nach Lemma 4.3 das Volumenpotential L^∞-Funktionen auf stetige Funktionen abbildet. Im Folgenden betrachten wir T als Operator auf $\mathcal{C}\big(\overline{B_R(0)}\big)$,

$$\begin{aligned}
|(Tu)(x)| &= \Big| k^2 \int_{B_R(0)} \big(1 - n^2(y)\big) \Phi(x-y) u(y) \mathrm{d}y \Big| \\
&\le k^2 \|1 - n^2\|_{L^\infty(B_R(0))} \|u\|_{L^\infty(B_R(0))} \int_{B_R(0)} |\Phi(x-y)| \mathrm{d}y \\
&\le k^2 \|1 - n^2\|_{L^\infty(B_R(0))} \|u\|_{L^\infty(B_R(0))} \max_{x \in B_R(0)} \int_{B_R(0)} \frac{1}{4\pi|x-y|} \mathrm{d}y \\
&= k^2 \|1 - n^2\|_{L^\infty(B_R(0))} \|u\|_{L^\infty(B_R(0))} \int_{B_R(0)} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|y|} \mathrm{d}y \\
&= k^2 \|1 - n^2\|_{L^\infty(B_R(0))} \|u\|_{L^\infty(B_R(0))} \int_0^R \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\
&= \frac{(kR)^2}{2} \|1 - n^2\|_{L^\infty(B_R(0))} \|u\|_{L^\infty(B_R(0))} \\
&= \frac{(kR)^2}{2} \|1 - n^2\|_{L^\infty(B_R(0))} \|u\|_{\mathcal{C}(\overline{B_R(0)})}
\end{aligned}$$

Für die Operatornorm gilt damit

$$\|T\|_{\mathcal{C}(\overline{B_R(0)}) \leftarrow \mathcal{C}(\overline{B_R(0)})} = \|T\|_{L^\infty(B_R(0))} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|_\infty}{\|u\|_\infty} \le \frac{(kR)^2}{2} \|1 - n^2\|_\infty,$$

daher ist $\|T\|_{L^\infty(B_R(0))} < 1$, falls $(kR)^2 \|1 - n^2\|_{L^\infty(B_R(0))} < 2$. In diesem Fall liefert der Banachsche Fixpunktsatz Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Integralgleichung (4.7) (und damit auch des Streuproblems (3.a)-(3.b)), da

$$u\big|_{B_R(0)} = u^i\big|_{B_R(0)} - Tu\big|_{B_R(0)} - Vf, \qquad \text{in } B_R(0).$$

Die Lösung kann mit einer Neumannschen Reihe dargestellt werden:

$$u\big|_{B_R(0)} = \sum_{m=0}^\infty (-1)^m T^m \big(u^i\big|_{B_R(0)} - Vf\big). \tag{Born-Reihe}$$

Betrachtet man nur die ersten beiden Terme in dieser Reihe, erhält man die *Bornsche Näherung*

$$u_b(x) = u^i(x) - \big(Vf\big)(x) - k^2 \int_{B_R(0)} \big(1 - n^2(y)\big)\Phi(x-y)(u^i - Vf)(y)\mathrm{d}y, \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^3.$$

Wegen (aus Notationsgründen schreibe $\|T\| := \|T\|_{\mathcal{C}(\overline{B_R(0)})\leftarrow\mathcal{C}(\overline{B_R(0)})}$)

$$\begin{aligned}
\|u - u_b\|_{L^\infty(B_R(0))} &\leq \sum_{m=2}^{\infty} \|T\|^m \|u^i - Vf\|_{L^\infty(B_R(0))} \\
&\leq \sum_{m=2}^{\infty} \|T\|^m (\|u^i\|_{L^\infty(B_R(0))} + \|Vf\|_{L^\infty(B_R(0))}) \\
&\leq \sum_{m=2}^{\infty} \|T\|^m \Big(\|u^i\|_{L^\infty(B_R(0))} + \frac{R^2}{2}\|f\|_{L^\infty(B_R(0))}\Big) \\
&= \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \|T\|^m\Big)\|T\|^2 \Big(\|u^i\|_{L^\infty(B_R(0))} + \frac{R^2}{2}\|f\|_{L^\infty(B_R(0))}\Big) \\
&= \frac{1}{1-\|T\|}\|T\|^2 \Big(\|u^i\|_{L^\infty(B_R(0))} + \frac{R^2}{2}\|f\|_{L^\infty(B_R(0))}\Big) \\
&\leq 2\frac{(kR)^4}{4}\|1-n^2\|^2_{L^\infty(B_R(0))} \Big(\|u^i\|_{L^\infty(B_R(0))} + \frac{R^2}{2}\|f\|_{L^\infty(B_R(0))}\Big),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

falls $\|T\|_{\mathcal{C}(\overline{B_R(0)})\leftarrow\mathcal{C}(\overline{B_R(0)})} \leq \frac{(kR)^2}{2}\|1-n^2\|_\infty < \frac{1}{2}$, ist die Bornsche Näherung eine gute Approximation, falls die rechte Seite von (4.10) klein ist.

Bemerkung.

$$\begin{aligned}
\Delta u + k^2 u &= f + k^2(1-n^2)u, && \text{in } \mathbb{R}^3, \\
\Delta u_b + k^2 u_b &= f + k^2(1-n^2)(u^i - Vf), && \text{in } \mathbb{R}^3,
\end{aligned}$$

wobei $w := -Vf$ die Gleichung $\Delta w + k^2 w = f$ löst, d.h. die Bornapproximation vernachlässigt die Mehrfachstreuung an $(1-n^2)$ auf der rechten Seite.

Für das Fernfeld der Bornschen Näherung ergibt sich

$$u_b^\infty(\widehat{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} f(y)\mathrm{d}y - \frac{k^2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \big(1-n^2(y)\big)\big(u^i - Vf\big)(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}\mathrm{d}y. \tag{4.11}$$

Speziell für $f \equiv 0$ und $u^i(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$, $d \in \mathcal{S}^2$, folgt

$$u_b^\infty(\widehat{x}; d) := u_b^\infty(\widehat{x}) = -\frac{k^2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \big(1-n^2(y)\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot y}\mathrm{d}y, \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2,$$

d.h. $u_b^\infty(\widehat{x}, d)$ ist ein Vielfaches der Fouriertransformation des Kontrasts $(1-n^2)$, ausgewertet in $k(\widehat{x}-d)$, d.h. u_b^∞ entspricht der Fouriertransformation auf der Sphäre

$$k(\mathcal{S}^2 - d) = \{z = k(\widehat{x} - d) \mid \widehat{x} \in \mathcal{S}^2\}.$$

Es gilt das *Reziprozitätsprinzip*

$$u_b^\infty(-d; -\widehat{x}) = u_b^\infty(\widehat{x}; d). \tag{4.12}$$

5 Kugelflächenfunktionen, sphärische Besselfunktionen und Rellichs Lemma

Eine **Kugelflächenfunktion** von Ordnung n ist die Einschränkung eines harmonischen homogenen Polynoms, d.h.

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha x^\alpha, \qquad \Delta f = 0,$$

auf die Einheitssphäre $\mathcal{S}^2$. Man kann zeigen, dass es genau $2n+1$ linear unabhängige Kugelflächenfunktionen vom Grad n gibt. In Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ) ist

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\Big[\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big) + \underbrace{\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}}_{=:\Delta_{\mathcal{S}^2}}\Big].$$

Homogene Polynome sind von der Form

$$H_n = r^n Y_n(\theta,\phi),$$

und $\Delta H_n = 0$ genau dann, wenn

$$n(n+1)Y_n + \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin(\theta)\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\phi^2} = n(n+1)Y_n + \Delta_{\mathcal{S}^2}Y_n = 0. \tag{5.1}$$

Für zwei homogene harmonische Polynome H_n und H_m ergibt die Greensche Formel (2.3), dass

$$0 = \int_{B_1(0)} \overline{H}_m\Delta H_n - H_n\Delta\overline{H}_m \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{S}^2} \overline{H}_m\frac{\partial H_n}{\partial r} - H_n\frac{\partial\overline{H}_m}{\partial r}\mathrm{d}x = (n-m)\int_{\mathcal{S}^2}\overline{Y}_m Y_n \mathrm{d}x,$$

also folgt mit (5.1)

$$\int_{\mathcal{S}^2}\overline{Y}_m Y_n\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{falls } n\neq m. \tag{5.2}$$

Um Kugelflächenfunktionen zu konstruieren, die nur von θ abhängen, betrachte $x,y\in\mathbb{R}^3$ mit $r := |x| < |y| = 1$, bezeichne mit θ den Winkel zwischen x und y und setze $t=\cos\theta$. Damit erhält man durch Taylorentwicklung

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{1-2tr+r^2}} = \sum_{n=0}^\infty P_n(t)r^n, \tag{5.3}$$

mit Koeffizienten $P_n(t)$, die noch zu bestimmen sind. Schreibe

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tr+r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\sqrt{1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}},$$

und beachte, dass

$$\frac{1}{\sqrt{1-r\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}}} = 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} r^n \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}n\theta}, \tag{5.4}$$

(schreibe $z = r\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta} \rightsquigarrow$ Taylor) für $0\le r\le r_0<1$ (inklusive aller gliedweisen Ableitungen) absolut und gleichmäßig konvergiert (und damit auch das Produkt). Daraus folgt, dass ebenso (5.3) absolut und gleichmäßig konvergent ist für $0\le r\le r_0$.

Setzt man $\theta=0$ in (5.4), erhält man eine Majorante $r\mapsto(1-r)^{-\frac{1}{2}}$ und daher ist die geometrische Reihe $r\mapsto(1-r)^{-1}$ eine Majorante für (5.3), d.h.

$$|P_n(t)|\le 1, \qquad -1\le t\le 1,\ n=0,1,2,\ldots. \tag{5.5}$$

Differentieren von (5.3) bzgl. r, Multiplizieren mit $(1-2rt+r^2)$ und einsetzen von (5.3) (links) und Koeffizientenvergleich liefert die Rekursionsformel

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0, \qquad n=1,2,\ldots. \tag{5.6}$$

Direkt aus (5.3) folgt $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$ und deshalb sind die P_n Polynome vom Grad n die sogenannten *Legendre-Polynome* (aus Numerik 1 bekannt). Sie erfüllen

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}, \qquad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

und die P_n sind gerade Funktionen falls n gerade, bzw. ungerade Funktionen falls n ungerade.

Da die linke Seite von (5.3) harmonisch in x ist, folgt durch gliedweises Anwenden des Δ-Operators in Kugelkoordinaten auf die Reihe rechts, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin(\theta)\frac{\partial P_n(\cos(\theta))}{\partial\theta} + n(n+1)P_n(\cos(\theta))\Big)r^{n-2} = 0.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt, dass die P_n die *Legendre-Differentialgleichung*

$$(1-t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{5.7}$$

erfüllen, und dass das homogene Polynom $r^n P_n\big(\cos(\theta)\big)$ vom Grad n harmonisch ist. Daher ist $P_n\big(\cos(\theta)\big)$ eine Kugelflächenfunktion von Ordnung n.

Als Nächstes betrachten wir Kugelflächenfunktionen der Form

$$Y_n^m(\theta,\phi) = f\big(\cos(\theta)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}.$$

Dann erfüllt Y_n^m (5.1), falls f die *assoziierte Legendre-Differentialgleichung*

$$(1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) + \Big(n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\Big)f(t) = 0, \tag{5.8}$$

erfüllt. Differenziert man (5.7) m-mal, dann folgt für die m-te Ableitung g von P_n, dass diese die Gleichung

$$(1-t^2)g''(t) - 2(m+1)tg'(t) + (n-m)(n+m+1)g(t) = 0,$$

erfüllt. Daraus folgt, dass die *assoziierten Legendre-Funktionen*

$$P_n^m(t) \coloneqq (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m P_n}{\mathrm{d}t^m}(t), \qquad m = 0, 1, \dots, n, \tag{5.9}$$

die Gleichung (5.8) erfüllen. Wir zeigen noch, dass $r^n Y_n^m(\theta,\phi) = r^n P_n^m\big(\cos(\theta)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ homogene Polynome vom Grad n sind:

Die Rekursion (5.6) und (5.9) zeigen, dass

$$P_n^m\big(\cos(\theta)\big) = \sin^m(\theta)u_n^m\big(\cos(\theta)\big),$$

wobei u_n^m ein Polynom vom Grad $n-m$ ist, das gerade (ungerade) ist, falls $n-m$ gerade (ungerade) ist. In Kugelkoordinaten ist $r^m\sin^m(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} = (x_1 + \mathrm{i}x_2)^m$, also

$$r^n Y_n^m(\theta,\phi) = (x_1 + \mathrm{i}x_2)^m r^{n-m}u_n^m\big(\cos(\theta)\big).$$

Für $n-m$ gerade ist

$$r^{n-m}u_n^m\big(\cos(\theta)\big) = r^{n-m}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-m)} a_k\cos^{2k}(\theta) = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-m)} a_k x_3^{2k}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}(n-m)-k},$$

ein homogenes Polynom vom Grad $n-m$. Analog folgt das für $n-m$ ungerade, also sind $r^n Y_n^m(\theta,\phi)$ harmonische homogene Polynome vom Grad n.

Satz 5.1. *Die Kugelflächenfunktionen*

$$Y_n^m(\theta,\phi) \coloneqq \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}P_n^{|m|}\big(\cos(\theta)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi},$$

mit $m = -n, \dots, n$ und $n = 0, 1, 2, \dots$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(\mathcal{S}^2)$.

Beweis. Siehe Colton & Kress (1998), p. 25. □

Sphärische Besselfunktionen

Wir suchen Lösungen der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ der Form

$$u(x) = f\big(k|x|\big)Y_n(\widehat{x}),$$

wobei Y_n eine Kugelflächenfunktion der Ordnung n ist. Aus (5.1) folgt, dass $\Delta u + k^2 u = 0$ genau dann, wenn

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\Big) + \Delta_{\mathcal{S}^2} u + k^2 r^2 u = 0,$$

was wiederum äquivalent zur Lösung der *sphärischen Besselgleichung*

$$t^2 f''(t) + 2tf'(t) + \big(t^2 - n(n+1)\big)f(t) = 0, \qquad (t = kr), \tag{5.10}$$

ist. Die Funktionen

$$j_n(t) \coloneqq \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{n+2p}}{2^p p! 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+2p+1)}, \tag{5.11}$$

$$y_n(t) \coloneqq -\frac{(2n)!}{2^n n!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{p-n-1}}{2^p p!(-2n+1)(-2n+3) \cdot \ldots \cdot (-2n+2p-1)}, \tag{5.12}$$

$n = 0, 1, 2 \ldots$ sind Lösungen der sphärischen Besselgleichung (5.10). Die Funktion j_n ist analytisch in $\mathbb{R}$ und y_n ist analytisch in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Quotientenkriterium). Die Funktionen j_n und y_n heißen *sphärische Bessel-* und *sphärische Neumannfunktionen.* Die Linearkombination

$$h_n^{(1,2)} \coloneqq j_n \pm \mathrm{i} y_n,$$

heißen *sphärische Hankelfunktionen* erster und zweiter Art. Differenzieren von (5.11) und (5.12) zeigt, dass $f_n = j_n, y_n$ die Formel

$$f_{n+1}(t) = -t^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t^{-n} f_n(t)\big), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.13}$$

erfüllen. Für $n = 0$ ergibt sich

$$j_0(t) = \frac{\sin(t)}{t}, \qquad y_0(t) = -\frac{\cos(t)}{t}, \qquad \text{also} \quad h_0^{(1,2)}(t) = \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}t}}{\pm \mathrm{i}t}.$$

Aus dieser Gleichung und (5.13) folgt mit Induktion, dass

$$h_n^{(1)}(t) = (-\mathrm{i})^n \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}t}\Big(1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{a_{pn}}{t^p}\Big), \qquad h_n^{(2)}(t) = \mathrm{i}^n \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{-\mathrm{i}t}\Big(1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\overline{a_{pn}}}{t^p}\Big),$$

mit komplexen Koeffizienten $a_{1n}, \ldots, a_{nn}$. Es gilt also

$$\begin{aligned} h_n^{(1,2)}(t) &= \frac{1}{t} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}(t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2})}\Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big), \qquad && t \to \infty, \\ \big(h_n^{(1,2)}\big)'(t) &= \frac{1}{t} \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}(t - \frac{n\pi}{2})}\Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big), && t \to \infty. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Satz 5.2. *Sei Y_n eine Kugelflächenfunktion von Ordnung n. Dann ist*

$$u_n(x) = j_n\big(k|x|\big)Y_n(\widehat{x}),$$

eine ganze Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3$ und

$$v_n(x) = h_n^{(1)}(k|x|)Y_n(\widehat{x}),$$

ist eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Beweis. Da $j_n(kr) = k^n r^n w_n(r^2)$ mit einer analytischen Funktion $w_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist und da $r^n Y_n(\widehat{x})$ ein homogenes Polynom in x_1, x_2, x_3 ist, ist $j_n(kr)Y_n(\widehat{x})$ regulär in $x = 0$, d.h. u_n löst die Helmholtzgleichung in 0. Dass v_n die Ausstrahlungsbedingung erfüllt, folgt aus (5.14). □

Satz 5.3 (Rellichs Lemma). *Sei $u \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}\big)$ eine Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$, sodass*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 \mathrm{d}s(x) = 0. \tag{5.15}$$

Dann ist $u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$.

Beweis. Für hinreichend großes $|x|$ kann nach Satz 5.1 die Lösung u auf $\partial B_r(0)$, $r > R$, in eine Fourierreihe

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m(|x|) Y_n^m(\widehat{x}), \qquad \widehat{x} = \frac{x}{|x|},$$

entwickelt werden. Die Koeffizienten sind gegeben durch

$$a_n^m(r) = \int_{\mathcal{S}^2} u(r\widehat{x}) \overline{Y_n^m(\widehat{x})} \mathrm{d}s(\widehat{x}), \tag{5.16}$$

und erfüllen die *Parsevalsche Identität*

$$\int_{|x|=r} |u(x)|^2 \mathrm{d}s(x) = \int_{\mathcal{S}^2} |u(r\widehat{x})|^2 r^2 \mathrm{d}s(\widehat{x}) = r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} |a_n^m(r)|^2.$$

Aus (5.15) folgt, dass

$$\lim_{r\to\infty} r^2 |a_n^m(r)|^2 = 0, \qquad \text{für alle } m, n. \tag{5.17}$$

Da $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$, folgt mit (5.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 a_n^m}{\mathrm{d}r^2}(r) + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}a_n^m}{\mathrm{d}r}(r) &= \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{\partial a_n^m(r)}{\partial r}\Big)\Big) \\
&\overset{(5.16)}{=} \int_{\mathcal{S}^2} \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \frac{\partial u(r\widehat{x})}{\partial r}\Big)\Big)\overline{Y_n^m(\widehat{x})} \mathrm{d}s(\widehat{x}) \\
&= \int_{\mathcal{S}^2} \Big(-k^2 u(r\widehat{x}) - \frac{\Delta_{\mathcal{S}^2}}{r^2} u(r\widehat{x})\Big)\overline{Y_n^m(\widehat{x})} \mathrm{d}s(\widehat{x}) \\
\text{Greensche Formel für } \Delta_{\mathcal{S}^2} \text{ auf } \mathcal{S}^2 \quad &= -k^2 \int_{\mathcal{S}^2} u(r\widehat{x}) \overline{Y_n^m(\widehat{x})} \mathrm{d}s(\widehat{x}) - \int_{\mathcal{S}^2} u(r\widehat{x}) \frac{\Delta_{\mathcal{S}^2}}{r^2} \overline{Y_n^m(\widehat{x})} \mathrm{d}s(\widehat{x}) \\
&= -k^2 \int_{\mathcal{S}^2} u(r\widehat{x}) \overline{Y_n^m(\widehat{x})} \mathrm{d}s(\widehat{x}) - \int_{\mathcal{S}^2} u(r\widehat{x}) \frac{-n(n+1)}{r^2} \overline{Y_n^m(\widehat{x})} \mathrm{d}s(\widehat{x}) \\
&\overset{(5.16)}{=} -\Big(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\Big) a_n^m(r),
\end{aligned}$$

d.h.

$$r^2 \frac{\mathrm{d}^2 a_n^m}{\mathrm{d}r^2}(r) + 2r \frac{\mathrm{d}a_n^m}{\mathrm{d}r}(r) + \big(k^2 r^2 - n(n+1)\big) a_n^m(r) = 0.$$

Vergleiche mit (5.10),

$$a_n^m(r) = \alpha_n^m h_n^{(1)}(kr) + \beta_n^m h_n^{(2)}(kr),$$

wobei $\alpha_n^m, \beta_n^m \in \mathbb{C}$ konstant sind. Zusammen mit (5.17) und (5.14) folgt $\alpha_n^m = \beta_n^m = 0$ für alle m, n und damit $u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$. □

Satz 5.4. *Sei $u \in \mathcal{C}^2\big(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}\big)$ eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$, deren Fernfeld u^∞ verschwindet. Dann ist $u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$.*

Beweis. Aus (2.12) folgt, dass

$$\begin{aligned}
\int_{|x|=r} |u(x)|^2 \mathrm{d}s(x) &= \int_{|x|=1} |u(r\widehat{x})|^2 r^2 \mathrm{d}s(\widehat{x}) \\
\overset{(2.12)}{=} &\int_{|x|=1} \Big|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} u^\infty(\widehat{x}) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{r^2}\Big)\Big|^2 r^2 \mathrm{d}s(\widehat{x}) \\
&= \int_{|x|=1} |u^\infty(\widehat{x})|^2 \mathrm{d}s(\widehat{x}) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{r}\Big) \\
&= \mathcal{O}\Big(\frac{1}{r}\Big) \qquad \text{für } r \to \infty.
\end{aligned}$$

Damit impliziert $u^\infty = 0$, dass u die Voraussetzungen von Rellichs Lemma erfüllt, also gilt $u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$. $\square$

6 Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit und Eindeutigkeit von Lösungen des direkten Problems

Sobolevräume periodischer Funktionen

Betrachte den Würfel $Q = (-\pi, \pi)^3 \subset \mathbb{R}^3$. Aus dem Satz von Stone-Weierstraß und der Dichtheit von $\mathcal{C}(\overline{Q}) \subset L^2(Q)$ folgt, dass

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x} \,\middle|\, \ell \in \mathbb{Z}^3 \right\},$$

eine Orthonormalbasis von $L^2(Q)$ ist. Damit kann jedes $v \in L^2(Q)$ in eine Fourierreihe

$$v(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} v_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x}, \qquad x \in Q, \tag{6.1}$$

mit Koeffizienten

$$v_\ell = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_Q v(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\cdot y}\mathrm{d}y, \qquad \ell \in \mathbb{Z}^3, \tag{6.2}$$

entwickelt werden. Die Reihe in (6.1) konvergiert im L^2-Sinn und die Parseval-Identität liefert

$$(2\pi)^3 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} |v_\ell|^2 = \int_Q |v(y)|^2\mathrm{d}y.$$

Insbesondere ist $L^2(Q)$ der Abschluss des Raums der trigonometrischen Polynome unter der L^2-Norm oder äquivalent bzgl.

$$\|v\|_{L^2_{\mathrm{per}}(Q)} := (2\pi)^{\frac{3}{2}} \Big(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} |v_\ell|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei $w(x) = \sum_{|\ell|_1\le m} w_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x}$ ein trigonometrisches Polynom. Dann ist $\nabla w(x) = \sum_{|\ell|_1\le m} \mathrm{i}\ell w_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x}$ und $(2\pi)^3\|\nabla w\|^2_{L^2(Q)} = (2\pi)^3 \sum_{|\ell|_1\le m} |\ell|^2|w_\ell|^2$, also

$$\|w\|^2_{\mathcal{H}^1(Q)} = (2\pi)^3 \sum_{|\ell|_1\le m} \big(1 + |\ell|^2\big)|w_\ell|^2.$$

Wir definieren $\mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q)$ als Vervollständigung des Raums der trigonometrischen Polynome unter der $\mathcal{H}^1(Q)$-Norm oder äquivalent bzgl.

$$\|w\|_{\mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q)} := (2\pi)^{\frac{3}{2}} \Big(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} (1 + |\ell|^2)|w_\ell|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Insbesondere folgt aus Theorem 3.27, dass $\mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q) \subset \mathcal{H}^1(Q)$. Für alle $w \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q)$ ist $w(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} w_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x}$ wohldefiniert und für alle $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(Q)$ gilt

$$\int_Q \Big(\sum_{|\ell|_1\le m} w_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x} \Big) \nabla\varphi \mathrm{d}x = -\int_Q \Big(\sum_{|\ell|_1\le m} (\mathrm{i}\ell) w_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x} \Big) \varphi \mathrm{d}x$$

$$m \to \infty \Big\downarrow \qquad\qquad\qquad \Big\downarrow m \to \infty$$

$$\int_Q w\nabla\varphi \mathrm{d}x = -\int_Q \underbrace{\Big(\sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} (\mathrm{i}\ell) w_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x} \Big)}_{\in L^2(Q),\ \text{da } w\in\mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q)} \varphi \mathrm{d}x$$

Damit folgt

$$\nabla w(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} \mathrm{i}\ell w_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x}, \qquad \nabla w \in L^2(Q), \tag{6.3}$$

also ∇w ist schwache Ableitung von w. Durch Auswerten der Fourierreihe kann $w \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q)$ 2π-periodisch auf $\mathbb{R}^3$ fortgesetzt werden $\big($d.h. $w(x+2\pi\ell) = w(x)$ für alle $\ell \in \mathbb{Z}^3$ und $x \in \mathbb{R}^3\big)$. Ist umgekehrt $v \in \mathcal{H}^1(Q)$ 2π-periodisch (am Rand),

$$\begin{aligned}
|v_\ell| &= \Big| \int_Q v(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\cdot y} \mathrm{d}y \Big| \\
&= \Big| \int_Q v(y) \Big(-\frac{1}{\mathrm{i}\ell_m} \Big) \frac{\partial}{\partial y_m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\cdot y} \mathrm{d}y \Big| \\
&= \frac{1}{|\ell_m|} \Big| \int_Q \underbrace{\Big(\frac{\partial}{\partial y_m} v(y) \Big)}_{\in L^2(Q)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\cdot y} \mathrm{d}y \Big|,
\end{aligned}$$

also ist $\ell v_\ell \in \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ und somit $v \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q)$.

Lemma 6.1. *Sei $p \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\widehat{e} = (1, \mathrm{i}, 0) \in \mathbb{C}^3$. Dann gibt es für alle $t > 0$ und $g \in L^2(Q)$ eine eindeutige Lösung $w = w_t(g) \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q)$ der Gleichung*

$$\Delta w + (2t\widehat{e} - \mathrm{i}p) \cdot \nabla w - (\mathrm{i}t + \alpha) w = g, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3, \tag{6.4a}$$

im schwachen Sinn, d.h. sodass

$$\int_Q \nabla w \cdot \nabla \psi + \big(t\widehat{e} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}p\big) \cdot \big(w \nabla \psi - \psi \nabla w\big) + (\mathrm{i}t + \alpha) w \psi \mathrm{d}x = -\int_Q g \psi \mathrm{d}x, \tag{6.4b}$$

für alle $\psi \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q)$. Die Lösung erfüllt die Abschätzung

$$\|w\|_{L^2(Q)} \le \frac{1}{t} \|g\|_{L^2(Q)}, \qquad \text{für alle } g \in L^2(Q),\ t > 0.$$

Beweis. Entwickelt man

$$w(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} w_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} g_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x},$$

mit Koeffizienten gegeben durch (6.2), und wählt $\psi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\cdot x}$ in (6.4b), so folgt mit (6.3), dass für alle $\ell \in \mathbb{Z}^3$

$$\begin{aligned}
&|\ell|^2 w_\ell + \big(t\widehat{e} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}p\big) \cdot (-\mathrm{i}\ell w_\ell - \mathrm{i}\ell w_\ell) + (\mathrm{i}t + \alpha) w_\ell = -g_\ell \\
\iff\ & w_\ell \big(-|\ell|^2 + \mathrm{i}\ell \cdot (2t\widehat{e} - \mathrm{i}p) - (\mathrm{i}t + \alpha) \big) = g_\ell.
\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
\big| -|\ell|^2 + \mathrm{i}\ell \cdot (2t\widehat{e} - \mathrm{i}p) - (\mathrm{i}t + \alpha) \big| &\ge \big| \operatorname{Im} \big(-|\ell|^2 + \mathrm{i}\ell \cdot (2t\widehat{e} - \mathrm{i}p) - (\mathrm{i}t + \alpha) \big) \big| \\
&= |2t\ell_1 - t| \\
&= t|2\ell_1 - 1| \ge t \qquad \text{für alle } \ell \in \mathbb{Z}^3,\ t > 0,
\end{aligned}$$

ist der Operator $L_t \colon L^2(Q) \to L^2(Q)$,

$$\big(L_t g\big)(x) := \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} \frac{g_\ell}{-|\ell|^2 + \mathrm{i}\ell \cdot (2t\widehat{e} - \mathrm{i}p) - (\mathrm{i}t + \alpha)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} w_\ell \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\cdot x}, \tag{6.5}$$

wohldefiniert und beschränkt mit $\|L_t\| \le \frac{1}{t}$ für alle $t > 0$. Um zu zeigen, dass $w := L_t g$ die Gleichung (6.4) erfüllt, sei $\psi \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q)$, $\psi(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} \psi_\ell \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\cdot x}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\int_Q \nabla w \cdot \nabla \psi + \big(t\widehat{e} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}p\big) \cdot \big(w \nabla \psi - \psi \nabla w\big) + (\mathrm{i}t + \alpha) w \psi \mathrm{d}x \\
&= (2\pi)^3 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} \big[|\ell|^2 - \mathrm{i}\ell \cdot (2t\widehat{e} - \mathrm{i}p) + (\mathrm{i}t + \alpha) \big] w_\ell \psi_\ell \\
&\overset{(6.5)}{=} -(2\pi)^3 \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^3} g_\ell \psi_\ell \\
&= -\int_Q g(x) \psi(x) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

□

Das Lemma liefert also einen beschränkten linearen Lösungsoperator $L_t\colon L^2(Q) \to L^2(Q)$, $g \mapsto w_t(g)$ für (6.4) mit $\|L_t\| \leq \frac{1}{t}$ für alle $t > 0$.

Satz 6.2 (Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit)**.** *Sei $n^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $n^2(x) = 1$ für $|x| \geq R$ und $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ eine schwache Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 n^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3$, sodass $u(x) = 0$ für $|x| \geq \widetilde{R}$, wobei $\widetilde{R} > R$. Dann ist $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^3$.*

Beweis. Sei $\widehat{e} = (1, \mathrm{i}, 0) \in \mathbb{C}^3$, $\rho := \frac{2\widetilde{R}}{\pi}$, und

$$w_t(x) = \exp\big(\tfrac{\mathrm{i}}{2}x_1 - t\widehat{e}\cdot x\big)u(\rho x), \qquad x \in Q = (-\pi, \pi)^3,$$

für ein $t > 0$. Da $w_t(x) = 0$ für alle $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, d.h. insbesondere in einer Umgebung von ∂Q kann w_t zu einer 2π-periodischen Funktion fortgesetzt werden (auf $\mathbb{R}^3$). Setze $p = (1, 0, 0)$, $\widetilde{n}^2(x) = n^2(\rho x)$ für fast alle $x \in (-\pi, \pi)^3$. Dann ist

$$u(x) = \exp\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{x_1}{\rho} + t\widehat{e}\cdot\frac{x}{\rho}\Big)w_t\Big(\frac{x}{\rho}\Big),$$

und wir definieren

$$\phi(x) := \exp\Big(+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{x_1}{\rho} - t\widehat{e}\cdot\frac{x}{\rho}\Big)\psi\Big(\frac{x}{\rho}\Big),$$

wobei $\psi \in \mathcal{C}^1(\overline{Q})$, $\operatorname{supp}(\psi) \subset Q$. Damit folgt (mit der Produktregel aus Lemma 3.25), dass

$$\begin{aligned}
\nabla u(x) &= \frac{1}{\rho}\exp\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{x_1}{\rho} + t\widehat{e}\cdot\frac{x}{\rho}\Big)\nabla w_t\Big(\frac{x}{\rho}\Big) + w_t\Big(\frac{x}{\rho}\Big)\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{p}{\rho} + t\frac{\widehat{e}}{\rho}\Big)\exp\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{x_1}{\rho} + t\widehat{e}\cdot\frac{x}{\rho}\Big),\\
\nabla \phi(x) &= \frac{1}{\rho}\exp\Big(+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{x_1}{\rho} - t\widehat{e}\cdot\frac{x}{\rho}\Big)\nabla \psi\Big(\frac{x}{\rho}\Big) + \psi\Big(\frac{x}{\rho}\Big)\Big(+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{p}{\rho} - t\frac{\widehat{e}}{\rho}\Big)\exp\Big(+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{x_1}{\rho} - t\widehat{e}\cdot\frac{x}{\rho}\Big).
\end{aligned}$$

Einsetzen in (3.4) liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla u\cdot\nabla\phi - k^2 n^2 u\phi \,\mathrm{d}x\\
&= \int_{B_{\widetilde{R}}(0)} \frac{1}{\rho^2}\Big[\nabla w_t\Big(\frac{x}{\rho}\Big)\cdot\nabla\psi\Big(\frac{x}{\rho}\Big) + \big(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}p + t\widehat{e}\big)\cdot\Big(w_t\Big(\frac{x}{\rho}\Big)\nabla\psi\Big(\frac{x}{\rho}\Big) - \psi\Big(\frac{x}{\rho}\Big)\nabla w_t\Big(\frac{x}{\rho}\Big)\Big)\\
&\qquad + \big(\tfrac{1}{4} + \mathrm{i}t\big)w_t\Big(\frac{x}{\rho}\Big)\psi\Big(\frac{x}{\rho}\Big) - \rho^2 k^2 \widetilde{n}^2\Big(\frac{x}{\rho}\Big)w_t\Big(\frac{x}{\rho}\Big)\psi\Big(\frac{x}{\rho}\Big)\Big]\mathrm{d}x\\
&\overset{x=z\rho}{=} \int_Q \nabla w_t(z)\cdot\nabla\psi(z) + \big(-\tfrac{\mathrm{i}}{2}p + t\widehat{e}\big)\cdot\big(w_t(z)\nabla\psi(z) - \psi(z)\nabla w_t(z)\big)\\
&\qquad + \big(\tfrac{1}{4} + \mathrm{i}t\big)w_t(z)\psi(z) - \rho^2 k^2\widetilde{n}^2(z)w_t(z)\psi(z)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Da w_t in einer Umgebung von ∂Q verschwindet, gilt die Gleichung sogar für alle $\psi \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{per}}(Q)$ (Vgl. Lemma 3.26),

$$\Delta w_t + (2t\widehat{e} - \mathrm{i}p)\cdot\nabla w_t - (\mathrm{i}t + \tfrac{1}{4})w_t = \rho^2 k^2 \widetilde{n}^2 w_t, \tag{6.6}$$

im schwachen Sinn, vgl. (6.4b). Lemma 6.1 liefert einen linearen Lösungsoperator $L_t\colon L^2(Q) \to L^2(Q)$ mit $\|L_t\| \leq \frac{1}{t}$, sodass (6.6) äquivalent ist zu

$$w_t = \rho^2 k^2 L_t(\widetilde{n}^2 w_t).$$

Damit folgt

$$\|w_t\|_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{t}\rho^2 k^2\|\widetilde{n}^2 w_t\|_{L^2(Q)} \leq \frac{\rho^2 k^2\|n^2\|_\infty}{t}\|w_t\|_{L^2(Q)}, \qquad \text{für alle } t > 0,$$

also $w_t = 0$ f.ü. in Q für $t > 0$ hinreichend groß und damit $u = 0$ f.ü. in $\mathbb{R}^3$. □

Satz 6.3 (Eindeutigkeit von Lösungen des direkten Streuproblems)**.** *Das direkte Streuproblem* (3.a)-(3.b) *hat höchstens eine (schwache) Lösung, d.h. falls $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ eine schwache Lösung von* (3.a)-(3.b) *ist mit $u^i = 0$ und $f = 0$ in $\mathbb{R}^3$, dann ist $u = 0$ in $\mathbb{R}^3$.*

Beweis. Sei $u^i = 0$ und $f = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Dann erfüllt $u = u^s$ die Ausstrahlungsbedingung, d.h.

$$\mathcal{O}\Big(\frac{1}{r^2}\Big) = \int_{|x|=r} \Big|\frac{\partial u}{\partial r} - \mathrm{i}ku\Big|^2 \mathrm{d}s(x) = \int_{|x|=r} \Big|\frac{\partial u}{\partial r}\Big|^2 + k^2|u|^2\mathrm{d}s(x) + 2k \operatorname{Im} \int_{|x|=r} u\frac{\partial \overline{u}}{\partial r}\mathrm{d}s(x), \quad (6.7)$$

für r groß genug. Sei nun $r > R$ groß und $\phi_r \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ eine Abschneidefunktion, sodass $\phi_r(x) = 1$ für alle $x \in B_{2r}(0)$. Aus Theorem 3.30 folgt, dass u und $\phi_r u$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$ glatt sind. Für $\psi := u\phi_r \in \mathcal{H}_c^1(\mathbb{R}^3)$ liefert (3.4), dass

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\overline{u}\cdot\nabla\psi - k^2\overline{n^2}\overline{u}\psi\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_r(0)} \nabla\overline{u}\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x + \int_{B_r(0)} \nabla\overline{u}\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x - k^2\int_{R^3} \overline{n^2u}\psi\mathrm{d}x \\
&\overset{(2.2)}{=} -\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_r(0)} \psi \underbrace{\Delta\overline{u}}_{=-k^2\overline{n}^2\overline{u}} - \int_{\partial B_r(0)} \underbrace{\psi}_{=u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}\mathrm{d}s - k^2\int_{\mathbb{R}^3} \overline{n^2}\overline{u}\psi\mathrm{d}x + \int_{B_r(0)} \nabla\overline{u}\cdot\underbrace{\nabla\psi}_{=\nabla u}\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\partial B_r(0)} u\frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}\mathrm{d}s + \int_{B_r(0)} |\nabla u|^2\mathrm{d}s - k^2\int_{B_r(0)} \overline{n^2}|u|^2\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\operatorname{Im}\int_{\partial B_r(0)} u\frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}\mathrm{d}s = k^2\int_{B_r(0)} \operatorname{Im}(n^2)|u|^2\mathrm{d}x \ge 0.$$

Einsetzen in (6.7) liefert für $r \to \infty$

$$0 \ge \limsup_{r\to\infty} \int_{\partial B_r(0)} \Big|\frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|^2 + k^2|u|^2\mathrm{d}s \ge 0,$$

daraus folgt

$$\lim_{r\to\infty}\int_{|x|=r} |u|^2\mathrm{d}s(x) = 0,$$

mit Satz 5.3 (Rellichs Lemma) $u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$ und schließlich mit Satz 6.2 $u = 0$ in $\mathbb{R}^3$. □

Korollar 6.4. *Seien n^2, k, f und u^i wie am Anfang von Abschnitt II eingeführt. Dann hat das direkte Streuproblem* (3.a)-(3.b) *eine eindeutige schwache Lösung $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.*

Beweis. Kombiniere Satz 4.8 und Satz 6.3 □

III Inverse Probleme

7 Das inverse Quellproblem

Wir betrachten das direkte Problem aus Abschnitt II für den Spezialfall

$$\begin{cases} n^2 \equiv 1, & \text{in } \mathbb{R}^3 \quad \text{(d.h. keine Streukörper)} \\ u^i \equiv 0, & \text{in } \mathbb{R}^3 \quad \text{(d.h. kein Primärfeld)} \\ f \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3),\ \operatorname{supp}(f) \subset B_R(0), & \text{(Quellterm)} \end{cases}$$

Die von f erzeugte, zeitharmonische akustische Welle wird durch die zugehörige schwache Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= f, && \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(x) - \mathrm{i}ku(x) &= o\Big(\frac{1}{r}\Big), && \text{für } r = |x| \to \infty, \end{aligned} \tag{7.1}$$

wobei die letzte Gleichung glm. bzgl. $\widehat{x} = \frac{x}{|x|} \in \mathcal{S}^2$ zu verstehen ist, d.h. (Vgl. Definition 3.28) $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, erfüllt

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla \psi - k^2 u\psi \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^3} f\psi \mathrm{d}x, \qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3), \tag{7.2}$$

(und die SAB). Mit Hilfe des Volumenpotentials aus Kapitel 4 kann man eine Lösung von (7.1) (bzw. (7.2)) angeben:

$$u(x) = -\big(Vf\big)(x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x-y)f(y)\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

(Vgl. Satz 4.5). Nach Satz 6.3 ist das auch die eindeutige Lösung von (7.2) & SAB, das folgt aber auch ohne Satz 6.3 sehr schnell:

Seien $u_1, u_2 \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ zwei Lösungen von (7.2) & SAB mit $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$, dann löst $v := u_1 - u_2 \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ (7.2) & SAB mit $f \equiv 0$. Es gilt also $\Delta v + k^2 v = 0$ in $\mathbb{R}^3$ & SAB ist erfüllt, d.h. v ist eine ausstrahlende ganze Lösung von (7.1) mit $f \equiv 0$, nach Kapitel 2 ist damit $v \equiv 0$.

Das Fernfeld von u ist gegeben durch

$$u^\infty(\widehat{x}) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} f(y)\mathrm{d}y = -\frac{1}{4\pi}\widehat{f}(k\widehat{x}), \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2, \tag{7.3}$$

d.h. u^∞ ist ein Vielfaches der Fouriertransformation der Quelle f, ausgewertet auf der Sphäre $k\mathcal{S}^2 = \{k\widehat{x} \mid \widehat{x} \in \mathcal{S}^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Das *inverse Quellproblem* (IQP) besteht nun darin, Information über die Quelle f aus dem gegebenen Fernfeld u^∞ zu rekonstruieren. Betrachtet man den linearen Operator

$$G_R \colon L^2\big(B_R(0)\big) \to L^2(\mathcal{S}^2), \qquad \big(G_R f\big)(\widehat{x}) = -\frac{1}{4\pi}\widehat{f}(k\widehat{x}), \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2, \tag{7.4}$$

dann kann das inverse Quellproblem als lineare Operatorgleichung

$$G_R f = u^\infty, \tag{7.5}$$

geschrieben werden. Da

$$k(\widehat{x}, y) := -\frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}, \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2, y \in B_R(0),$$

quadratintegrabel ist, ist G_R kompakt (siehe Übung), d.h. (7.5) ist schlecht gestellt und muss regularisiert werden.

Lemma 7.1. *Sei* $v \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{supp}(v) \subset B_R(0)$ *und setze* $g := \Delta v + k^2 v$. *Dann ist* $g\big|_{B_R(0)} \in L^2\big(B_R(0)\big) \cap \operatorname{Ker}(G_R)$. *Insbesondere ist* G_R *nicht injektiv.*

Beweis. Nach Konstruktion ist $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{supp}(g) \subset B_R(0)$. Die eindeutige Lösung von $\Delta u + k^2 u = g$ & SAB ist $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, da v die Gleichung löst, und die SAB erfüllt weil es in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$ verschwindet. Insbesondere ist $v^\infty = 0$, d.h. $(G_R g)\big|_{B_R(0)} = 0$. □

Das IQP hat also keine eindeutige Lösung! Aus (7.3) folgt, dass G_R ein Integraloperator mit analytischem Kern ist, und damit insb. ein kompakter Operator. Die Gleichung (7.5) ist also schlecht gestellt und muss regularisiert werden.

Satz 7.2 (Singulärwertzerlegung)**.** *Die Singulärwertzerlegung von G_R ist gegeben durch das Tripel $\big(\sigma_n^m; u_n^m, v_n^m\big)_{-n\le m\le n,\, n\ge 0}$, wobei*

$$\begin{aligned}
\sigma_n^m &= \Big(\frac{1}{4\pi}\int_{B_R(0)} \big|j_n(k|x|)\big|^2 \mathrm{d}x\Big)^{\frac12} \in \mathbb{R}, \\
u_n^m(\widehat{x}) &= Y_n^m(\widehat{x}), \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2, && u_n^m \in L^2(\mathcal{S}^2), \\
v_n^m(y) &= \frac{(-\mathrm{i})^n j_n(k|y|)}{\sigma_n^m} Y_n^m(\widehat{y}), \qquad y = |y|\widehat{y} \in B_R(0), && v_n^m \in L^2\big(B_R(0)\big),
\end{aligned}$$

für $n \ge 0$ und $-n \le m \le n$.

Beweis. Für alle $g \in L^2\big(B_R(0)\big), \varphi \in L^2(\mathcal{S}^2)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle g, G_R^*\varphi\rangle_{L^2(B_R(0))} &= \langle G_R g, \varphi\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} \\
&= \int_{\mathcal{S}^2} \big(G_R g\big)(\widehat{x})\overline{\varphi(\widehat{x})}\mathrm{d}s(\widehat{x}) \\
&= \int_{\mathcal{S}^2} -\frac{1}{4\pi}\int_{B_R(0)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} g(y)\mathrm{d}y\, \overline{\varphi(\widehat{x})}\mathrm{d}s(\widehat{x}) \\
\overset{\text{Fubini}}{=} &\int_{B_R(0)} g(y)\overline{\Big(-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}\varphi(\widehat{x})\mathrm{d}s(\widehat{x})\Big)}\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

also ist der adjungierte Operator $G_R^* \colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2\big(B_R(0)\big)$ gegeben durch

$$\big(G_R^*\varphi\big)(y) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}\varphi(\widehat{x})\mathrm{d}s(\widehat{x}), \qquad y \in B_R(0).$$

Die Funktionen $(u_n^m)_{m,n}$ bilden eine vollständige ONB von $L^2(\mathcal{S}^2)$ und

$$\begin{aligned}
\big(G_R^* u_n^m\big)(y) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} Y_n^m(\widehat{x})\mathrm{d}s(\widehat{x}) \\
&= -\mathrm{i}^n j_n(k|y|) Y_n^m(\widehat{y}) = \sigma_n^m v_n^m(y),
\end{aligned}$$

wobei wir die *Funk-Hecke-Formel* (siehe Colton-Kress)

$$\int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} Y_n^m(\widehat{x})\mathrm{d}s(\widehat{x}) = 4\pi(\pm\mathrm{i}^n) j_n(k|y|) Y_n^m(\widehat{y}), \qquad y \in \mathbb{R}^3,$$

angewendet haben. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\big(G_R G_R^* u_n^m\big)(\widehat{x}) &= \frac{1}{4\pi}\mathrm{i}^n \int_{B_R(0)} j_n(k|y|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} Y_n^m(\widehat{y})\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4\pi}\mathrm{i}^n \int_0^R j_n(kr)\int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot(r\widehat{y})} Y_n^m(\widehat{y})\mathrm{d}s(\widehat{y}) \cdot r^2\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{4\pi}\mathrm{i}^n \int_0^R j_n(kr) \cdot \frac{4\pi}{\mathrm{i}^n} j_n(kr) Y_n^m(\widehat{x}) \cdot r^2\mathrm{d}r \\
&= \int_0^R \big(j_n(kr)\big)^2 r^2\mathrm{d}r \cdot Y_n^m(\widehat{x}) \\
&= (\sigma_n^m)^2 u_n^m(\widehat{x}).
\end{aligned}$$

□

Aus (5.11) folgt, dass

$$j_n(t) = \frac{t^n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big), \qquad \text{für } n \to \infty,$$

d.h.

$$\begin{aligned}
\sigma_n^m &\sim \Big(\frac{1}{4\pi} \int_0^R \Big(\frac{k^n r^n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}\Big)^2 4\pi r^2 \mathrm{d}r\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{k^n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} \frac{R^{\frac{3}{2}+n}}{\sqrt{2n+3}} \\
&\leq \frac{k^n}{\sqrt{(2n+1)!}} R^n \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2n+3}} \\
\overset{\text{Sterling}}&{\approx} \frac{R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2n+3}} (kR)^n \sqrt{2\pi(2n+1)} \Big(\frac{\mathrm{e}}{2n+1}\Big)^{\frac{2n+1}{2}},
\end{aligned}$$

die Singulärwerte fallen für $n \to \infty$ also superlinear (sogar exponentiell) ab. Das inverse Quellproblem ist also sehr schlecht gestellt.

Anwenden der *abgeschnittenen Singulärwertzerlegung* als Regularisierung für (7.5) liefert eine Approximation

$$R_N u^\infty = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=-n}^{n} \frac{\langle u^\infty, u_n^m \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}}{\sigma_n^m} v_n^m,$$

für die Quelle f. Die *Daten* u^∞ sind in der Regel nicht exakt gegeben, sondern lediglich eine Näherung $u^{\infty,\delta} \in L^2(\mathcal{S}^2)$ mit

$$\|u^\infty - u^{\infty,\delta}\|_{L^2(\mathcal{S}^2)} \leq \delta,$$

für ein $\delta > 0$. Der Abbruchindex $N = N(\delta, u^{\infty,\delta})$ wird gemäß einer Parameterauswahlregel gewählt. Das *Diskrepanzprinzip* empfiehlt N als kleinsten Index, sodass

$$\|G_R R_N u^{\infty,\delta} - u^{\infty,\delta}\|_{L^2(\mathcal{S}^2)} \leq \delta,$$

ist, zu wählen. Die abgeschnittene Singulärwertzerlegung zusammen mit dem Diskrepanzprinzip ergibt ein konvergentes Regularisierungsverfahren, d.h.

$$R_{N(\delta, u^{\infty,\delta})} u^{\infty,\delta} \longrightarrow G_R^+ u^\infty, \qquad \text{falls } \delta \to 0,$$

wobei

$$G_R^+ u^\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{\langle u^\infty, u_n^m \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}}{\sigma_n^m} v_n^m,$$

die Quelle mit Träger in $B_R(0)$ und minimaler L^2-Norm auswählt. Das heißt nicht unbedingt, dass der Träger der Rekonstruktion mit dem Träger des ursprünglichen f übereinstimmt.

Man kann natürlich auch Tikhonovregularisierung oder Landweberiteration zusammen mit einer geeigneten Parameterwahl anwenden. Für positive Rauschpegel $\delta > 0$ ergibt das im Allgemeinen verschiedene Resultate, obwohl für $\delta \to 0$ die verschiedenen Regularisierungen (punktweise) gegen G_R^+ konvergieren.

Im Folgenden untersuchen wir die Nichteindeutigkeit des inversen Quellproblems noch ein bisschen weiter, und wir diskutieren eine weitere Möglichkeit Information über Quellen, die ein gegebenes Fernfeld erzeugen, aus diesem zu extrahieren.

Definition 7.3.

(i) Die von einer Quelle $f \in L^2_\mathrm{c}(\mathbb{R}^3)$ ***ausgestrahlte Welle*** *ist die schwache Lösung $u \in \mathcal{H}^1_\mathrm{loc}(\mathbb{R}^3$ von (7.1) außerhalb von $\mathrm{supp}(f)$.*

(ii) Das von einer Quelle $f \in L^2_\mathrm{c}(\mathbb{R}^3)$ ***ausgetrahlte Fernfeld*** *ist das Fernfeld der von ihr ausgestrahlten Welle.*

(iii) Eine Quelle $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$ heißt ***nichtausstrahlend****, falls das von ihr ausgestrahlte Fernfeld verschwindet.*

(iv) Zwei Quellen $f, g \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$ heißen ***äquivalent****, wenn sie dasselbe Fernfeld ausstrahlen.*

Wir wollen nun gemeinsame Eigenschaften der Träger aller Quellen, die dasselbe Fernfeld ausstrahlen, charakterisieren. Dazu betrachten wir den unbeschränkten Operator

$$G\colon L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathcal{S}^2), \qquad \big(Gf\big)(\widehat{x}) \coloneqq -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} f(y)\mathrm{d}y.$$

Definition 7.4. *Eine kompakte Menge $M \subset \mathbb{R}^3$* ***trägt ein Fernfeld*** *u^∞, falls es für jede offene Umgebung U von M ein $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$ gibt mit $\operatorname{supp}(f) \subset U$ und $u^\infty = Gf$.*

Man kann Fernfelder konstruieren, die von einem Punkt getragen werden, aber für die es keine (L^2)-Quelle gibt, deren Träger nur diesen Punkt enthält und dieses Fernfeld ausstrahlt (zB. $u^\infty \equiv 1$).

Lemma 7.5. *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, sodass $\mathbb{R}^3 \setminus M$ keine beschränkte Zusammenhangskomponente hat (d.h. M hat keine Löcher). Dann gilt:*

M trägt ein Fernfeld u^∞ genau dann, wenn es eine eindeutig bestimmte, glatte Lösung $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3 \setminus M)$ von $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus M$ mit Fernfeld u^∞ gibt.

Beweis.

„$\Leftarrow$" Angenommen es gibt so ein $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3 \setminus M)$. Für $\varepsilon > 0$ sei $U_\varepsilon(M)$ eine ε-Umgebung von M und $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus U_\varepsilon(M), \\ 0, & x \in M, \end{cases}$$

(glätte χ_M und betrachte $1 - \widetilde{\chi}_{M,\varepsilon}$). Dann ist $f_\varepsilon \coloneqq (\Delta + k^2)(\phi_\varepsilon u) \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{supp}(f_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(M)$ eine Quelle, die u^∞ ausstrahlt, d.h. M trägt u^∞.

„$\Rightarrow$" Falls M ein Fernfeld u^∞ trägt, dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Quelle f_ε mit $\operatorname{supp}(f_\varepsilon) \subset U_\varepsilon(M)$, die u^∞ ausstrahlt. Sei $u_\varepsilon \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ die Lösung von $\Delta u_\varepsilon + k^2 u_\varepsilon = f_\varepsilon$ und bezeichne $\big(\mathbb{R}^3 \setminus U_\varepsilon(M)\big)^\infty$ die unbeschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^3 \setminus U_\varepsilon(M)$. Für $\varepsilon \to 0$ wächst $\big(\mathbb{R}^3 \setminus U_\varepsilon(M)\big)^\infty$ zu $\big(\mathbb{R}^3 \setminus M\big)^\infty = \mathbb{R}^3 \setminus M$. Wir definieren u durch

$$u(x) \coloneqq u_\varepsilon(x), \qquad \text{für } x \in \big(\mathbb{R}^3 \setminus U_\varepsilon(M)\big)^\infty.$$

Das ist wohldefiniert, da nach Rellichs Lemma (Satz 5.3) und der Analytizität von u_ε in $\big(\mathbb{R}^3 \setminus U_\varepsilon(M)\big)^\infty$ die u_ε für alle $\varepsilon \le \varepsilon_0$ in $\big(\mathbb{R}^3 \setminus U_{\varepsilon_0}(M)\big)^\infty$ übereinstimmen. Da $\Delta u_\varepsilon + k^2 u_\varepsilon = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus U_\varepsilon(M)$, folgt, dass $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus M$.

□

Bemerkung. *Ein Fernfeld u^∞ legt die zugehörige Welle außerhalb jeder kompakten Menge $M \subset \mathbb{R}^3$, die u^∞ trägt, eindeutig fest.*

Das heißt, man kann die ausstrahlende Welle bis auf das Komplement jeder kompakten Menge ohne Löcher, die das zugehörige Fernfeld trägt, fortsetzen. Andererseits können wir wie im ersten Teil des Beweises Quellen mit beliebig großem Träger konstruieren, die ein gegebenes Fernfeld ausstrahlen. Wir konstruieren nun „minimale" Träger.

Lemma 7.6. *Seien M_1 und M_2 kompakte Mengen, die ein Fernfeld u^∞ tragen. Falls $\mathbb{R}^3 \setminus M_1$, $\mathbb{R}^3 \setminus M_2$ und $\mathbb{R}^3 \setminus (M_1 \cup M_2)$ keine beschränkte Zusammenhangskomponente haben, dann trägt auch $M_1 \cap M_2$ das Fernfeld u^∞.*

Beweis. Seien u_1 und u_2 die eindeutig bestimmten Lösungen von $\Delta u_\ell + k^2 u_\ell = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus M_\ell$ mit Fernfeld u^∞, vgl. Lemma 7.5. Für alle $\varepsilon > 0$ sei $\phi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, mit

$$\phi_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus U_\varepsilon(M_1 \cap M_2), \\ 0, & \text{in } M_1 \cap M_2. \end{cases}$$

(Glätte $\chi_{M_1 \cap M_2}$ und betrachte $1 - \widetilde{\chi}_{M_1 \cap M_2}$). Dann ist

$$v_\varepsilon(x) := \begin{cases} \phi_\varepsilon(x) u_1(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus M_1, \\ \phi_\varepsilon(x) u_2(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus M_2, \\ 0, & \text{für } x \in M_1 \cap M_2, \end{cases}$$

wohldefiniert, da nach Rellichs Lemma und der Analytizität von u_ℓ in $\mathbb{R}^3 \setminus M_\ell$ die Lösungen u_1 und u_2 in $\mathbb{R}^3 \setminus (M_1 \cup M_2)$ übereinstimmen. Es ist $\Delta v_\varepsilon + k^2 v_\varepsilon = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus (M_1 \cup M_2)$, und $f_\varepsilon := (\Delta + k^2) v_\varepsilon$ strahlt das Fernfeld u^∞ aus (wegen $v_\varepsilon = u_1 = u_2$ in $\mathbb{R}^3 \setminus U_\varepsilon(M_1 \cup M_2)$). □

Satz 7.7. *Sei $u^\infty = Gf$ für ein $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$. Dann ist*

$$\operatorname{csupp}(u^\infty) := \bigcap_{\substack{D \subset \mathbb{R}^3 \text{ konvex, kompakt} \\ D \text{ trägt } u^\infty}} D, \tag{7.6}$$

(„konvexer Quellträger von u^∞“) die kleinste konvexe Menge, die u^∞ trägt. Insbesondere ist $\operatorname{csupp}(u^\infty)$ *eine Teilmenge jeder konvexen kompakten Menge, die u^∞ trägt.*

Beweis. Um zu zeigen, dass $\operatorname{csupp}(u^\infty)$ das Fernfeld u^∞ trägt, zeigen wir zuerst, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Kollektion kompakter konvexer Mengen $D_1, \dots, D_N$ gibt, die u^∞ tragen, sodass

$$U_\varepsilon\big(\operatorname{csupp}(u^\infty)\big) \supset \bigcap_{n=1}^N D_n.$$

Da der Durchschnitt konvexer kompakter Mengen konvex ist und das Komplement der Vereinigung zweier konvexer kompakter Mengen zusammenhängend ist, folgt die Behauptung dann aus Lemma 7.6.

Sei D_0 eine konvexe kompakte Menge, die u^∞ trägt (existiert nach Voraussetzung). Dann ist

$$\operatorname{csupp}(u^\infty) = \bigcap_{\substack{D \subset \mathbb{R}^3 \text{ konvex, kompakt} \\ D \text{ trägt } u^\infty}} (D \cap D_0),$$

also

$$D_0 \setminus \operatorname{csupp}(u^\infty) = \bigcup_{\substack{D \subset \mathbb{R}^3 \text{ konvex, kompakt} \\ D \text{ trägt } u^\infty}} \big(D_0 \setminus (D \cap D_0)\big),$$

und damit

$$D_0 \setminus U_\varepsilon\big(\operatorname{csupp}(u^\infty)\big) \subset \bigcup_{\substack{D \subset \mathbb{R}^3 \text{ konvex, kompakt} \\ D \text{ trägt } u^\infty}} \big(D_0 \setminus (D \cap D_0)\big).$$

Da $D_0 \setminus \big(U_\varepsilon(\operatorname{csupp}(u^\infty))\big)$ kompakt ist und $D_0 \setminus (D \cap D_0)$ offen (relativ zu D_0) ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $D_0 \setminus U_\varepsilon\big(\operatorname{csupp}(u^\infty)\big) \subset \bigcup_{n=1}^N \big(D_0 \setminus (D_n \cap D_0)\big)$, also gilt

$$U_\varepsilon\big(\operatorname{csupp}(u^\infty)\big) \supset \bigcap_{n=1}^N (D_n \cap D_0) = \bigcap_{n=0}^N D_n.$$

□

Bemerkung 7.8
Der konvexe Quellträger eines nichttrivialen Fernfelds kann nicht leer sein. Sonst gäbe es zwei kompakte konvexe Mengen, die u^∞ tragen, aber disjunkt sind, und wie im Beweis von Lemma 7.6 folgt daraus, dass die ausgestrahlte Welle zu einer ganzen Lösung fortgesetzt werden kann, die nichttriviales Fernfeld u^∞ hätte. Widerspruch!

Als nächstes leiten wir ein Verfahren zur Berechnung von $\operatorname{csupp}(u^\infty)$ her: Sei $u^\infty = Gf$ für ein $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$. Dann gibt es insb. ein $R > 0$, sodass $\operatorname{supp}(f) \subset B_R(0)$, d.h. $u^\infty = G_R f\big|_{B_R(0)}$.

Frage: Wie kann man zu bel. $R > 0$ entscheiden, ob $u^\infty \in \operatorname{Ran}(G_R)$ ist?

Lemma 7.9. *Sei $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset B_R(0)$ und $u^\infty := Gf \in L^2(\mathcal{S}^2)$ das ausgestrahlte Fernfeld. Dann ist*

$$u^\infty(\widehat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m Y_n^m(\widehat{x}), \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2, \tag{7.7}$$

mit

$$a_n^m = -(-\mathrm{i})^n \int_{\mathbb{R}^3} f(y) j_n(k|y|) \overline{Y_n^m(\widehat{y})} \mathrm{d}y.$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz 7.2 (SVD) folgt mit der Funk-Hecke-Formel, dass

$$\begin{aligned}
\langle u^\infty, Y_n^m \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} = a_n^m &= \int_{\mathcal{S}^2} u^\infty(\widehat{x}) \overline{Y_n^m(\widehat{x})} \mathrm{d}s(\widehat{x}) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_{B_R(0)} f(y) \overline{\int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} Y_n^m(\widehat{x}) \mathrm{d}s(\widehat{x})} \mathrm{d}y \\
&= -(-\mathrm{i})^n \int_{B_R(0)} f(y) j_n(k|y|) \overline{Y_n^m(\widehat{y})} \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

□

Das Picardkriterium liefert:

Korollar 7.10. *Ein Fernfeld u^∞ wird von einer Quelle $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset B_R(0)$ ausgestrahlt genau dann, wenn*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Big| \frac{a_n^m}{\sigma_n^m(kR)} \Big|^2 < \infty,$$

wobei a_n^m die Fourierkoeffizienten von u^∞ aus Lemma 7.9 bezeichnen.

Man kann also (zumindest theoretisch) anhand des Fernfelds u^∞ für jeden Ball $B_R(0)$ entscheiden, ob es eine Quelle mit Träger in $B_R(0)$ gibt, die dieses Fernfeld ausstrahlt. Da $u^\infty(\widehat{x}) = \widehat{f}(k\widehat{x})$, $\widehat{x} \in \mathcal{S}^2$, ist, folgt für das Fernfeld u_p^∞ der um $-p \in \mathbb{R}^3$ verschobenen Quelle $f(\cdot + p)$, dass

$$\begin{aligned}
u_p^\infty(\widehat{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} f(y+p) \mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot p} \cdot \Big(-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z} f(z) \mathrm{d}z \Big) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot p} u^\infty(\widehat{x}).
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Für $p \in \mathbb{R}^3$ ist $\operatorname{supp}(f) \subset B_R(p)$ genau dann, wenn $\operatorname{supp}\big(f(\cdot + p)\big) \subset B_R(0)$.

Korollar 7.11. *Ein Fernfeld u^∞ wird von einer Quelle $f \in L^2_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$ mit Träger in $B_R(p)$ ausgestrahlt genau dann, wenn*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Big| \frac{a_n^m(p)}{\sigma_n^m(kR)} \Big|^2 < \infty, \tag{7.9}$$

wobei $a_n^m(p)$ die Fourierkoeffizienten von u_p^∞ aus (7.8) bezeichnen.

Da (7.9) numerisch schwierig zu überprüfen ist, behilft man sich wie folgt:

Falls $\operatorname{supp}(f) \subset B_R(0)$ ist,

$$|a_n^m| = \Big| \int_{B_R(0)} f(y) j_n(k|y|) \overline{Y_n^m(\widehat{y})} \mathrm{d}y \Big|,$$

und der Betrag der sphärischen Besselfunktion $|j_n(k\rho)|$ verhält sich für $n \gtrsim k\rho$ wie

$$|j_n(k\rho)| \sim \frac{(k\rho)^n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)} \leq \frac{(k\rho)^n}{\big((2n+1)!\big)^{\frac{1}{2}}} \sim \frac{(k\rho)^n \mathrm{e}^{\frac{2n+1}{2}}}{\big(2\pi(2n+1)\big)^{\frac{1}{4}}(2n+1)^{\frac{2n+1}{2}}} \leq \frac{1}{c_n}\Big(\frac{k\rho \mathrm{e}}{2n}\Big)^n,$$

mit $c_n := \big(2\pi(2n+1)\big)^{\frac{1}{4}}$, d.h. er fällt exponentiell ab. Für $n \lesssim k\rho$ hingegen sind diese Beträge „relativ gleichmäßig groß“.

Man kann also den Übergang von glm. groß zu exponentiell abfallend in den Fourierkoeffizienten a_n^m (siehe Lemma 7.9) verwenden, um den kleinsten Radius $R > 0$, sodass $B_R(0)$ das Fernfeld u^∞ trägt, abzuschätzen. Nach Verschieben der Quelle (bzw. des Ursprungs) wie in Korollar 7.11, kann man das auch für beliebige Bälle um $p \neq 0$ machen.

Algorithmus 7.12
Betrachte einen Filter P von Punkten in $\mathbb{R}^3$.
`for` $p \in P$ `do`

- Verschiebe den Ursprung nach p, d.h. berechne u_p^∞ gemäß (7.8),
- Schätze den Radius R_p des kleinsten Balls um p, der u_p^∞ trägt:
  - Plotte den Absolutbetrag der Fourierkoeffizienten $a_n^m(p)$.
  - Finde Index n_p am Übergang zum exponentiellen Abfall

`end for`
Erhalte

$$\operatorname{csupp}(u^\infty) \subset \bigcap_{p\in P} B_{R_p}(p), \qquad \text{wobei } R_p = \frac{n_p}{k}.$$

Bemerkung 7.13

(i) Die Bornsche Näherung ersetzt das Streuproblem (3.a)-(3.b) durch das Quellproblem

$$\Delta u_b + k^2 u_b = f + (1-n^2)(u^i - Vf), \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \text{ \& SAB}.$$

Dementsprechend ist

$$u_b^\infty(\widehat{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} f(y)\mathrm{d}y - \frac{k^2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\big(1-n^2(y)\big)(u^i - Vf)(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}\mathrm{d}y,$$

und speziell für $f = 0$ reduziert sich das (wegen $u^i(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$) zu

$$u_b^\infty(\widehat{x}) = -\frac{k^2}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\big(1-n^2(y)\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(d-\widehat{x})\cdot y}\mathrm{d}y. \tag{7.10}$$

D.h. man muss wiederum „nur“ eine (schlechtgestellte) lineare Integralgleichung erster Art lösen, um $1-n^2$ und damit n^2 aus u_b^∞ zu rekonstruieren. Im Gegensatz zum IQP kann jetzt aber zusätzlich u^i variiert werden. Sei zB.

$$u^i(x;d) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}, \qquad x\in\mathbb{R}^3, d\in\mathcal{S}^2,$$

eine eben Welle mit Ausbreitungsrichtung d. Damit erhält man ein System von Integralgleichungen

$$u_b^\infty(\widehat{x}; d) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}(1-n^2)(y)u^i(y; d)\,\mathrm{d}y, \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2,$$

für alle $d \in \mathcal{S}^2$.

(ii) Auch im allgemeinen Fall kann man das Streuproblem (3.a)-(3.b) als Quellproblem auffassen:

$$\Delta u^s + k^2 u^s = f + k^2(1-n^2)u \qquad \& \text{ SAB.}$$

Man kann zeigen (mit dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit), dass $\operatorname{supp}\big((1-n^2)u\big) = \operatorname{supp}(1-n^2)$, d.h. der zugehörige konvexe Quellträger $\operatorname{csupp}(u^\infty)$ beschreibt tatsächlich den Brechungsindex und die Quelle.

8 Das inverse Streuproblem

Für den Rest der Vorlesung betrachten wir den Spezialfall, dass $f \equiv 0$ ist, d.h., dass keine Quellen in $B_R(0)$ vorliegen. Das *direkte Streuproblem* besteht also darin, für gegebene

(i) $n^2 = 1 + q \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{Re}(n^2) > 0$, $\mathrm{Im}(n^2) \geq 0$ fast überall, $\mathrm{supp}(q) \subset B_R(0)$ für ein $R > 0$ (Brechungsindex bzw. Kontrast)

(ii) $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, (Wellenzahl)

(iii) $u^i(x; d) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$, $d \in \mathcal{S}^2$, (ebene Welle, Primärwelle)

die zugehörige schwache Lösung $u \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ von

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 n^2 u = 0, &\qquad \text{in } \mathbb{R}^3, \\ u = u^i + u^s, &\qquad \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \frac{\partial u^s}{\partial r}(x) - \mathrm{i}ku^s(x) = o(r^{-1}), &\qquad \text{für } r = |x| \to \infty, \end{aligned} \tag{8.1}$$

zu bestimmen (Vgl. (3.4) und Korollar 6.4). Wie in Satz 4.9 gezeigt, hat u^s das asymptotische Verhalten

$$u^s(x; d) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x|}}{|x|} u^\infty(\widehat{x}; d) + \mathcal{O}(|x|^{-2}), \qquad |x| \to \infty, \tag{8.2}$$

wobei das Fernfeld u^∞ gegeben ist durch

$$u^\infty(\widehat{x}; d) = \frac{k^2}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} q(y) u(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y} \mathrm{d}y. \tag{8.3}$$

Im Folgenden schreiben wir häufig $u^i(x; d), u(x; d), u^s(x; d)$ und $u^\infty(\widehat{x}; d)$, um die Abhängigkeit dieser Größen von der Einfallsrichtung $d \in \mathcal{S}^2$ zu beschreiben.

Das *inverse Streuproblem* besteht nun darin, den Brechungsindex n^2 bzw. $q = n^2 - 1$ aus Beobachtungen $u^\infty(\widehat{x}; d)$ für alle $\widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2$ zu rekonstruieren (d.h. unendlich viele Beobachtungen und Einfallsrichtungen). Dieses Problem ist nichtlinear, da n^2 nichtlinear von u abhängt.

9 Eigenschaften des Fernfelds

Der folgende Satz besagt, dass es dasselbe liefert, ein Objekt in Richtung $d \in \mathcal{S}^2$ zu beleuchten und in Richtung $\widehat{x} \in \mathcal{S}^2$ zu messen, wie umgekehrt: beleuchten in Richtung $-\widehat{x}$ und messen in Richtung $-d$.

Satz 9.1 (Reziprozitätsprinzip)**.** *Bezeichne $u^\infty(\widehat{x}; d)$ das Fernfeld zu einer einfallenden ebenen Welle $u^i(y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky\cdot d}$ mit Einfallsrichtung $d \in \mathcal{S}^2$, ausgewertet in Richtung $\widehat{x} \in \mathcal{S}^2$. Dann ist*

$$u^\infty(\widehat{x}; d) = u^\infty(-d; -\widehat{x}) \qquad \text{für alle } \widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2. \tag{9.1}$$

Beweis. Da wegen des Regularitätssatzes 3.30 schwache Lösungen von (8.1) in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ glatt sind, können wir die Greensche Formel (2.3) anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_R(0)} u^i(y;d) \underbrace{\left(\Delta u^i(y;-\widehat{x}) + k^2 u^i(y;-\widehat{x})\right)}_{=0} - u^i(y;-\widehat{x}) \underbrace{\left(\Delta u^i(y;d) + k^2 u^i(y;d)\right)}_{=0} \mathrm{d}y \\ &= \int_{\partial B_R(0)} u^i(y;d) \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(y;-\widehat{x}) - u^i(y;-\widehat{x}) \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(y;d) \mathrm{d}s(y), \end{aligned}$$

und für $\rho > R$

$$\begin{aligned} 0 = &- \int_{B_\rho(0)\setminus B_R(0)} u^s(y;d) \underbrace{\left(\Delta u^s(y;-\widehat{x}) + k^2 u^s(y;-\widehat{x})\right)}_{=0} - u^s(y;\widehat{x}) \underbrace{\left(\Delta u^s(y;d) + k^2 u^s(y;d)\right)}_{=0} \mathrm{d}y \\ = &\int_{\partial B_R(0)} u^s(y;d) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y;-\widehat{x}) - u^s(y;-\widehat{x}) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y;d) \mathrm{d}s(y) \\ &- \int_{\partial B_\rho(0)} u^s(y;d) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y;-\widehat{x}) - u^s(y;-\widehat{x}) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y;d) \mathrm{d}s(y), \end{aligned}$$

wie im Beweis von Satz 2.7 sieht man, dass das zweite Integral auf der rechten Seite für $\rho \to \infty$ verschwindet. Andererseits liefert die Darstellungsformel (2.13) für das Fernfeld, dass

$$\begin{aligned} 4\pi u^\infty(\widehat{x}; d) &= \int_{B_R(0)} u^s(y;d) \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(y;-\widehat{x}) - u^i(y;-\widehat{x}) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y;d) \mathrm{d}s(y) \\ -4\pi u^\infty(-d; -\widehat{x}) &= -\int_{B_R(0)} u^s(y;-\widehat{x}) \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(y;d) - u^i(y;d) \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y;-\widehat{x}) \mathrm{d}s(y). \end{aligned}$$

Addiert man diese vier Gleichungen, so erhält man

$$4\pi\left(u^\infty(\widehat{x};d) - u^\infty(-d;-\widehat{x})\right) = \int_{B_R(0)} u(y;d) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y;-\widehat{x}) - u(y;-\widehat{x}) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y;d) \mathrm{d}s(y).$$

Wir müssen noch zeigen, dass die rechte Seite verschwindet. Dazu wählen wir eine Abschneidefunktion $\phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^3)$, sodass $\phi = 1$ in $B_R(0)$ und $\phi = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus B_\rho(0)$ für ein $\rho > R$. Setze

$$\psi(y) \coloneqq \phi(y) u(y; -\widehat{x}),$$

dann folgt aus der variationellen Formulierung (3.4) von (8.1), dass

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{B_R(0)} \nabla u(y;d) \cdot \nabla u(y;-\widehat{x}) - k^2 n^2(y) u(y;d) u(y;-\widehat{x}) \mathrm{d}y \\ &+ \int_{B_\rho(0)\setminus B_R(0)} \nabla u(y;d) \cdot \nabla\left(\phi(y) u(y;-\widehat{x})\right) - k^2 \phi(y) u(y;d) u(y;-\widehat{x}) \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Vertauschen der Rollen von $u(\,\cdot\,;-\widehat{x})$ und $u(\,\cdot\,;d)$ in dieser Gleichung und Subtrahieren der beiden Gleichungen liefert

$$0 = \int_{B_\rho(0)\setminus B_R(0)} \nabla u(y;d) \cdot \nabla\left(\phi(y) u(y;-\widehat{x})\right) - \nabla u(y;-\widehat{x}) \cdot \nabla\left(\phi(y) u(y;d)\right) \mathrm{d}y.$$

Da $u(\,\cdot\,;d)$ und $u(\,\cdot\,;-\widehat{x})$ in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ glatt sind, folgt mit der Greenschen Formel (2.2), dass

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B_\rho(0)\setminus B_R(0)} \big(-\Delta u(y;d)\big)\phi(y)u(y;-\widehat{x}) - \big(-\Delta u(y;-\widehat{x})\big)\phi(y)u(y;d)\mathrm{d}y \\
&\quad - \int_{\partial B_R(0)} u(y;-\widehat{x})\frac{\partial u}{\partial \nu}(y;d) - u(y;d)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y;-\widehat{x})\mathrm{d}s(y) \\
&= -\int_{\partial B_R(0)} u(y;-\widehat{x})\frac{\partial u}{\partial \nu}(y;d) - u(y;d)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y;-\widehat{x})\mathrm{d}s(y).
\end{aligned}$$

□

Definition 9.2. *Eine Superposition von ebenen Wellen*

$$v(x) := \int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d} g(d)\mathrm{d}s(d), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{9.2}$$

wobei $g \in L^2(\mathcal{S}^2)$, heißt ***Herglotzwellenfunktion*** *mit Dichte g.*

Satz 9.3. *Sei v eine Herglotzwelle mit Dichte $g \in L^2(\mathcal{S}^2)$, sodass $v \equiv 0$ in $\mathbb{R}^3$. Dann ist $g \equiv 0$.*

Beweis. Entwickeln von g in

$$g(d) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_n^m Y_n^m(d), \qquad d \in \mathcal{S}^2,$$

(vgl. Satz 5.1), einsetzen in (9.2) und Funk-Hecke-Formel liefert

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} a_n^m \int_{\mathcal{S}^2} Y_n^m(d)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}\mathrm{d}s(d) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} 4\pi \mathrm{i}^n j_n(k|x|)Y_n^m(\widehat{x}).$$

Koeffizientenvergleich liefert $a_n^m = 0$ für alle m,n (Y_n^m lin. unabh.), d.h. $g \equiv 0$. □

Lemma 9.4. *Sei $g \in L^2(\mathcal{S}^2)$. Dann löst die Herglotzwellenfunktion*

$$v^i(x) := \int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d} g(d)\mathrm{d}s(d), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

die Helmholtzgleichung $\Delta v^i + k^2 v^i = 0$ in $\mathbb{R}^3$. Das zugehörige gestreute Feld ist

$$v^s(x) = \int_{\mathcal{S}^2} u^s(x;d)g(d)\mathrm{d}s(d), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

und hat das Fernfeld

$$v^\infty(\widehat{x}) = \int_{\mathcal{S}^2} u^\infty(\widehat{x};d)g(d)\mathrm{d}s(d), \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2.$$

Beweis. Folgt unmittelbar durch Vertauschen von Integration und Differentiation, der Eindeutigkeit von Lösungen des Streuproblems und der Darstellungsformel für das Fernfeld. □

Der Operator $F\colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(\mathcal{S}^2)$

$$\big(Fg\big)(\widehat{x}) := \int_{\mathcal{S}^2} u^\infty(\widehat{x};d)g(d)\mathrm{d}s(d), \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2, \tag{9.3}$$

heißt **Fernfeldoperator**. F ist ein linearer Integraloperator mit glattem (quadratintegrablem) Kern $u^\infty \in L^2(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2)$, d.h. F ist kompakt. Außerdem definieren wir den **Streuoperator** $S\colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(\mathcal{S}^2)$,

$$S := I + \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}F.$$

Im Folgenden geben wir einige wichtige Eigenschaften dieser Operatoren an.

Lemma 9.5. *Für $g, h \in L^2(\mathcal{S}^2)$ seien v^i und w^i definiert durch*

$$v^i(x) := \int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d} g(d) \mathrm{d}s(d), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{9.4}$$

$$w^i(x) := \int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d} h(d) \mathrm{d}s(d), \qquad x \in \mathbb{R}^3. \tag{9.5}$$

Seien $v, w \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ die zugehörigen Lösungen des Streuproblems (8.1) *mit $u^i = v^i$ bzw. $u^i = w^i$. Dann gilt*

$$\mathrm{i}k^2 \int_{B_R(0)} \mathrm{Im}(n^2) v\overline{w} \mathrm{d}x = 2\pi \langle Fg, h\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} - 2\pi \langle g, Fg\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} - \mathrm{i}k\langle Fg, Fh\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}. \tag{9.6}$$

Beweis. Seien $v^s = v - v^i$ und $w^s = w - w^i$ die zugehörigen gestreuten Felder mit Fernfeldern v^∞ und w^∞. Dann ist wegen Lemma 9.4 $v^\infty = Fg$ und $w^\infty = Fh$. Wie im Beweis von Satz 9.1 wählen wir eine Abschneidefunktion $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^3)$, sodass $\phi \equiv 1$ in $B_R(0)$ und $\phi \equiv 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus B_\rho(0)$ für ein $\rho > R$. Damit setzen wir $\psi = \phi\overline{w}$ in der schwachen Formulierung (3.4) von (8.1) ein und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_R(0)} \nabla v \cdot \nabla\overline{w} - k^2 n^2 v\overline{w} \mathrm{d}x + \int_{B_\rho(0)\setminus B_R(0)} \nabla v \cdot \nabla(\phi\overline{w}) - k^2 v(\phi\overline{w}) \mathrm{d}x \\ &\overset{(2.2)}{=} \int_{B_R(0)} \nabla v \cdot \nabla\overline{w} - k^2 n^2 v\overline{w} \mathrm{d}x - \int_{\partial B_R(0)} \overline{w}\frac{\partial v}{\partial \nu} \mathrm{d}s(x). \end{aligned}$$

Analog erhält man für $\psi = \phi v$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_R(0)} \nabla v \cdot \nabla\overline{w} - k^2 \overline{n^2 w} v \mathrm{d}x + \int_{B_\rho(0)\setminus B_R(0)} \nabla \overline{w} \cdot \nabla(\phi v) - k^2 \overline{w}(\phi v) \mathrm{d}x \\ &\overset{(2.2)}{=} \int_{B_R(0)} \nabla \overline{w} \cdot \nabla v - k^2 \overline{n^2 w} v \mathrm{d}x - \int_{\partial B_R(0)} v\frac{\partial \overline{w}}{\partial \nu} \mathrm{d}s(x). \end{aligned}$$

Subtrahiert man diese Gleichungen, so folgt

$$2\mathrm{i}k^2 \int_{B_R(0)} \mathrm{Im}(n^2) v\overline{w} \mathrm{d}x = \int_{\partial B_R(0)} v\frac{\partial \overline{w}}{\partial \nu} - \overline{w}\frac{\partial v}{\partial \nu} \mathrm{d}s.$$

Da $v = v^i + v^s$ und $w = w^i + w^s$, kann die rechte Seite in 4 Teile zerlegt werden:

$$\int_{\partial B_R(0)} v^i \frac{\partial \overline{w^i}}{\partial \nu} - \overline{w^i}\frac{\partial v^i}{\partial \nu} \mathrm{d}s = 0, \qquad \text{(nach (2.3).)}$$

Analog folgt, dass

$$\int_{\partial B_R(0)} v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s}\frac{\partial v^s}{\partial \nu} \mathrm{d}s \overset{(2.3)}{=} \int_{\partial B_\rho(0)} v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s}\frac{\partial v^s}{\partial \nu} \mathrm{d}s,$$

für $\rho > R$, und aus der SAB und (2.11) erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} v^s(x)\frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu}(x) - \overline{w^s(x)}\frac{\partial v^s}{\partial \nu}(x) &= -2\mathrm{i}k v^s(x)\overline{w^s(x)} + \mathcal{O}(r^{-3}) \\ &= -\frac{2\mathrm{i}k}{|x|^2} v^\infty(\widehat{x})\overline{w^\infty(\widehat{x})} + \mathcal{O}(r^{-3}). \end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\rho(0)} v^s \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s}\frac{\partial v^s}{\partial \nu} \mathrm{d}s &\overset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} -2\mathrm{i}k \int_{\mathcal{S}^2} v^\infty \overline{w^\infty} \mathrm{d}s \\ &= -2\mathrm{i}k\langle Fg, Fh\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}. \end{aligned}$$

Schließlich liefert die Definition von v^i und w^i sowie (2.12), dass

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_R(0)} v^i \frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu} - \overline{w^s}\frac{\partial v^i}{\partial \nu}\mathrm{d}s &= \int_{\mathcal{S}^2} g(d) \int_{\partial B_R(0)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}\frac{\partial \overline{w^s}}{\partial \nu}(x) - \overline{w^s(x)}\frac{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}}{\partial \nu}\mathrm{d}s(x)\mathrm{d}s(d)\\ &= -4\pi \int_{\mathcal{S}^2} g(d)\overline{w^\infty(d)}\mathrm{d}s(d)\\ &= -4\pi\langle g, Fh\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}.\end{aligned}$$

Analog folgt, dass

$$\int_{\partial B_R(0)} v^s \frac{\partial \overline{w^i}}{\partial \nu} - \overline{w^i}\frac{\partial v^s}{\partial \nu}\mathrm{d}s = 4\pi\langle Fg, h\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}.$$

□

Satz 9.6. *Sei* $n^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{supp}(1-n^2) \subset B_R(0)$, $\mathrm{Re}(n^2) \geq 0$, $\mathrm{Im}(n^2) = 0$, *(d.h. das Medium ist nicht-dissipativ). Dann ist* F *normal (d.h.* $F^*F = FF^*$*) und* S *ist unitär (d.h.* $S^*S = SS^* = I$*).*

Beweis. Für $\mathrm{Im}(n^2) = 0$ zeigt Lemma 9.5, dass

$$\mathrm{i}k\langle Fg, Fh\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} = 2\pi\langle Fg, h\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} - 2\pi\langle g, Fh\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}, \tag{9.7}$$

für alle $g, h \in L^2(\mathcal{S}^2)$. Nach dem Reziprozitätsprinzip folgt

$$\begin{aligned}\big(F^*g\big)(\widehat{x}) &= \int_{\mathcal{S}^2} \overline{u^\infty(d;\widehat{x})}g(d)\mathrm{d}s(d)\\ &= \int_{\mathcal{S}^2} \overline{u^\infty(-\widehat{x};-d)}g(d)\mathrm{d}s(d)\\ &= \overline{\int_{\mathcal{S}^2} u^\infty(-\widehat{x};d)\overline{g(-d)}\mathrm{d}s(d)},\end{aligned}$$

also $F^*g = \overline{RFR\overline{g}}$, wobei $R\colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(\mathcal{S}^2)$, $\big(Rh\big)(\widehat{x}) := h(-\widehat{x})$ für alle $\widehat{x} \in \mathcal{S}^2$. Da

$$\langle Rg, Rh\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} = \langle g, h\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} = \langle \overline{h}, \overline{g}\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}, \qquad \text{für alle } g, h \in L^2(\mathcal{S}^2),$$

folgt mit (9.7), dass

$$\begin{aligned}\mathrm{i}k\langle F^*h, F^*g\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} &= \mathrm{i}k\langle RFR\overline{g}, RFR\overline{h}\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}\\ &= \mathrm{i}k\langle FR\overline{g}, FR\overline{h}\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}\\ &\overset{(9.7)}{=} 2\pi\langle FR\overline{g}, R\overline{h}\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} - 2\pi\langle R\overline{g}, FR\overline{h}\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}\\ &= 2\pi\langle RFR\overline{g}, \overline{h}\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} - 2\pi\langle \overline{g}, RFR\overline{h}\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}\\ &= 2\pi\langle h, F^*g\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} - 2\pi\langle F^*h, g\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}\\ &= 2\pi\langle Fh, g\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} - 2\pi\langle h, Fg\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}\\ &\overset{(9.7)}{=} \mathrm{i}k\langle Fh, Fg\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}.\end{aligned}$$

Da dies für alle $g, h \in L^2(\mathcal{S}^2)$ gilt, folgt $F^*F = FF^*$. Noch einmal aus (9.7) folgt

$$-\langle g, \mathrm{i}kF^*Fh\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} = 2\pi\langle g, (F^* - F)h\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}, \qquad \text{für alle } g, h \in L^2(\mathcal{S}^2),$$

d.h. $\mathrm{i}kF^*F = 2\pi(F - F^*)$ und

$$S^*S = \big(I - \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}F^*\big)\big(I + \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}F\big) = I + \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}(F - F^*) + \frac{k^2}{4\pi}F^*F = I,$$

und analog folgt, dass $SS^* = I$. □

Im Folgenden wird die Frage nach der Injektivität des Fernfeldoperators von zentraler Bedeutung sein, d.h. gibt es eine Primärwelle, die eine Superposition von ebenen Wellen ist, sodass das zugehörige Fernfeld verschwindet. Der Kern von F wird durch das sogenannte *innere Transmissionseigenwertproblem* charakterisiert.

Bevor wir dieses Problem einführen zeigen wir, dass für beschränkte $\mathcal{C}^1$-Gebiete Ω Funktionen $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ wohldefinierte Randwerte auf $\partial\Omega$ haben. Dazu zeigen wir zuerst, dass für beschränkte $\mathcal{C}^1$-Gebiete Ω sogar $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$ dicht liegt (Vgl. Theorem 3.27).

Satz 9.7. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet und $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Dann gibt es eine Folge $(u_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, sodass*

$$u_\ell \to u, \qquad \text{in } \mathcal{H}^1(\Omega).$$

Dabei ist $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \coloneqq \left\{ v\big|_\Omega : v \in L^\infty(\mathbb{R}^3) \right\}$.

Beweis. Sei $x_0 \in \partial\Omega$, $B_r(x_0)$ und γ eine Umgebung und eine Funktion wie in Definition 2.1 und $U \coloneqq \Omega \cap B_{\frac{r}{2}}(x_0)$. Für $x \in U$ und $\delta > 0$ definiere

$$x^\delta = x + \delta e_3,$$

und die verschobene Funktion

$$u^\delta(x) \coloneqq u(x^\delta), \qquad x \in U.$$

Wir zeigen zunächst, dass $\|u^\delta - u\|_{\mathcal{H}^1(U)} \to 0$ für $\delta \to 0$. Sei dazu W eine Umgebung von $\overline{U}$ und $(u_\ell)_\ell \subset \mathcal{C}^\infty(W)$, sodass $u_\ell \to u$ in $L^2(W)$ (Vgl. Korollar 3.15). Für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ ist nach dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{\delta\to 0} \|u_\ell^\delta - u_\ell\|_{L^2(U)} = 0.$$

Für hinreichend große ℓ und kleine δ wird deshalb

$$\begin{aligned} \|u^\delta - u\|_{L^2(U)} &\le \|u^\delta - u_\ell^\delta\|_{L^2(U)} + \|u_\ell^\delta - u_\ell\|_{L^2(U)} + \|u_\ell - u\|_{L^2(U)} \\ &\le 2\|u_\ell - u\|_{L^2(W)} + \|u_\ell^\delta - u_\ell\|_{L^2(U)}, \end{aligned}$$

beliebig klein. Da Ableitung und Translation vertauschen, folgt

$$\|u^\delta - u\|_{\mathcal{H}^1 U} \to 0.$$

Da γ eine $\mathcal{C}^1$-Randkurve ist, folgt, dass für hinreichend kleine $\delta > 0$ und $\varepsilon > 0$ gilt, dass

$$B_\varepsilon(x^\delta) \subset \Omega \cap B_r(x_0), \qquad \text{für alle } x \in W,$$

und wir können $u^\delta(x) = u(x^\delta)$ sogar für alle $x \in \mathcal{N}_\varepsilon(U)$ definieren. Mit Lemma 3.26 erhalten wir $(u_\ell^\delta)_\ell \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{U})$ mit $u_\ell^\delta \to u^\delta$ in $\mathcal{H}^1(U)$.

Für $\delta \to 0$ und geeignet gewähltes $\ell = \ell(\delta)$ folgt aber

$$u_{\ell(\delta)}^\delta \to u, \qquad \text{in } \mathcal{H}^1(U).$$

Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $x_{0,1}, \dots, x_{0,M}$, sodass für die gebildeten Umgebungen gilt

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{m=1}^{M} B_{\frac{r_m}{2}}(x_{0,m}).$$

Definiert man wie oben $u_m = \Omega \cap B_{\frac{r_m}{2}}(x_{0,m})$, so erhält man Folgen $u_\ell^{(m)} \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{U}_m)$ mit

$$\lim_{\ell\to\infty} \|u_\ell^{(m)} - u\|_{\mathcal{H}^1(U_m)} = 0.$$

Sei noch U_0 eine offene Menge mit $\overline{U}_0 \subset \Omega$ und $\Omega \subset \bigcup_{m=0}^{M} U_m$, dann existiert nach Lemma 3.26 eine Folge $(u_\ell^{(0)})_\ell \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{U}_0)$ mit

$$\|u_\ell^{(0)} - u\|_{\mathcal{H}^1(U_0)} \longrightarrow 0.$$

Sei schließlich $(\psi_m)_{m=0,\dots,M}$ eine (glatte) Zerlegung der Eins auf $\overline{\Omega}$ bzgl. $U_0, B_{\frac{r_1}{2}}(x_{0,1}), \dots, B_{\frac{r_M}{2}}(x_{0,M})$ (Vgl. Lemma 3.24). Damit definieren wir

$$u_\ell(x) \coloneqq \sum_{m=0}^{M} \psi_m(x) u_\ell^{(m)}(x) \ \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Nach Lemma 3.25 ist

$$\begin{aligned} u_\ell - u &= \sum_{m=0}^{M} \psi_m(u_\ell^{(m)} - u), \\ \partial_{x_j}(u_\ell - u) &= \sum_{m=0}^{M} \big(\partial_{x_j}\psi_m\big)\big(u_\ell^{(m)} - u\big) + \psi_m \partial_{x_j}\big(u_\ell^{(m)} - u\big), \end{aligned}$$

und damit $\|u_\ell - u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \to 0$ für $\ell \to \infty$. □

Definition und Satz 9.8 (Spursatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet. Dann existiert ein beschränkter linearer Operator*

$$\gamma_{\partial\Omega} \colon \mathcal{H}^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega),$$

*sodass $\gamma_{\partial\Omega} u \coloneqq u\big|_{\partial\Omega}$ für alle $u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. $\gamma_{\partial\Omega}$ heißt **Spuroperator**. Auch für $u \notin \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ schreiben wir im Folgenden $u\big|_{\partial\Omega} = \gamma_{\partial\Omega} u$.*

Beweis. Sei $x_0 \in \partial\Omega$, $B_r(x_0)$ und γ eine Umgebung und eine Funktion wie in Definition 2.1. Weiterhin sei

$$T_r \coloneqq \big\{t \in \mathbb{R}^2 \mid \big(t, \gamma(t)\big) \in B_r(x_0)\big\},$$

und $\psi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^3)$ eine Funktion mit $\operatorname{supp}(\psi) \subset B_r(x_0)$, $0 \le \psi \le 1$ und $\psi = 1$ in $B_{\frac{r}{2}}(x_0)$. Für alle $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ ist mit der greenschen Determinante $g(t) = 1 + \big|\frac{\partial\psi}{\partial t_1}(t)\big|^2 + \big|\frac{\partial\psi}{\partial t_2}(t)\big|^2$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega \cap B_{\frac{r}{2}}(x_0)} |u|^2 \mathrm{d}s &= \int_{T_{\frac{r}{2}}} \big|u\big(t, \gamma(t)\big)\big|^2 \sqrt{g(t)}\mathrm{d}t \\ &\le C_1 \int_{T_r} \psi\big(t, \gamma(t)\big)\big|u\big(t, \gamma(t)\big)\big|^2 \mathrm{d}t \\ &\le C_1 \int_{T_r} \int_{\gamma(t)}^{\infty} \Big|u(t, x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\psi(t, x_3)\Big|^2 \mathrm{d}t \\ &= C_1 \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} \Big|\frac{\partial}{\partial x_3}\big(\psi(x)(u(x))^2\big)\Big| \mathrm{d}s \\ &\le C_2 \Big(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_3}\Big\|_{L^2(\Omega)}\Big) \\ &\le C_3 \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

mit einer von u unabhängigen Konstanten C_3. Da $\partial\Omega$ kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $x_{0,m}$, sodass $B_{\frac{r_1}{2}}(x_{0,1}), \dots, B_{\frac{r_m}{2}}(x_{0,m})$ den Rand $\partial\Omega$ überdecken. Insbesondere existiert also eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\big\|u\big|_{\partial\Omega}\big\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \le C\|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2, \qquad \text{für alle } u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}).$$

Damit ist der durch $\gamma_{\partial\Omega} \colon u \mapsto u\big|_{\partial\Omega}$ definierte Operator auf der dichten Teilmenge $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$ stetig, und kann deshalb auf ganz $\mathcal{H}^1(\Omega)$ fortgesetzt werden. □

Definition 9.9. *Sei*

$$\mathcal{H}_0^1(\Omega) \coloneqq \big\{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid u\big|_{\partial\Omega} = 0\big\}.$$

Wegen Satz 9.8 ist das ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}^1(\Omega)$ mit dem $\mathcal{H}^1$-Skalarprodukt.

Mit Hilfe der Greenschen Formel (2.2) kann auch die Normalenableitung auf Sobolevräume verallgemeinert werden.

Definition 9.10. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet und*

$$u \in \mathcal{H}^1_\Delta(\Omega) := \{w \in \mathcal{H}^1(\Omega) \mid \Delta w \in L^2(\Omega)\}.$$

Dann heißt $g \in L^2(\partial\Omega)$ die ***Normalenableitung*** *von u, falls*

$$\int_{\partial\Omega} gv|_{\partial\Omega} \mathrm{d}s = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega v \Delta u \mathrm{d}x, \qquad \text{wobei } v\big|_{\partial\Omega} = \gamma_{\partial\Omega} v \text{ und } \Delta u \in L^2(\Omega),$$

für alle $v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Wir schreiben $g = \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega}$.

Bemerkung 9.11. *Nicht jedes $u \in \mathcal{H}^1_\Delta(\Omega)$ hat eine Normalenableitung in $L^2(\partial\Omega)$, da der Raum $L^2(\partial\Omega)$ dafür „zu klein“ ist. Definiert man*

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \mathrm{Ran}(\gamma_{\partial\Omega}),$$

d.h. als das Bild des Spuroperators aus Definition 9.8, zusammen mit der Norm

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := \inf_{\substack{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) \\ \gamma_{\partial\Omega}(u) = \emptyset}} \|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)},$$

und $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ als den Dualraum von $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, dann kann man wie in Satz 9.8 die klassische Normalenableitung auf $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ zu einem stetigen linearen Operator von $\mathcal{H}^1_\Delta(\Omega)$ nach $\mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ fortsetzen. Es gilt

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subsetneq L^2(\partial\Omega) \subsetneq \mathcal{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Lemma 9.12. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet und $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ zwei disjunkte $\mathcal{C}^1$-Gebiete, sodass $\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$. Bezeichne $\Sigma := \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$. Seien $u_1 \in \mathcal{H}^1(\Omega_1)$, $u_2 \in \mathcal{H}^1(\Omega_2)$, dass $u_1\big|_\Sigma = u_2\big|_\Sigma$ und definiere*

$$u := \begin{cases} u_1, & \text{in } \Omega_1, \\ u_2, & \text{in } \Omega_2. \end{cases}$$

Dann ist $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$.

Beweis. Wir zeigen, dass $\nabla u \in L^2(\Omega)$ und $\nabla u = \nabla u_i$ in Ω_i, $i = 1, 2$. Dazu sei $\phi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\Omega)$. Dann folgt aus der Definition der schwachen Differentierbarkeit von u_1 und u_2 (Vgl. Definition 3.16), dass

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \mathrm{d}x &= \int_{\Omega_1} u_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \mathrm{d}x + \int_{\Omega_2} u_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \mathrm{d}x \\ \overset{\substack{\text{(2.2) anwendbar nach Dichteargument} \\ \text{mit Sätzen 9.7, 9.8}}}&{=} - \int_{\Omega_1} \phi \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_1} u_1 \phi \nu_j \mathrm{d}s \\ &\quad - \int_{\Omega_2} \phi \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega_2} u_2 \phi \widetilde{\nu}_j \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

wobei ν die äußere Normale an $\partial\Omega_1$ bzw. $\widetilde{\nu}$ die äußere Normale an $\partial\Omega_2$ bezeichne. Wegen $\phi = 0$ auf $\partial\Omega$ und $\nu = -\widetilde{\nu}$ auf Σ folgt

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \mathrm{d}x = - \int_{\Omega_1} \phi \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \mathrm{d}x - \int_{\Omega_2} \phi \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \mathrm{d}x.$$

□

Inneres Transmissionseigenwertproblem

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet. Bestimme $k > 0$ und $v, w \in \mathcal{H}^1(D)$, $(v, w) \neq (0, 0)$, sodass

$$\begin{aligned} \Delta v + k^2 v &= 0, && \text{in } D, \\ \Delta w + k^2 n^2 w &= 0, && \text{in } D, \\ v &= w, && \text{auf } \partial D, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} &= \frac{\partial v}{\partial \nu}, && \text{auf } \partial D. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Es gibt auch eine inhomogene Version von (9.8):

Inneres Transmissionsproblem

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet. Zu gegebenem f, g bestimme $v, w \in \mathcal{H}^1(D)$, sodass

$$\begin{aligned} \Delta v + k^2 v &= 0, && \text{in } D, \\ \Delta w + k^2 n^2 w &= 0, && \text{in } D, \\ w - v &= f, && \text{auf } \partial D, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} &= g, && \text{auf } \partial D. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Beide Gleichungen (9.8) und (9.9) sind im schwachen Sinne zu verstehen, d.h. zB. für (9.9)

$$\begin{aligned} \int_D \nabla w \cdot \nabla \psi - k^2 n^2 \psi \mathrm{d}x - \int_D \nabla v \cdot \psi - k^2 v \psi \mathrm{d}x = \int_{\partial D} g \psi \mathrm{d}x, &\qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{H}^1(D), \\ w - v = f, &\qquad \text{im Sinn von Definition und Satz 9.8}, \\ \int_D \nabla w \cdot \nabla \psi - k^2 n^2 \psi \mathrm{d}x = \int_D \nabla v \cdot \nabla \psi - k^2 v \psi \mathrm{d}x = 0 &\qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{H}_0^1(D). \end{aligned} \tag{9.10}$$

Satz 9.13. *Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet, sodass $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ zusammenhängend ist und* $\operatorname{supp}(1 - n^2) \subset D$. *Dann gilt*

(a) *$g \in L^2(\mathcal{S}^2)$ ist genau dann eine Lösung der homogenen Integralgleichung*

$$\big(Fg\big)(\widehat{x}) = \int_{\mathcal{S}^2} u^\infty(\widehat{x}; d) g(d) \mathrm{d}s(d) = 0, \qquad \text{für alle } \widehat{x} \in \mathcal{S}^2, \tag{9.11}$$

wenn es $v, w \in \mathcal{H}^1(D)$ gibt, sodass (v, w) das innere Transmissionseigenwertproblem (9.8) *löst **und** v durch die **Herglotzwellenfunktion***

$$v(x) = \int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot\widehat{y}} g(\widehat{y}) \mathrm{d}s(\widehat{y}), \qquad x \in D, \tag{9.12}$$

gegeben ist. Insbesondere ist F injektiv, falls (9.8) *nur die triviale Lösung* $(v, w) = (0, 0)$ *in D hat.*

(b) *Sei $z \in D$. Die Integralgleichung*

$$\int_{\mathcal{S}^2} u^\infty(\widehat{x}; d) g(d) \mathrm{d}s(d) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z}, \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2, \tag{9.13}$$

hat genau dann eine Lösung, wenn das innere Transmissionsproblem

$$\begin{aligned} \Delta v + k^2 v &= 0, && \textit{in } D, \\ \Delta w + k^2 n^2 w &= 0, && \textit{in } D, \\ w - v &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-z|}}{|x - z|}, && \textit{auf } \partial D, \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-z|}}{|x - z|}, && \textit{auf } \partial D, \end{aligned} \tag{9.14}$$

eine Lösung $(v, w) \in \mathcal{H}^1(D) \times \mathcal{H}^1(D)$ hat, sodass v durch die Herglotzwellenfunktion (9.12) *gegeben ist.*

(c) *Für $z \notin D$ hat* (9.13) *keine Lösung in $L^2(\mathcal{S}^2)$.*

Beweis.

(a) Sei $g \in L^2(\mathcal{S}^2)$ eine Lösung von (9.11) und definiere v durch (9.12). Die linke Seite von (9.11) ist das Fernfeld w^∞ eines gestreuten Felds w^s, das zum Primärfeld $w^i = v$ gehört. Wegen (9.11) ist $w^\infty = 0$ und, da $w = w^i + w^s$ die Helmholtzgleichung

$$\Delta w + k^2 n^2 w = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3,$$

erfüllt, folgt aus Rellis Lemma (Satz 5.3) und der Analytizität von w^s in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, dass $w^s = w - v = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Damit ist

$$w - v = 0 \quad \text{auf } \partial D \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial(w-v)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial D,$$

und die eine Richtung ist gezeigt.

Nun sei v wie in (9.12) und $w \in \mathcal{H}^1(D)$ so, dass (v, w) das Eigenwertproblem (9.8) löst. Wir setzen w durch $w(x) = v(x)$ für $x \notin D$ auf ganz $\mathbb{R}^3$ fort. Dann ist $w \in \mathcal{H}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, da $v = w$ auf ∂D (Vgl. Lemma 9.12). Außerdem erfüllt w die Helmholtzgleichung

$$\Delta w + k^2 n^2 w = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \quad \text{(schwach)}.$$

Da $v - w = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, erfüllt $v - w =: w^s$ die Ausstrahlungsbedingung und daher ist w das eindeutig definierte Gesamtfeld zum Primärfeld v. Es folgt $w^\infty = 0$. Aus der Definition von v folgt, dass

$$w(x) = \int_{\mathcal{S}^2} u(x; d) g(d) \mathrm{d}s(d), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

also gilt auch (und damit ist (a) gezeigt):

$$0 = w^\infty(\widehat{x}) = \int_{\mathcal{S}^2} u^\infty(\widehat{x}; d) g(d) \mathrm{d}s(x).$$

(b) Sei $g \in L^2(\mathcal{S}^2)$ eine Lösung von (9.13) und definiere v wie in (9.12). Wie in a) ist die linke Seite von (9.13) das Fernfeld w^∞ des gestreuten Feldes w^s, das zum Primärfeld $w^i = v$ gehört. Jetzt verschwindet w^∞ aber nicht, sondern ist gleich $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cdot x}$. Nach Lemma 2.6 ist $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz\cdot\widehat{x}}$ auch das Fernfeld der reskalierten Fundamentallösung

$$4\pi\Phi(x - z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-z|}}{|x - z|}.$$

Da $z \in D$ und $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ zusammenhängend, folgt wie in (a), dass

$$w - v = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-z|}}{|x - z|}, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

und damit folgt die eine Richtung. Die andere Richtung folgt analog zu (a).

(c) Angenommen es gibt eine Lösung $g \in L^2(\mathcal{S}^2)$ von (9.13). Sei v wie in (9.12). Dann folgt wie in (b), dass $w - v = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-z|}}{|x-z|}$ in $\mathbb{R}^3 \setminus (D \cup \{z\})$, wobei

$$w(x) = \int_{\mathcal{S}^2} u(x; d) g(d) \mathrm{d}s(d), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

das Gesamtfeld zum Primärfeld v ist. Das kann aber nicht sein, da

$$w - v = w^s \int_{\mathcal{S}^2} u^s(\,\cdot\,, d) g(d) \mathrm{d}s(d),$$

in $z \notin D$ beschränkt ist, während $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|x-z|}}{|x-z|}$ in $x = z$ unbeschränkt ist.

$\square$

Um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen der Fernfeldoperator dichtes Bild in $L^2(\mathcal{S}^2)$ hat, betrachten wir den Kern des adjungierten Operators.

Satz 9.14. *Der Kern* $\{h \in L^2(\mathcal{S}^2) \mid F^*h = 0\}$ *besteht aus allen* $h \in L^2(\mathcal{S}^2)$*, für die die zugehörige Herglotz-Wellenfunktion*

$$v(x) = \int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot\widehat{y}}\overline{h(-\widehat{y})}\mathrm{d}s(\widehat{y}), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

das innere Transmissionseigenwertproblem (9.8) *für ein* $w \in \mathcal{H}^1(D)$ *erfüllt.*

Beweis. Mit dem Reziprozitätsprinzip (9.1) folgt, dass

$$\begin{aligned} F^*h = 0 &\iff \underbrace{\int_{\mathcal{S}^2} \overline{u^\infty(d;\widehat{x})}h(d)\mathrm{d}s(d)}_{=(F^*h)(\widehat{x})} = 0 && \text{für alle } \widehat{x} \in \mathcal{S}^2 \\ &\iff \int_{\mathcal{S}^2} u^\infty(-\widehat{x};-d)\overline{h(d)}\mathrm{d}s(d) = 0 && \text{für alle } \widehat{x} \in \mathcal{S}^2 \\ &\iff \int_{\mathcal{S}^2} u^\infty(\widehat{x};d)\overline{h(-d)}\mathrm{d}s(d) = 0 && \text{für alle } \widehat{x} \in \mathcal{S}^2. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 9.13.(a). □

Definition 9.15. *Eine Wellenzahl* $k > 0$ *heißt* ***innerer Transmissionseigenwert*** *von* (9.9)*, wenn es eine nichttriviale Lösung von* (9.8) *gibt.*

Wir haben gesehen, dass F injektiv mit dichtem Bild ist, falls k *kein* innerer Transmissionseigenwert ist.

Bemerkung 9.16
Die Resultate (b) und (c) in Satz 9.13 suggerieren, dass es möglich sein sollte, den unbekannten Träger $\operatorname{supp}(1 - n^2)$ durch ein Kriterium, das nur die Lösbarkeit der linearen Integralgleichung (9.13) verwendet, zu charakterisieren.

Das führt auf die sogenannte *Linear Sampling Methode*. Da aber auch für $z \in D$ die Integralgleichung (9.13) nicht immer lösbar ist (wegen der zusätzlichen Voraussetzung, dass v eine Herglotz-Wellenfunktion ist), erhält man mit diesem Ansatz unter Umständen nur eine Teilmenge des Trägers von $1 - n^2$. Die Faktorisierungsmethode (siehe Kapitel 11) behebt dieses Problem.

Bemerkung 9.17.

(a) Falls $\operatorname{Im}(n^2) > 0$ *auf einer offenen Teilmenge* $A \subset D$*, dann ist kein* $k > 0$ *ein innerer Transmissionseigenwert. (siehe Colton & Kress 1998, p. 226)*

(b) Falls $\operatorname{Im}(n^2) = 0$ *(und* $n^2(x) \geq c$ *für ein* $c > 0$*), dann ist die Menge der Transmissionseigenwerte diskret (d.h. höchstens abzählbar). (Vgl. Cakoni & Colton 2006, p. 115)*

10 Eindeutigkeit von Lösungen des inversen Problems

Wir gehen der Frage nach, ob der Brechungsindex $n^2 = n^2(x)$ durch die Fernfelder $u^\infty(\,\cdot\,,d)$ für alle $d \in \mathcal{S}^2$ eindeutig bestimmt wird. Dazu seien $n_1^2, n_2^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{supp}(n_j^2 - 1) \subset B_R(0)$, $j = 1, 2$, und wir nehmen an, dass die zugehörigen Fernfelder $u_1^\infty(\,\cdot\,,d), u_2^\infty(\,\cdot\,,d)$ für alle $d \in \mathcal{S}^2$ übereinstimmen. Wir wollen zeigen, dass dann $n_1^2 = n_2^2$ ist.

Zur Vorbereitung schauen wir uns die Bornsche Näherung (Vgl. Kapitel 4) an: Angenommen

$$u_{1,b}^\infty(\widehat{x}; d) = u_{2,b}^\infty(\widehat{x}; d), \qquad \text{für alle } x \in \mathcal{S}^2 \text{ und ein } d \in \mathcal{S}^2.$$

Dann ist $v_b := u_{1,b}^\infty(\widehat{x}; d) - u_{2,b}^\infty(\widehat{x}; d) = 0$ das Fernfeld der Lösung des Quellproblems

$$\Delta v_b^s + k^2 v_b^s = k^2(n_2^2 - n_1^2)u^i(\,\cdot\,; d), \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \text{ und SAB gilt.}$$

Wie wir in Kapitel 7 gezeigt haben, reicht das nicht aus, um zu zeigen, dass $n_2^2 - n_1^2 = 0$ ist. ($k^2(n_2^2 - n_1^2)u^i(\,\cdot\,; d)$ kann eine nicht-ausstrahlende Quelle sein.)

Sei also

$$u_{1,b}^\infty(\widehat{x}; d) = u_{2,b}^\infty(\widehat{x}; d), \qquad \text{für alle } \widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2.$$

Dann folgt aus der Darstellung des Fernfeld in der Bornapproximation (vgl. letzte Seite von Kapitel 4), dass

$$\widehat{(1 - n_1^2)}\big(k(\widehat{x} - d)\big) = \widehat{(1 - n_2^2)}\big(k(\widehat{x} - d)\big), \qquad \text{für alle } \widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2,$$

d.h. die Fouriertransformationen von $(1 - n_1^2)$ und $(1 - n_2^2)$ stimmen auf $\{k(\widehat{x} - d) \mid \widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2\}$ überein, d.h. in einem Ball $B_{2k}(0)$ um 0 mit Radius $2k$. Da $(1 - n_1^2)$ und $(1 - n_2^2)$ kompakten Träger haben, sind deren Fouriertransformationen $\widehat{(1 - n_1^2)}$ und $\widehat{(1 - n_2^2)}$ analytisch, damit folgt wegen der eindeutigen Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen, dass $\widehat{1 - n_1^2} = \widehat{1 - n_2^2}$ in ganz $\mathbb{R}^3$. Anwenden der inversen Fouriertransformation ergibt

$$n_1^2 = n_2^2, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

D.h. in der Bornschen Näherung reicht die Kenntnis von $\{u_b^\infty(\widehat{x}; d) \mid \widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2\}$ (theoretisch) aus, um den Brechungsindex n^2 zu rekonstruieren. Ähnliche Argumente zeigen, dass die Kenntnis von $u_b^\infty(\widehat{x}; d)$ für alle $\widehat{x} \in \mathcal{S}^2$, ein $d \in \mathcal{S}^2$ und alle $k \in (k_-, k_+) \subset (0, \infty)$ ausreichen, um n^2 zu rekonstruieren.

Nun betrachten wir den allg. Fall. Wir zeigen zunächst, dass für festes $n^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{supp}(1 - n^2) \subset B_R(0)$, die Lösungen $u(\,\cdot\,; d)$, $d \in \mathcal{S}^2$, des Streuproblems dicht im Raum aller Lösungen der Helmholtzgleichung in $B_R(0)$ liegen. Dazu brauchen wir noch ein Resultat über die Fortsetzbarkeit von $\mathcal{H}^1$-Funktionen.

Satz 10.1 (Fortsetzungssatz)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes $\mathcal{C}^1$-Gebiet. Für jedes offene $V \subset \mathbb{R}^3$ mit $\overline{\Omega} \subset V$ existiert ein stetiger linearer Fortsetzungsoperator*

$$E\colon \mathcal{H}^1(\Omega) \to \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3), \quad \textit{mit} \quad Eu = u \textit{ f.ü. in } \Omega \quad \textit{und} \quad \operatorname{supp}(Eu) \subset V.$$

Beweis. Da $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{H}^1(\Omega)$ dicht ist (Satz 9.7) betrachten wir zuerst $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ und zeigen anschließend die Behauptung für allgemeines $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ mit einem Dichteargument. Weiterhin genügt es, zuerst eine lokale Fortsetzung in einer Umgebung eines Randpunktes $x_0 \in \partial\Omega$ zu konstruieren und diese lokalen Fortsetzungen dann mit Hilfe eines Kompaktheitsarguments und einer Zerlegung der Eins zusammenzusetzen.

Sei $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$, $x_0 \in \partial\Omega$ und $B_r(x_0)$ und γ eine Umbegung und eine Funktion wie in Definition 2.1. Die Funktion

$$\Phi\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2, y_3) := \big(x_1, x_2, x_3 - \gamma(x_1, x_2, x_3)\big),$$

und ihre Inverse

$$\Psi\colon (y_1, y_2, y_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3) := \big(y_1, y_2, y_3 + \gamma(y_1, y_2, y_3)\big),$$

sind $\mathcal{C}^1$ und Φ zieht den Rand $\partial\Omega$ lokal um x_0 flach, d.h.

$$\Phi\big(B_r(x_0)\cap\Omega\big) = \Phi\big(B_r(x_0)\big)\cap\{y \mid y_3 > 0\}.$$

Die transformierte Funktion $u^\Psi := u\circ\Psi$ kann in einer Kugel $B_\rho\big(\Phi(x_0)\big)\subset\Phi\big(B_r(x_0)\big)$ fortgesetzt werden durch

$$v^\Psi(y) := \begin{cases} u^\Psi(y), & y_3 > 0,\\ -3u^\Psi(y_1,y_2,-y_3) + 4u^\Psi(y_1,y_2,-\frac{y_3}{2}), & y_3 < 0.\end{cases}$$

Man prüft leicht nach, dass $v^\Psi\in\mathcal{C}^1\big(B_\rho\big(\Phi(x_0)\big)\big)$ ist. Rücktransformation liefert $v := v^\Psi\circ\Phi\in\mathcal{C}^1(U_{x_0})$, wobei $U_{x_0} := \Psi\big(B_\rho\big(\Phi(x_0)\big)\big)$ eine Umgebung von x_0 ist. Die Funktion v ist eine lokale Fortsetzung von u, da für $x\in U_{x_0}\cap\Omega$ gilt

$$\Phi(x)\in B_\rho(x_0)\cap\{y \mid y_3>0\} =: B_\rho^+\big(\Phi(x_0)\big),$$

und daher

$$v(x) = v^\Psi\big(\Phi(x)\big) = u^\Psi\big(\Phi(x)\big) = u(x), \qquad \text{für alle } x\in U_{x_0}\cap\Omega.$$

Die Funktionen Φ und Ψ und die Umgebung U_{x_0} hängen nicht von u ab, und die Abbildungen

$$u\mapsto u^\Psi\mapsto v^\Psi\mapsto v,$$

sind linear und stetig bzgl.

$$\mathcal{H}^1(U_{x_0}\cap\Omega)\to\mathcal{H}^1\big(B_\rho^+\big(\Phi(x_0)\big)\big)\to\mathcal{H}^1\big(B_\rho\big(\Phi(x_0)\big)\big)\to\mathcal{H}^1(U_{x_0}).$$

Wie in Satz 10.1 können wir aufgrund der Kompaktheit von $\partial\Omega$ nun endlich viele $x_{0,1},\dots,x_{0,m}\in\partial\Omega$ und Umgebungen $U_{x_{0,1}},\dots,U_{x_{0,m}}$ wie oben konstruiert werden, die $\partial\Omega$ überdecken. Mit einer glatten Zerlegung der Eins können so die lokalen Fortsetzungen zu einer (stetig und linearen) globalen FOrtsetzung von $\mathcal{H}^1(\Omega)$ nach $\mathcal{H}^1(O)$ für eine offene Umgebung O von $\overline{\Omega}$ zusammengesetzt werden. Durch Multiplikation mit einer glatten Abschneidefunktion erhalten wir eine stetige Abbildung $E\colon\mathcal{H}^1(\Omega)\to\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{supp}(Eu)\subset O\cap V$ für alle $u\in\mathcal{H}^1(\Omega)$. $\square$

Lemma 10.2. *Sei $n^2\in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{supp}(1-n^2)\subset B_R(0)$ und $u(\,\cdot\,;d)$ die Lösung des Streuproblems (8.1) zu $u^i(x;d) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$. Sei $\rho > R$ und*

$$H := \big\{v\in\mathcal{H}^1\big(B_\rho(0)\big) \mid \Delta v + k^2n^2v = 0 \text{ in } B_\rho(0)\big\},$$

wobei die Helmholtzgleichung im schwachen Sinn

$$\int_{B_\rho(0)} \nabla v\cdot\nabla\psi - k^2n^2v\psi\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{für alle } \psi\in\mathcal{H}_0^1\big(B_\rho(0)\big),$$

zu verstehen ist. Dann ist

$$\operatorname{span}\big\{u(\,\cdot\,;d)\big|_{B_R(0)} \mid d\in\mathcal{S}^2\big\},$$

dicht in $H\big|_{B_R(0)}$ bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{L^2(B_R(0))}$.

Beweis. Sei $v\in\overline{H\big|_{B_R(0)}}^{\|\cdot\|_{L^2(B_R(0))}}$ so, dass

$$\langle v, u(\,\cdot\,;d)\rangle_{L^2(B_R(0))} = \int_{B_R(0)} v(x)\overline{u(x;d)}\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{für alle } d\in\mathcal{S}^2.$$

Aus der Lippmann-Schwinger-Gleichung (4.7) folgt, dass

$$u(\,\cdot\,;d) = (I+T)^{-1}u^i(\,\cdot\,;d),$$

wobei der Integraloperator T wie im Beweis von Satz 4.8 definiert ist. Daraus folgt

$$0 = \big\langle v, (I+T)^{-1}u^i(\,\cdot\,;d)\big\rangle_{L^2(B_R(0))} = \big\langle (I+T^*)^{-1}v, u^i(\,\cdot\,;d)\big\rangle_{L^2(B_R(0))}, \qquad \text{für alle } d\in\mathcal{S}^2. \quad (10.1)$$

Setze $w \coloneqq (I+T^*)^{-1}v$, dann ist $w \in L^2\big(B_R(0)\big)$ und w erfüllt die *adjungierte Gleichung*

$$v(x) = w(x) + k^2\big(1-\overline{n^2(x)}\big)\int_{B_R(0)} \overline{\Phi(x-y)}w(y)\mathrm{d}y, \qquad x \in B_R(0).$$

Wir definieren ein Volumenpotential

$$W(x) \coloneqq \int_{B_R(0)} \overline{w(y)}\Phi(x-y)\mathrm{d}y,$$

dann ist nach Satz 4.5 $W \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ und W löst

$$\Delta W + k^2 W = -\overline{w}, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \text{ und die SAB gilt,}$$

im schwachen Sinn, d.h.

$$\int_{R^3} \nabla W\cdot\nabla\psi - k^2 W\psi\mathrm{d}x = \int_{B_R(0)} \overline{w}\psi\mathrm{d}x, \qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3). \tag{10.2}$$

Das zugehörige Fernfeld W^∞ verschwindet, da

$$\overline{W^\infty(d)} = \frac{1}{4\pi}\int_{B_R(0)} w(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\cdot y}\mathrm{d}y = \frac{1}{4\pi}\langle w, u^i(\,\cdot\,;-d)\rangle_{L^2(B_R(0))} = 0.$$

Mit Rellichs Lemma (vgl. Satz 5.3) folgt $W=0$ in $\mathbb{R}^3\setminus B_R(0)$.

Sei nun $(v_j)_j \subset H$ mit $v_j\big|_{B_R(0)} \to v$ in $L^2\big(B_R(0)\big)$. Dann ist

$$\int_{B_R(0)} \overline{v}v_j\mathrm{d}x = \int_{B_R(0)} \overline{w}v_j\mathrm{d}x + k^2\int_{B_R(0)}(1-n^2)Wv_j\mathrm{d}x, \qquad \text{für alle } j\in\mathbb{N}. \tag{10.3}$$

Da $v_j \in \mathcal{H}^1\big(B_\rho(0)\big)$ für alle $\psi \in \mathcal{H}^1_0\big(B_\rho(0)\big)$ die Gleichung

$$\int_{B_\rho(0)} \nabla v_j\cdot\nabla\psi - k^2 v_j\psi\mathrm{d}x = -k^2\int_{B_R(0)}(1-n^2)v_j\psi\mathrm{d}x, \tag{10.4}$$

erfüllt, und da W außerhalb von $B_R(0)$ verschwindet, gilt (10.4) auch für $\psi = W$. Nach Satz 10.1 können wir v_j zu einer Funktion $V_j \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^3)$ fortsetzen und wir können $\psi = V_j$ in (10.2) wählen. Die linken Seiten dieser Gleichungen stimmen überein, und daher ist

$$-k^2\int_{B_R(0)}(1-n^2)v_jW\mathrm{d}x = \int_{B_R(0)}\overline{w}v_j\mathrm{d}x.$$

Die Gleichung (10.3) liefert nun

$$\int_{B_R(0)} \overline{v}v_j\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Für $j\to\infty$ folgt $\|v\|_{L^2(B_R(0))} = 0$, also $v\big|_{B_R(0)} = 0$. □

Im nächsten Lemma zeigen wir eine Orthogonalitätsbeziehung zwischen Lösungen der Helmholtzgleichung und der Differenz der Brechungsindizes.

Lemma 10.3. *Seien $n_1^2, n_2^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ zwei Brechungsindizes mit $\operatorname{supp}(n_j^2-1)\subset B_R(0)$, $j=1,2$, sodass für die zugehörigen Fernfelder $u_1^\infty(\widehat{x};d) = u_2^\infty(\widehat{x};d)$ für alle $\widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2$ gilt. Dann ist*

$$\int_{B_R(0)} v_1(x)v_2(x)\big(n_1^2(x)-n_2^2(x)\big)\mathrm{d}x = 0, \tag{10.5}$$

für alle Lösungen $v_j \in \mathcal{H}^1\big(B_\rho(0)\big)$ der Helmholtzgleichung

$$\Delta v_j + k^2 n_j^2 v_j = 0, \qquad \text{in } B_\rho(0), \quad j=1,2, \quad \text{wobei } \rho > R.$$

Beweis. Sei v_1 eine Lösung von $\Delta v_1 + k^2 n_1^2 v_1 = 0$ in $B_\rho(0)$. Mit dem Dichteresultat aus Lemma 10.2 genügt es, die Behauptung für $v_2 := u_2(\,\cdot\,; d)$ mit beliebigem $d \in \mathcal{S}^2$ zu zeigen. Setze

$$u := u_1(\,\cdot\,; d) - u_2(\,\cdot\,; d) = u_1^s(\,\cdot\,; d) - u_2^s(\,\cdot\,; d).$$

Da

$$u_1^\infty(\,\cdot\,; d) - u_2^\infty(\,\cdot\,; d) = 0,$$

folgt mit Rellichs Lemma (vgl. Satz 5.3), dass $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^3 \backslash B_R(0)$. Außerdem erfüllt u die Gleichung

$$\Delta u + k^2 n_1^2 u = k^2(n_2^2 - n_1^2) u_2(\,\cdot\,; d) = k^2(n_2^2 - n_1^2) v_2,$$

bzw.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla u \cdot \nabla \psi - k^2 n_1^2 u \psi \mathrm{d}x = -k^2 \int_{B_R(0)} (n_2^2 - n_1^2) v_2 \psi \mathrm{d}x, \qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{H}_\mathrm{c}^1(\mathbb{R}^3).$$

Das Integral auf der linken Seite kann auf $B_R(0)$ eingeschränkt werden, da u außerhalb von $B_R(0)$ verschwindet. Wir setzen $\psi = \phi v_1$ für eine Abschneidefunktion $\phi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\phi = 1$ in $B_R(0)$ und $\operatorname{supp}(\phi) \subset B_\rho(0)$. Also gilt

$$k^2 \int_{B_R(0)} (n_1^2 - n_2^2) v_1 v_2 \mathrm{d}x = \int_{B_R(0)} \nabla u \cdot \nabla v_1 - k^2 u_1^2 u v_2 \mathrm{d}x = 0,$$

und die rechte Seite verschwindet, da v_1 die schwache Lösung von $\Delta v_1 + k^2 n_1^2 v_1 = 0$ in $B_\rho(0)$ ist und $u\big|_{B_\rho(0)} \in \mathcal{H}_0^1\big(B_\rho(0)\big)$ mit $\operatorname{supp}(u) \subset \overline{B_R(0)}$ ist. □

Satz 10.4. *Sei $\rho > 0$ und $n^2 \in L^\infty\big(B_\rho(0)\big)$, sodass* $\operatorname{supp}(1 - n^2) \subset B_\rho(0)$. *Dann gibt es $T > 0$ und $C > 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}^3$ mit $z \cdot z = 0$ und $|z| \geq T$ eine Lösung $u_z \in \mathcal{H}^1\big(B_\rho(0)\big)$ der Differentialgleichung*

$$\Delta u_z + k^2 n^2 u_z = 0, \qquad \text{in } B_\rho(0), \tag{10.6}$$

der Form

$$u_z(x) = \mathrm{e}^{z \cdot x}\big(1 + v_z(x)\big), \qquad x \in B_\rho(0), \tag{10.7}$$

existiert, wobei v_z die Abschätzung

$$\|v_z\|_{L^2(B_\rho(0))} \leq \frac{C}{|z|}, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^3 \text{ mit } z \cdot z = 0 \text{ und } |z| \geq T, \tag{10.8}$$

erfüllt.

Beweis. Zuerst konstruieren wir v_z nur für $z = t\widehat{e}$, wobei $\widehat{e} = (1, \mathrm{i}, 0) \in \mathbb{C}^3$ und $t > 0$ hinreichend groß sei. Dann behandeln wir den allgemeinen Fall durch Rotation der Geometrie.

Sei $z = t\widehat{e}$ für ein $t > 0$. Nach Reskalierung können wir o.B.d.A. annehmen, dass $B_\rho(0) \subset Q := [-\pi, \pi]^3 \subset \mathbb{R}^3$ (vgl. Beweis von Satz 6.2). Mit dem Ansatz

$$u(x) = \mathrm{e}^{t\widehat{e} \cdot x}\big(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}x_1} w_t(x)\big),$$

und entsprechend

$$\phi(x) := \mathrm{e}^{-t\widehat{e} \cdot x + \frac{\mathrm{i}}{2}x_2} \psi(x), \qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{C}_\mathrm{c}^\infty(Q),$$

folgt

$$\nabla u(x) = \mathrm{e}^{t\widehat{e} \cdot x}(t\widehat{e} + t\widehat{e}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}x_1} w_t(x) - \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}x_1} w_t(x) + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}x_1} \nabla w_t(x)),$$

$$\nabla \phi(x) = \mathrm{e}^{-t\widehat{e} \cdot x + \frac{\mathrm{i}}{2}x_1}(-t\widehat{e} + \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})\psi(x) + \mathrm{e}^{-t\widehat{e} \cdot x + \frac{\mathrm{i}}{2}x_1} \nabla \psi(x).$$

Es soll gelten, dass

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} \int_Q \nabla u \nabla \phi - k^2 n^2 u \phi \mathrm{d}x \\
&= \int_Q \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}x_1} \frac{\mathrm{i}}{2} t\psi + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}x_1} t\widehat{e} \nabla \psi + t \frac{\mathrm{i}}{2} w_t \psi + t\widehat{e} \cdot (\nabla \psi) w_t \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{2} t w_t \psi + \frac{1}{4} w_t \psi - \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (\nabla \psi) w_t - t\widehat{e} \cdot (\nabla w_t) \psi \\
&\quad + \frac{\mathrm{i}}{2} \psi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \nabla w_t + \nabla w_t \cdot \psi - k^2 n^2 (\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}x_1} \psi + w_t \psi) \mathrm{d}x \\
&= \int_Q \nabla w_t \cdot \nabla \psi + (-2t\widehat{e}\psi + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \psi) \cdot \nabla w_t + (\mathrm{i}t + \frac{1}{4}) \psi w_t \\
&\quad - k^2 n^2 (\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}x_1} + w_t) \psi \mathrm{d}x, \qquad \text{für alle } \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q).
\end{aligned}
$$

D.h. w_t muss die Gleichung

$$
\Delta w_t + (2t\widehat{e} - ip) \cdot \nabla w_t - (\mathrm{i}t + \tfrac{1}{4}) w_t = -k^2 n^2 w_t - k^2 n^2 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}x_1},
$$

in Q erfüllen, wobei $p := (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$. (Eine ähnliche Transformation haben wir bereits im Beweis von Satz 6.2 gesehen.)

Wir bestimmen nun eine 2π-periodische Lösung dieser Gleichung. Da sie von der Form (6.4) (mit $\alpha = \frac{1}{4}$) ist, können wir Lemma 6.1, insbesondere den Lösungsoperator L_t, verwenden um die Lösung darzustellen:

$$
w_t = L_t\big(- k^2 n^2 w_t - k^2 n^2 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}x_1} \big), \qquad \text{in } Q. \tag{10.9}
$$

Definiert man $\widetilde{n}^2 := k^2 n^2 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}x_1}$, so liest sich (10.9) als

$$
w_t + k^2 L_t(n^2 w_t) = L_t \widetilde{n}^2, \qquad \text{in } Q,
$$

oder äquivalent

$$
(I + K_t) w_t = L_t \widetilde{n}^2, \qquad \text{in } Q.
$$

Für große t ist $K_t \colon w \mapsto k^2 L_t(n^2 w)$ eine Kontraktion, da

$$
\|K_t w\|_{L^2(Q)} = k^2 \|L_t(n^2 w)\|_{L^2(Q)} \overset{\text{Lemma 6.1}}{\leq} \frac{k^2}{t^2} \|n^2 w\|_{L^2(Q)} \leq \frac{k^2 \|n^2\|_\infty}{t} \|w\|_{L^2(Q)}.
$$

Für $t > 0$ groß existiert also eine eindeutige Lösung w_t von (10.9). Diese Lösung hängt stetig von der rechten Seite ab, d.h. es existiert ein $C > 0$, sodass

$$
\|w_t\|_{L^2(Q)} \leq C \|L_t \widetilde{n}^2\|_{L^2(Q)} \leq \frac{Ck^2}{t} \|n^2\|_\infty, \qquad \text{für alle } t \geq T,
$$

und ein $T > 0$ groß genug. Damit haben wir den Satz für $z = t\widehat{e}$ gezeigt.

Sei nun $z \in \mathbb{C}^3$ beliebig mit $z \cdot z = 0$ und $|z| \geq T$, dann gilt

$$
|\operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Im}(z)| \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) = 0.
$$

Schreiben wir $z = t(\widehat{a} + \mathrm{i}\widehat{b})$ mit $\widehat{a}, \widehat{b} \in \mathcal{S}^2$, $t > 0$ und $\widehat{a} \cdot \widehat{b} = 0$, und definieren $\widehat{c} := \widehat{a} \times \widehat{b}$, sowie $R := \big[\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}\big] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ (orthogonal), dann ist $z = tR\widehat{e}$, also $R^\top z = t\widehat{e}$.

Die Substitution $x \mapsto Rx$ transformiert die Helmholtzgleichung (10.6) zu

$$
\Delta w(x) + k^2 n^2 (Rx) w(x) = 0, \qquad \text{in } B_\rho(0),
$$

wobei $w(x) \coloneqq u(Rx)$, $x \in B_\rho(0)$. Der erste Teil des Beweises liefert nun die Existenz einer Lösung

$$w(x) = \mathrm{e}^{t\widehat{e}\cdot x}\big(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}x_1} w_t(x)\big),$$

wobei $\|w_t\|_{L^2(Q)} \leq \frac{C}{t}$ für $t \geq T$ ist. Für $u(x) \coloneqq w(R^\top x)$ folgt, dass

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathrm{e}^{t\widehat{e}\cdot R^\top x}\big(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\widehat{a}\cdot x} w_t(R^\top x)\big) \\ &= \mathrm{e}^{z\cdot x}\big(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\widehat{a}\cdot x} w_t(R^\top x)\big). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz auch für den allgemeinen Fall gezeigt. □

Wir wenden Satz 10.4 nun an um zu zeigen, dass Produkte $v_1 v_2$ von Lösungen der Helmholtzgleichung $\Delta v_j + k^2 n_j v_j = 0$ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ einen dichten Unterraum von $L^2(\Omega)$ aufspannen.

Satz 10.5. *Seien $n_1^2, n_2^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{supp}(1 - n_j^2) \subset B_R(0)$, $j = 1, 2$. Dann ist*

$$\operatorname{span}\big\{(v_1 v_2)\big|_{B_R(0)} \mid v_j \in \mathcal{H}^1\big(B_\rho(0)\big) \textit{ löst } \Delta v_j + k^2 n_j^2 v_j = 0 \textit{ in } B_\rho(0) \textit{ (mit } \rho > R\textit{)}\big\},$$

dicht in $L^2\big(B_R(0)\big)$.

Beweis. Sei $g \in L^\infty\big(B_R(0)\big)$ mit

$$g \perp^{L^2} \operatorname{span}\big\{(v_1 v_2)\big|_{B_R(0)} \mid v_j \in \mathcal{H}^1\big(B_\rho(0)\big) \text{ löst } \Delta v_j + k^2 n_j^2 v_j = 0 \text{ in } B_\rho(0)\big\},$$

d.h. insbesondere

$$\int_{B_R(0)} g v_1 v_2 \,\mathrm{d}x = 0, \tag{10.10}$$

für alle Lösungen $v_j \in \mathcal{H}^1\big(B_\rho(0)\big)$ von $\Delta v_j + k^2 n_j^2 v_j = 0$ in $B_\rho(0)$, $j = 1, 2$. Wegen $\big(L^1(B_R(0))\big)' = L^\infty\big(B_R(0)\big)$ genügt es zu zeigen, dass dann $g = 0$ ist.

Sei $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und $\alpha > 0$. Wähle $\widehat{a} \in \mathcal{S}^2$ und $b \in \mathbb{R}^3$, sodass $|b|^2 = |y|^2 + \alpha^2$ und $\{y, \widehat{a}, b\}$ paarweise orthogonal sind. Setze

$$z_1 \coloneqq \frac{1}{2}b - \frac{\mathrm{i}}{2}(y + \alpha\widehat{a}) \qquad \text{und} \qquad z_2 \coloneqq -\frac{1}{2}b - \frac{\mathrm{i}}{2}(y - \alpha\widehat{a}).$$

Dann ist

$$z_j \cdot z_j = \frac{|b|^2}{4} - \frac{|y|^2 + \alpha^2}{4} = 0 \qquad \text{und} \qquad |z_j|^2 = \frac{1}{4}(|b|^2 + |y|^2 + \alpha^2) \geq \frac{\alpha^2}{4}, \qquad \text{für } j = 1, 2.$$

Außerdem ist $z_1 + z_2 = -\mathrm{i}y$. Wir wenden nun Satz 10.4 mit $z = z_j$ auf die Gleichung $\Delta v_j + k^2 n_j^2 v_j = 0$ in $B_\rho(0)$ an. Setzen wir die Lösung $u_j(x) = \mathrm{e}^{z_j\cdot x}\big(1 + v_{z_j}(x)\big)$ aus (10.7) in die Orthogonalitätsrelation (10.10) ein, so folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \mathrm{e}^{z_1\cdot x}\big(1 + v_{z_1}(x)\big)\mathrm{e}^{z_2\cdot x}\big(1 + v_{z_2}(x)\big) g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot x}\big(1 + v_{z_1}(x) + v_{z_2}(x) + v_{z_1}(x)v_{z_2}(x)\big) g(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nach Satz 10.4 gibt es $T > 0$ und $C > 0$, sodass

$$\|v_{z_j}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{|z_j|} \leq \frac{2C}{\alpha}, \qquad \text{für alle } \alpha \geq T.$$

Cauchy-Schwarz liefert für $\alpha \to \infty$, dass

$$\int_\Omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot x} g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Da $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ beliebig war, folgt, dass die Fouriertransformation von g auf ganz $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ verschwindet, also ist $g = 0$. □

Satz 10.6. *Seien* $n_1^2, n_2^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ *mit* $\operatorname{supp}(1 - n_j^2) \subset B_R(0)$. *Seien* $u_1^\infty(\,\cdot\,; d)$ *und* $u_2^\infty(\,\cdot\,; d)$ *die zugehörigen Fernfelder zu einer ebenen Welle mit* $d \in \mathcal{S}^2$ *als Primärfeld. Falls*

$$u_1^\infty(\widehat{x}; d) = u_2^\infty(\widehat{x}; d), \qquad \text{für alle } \widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2,$$

dann ist $n_1^2 = n_2^2$ *in* $\mathbb{R}^3$.

Beweis. Kombiniere Lemma 10.3 mit Satz 10.5. □

11 Der MUSIC Algorithmus

Als Vorbereitung für die Faktorisierungsmethode betrachten wir ein vereinfachtes Modell für sogenannte Punktstreukörper und den sogenannten MUSIC-Algorithmus (**Mu**ltiple **Si**gnal **C**lassification).

Wir nehmen an, dass M Streukörper $D_1, \dots, D_M \subset B_R(0)$ gegeben sind, wobei $D_m = z_m + \delta B_m$, $m = 1, \dots, M$ mit einem Parameter $\delta > 0$, der die Größe von D_m beschreibt. Der Brechungsindex sei gegeben durch

$$n^2(x) = \begin{cases} n_m^2, & x \in D_m, \\ 1, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bigcup_{m=1}^M D_m), \end{cases}$$

wobei $n_m^2 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(n_m^2) > 0$ und $\mathrm{Im}(n_m^2) \geq 0$. Wir untersuchen das Verhalten von u^∞, falls die Streuobjekte klein werden, also für $\delta \to 0$. In der Bornschen Näherung ist das Fernfeld zu einer ebenen einfallenden Welle $u^i(x; d) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$, $x \in \mathbb{R}^3$ und $d \in \mathcal{S}^2$, gegeben durch

$$u_b^\infty(\widehat{x}; d) = -\frac{k^2}{4\pi} \sum_{m=1}^M \int_{D_m} (1 - n_m^2) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot y} \mathrm{d}y, \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2.$$

Nehmen wir nun an, dass die Streukörper bzgl. der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ klein sind, d.h. $k\delta > 0$ ist klein, so folgt mit der Substitution $\eta = (y - z_m)/\delta$ der Taylor-Entwicklung $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot(z_m+\delta\eta)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot z_m} + \mathcal{O}(k\delta)$

$$\begin{aligned} u_b^\infty(\widehat{x}; d) &= -\frac{k^2}{4\pi} \sum_{m=1}^M \int_{B_m} (1 - n_m^2) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot(z_m+\delta\eta)} \delta^3 \mathrm{d}\eta \\ &= -\frac{k^2\delta^3}{4\pi} \sum_{m=1}^M \int_{B_m} (1 - n_m^2) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot z_m} \mathrm{d}\eta + \mathcal{O}(k^3\delta^4) \\ &= -\frac{k^2\delta^3}{4\pi} \sum_{m=1}^M |B_m|(1 - n_m^2) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot z_m} + \mathcal{O}(k^3\delta^4) \\ &= \delta^3 \sum_{m=1}^M \Big(-\frac{k^2|B_m|(1 - n_m^2)}{4\pi} \Big) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot z_m} + \mathcal{O}(\delta^4) \\ &= \delta^3 \sum_{m=1}^M \tau_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot z_m} + \mathcal{O}(\delta^4). \end{aligned}$$

D.h. für $\delta \to 0$ und mit $\tau_m := -\frac{k^2}{4\pi}|B_m|(1 - n_m^2) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist

$$\begin{aligned} u_b^\infty(\widehat{x}; d) &= \delta^3 \sum_{m=1}^M \tau_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot z_m} + \mathcal{O}(\delta^4) \\ &= \delta^3 \sum_{m=1}^\infty \tau_m u^i(z_m; d) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z_m} + \mathcal{O}(\delta^4). \end{aligned} \tag{11.1}$$

Hier beschreibt τ_m die Streustärke des m-ten Punktstreukörpers und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z_m}$, $\widehat{x} \in \mathcal{S}^2$, ist das (reskalierte) Fernfeld einer Fundamentallösung $\Phi_k(x - z_m)$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z_m\}$, mit Singularität in z_m.

Inverses Problem: Gegeben $u_b^\infty(\widehat{x}; d)$, für alle $\widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2$, rekonstruiere $z_1, \dots, z_M$.

Annahmen: $z_i \neq z_j$, für alle $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, M$ und $\tau_m \neq 0$, für alle $m = 1, \dots, M$.

Definieren wir analog zum Fernfeldoperator einen entsprechenden Operator in der Bornschen Näherung

$$F_b \colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(\mathcal{S}^2), \qquad \big(F_b g\big)(\widehat{x}) := \int_{\mathcal{S}^2} u_b^\infty(\widehat{x}; d) g(d) \mathrm{d}s(d), \tag{11.2}$$

dann folgt aus (11.1), dass

$$F_b = \delta^3 \widetilde{F}_b + \mathcal{O}(\delta^4), \qquad \text{in } \mathcal{L}\big(L^2(\mathcal{S}^2), L^2(\mathcal{S}^2)\big), \tag{11.3}$$

wobei

$$\widetilde{F}_b \colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(\mathcal{S}^2), \qquad \big(\widetilde{F}_b g\big)(\widehat{x}) := \sum_{m=1}^{M} \tau_m \int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\widehat{x}-d)\cdot z_m} g(d)\mathrm{d}s(d). \tag{11.4}$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass $\delta > 0$ klein genug ist, sodass wir den $\mathcal{O}(\delta^4)$-Term vernachlässigen und direkt mit $\delta^3\widetilde{F}_b$ arbeiten können.

Der Operator $\widetilde{F}_b$ kann faktorisiert werden: Betrachte dazu

$$H \colon L^2(\mathcal{S}^2) \to \mathbb{C}^M, \qquad (Hg)_m := \int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\cdot z_m} g(d)\mathrm{d}s(d). \tag{11.5}$$

Dann ist für alle $g \in L^2(\mathcal{S}^2)$ und $a \in \mathbb{C}^M$

$$\begin{aligned}
\langle Hg, a\rangle_{\mathbb{C}^M} &= \sum_{m=1}^{M} (Hg)_m \overline{a_m} \\
&= \sum_{m=1}^{M} \int_{\mathcal{S}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kd\cdot z_m} g(d)\mathrm{d}s(d)\overline{a_m} \\
&= \int_{\mathcal{S}^2} g(d)\overline{\sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd\cdot z_m} a_m}\mathrm{d}s(d) \\
&= \langle g, H^* a\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}.
\end{aligned}$$

D.h.

$$H^* \colon \mathbb{C}^M \to L^2(\mathcal{S}^2), \qquad (H^*a)(d) = \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd\cdot z_m} a_m. \tag{11.6}$$

Sei außerdem

$$T \colon \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^M, \qquad a \mapsto (\tau_m a_m)_{m=1}^M,$$

d.h. $T \;\widehat{=}\; \operatorname{diag}(\tau_1, \dots, \tau_M)$, dann ist

$$\widetilde{F}_b = H^* T H. \tag{11.7}$$

Lemma 11.1. *H^* ist injektiv.*

Beweis. Sei $H^*a = 0$ für $a = (a_1, \dots, a_M) \in \mathbb{C}^M$. Dann ist

$$w(x) := \sum_{m=1}^{M} a_m \Phi(x - z_m), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z_1, \dots, z_M\},$$

eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta w + k^2 w = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{z_1, \dots, z_M\}$, deren Fernfeld

$$w^\infty(\widehat{x}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=1}^{M} a_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z_m} = \frac{1}{4\pi} H^* a = 0,$$

verschwindet. Aus Rellichs Lemma und der Analytizität von w in $\mathbb{R}^3 \setminus \{z_1, \dots, z_M\}$ folgt, dass $w = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{z_1, \dots, z_M\}$, also

$$\lim_{x \to z_m} w(x) = 0, \qquad \text{für } m = 1, \dots, M.$$

Daraus folgt, dass $a_m = 0$, $m = 1, \dots, M$, wegen der Unbeschränktheit von $\Phi(\cdot - z_m)$ um z_m. □

Lemma 11.2. *H ist surjektiv.*

Beweis. Das folgt aus Lemma 11.1, da $\operatorname{Ran}(H) = \overline{\operatorname{Ran}(H)} = \operatorname{Ker}(H^*)^\perp = \{0\}^\perp = \mathbb{C}^M$. $\operatorname{Ran}(H) = \overline{\operatorname{Ran}(H)}$ gilt, weil H endlichdimensionales Bild hat. □

Nun wollen wir $\operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b)$ genauer untersuchen. Aus (11.6) und (11.7) folgt, dass

$$\operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b) \subset \operatorname{Ran}(H^*) = \operatorname{span}\big\{\widehat{x} \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z_m} \mid m = 1, \dots, M\big\} \subset L^2(\mathcal{S}^2).$$

Satz 11.3. *Das Bild von $\widetilde{F}_b$ hat Dimension M und ist gegeben durch*

$$\operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b) = \operatorname{span}\left\{\widehat{x} \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z_m} \mid m = 1, \dots, M\right\}.$$

Beweis. Die Surjektivität von H und T ergibt

$$\operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b) = \operatorname{Ran}(H^*TH) = \operatorname{Ran}(H^*).$$

Damit folgt die Behauptung aus (11.6). □

Nun zeigen wir, wie die unbekannten Positionen $z_1, \dots, z_M$ mit dem aus den gegebenen Daten $u^\infty(\widehat{x}; d)$ für alle $\widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2$ (ungefähr) bekannten $\operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b)$ zusammenhängen.

Satz 11.4. *Sei $z \in \mathbb{R}^3$ und $\phi_z(\widehat{x}) \coloneqq \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z}$, $\widehat{x} \in \mathcal{S}^2$. Dann ist*

$$\phi_z \in \operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b) \iff z \in \{z_1, z_2, \dots, z_M\}.$$

Beweis.

„$\Rightarrow$" Sei $\phi_z \in \operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b)$. Wegen Satz 11.3 kann man ϕ_z darstellen als

$$\phi_z(\widehat{x}) = \sum_{m=1}^{M} a_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z_m}, \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2,$$

für gewisse $a_1, \dots, a_M \in \mathbb{C}$. Damit sind nun aber

$$\begin{aligned} v(x) &\coloneqq \Phi(x - z), && x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z\}, \\ w(x) &\coloneqq \sum_{m=1}^{M} a_m \Phi(x - z_m), && x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z_1, \dots, z_M\}, \end{aligned}$$

ausstrahlende Lösungen der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{z, z_1, \dots, z_M\}$, deren Fernfelder $\phi_z = v^\infty = w^\infty$ übereinstimmen. Mit Rellichs Lemma und der eindeutigen Fortsetzbarkeit analytischer Funktionen folgt, dass $v = w$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{z, z_1, \dots, z_M\}$. Angenommen $z \notin \{z_1, \dots, z_M\}$. Dann ist w in einer Umgebung $B_\varepsilon(z)$, $\varepsilon > 0$ klein genug, beschränkt, während v in $B_\varepsilon(z)$ unbeschränkt ist. Widerspruch! Also ist $z \in \{z_1, \dots, z_M\}$.

„$\Leftarrow$" Folgt aus Satz 11.3.

□

Aus Satz 11.4 kann man unmittelbar einen Rekonstruktionsalgorithmus ableiten:

- Wähle ein Gitter Z von Punkten $z \in Z$ im Suchgebiet $B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$.
- Für alle $z \in Z$, berechne die Orthogonal-Projektion $P\phi_z$ von ϕ_z auf $\operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b)^\perp$ (das geht, da $\operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b)$ endlichdimensional und damit abgeschlossen ist). Berechne Projektion $\widetilde{P}$ auf endl. dim. $\operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b)$ und benutze dann Projektion $P = I - \widetilde{P}$ auf $\operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b)^\perp$.
- $\{z_1, \dots, z_M\} = \{z \in Z \mid P\phi_z = 0\}$. (Unter der Annahme, dass $\{z_1, \dots, z_M\} \subset Z$)

Um den Algorithmus mit den gegebenen Daten $u^\infty(\widehat{x}; d)$, für alle $\widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2$, d.h. mit $F \approx \delta^3 \widetilde{F}_b$ zu implementieren, betrachtet man die Singulärwertzerlegung von F:

$$Fg = \sum_{\ell=1}^{\infty} \sigma_\ell \langle g, v_\ell \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} u_\ell.$$

Auch der Operator $\widetilde{F}_b$ hat eine Singulärwertzerlegung:

$$\widetilde{F}_b g = \sum_{\ell=1}^{M} \widetilde{\sigma}_\ell \langle g, \widetilde{v}_\ell \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} \widetilde{u}_\ell.$$

($\widetilde{F}_b$ hat M-dimensionales Bild!) Damit können Orthogonalprojektionen

$$Q_N \colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(\mathcal{S}^2), \qquad Q_N g \coloneqq \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \langle g, v_\ell \rangle u_\ell, \qquad \text{auf } \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_N\}^\perp,$$

$$P_N \colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(\mathcal{S}^2), \qquad P_N g \coloneqq \sum_{\ell=N+1}^{\infty} \langle g, \widetilde{v}_\ell \rangle \widetilde{u}_\ell, \qquad \text{auf } \operatorname{span}\{\widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_N\}^\perp,$$

(ergänze die $(\widetilde{v}_\ell)_\ell, (\widetilde{u}_\ell)_\ell$ zu ONB von $L^2(\mathcal{S}^2)$) definiert werden. Resultate aus der Approximationstheorie für lineare Operatoren zeigen, dass $Q_N \approx P_N$, falls $F \approx \delta^3 \widetilde{F}_b$. Außerdem ist $\sigma_\ell \approx \delta^3 \widetilde{\sigma}_\ell$ für alle ℓ, d.h. anhand der Singulärwerte kann die Anzahl der Punktstreukörper geschätzt werden:

Nur $M = \dim \operatorname{Ran}(\widetilde{F}_b)$ Singulärwerte σ_ℓ von F sind signifikant größer als 0 (bis auf den Approximationsfehler $|\sigma_\ell - \widetilde{\sigma}_\ell|$). Kennt man M, so kann man $P_M \phi_z$ für alle $z \in Z \subset B_R(0)$ durch $Q_M \phi_z$ appoximieren und erwartet sehr kleine Werte (≈ 0) für z nahe bei $z_1, \dots, z_M$ und signifikant große Werte weg davon. Plottet man also $\|P_M \phi_z\|_{L^2(\mathcal{S}^2)}^{-1}$ bzw. $\|Q_M \phi_z\|_{L^2(\mathcal{S}^2)}^{-1}$ für alle $z \in Z$, so erhält man scharfe Peaks um die Positionen der Streukörper.

12 Faktorisierungsmethode

Wir besprechen nun ein Verfahren, um $\operatorname{supp}(1-n^2)$ anhand von $u^\infty(\widehat{x};d)$, gegeben für alle $\widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2$, d.h. anhand des Fernfeldoperators F zu bestimmen.

Annahmen: Es existieren endlich viele Gebiete $D_1, \dots, D_M$, sodass $\overline{D}_\ell \cap \overline{D}_m = \emptyset$ für $\ell \neq m$ und $\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D_1 \cup \ldots \cup D_M})$ zusammenhängend ist. Außerdem sei $n^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ reell-wertig, sodass $n^2 = 1$ in $\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D_1 \cup \ldots \cup D_M})$ und $n^2 - 1 \geq c_0 > 0$ in $D \coloneqq \bigcup_{m=1}^M D_m$.

Zuerst leiten wir wie in Kapitel 11 eine Faktorisierung des Fernfeldoperators her. Dazu schreiben wir $q \coloneqq n^2 - 1$ und wir wiederholen die Helmholtzgleichung (8.1) für das gestreute Feld

$$\Delta u^s + k^2 n^2 u^s = k^2(1-n^2)u^i = -k^2 q u^i, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3, \qquad \text{und die SAB.} \tag{12.1}$$

Das ist ein Spezialfall der Gleichung

$$\Delta v + k^2 n^2 v = -qf, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \quad \text{und SAB,} \tag{12.2}$$

für $f \in L^2(D)$. Diese Gleichung hat nach Korollar 6.4 eine eindeutig bestimmte schwache Lösung $v \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ (vgl. (3.4)). Das zugehörige Fernfeld $v^\infty \in L^2(\mathcal{S}^2)$ hängt stetig von $qf \in L^2(D)$ ab. Damit definieren wir einen stetigen linearen Operator

$$G\colon L^2(D) \to L^2(\mathcal{S}^2), \qquad Gf = v^\infty. \tag{12.3}$$

Außerdem sei S^* der adjungierte Operator zu

$$S\colon L^2(D) \to L^2(D), \qquad \big(S\psi\big)(x) \coloneqq \frac{1}{q(x)}\psi(x) - k^2 \int_D \psi(y)\Phi(x-y)\mathrm{d}y. \tag{12.4}$$

Die Funktion

$$w(x) \coloneqq \int_D \psi(y)\Phi(x-y)\mathrm{d}y, \qquad x \in D,$$

ist ein Volumenpotential, also ist $w \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ und erfüllt (für $\psi \in L^2(D)$) nach Satz 4.5

$$\Delta w + k^2 w = -\psi, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \text{ (schwach) und SAB.} \tag{12.5}$$

Satz 12.1. *Seien G und S wie in* (12.3) *und* (12.4). *Dann ist*

$$F = 4\pi k^2 G S^* G^*. \tag{12.6}$$

Beweis. Aus (12.1) und (12.3) folgt, dass

$$u^\infty(\,\cdot\,;d) = k^2 G u^i(\,\cdot\,;d).$$

Definieren wir $\mathscr{H}\colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(D)$,

$$\big(\mathscr{H}g\big)(x) \coloneqq \int_{\mathcal{S}^2} g(d)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}\mathrm{d}s(d) = \int_{\mathcal{S}^2} g(d)u^i(x;d)\mathrm{d}s(d), \qquad x \in D, \tag{12.7}$$

so folgt (durch Superposition), dass

$$\big(Fg\big)(\widehat{x}) = \int_{\mathcal{S}^2} g(d)u^\infty(\widehat{x};d)\mathrm{d}s(d), \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2,$$

das Fernfeld der Lösung von (12.1) mit Primärfeld $\mathscr{H}g$ ist. Damit gilt $Fg = k^2 G\mathscr{H}g$.

Nun betrachte die Adjungierte $\mathscr{H}^*\colon L^2(D) \to L^2(\mathcal{S}^2)$ von $\mathscr{H}$,

$$\big(\mathscr{H}^*\psi\big)(\widehat{x}) = \int_D \psi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}\mathrm{d}y, \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2.$$

Aus dem asymptotischen Verhalten der Fundamentallösung (2.7) folgt, dass $\mathscr{H}^*\psi = 4\pi w^\infty$, wobei w^∞ das Fernfeld von

$$w(x) = \int_D \psi(y)\Phi(x-y)\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

ist. Da $w \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ die Gleichung (12.5) löst, folgt

$$\Delta w + k^2 n^2 w = -\psi + k^2(n^2-1)w = -q\Big(\frac{1}{q}\psi - k^2 w\Big).$$

Also gilt

$$\mathscr{H}^*\psi = 4\pi w^\infty = 4\pi G\Big(\frac{1}{q}\psi - k^2 w\Big) = 4\pi G S\psi, \qquad \text{für alle } \psi \in L^2(D),$$

und damit

$$\mathscr{H}^* = 4\pi G S, \qquad \text{bzw.} \qquad \mathscr{H} = 4\pi S^* G^*.$$

Wir schließen

$$F = k^2 G \mathscr{H} = 4\pi k^2 G S^* G^*.$$

□

Satz 12.2. *Für $z \in \mathbb{R}^3$ sei $\phi_z \in L^2(\mathcal{S}^2)$ definiert durch*

$$\phi_z(\widehat{x}) := \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z}, \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2.$$

Dann ist

$$\phi_z \in \mathrm{Ran}(G) \Longleftrightarrow z \in D.$$

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Sei $z \in D$. Wähle $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(z) \subset D$ und $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ so, dass $\varphi(x) = 0$ in $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(z)$ und $\varphi(x) = 1$ in $\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(z)$. Dann ist

$$v(x) := 4\pi\varphi(x)\Phi(x-z), \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

eine $\mathcal{C}^\infty$-Funktion, die außerhalb von $B_\varepsilon(z)$ mit $4\pi\Phi(\cdot - z)$ übereinstimmt. Nach (2.8) stimmt das Fernfeld von v mit ϕ_z überein, d.h. $\phi_z = v^\infty = Gf \in \mathrm{Ran}(G)$ mit

$$f = -\frac{1}{q}(\Delta v + k^2 n^2 v), \qquad \text{in } D.$$

„$\Leftarrow$“ Nun sei $z \notin \overline{D}$. Angenommen $\phi_z \in \mathrm{Ran}(G)$, d.h. $\phi_z = Gf$ für ein $f \in L^2(D)$. Sei $v \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ die zugehörige Lösung von (12.2). Da ϕ_z (das Fernfeld von $4\pi\Phi(\cdot - z)$) und Gf übereinstimmen, folgt mit Rellichs Lemma und analytischer Fortsetzung, dass $4\pi\Phi(\cdot - z) = v$ in $\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D} \cup \{z\})$. Falls $z \notin \overline{D}$, dann ist v glatt in z, während $4\pi\Phi(\cdot - z)$ dort eine Singularität hat. Widerspruch!

Falls $z \in \partial D$, wähle einen Kegel

$$K(z) := \{z + re \mid e\cdot\theta > \delta, 0 < r < R\},$$

mit $K(z) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Sei $v \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ wie in Schritt 2. Dann $v\big|_{K(z)} \in \mathcal{H}^1\big(K(z)\big)$, aber

$$\|4\pi\Phi(\cdot - z)\|_{\mathcal{H}^1(K_\varepsilon(z))} \to \infty, \qquad \text{für } \varepsilon \to 0,$$

wobei $K_\varepsilon(z) := \{z + re \mid e\cdot\theta > \delta, \varepsilon < r < R\}$ (da $\nabla\Phi(\cdot - z)$ eine Singularität von Ordnung 2 in z hat). Wie in Schritt 2 folgt, dass $v = 4\pi\Phi(\cdot - z)$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Widerspruch, da $v\big|_{K(z)} = \Phi(\cdot - z)\big|_{K(z)}$. □

Das Bild $\mathrm{Ran}(G)$ des Operators G beschreibt also D eindeutig. Ziel ist nun, $\mathrm{Ran}(G)$ durch die gegebenen Daten F zu beschreiben.

Satz 12.3. *Sei S wie in* (12.4).

(a) Sei $S_0\colon L^2(D) \to L^2(D)$, $S_0\psi := \frac{1}{q}\psi$. Dann ist S_0 beschränkt, selbstadjungiert und koerzitiv:

$$\langle S_0\psi, \psi\rangle_{L^2(D)} \geq \frac{1}{\|q\|_{L^\infty(D)}}\|\psi\|^2_{L^2(D)}, \qquad \textit{für alle } \psi \in L^2(D).$$

(b) Die Differenz $S - S_0 \colon L^2(D) \to L^2(D)$ ist kompakt.

(c) $S \colon L^2(D) \to L^2(D)$ ist ein Isomorphismus.

(d) Es gilt $\operatorname{Im}\langle S\psi, \psi\rangle_{L^2(D)} \le 0$ für alle $\psi \in L^2(D)$.

(e) Falls k kein (verallgemeinerter) Transmissionseigenwert ist (siehe unten), gilt sogar

$$\operatorname{Im}\langle S\psi, \psi\rangle_{L^2(D)} < 0, \qquad \text{für alle } \psi \in \overline{\operatorname{Ran}(G^*)}^{L^2(D)} \text{ mit } \psi \neq 0.$$

Beweis.

(a) Folgt sofort durch Nachrechnen. Man verwendet, dass $\|q\|_{L^\infty(D)} \ge c_0 > 0$.

(b) Da $S - S_0$ ein Integraloperator mit quadratintegrablem Kern ist, folgt die Behauptung aus Lemma 4.7.

(c) Nach (a) und (b) genügt es, die Injektivität von S zu zeigen. Angenommen $S\psi = 0$ in D, dann löst $\varphi := \frac{1}{q}\psi$

$$\varphi - k^2 \int_D q(y)\varphi(y)\Phi(\cdot - y)\mathrm{d}y = 0, \qquad \text{in } D,$$

d.h. φ löst die homogene Lippmann-Schwinger-Gleichung (4.7). Wegen Satz 4.6 und der Eindeutigkeit von Lösungen zum direkten Streuproblem (Satz 6.3) folgt $\varphi = 0$ und damit $\psi = 0$.

(d) Sei $\psi \in L^2(D)$ und setze $f := \psi - k^2 qw\big|_D$, wobei $w \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$ gegeben ist durch $w := V\psi$ (Volumenpotential). Dann ist $S\psi = \frac{1}{q}f$. Da $\Delta w + k^2 w = -\psi$ in $\mathbb{R}^3$, folgt

$$\Delta w + k^2 n^2 w = -\psi + k^2 qw\big|_D = -f, \qquad \text{in } \mathbb{R}^3,$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} \langle S\psi, \psi\rangle_{L^2(D)} &= \int_D \frac{1}{q} f(\overline{f} + k^2 q\overline{w})\mathrm{d}x \\ &= \int_D \frac{1}{q}|f|^2\mathrm{d}x + k^2 \int_D f\overline{w}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{12.8}$$

Sei nun $\rho > 0$ groß genug, sodass $D \subset B_\rho(0)$. Wähle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^3)$, sodass $\varphi = 1$ für $|x| \le \rho$. Einsetzen von $\varphi\overline{w}$ als Testfunktion in die schwache Formulierung von $\Delta w + k^2 n^2 w = -f$ in $\mathbb{R}^3$ gibt

$$\begin{aligned} \int_D f\overline{w}\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla w \cdot \nabla(\varphi\overline{w}) - k^2 n^2 \varphi |w|^2 \mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|\le\rho} |\nabla w|^2 - k^2 n^2 |w|^2 \mathrm{d}x + \int_{|x|>\rho} \nabla w \cdot \nabla(\varphi\overline{w}) - k^2 \varphi |w|^2 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Einsetzen in (12.8) liefert für den Imaginärteil, dass

$$\operatorname{Im}\langle S\psi, \psi\rangle_{L^2(D)} = k^2 \operatorname{Im} \int_{|x|>\rho} \nabla w \cdot \nabla(\varphi\overline{w}) - k^2\varphi|w|^2\mathrm{d}x.$$

Da w in $\mathbb{R}^3 \setminus B_\rho(0)$ glatt ist und die Helmholtzgleichung $\Delta w + k^2 w = 0$ erfüllt, folgt mit der Greenschen Formel (2.2), dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\langle S\psi, \psi\rangle_{L^2(D)} &= -k^2 \operatorname{Im} \int_{|x|>\rho} \varphi\overline{w}(\Delta w + k^2 w)\mathrm{d}x - k^2 \operatorname{Im} \int_{|x|=\rho} \overline{w}\frac{\partial w}{\partial \nu}\mathrm{d}s \\ &= -k^2 \operatorname{Im} \int_{|x|=\rho} \overline{w}\frac{\partial w}{\partial \nu}\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

(Kein weiteres Randintegral, da φ kompakten Träger hat). Da nach (2.6) und (2.7) $w(x) = \mathcal{O}(|x|^{-1})$ und $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x) = \mathrm{i}kw(x) + \mathcal{O}(|x|^{-2})$ ist, folgt

$$\operatorname{Im}\langle S\psi, \psi\rangle_{L^2(D)} = -k^3 \int_{|x|=\rho} |w|^2 \mathrm{d}s + \mathcal{O}(\rho^{-1}).$$

Für $\rho \to \infty$ folgt mit der Definition des Fernfeldes, dass

$$\operatorname{Im}\langle S\psi, \psi\rangle_{L^2(D)} = -k^3 \int_{\mathcal{S}^2} |w^\infty|^2 \mathrm{d}s \leq 0.$$

(e) Sei nun $\psi \in \overline{\operatorname{Ran}(G^*)}^{L^2(D)}$, sodass $\operatorname{Im}\langle S\psi, \psi\rangle_{L^2(D)} = 0$ und setze wieder $w := V\psi$, also $w^\infty = 0$. Mit Rellichs Lemma und der eindeutigen Fortsetzbarkeit folgt $w = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus D$. Betrachte $\eta \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, sodass

$$\begin{aligned}
\Delta\eta + k^2 n^2 \eta &= 0, && \text{in } \mathbb{R}^3,\\
\eta &= \mathscr{H} g + \eta^s, && \text{in } \mathbb{R}^3,\\
\frac{\partial \eta^s}{\partial \nu} + \mathrm{i}k\eta^s &= \mathcal{O}(r^{-2}), && \text{(anderes Vorzeichen!)}.
\end{aligned}$$

Also gilt $\Delta\eta + k^2\eta = -k^2 q\eta$ und $\Delta\eta^s + k^2\eta^s = -k^2 q\eta$, damit folgt $\eta = \mathscr{H} g + k^2 V^*(q\eta)$ bzw. $\left(\frac{1}{q} I - k^2 V^*\right)(q\eta) = \mathscr{H} g$, d.h.

$$G^* g = \frac{1}{4\pi}(S^*)^{-1}\mathscr{H} g = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{q} I - k^2 V^*\right)^{-1}\mathscr{H} g = \frac{1}{4\pi} q\eta.$$

Nun ist laut Annahme $\psi \in \overline{\operatorname{Ran}(G^*)}^{L^2(D)}$, also existiert eine Folge $(\psi_j)_j \subset \operatorname{Ran}(G^*)$, sodass $\psi_j \to \psi$ in $L^2(D)$. Setze $\eta_j := \frac{1}{q}\psi_j$, (es gilt $\Delta\eta_j + k^2 n^2 \eta_j = 0$ in $\mathbb{R}^3$), $w_j := V\psi_j$ und $\widetilde{w}_j := \frac{1}{k^2}\eta_j - w_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Delta\widetilde{w}_j + k^2\widetilde{w}_j &= -q\eta_j + \psi_j = 0, && \text{in } D,\\
\widetilde{w}_j &\longrightarrow \frac{1}{k^2}\eta - w =: \widetilde{w}, && \text{in } L^2(D),\\
\Delta w + k^2 n^2 w &= -\psi + k^2 q w = -k^2 q\left(\frac{1}{k^2}\eta - w\right) = -k^2 q\widetilde{w}, && \text{in } \mathbb{R}^3,
\end{aligned}$$

außerdem löst $(u_j, \widetilde{w}_j)$ mit $u_j := \widetilde{w}_j - w$ das Problem

$$\begin{aligned}
\Delta\widetilde{w}_j + k^2\widetilde{w}_j &= 0, && \text{in } D, && u_j = \widetilde{w}_j, && \text{auf } \partial D\\
\Delta u_j + k^2 n^2 u_j &= \underbrace{k^2 q(\widetilde{w}_j - \widetilde{w})}_{\to 0 \text{ für } j\to\infty}, && \text{in } D, && \frac{\partial u_j}{\partial \nu} = \frac{\partial \widetilde{w}_j}{\partial \nu}, && \text{auf } \partial D
\end{aligned}$$

Annahme: k^2 ist kein (verallg.) innerer Transmissionseigenwert, d.h. es gibt kein nichttriviales $(w, \widetilde{w}) \in \mathcal{H}^1_0(D) \times L^2(D)$ mit einer Folge $\widetilde{w}_j \to \widetilde{w}$ in $L^2(D)$, sodass $\Delta\widetilde{w}_j + k^2\widetilde{w}_j = 0$ in D und $\Delta w + k^2 n^2 w = -k^2 q\widetilde{w}$ und $\frac{\partial w}{\partial \nu}\big|_{\partial D} = 0$. Also ist $w \equiv 0$ in D und damit auch $\psi = -\Delta w - k^2 w = 0$ in D.

□

Im Folgenden nehmen wir an, dass k^2 *kein* (verallg.) innerer Transmissionseigenwert ist. Dann ist nach Satz 9.13 der Fernfeldoperator F injektiv und nach Satz 9.6 ist F normal. Außerdem ist F kompakt (weil Integraloperator mit L^2-Kern). Der Spektralsatz für kompakte normale Operatoren garantiert die Existenz einer ONB $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathcal{S}^2)$ aus Eigenvektoren von F mit zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Da nach Satz 9.6 der Operator $S = I + \frac{\mathrm{i}k}{2\pi}F$ unitär ist, folgt wegen

$$\langle Sw, Sw\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} = \langle w, S^*Sw\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} = \langle w, w\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}, \qquad \text{für alle } w \in L^2(\mathcal{S}^2),$$

dass die Eigenwerte von S auf dem Einheitskreis liegen (in $\mathbb{C}$) und damit die Eigenwerte von F auf einem Kreis vom Radius $\frac{2\pi}{k}$ um $\frac{2\pi \mathrm{i}}{k}$ liegen. Der Operator F kann also zerlegt werden

$$F\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle \psi, \psi_j \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} \psi_j, \qquad \psi \in L^2(\mathcal{S}^2). \tag{12.9}$$

Daher hat F noch eine weitere Faktorisierung

$$F = (F^*F)^{\frac{1}{4}} R (F^*F)^{\frac{1}{4}}, \tag{12.10}$$

wobei der selbstadjungierte Operator $(F^*F)^{\frac{1}{4}} \colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(\mathcal{S}^2)$ und der (Signum-)Operator $R\colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(\mathcal{S}^2)$ (von F) definiert sind durch

$$(F^*F)^{\frac{1}{4}} \psi := \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|\lambda_j|} \langle \psi, \psi_j \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} \psi_j, \qquad \psi \in L^2(\mathcal{S}^2), \tag{12.11}$$

$$R\psi := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|} \langle \psi, \psi_j \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} \psi_j, \qquad \psi \in L^2(\mathcal{S}^2). \tag{12.12}$$

Es folgt also, dass

$$F = 4\pi k^2 G S^* G^* = (F^*F)^{\frac{1}{4}} R (F^*F)^{\frac{1}{4}}. \tag{12.13}$$

Wir zeigen nun, dass aus (12.13) folgt, dass $\operatorname{Ran}(G) = \operatorname{Ran}\left((F^*F)^{\frac{1}{4}}\right)$ ist.

Lemma 12.4. *Seien X, Y Hilberträume und $F\colon X \to X$, $G\colon Y \to X$ beschränkte lineare Operatoren, sodass $F = GRG^*$ für einen beschränkten linearen Operator $R\colon Y \to Y$, der eine Koerzivitätsbedingung der Form*

$$\exists c > 0\colon\ |\langle Ry, y \rangle_Y| \geq c \|y\|_Y^2, \qquad \text{für alle } y \in \operatorname{Ran}(G^*) \subset Y, \tag{12.14}$$

erfüllt. Dann ist für alle $\phi \in X$, $\phi \neq 0$

$$\phi \in \operatorname{Ran}(G) \iff \inf\left\{ |\langle Fx, x \rangle_X| \colon x \in X, \langle x, \phi \rangle_X = 1 \right\} > 0. \tag{12.15}$$

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Sei $\phi = Gy \in \operatorname{Ran}(G)$ für ein $y \in Y$ und $\phi \neq 0$. Dann ist $y \neq 0$ und für alle $x \in X$ mit $\langle x, \phi \rangle_X = 1$ folgt, dass

$$\begin{aligned}
|\langle Fx, x \rangle_X| &= |\langle GRG^*x, x \rangle_X| = |\langle RG^*x, G^*x \rangle_Y| \geq c \|G^*x\|_Y^2 \\
&= \frac{c}{\|y\|_Y^2} \|G^*x\|_Y^2 \|y\|_Y^2 \geq \frac{c}{\|y\|_Y^2} |\langle G^*x, y \rangle_Y|^2 = \frac{c}{\|y\|_Y^2} |\langle x, Gy \rangle_X|^2 \\
&= \frac{c}{\|y\|_Y^2} |\langle x, \phi \rangle_X|^2 = \frac{c}{\|y\|_Y^2} > 0.
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine positive untere Schranke für das Infimum gefunden.

„$\Leftarrow$“ Sei umgekehrt $\phi \notin \operatorname{Ran}(G)$. Wir definieren

$$V := \{ x \in X \mid \langle \phi, x \rangle_X = 0 \} = \operatorname{span}\{\phi\}^{\perp}.$$

Wir zeigen, dass das Bild $G^*(V)$ dicht in $\overline{\operatorname{Ran}(G^*)}^Y$ ist. Angenommen das gilt nicht, d.h. $\overline{G^*(V)} \subsetneq \overline{\operatorname{Ran}(G^*)}$, also ex. ein $y \in \overline{\operatorname{Ran}(G^*)}$ so, dass $y \perp G^*x$ für alle $x \in V$. D.h.

$$0 = \langle G^*x, y \rangle_Y = \langle x, Gy \rangle_X, \qquad \text{für alle } x \in V,$$

also ist $Gy \in V^{\perp} = \operatorname{span}\{\phi\}$. Da $\phi \notin \operatorname{Ran}(G)$, folgt $Gy = 0$ und damit $y \in \overline{\operatorname{Ran}(G^*)} \cap \operatorname{Ker}(G)$, also $y = 0$. Daher ist $G^*(V) \subset \overline{\operatorname{Ran}(G^*)}^Y$ dicht.

Da $-\frac{G^*\phi}{\|\phi\|_X^2} \in \operatorname{Ran}(G^*)$, gibt es $(\widetilde{x}_n)_n \subset V$, sodass

$$G^*\widetilde{x}_n \longrightarrow -\frac{G^*\phi}{\|\phi\|_X^2}, \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Wir definieren $x_n := \widetilde{x}_n + \frac{\phi}{\|\phi\|_X^2}$, dann gilt $\langle x_n, \phi\rangle_X = 1$ und $G^* x_n \to 0$ für $n \to \infty$. Es folgt

$$|\langle Fx_n, x_n\rangle_X| = |\langle RG^* x_n, G^* x_n\rangle_Y| \leq \|R\|_{Y\leftarrow Y}\|G^* x_n\|_Y^2 \longrightarrow 0, \qquad \text{für } n \to \infty.$$

D.h. $\inf\left\{\langle Fx, x\rangle_X \mid x \in X, \langle x, \phi\rangle_X = 1\right\} = 0$.

□

Die inf-Bedingung auf der rechten Seite von (12.15) hängt nur von F ab, aber nicht von der betrachteten Faktorisierung.

Korollar 12.5. *Seien X, Y_1 und Y_2 Hilberträume und $F\colon X \to X$ habe zwei Faktorisierungen der Form*

$$F = G_1 R_1 G_1^* = G_2 R_2 G_2^*,$$

mit beschränkten linearen Operatoren $G_j\colon Y_j \to X$ und $R_j\colon Y_j \to Y_j$, $j = 1, 2$, die beide eine Koerzivitätsbedingung wie in (12.14) *erfüllen. Dann gilt* $\operatorname{Ran}(G_1) = \operatorname{Ran}(G_2)$.

Um Korollar 12.5 anzuwenden zu können, müssen wir also noch zeigen, dass die Operatoren S und R die Koerzivitätsbedingung (12.14) erfüllen.

Lemma 12.6. *Es gibt $c_1 > 0$, sodass*

$$|\langle S\psi, \psi\rangle_{L^2(D)}| \geq c_1\|\psi\|_{L^2(D)}^2, \qquad \textit{für alle } \psi \in \operatorname{Ran}(G^*) \subset L^2(D), \tag{12.16}$$

wobei $G^*\colon L^2(\mathcal{S}^2) \to L^2(D)$ die Adjungierte des Operators G aus (12.3) *bezeichnet.*

Beweis. Angenommen so ein c_1 existiert nicht. Dann gibt es eine Folge $(\psi_j)_j \subset \operatorname{Ran}(G^*)$, $\|\psi_j\|_{L^2(D)} = 1$, sodass $|\langle S\psi_j, \psi_j\rangle_{L^2(D)}| \to 0$. Im Hilbertraum $L^2(D)$ hat die beschränkte Folge $(\psi_j)_j$ eine schwach konvergente Teilfolge, die wir wiederum mit $(\psi_j)_j$ bezeichnen, sodass $\psi_j \rightharpoonup \psi$ für ein $\psi \in \overline{\operatorname{Ran}(G^*)}$. Damit ist

$$\begin{aligned}\underbrace{\langle \psi - \psi_j, S_0(\psi - \psi_j)\rangle_{L^2(D)}}_{\in\mathbb{R}} = \underbrace{\langle \psi, S_0(\psi - \psi_j)\rangle_{L^2(D)}}_{\stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0} &- \langle \psi_j, (S_0 - S)(\psi - \psi_j)\rangle_{L^2(D)} \\ &+ \underbrace{\langle \psi_j, S\psi_j\rangle_{L^2(D)}}_{\stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0} - \underbrace{\langle \psi_j, S\psi\rangle_{L^2(D)}}_{\stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \langle \psi, S\psi\rangle_{L^2(D)}}.\end{aligned} \tag{12.17}$$

Aus der Kompaktheit von $S - S_0$ folgt, dass $\|(S - S_0)(\psi - \psi_j)\|_{L^2(D)} \to 0$ und daher

$$\langle \psi_j, (S_0 - S)(\psi - \psi_j)\rangle_{L^2(D)} \to 0.$$

Also konvergieren die ersten drei Terme auf der rechten Seite von (12.17) gegen Null und der letzte gegen $\langle \psi, S\psi\rangle_{L^2(D)}$. Betrachtet man nun den Imaginärteil von (12.17), so folgt

$$\operatorname{Im}\langle \psi, S\psi\rangle_{L^2(D)} = 0,$$

und mit Satz 12.3.(e), dass $\psi = 0$. Damit folgt mit Satz 12.3.(a), dass

$$0 < \frac{1}{\|q\|_{L^\infty(D)}} \leq |\langle \psi_j, S_0\psi_j\rangle_{L^2(D)}| \leq |\langle \psi_j, (S_0 - S)\psi_j\rangle_{L^2(D)}| + |\langle \psi_j, S\psi_j\rangle_{L^2(D)}| \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \text{Widerspruch!}$$

□

Als nächstes diskutieren wir die Koerzivität von R aus (12.12). Dazu zeigen wir folgendes Hilfsresultat

Lemma 12.7. *Seien $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ die Eigenwerte des Fernfeldoperators F. Die λ_j liegen auf dem Kreis*

$$\left|\frac{2\pi}{k}\mathrm{i} - z\right| = \frac{2\pi}{k},$$

vom Radius $\frac{2\pi}{k}$ um $\frac{2\pi}{k}\mathrm{i}$ und konvergieren von rechts gegen Null, d.h. $\lambda_j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und

$$\exists j_0 > 0\, \forall j \geq j_0\colon \qquad \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0.$$

Beweis. Wir haben schon im Anschluss an den Beweis von Satz 12.3 gesehen, dass λ_j auf dem Kreis um $\frac{2\pi}{k}\mathrm{i}$ mit Radius $\frac{2\pi}{k}$ liegen. Weil F kompakt, konvergiert $\lambda_j \to 0$ für $j \to \infty$.

Um zu zeigen, dass die Eigenwerte von rechts gegen Null gehen, seien ψ_j die normierten Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $\lambda_j \neq 0$. Aus der Faktorisierung (12.6) folgt

$$4\pi k^2 \langle S^* G^* \psi_j, G^* \psi_\ell \rangle_{L^2(D)} = \langle F\psi_j, \psi_\ell \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} = \langle \lambda \psi_j, \psi_\ell \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} = \lambda_j \delta_{j,\ell}.$$

Setzen wir

$$\varphi_j := \frac{2k\sqrt{\pi}}{\sqrt{|\lambda_j|}} G^* \psi_j, \qquad \text{und} \qquad s_j := \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|},$$

so folgt $\langle \varphi_j, S\varphi_\ell \rangle_{L^2(D)} = s_j \delta_{j,\ell}$. Da $(\lambda_j)_j$ auf dem Kreis um $\frac{2\pi}{k}\mathrm{i}$ mit Radius $\frac{2\pi}{k}$ liegen, und $\lambda_j \to 0$ für $j \to \infty$ gilt, folgt, dass ± 1 die einzigen Häufungspunkte von $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sein können. Wir müssen zeigen, dass $+1$ der einzige Häufungspunkt ist:

Angenommen $s_j \to -1$ für eine Teilfolge $(s_j)_j$. Aus Lemma 12.6 folgt, dass

$$1 = |s_j| = |\langle \varphi_j, S\varphi_j \rangle_{L^2(D)}| \geq c_1 \|\varphi_j\|_{L^2(D)},$$

d.h. $(\varphi_j)_j \subset L^2(D)$ ist beschränkt. Daher hat es eine schwach konvergente Teilfolge $(\varphi_j)_j$ mit $\varphi_j \rightharpoonup \varphi \in L^2(D)$ und

$$\begin{aligned}\langle \varphi - \varphi_j, S_0(\varphi - \varphi_j) \rangle_{L^2(D)} &= \underbrace{\langle \varphi, S_0(\varphi - \varphi_j) \rangle_{L^2(D)}}_{\xrightarrow{j\to\infty} 0} - \underbrace{\langle \varphi_j, (S_0 - S)(\varphi - \varphi_j) \rangle_{L^2(D)}}_{\xrightarrow{j\to\infty} 0} \\ &\quad + \underbrace{\langle \varphi_j, S\varphi_j \rangle_{L^2(D)}}_{= s_j \to -1} - \underbrace{\langle \varphi_j, S\varphi \rangle_{L^2(D)}}_{\to \langle \varphi, S\varphi \rangle_{L^2(D)}}.\end{aligned}$$

Die linke Seite ist reellwertig, während die rechte Seite gegen $-1 - \langle \varphi, S\varphi \rangle_{L^2(D)}$ konvergiert. Anwenden des Imaginärteils liefert $0 = -\operatorname{Im}\langle \varphi, S\varphi \rangle_{L^2(D)}$, mit Satz 12.3.(e) folgt $\varphi = 0$. Damit folgt aus Satz 12.3.(a), dass

$$0 \leq \frac{\|\varphi_j\|^2_{L^2(D)}}{\|q\|_{L^\infty(D)}} \leq \langle \varphi_j, S_0\varphi_j \rangle_{L^2(D)} = \underbrace{\langle \varphi_j, (S_0 - S)\varphi_j \rangle_{L^2(D)}}_{\xrightarrow{j\to\infty} 0} + \underbrace{\langle \varphi_j, S\varphi_j \rangle_{L^2(D)}}_{\xrightarrow{j\to\infty} -1}, \qquad \text{Widerspruch!}$$

□

Lemma 12.8. *Es gibt $c_2 > 0$, sodass*

$$|\langle R\psi, \psi \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}| \geq c_2 \|\psi\|^2_{L^2(\mathcal{S}^2)}, \qquad \textit{für alle } \psi \in L^2(\mathcal{S}^2). \tag{12.18}$$

Beweis. Es reicht aus, (12.18) für $\psi \in L^2(\mathcal{S}^2)$ mit $\|\psi\|_{L^2(\mathcal{S}^2)} = 1$ von der Form

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \psi_j, \qquad \text{mit} \qquad \|\psi\|^2_{L^2(\mathcal{S}^2)} = \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 = 1,$$

zu zeigen, wobei $(\psi_j)_j$ wieder die normalisierten Eigenfunktionen zu $\lambda_j \neq 0$ von F bezeichnen. Setze $s_j = \frac{\lambda_j}{|\lambda_j|}$, dann ist

$$|\langle R\psi, \psi \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}| = \Big| \Big\langle \sum_{j=1}^{\infty} s_j c_j \psi_j, \sum_{\ell=1}^{\infty} c_l \psi_\ell \Big\rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)} \Big| = \Big| \sum_{j=1}^{\infty} s_j |c_j|^2 \Big|.$$

Die komplexe Zahl $\sum_{j=1}^{\infty} s_j |c_j|^2$ gehört zum Abschluss der konvexen Hülle

$$\mathscr{C} := \operatorname{conv}\{s_j \mid j \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C},$$

damit gilt

$$|\langle R\psi, \psi \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}| \geq \inf\{|z| \colon z \in \mathscr{C}\}, \qquad \text{für alle } \psi \in L^2(\mathcal{S}^2),\ \|\psi\|_{L^2(\mathcal{S}^2)} = 1.$$

Aus Lemma 12.7 folgt, dass $s_j \to 1$ und

$$\mathrm{Im}(s_j) = \mathrm{Im}\langle \varphi_j, S\varphi_j \rangle_{L^2(D)} = -\,\mathrm{Im}\langle S\varphi_j, \varphi_j \rangle_{L^2(D)} > 0,$$

(wegen Satz 12.3.(d)). Sei $\widehat{s}$ der Punkt in $\{s_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ mit dem kleinsten Realteil (evtl. negativ), dann gilt:

$\mathscr{C}$ ist in der Menge zwischen oberem Halbkreis und der Geraden

$$l = \{t\widehat{s} + (1-t)1 \mid t \in \mathbb{R}\},$$

(durch $\widehat{s}$ und 1) enthalten. Es gilt demnach $\mathrm{dist}(\mathscr{C}, 0) > 0$ und es existiert eine Konstante $c_2 > 0$, sodass (12.18) erfüllt ist. □

Damit folgt aus Korollar 12.5, dass $\mathrm{Ran}(G) = \mathrm{Ran}\big((F^*F)^{\frac{1}{4}}\big)$. Zusammen mit Satz 12.2 ergibt das das Hauptresultat dieses Abschnitts — die Charakterisierung des Trägers der Streukörper anhand der gegebenen Daten.

Satz 12.9. *Sei k^2 kein verallgemeinerter Transmissionseigenwert. Für alle $z \in \mathbb{R}^3$ definiere $\phi_z \in L^2(\mathcal{S}^2)$ durch*

$$\phi_z(\widehat{x}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot z}, \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2.$$

Dann ist

$$z \in D \iff \phi_z \in \mathrm{Ran}\big((F^*F)^{\frac{1}{4}}\big). \tag{12.19}$$

Mit Hilfe des Picard-Kriteriums kann (12.19) wie folgt umgeschrieben werden: Seien $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ die Eigenwerte des Fernfeldoperators F und $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die zugehörigen normalisierten Eigenvektoren. Dann ist $\big(\sqrt{|\lambda_j|}, \psi_j, \psi_j\big)_{j\in\mathbb{N}}$ ein singuläres System für $(F^*F)^{\frac{1}{4}}$.

Satz 12.10. *Sei k^2 kein verallgemeinerter innerer Transmissionseigenwert und ϕ_z, $z \in \mathbb{R}^3$, wie in Satz 12.9. Dann ist*

$$z \in D \iff \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle \phi_z, \psi_j \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}|^2}{|\lambda_j|} < \infty. \tag{12.20}$$

Setzen wir also $\frac{1}{\infty} =: 0$ und

$$\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

dann ist

$$\chi(z) = \mathrm{sign}\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle \phi_z, \psi_j \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}|^2}{|\lambda_j|}\Big)^{-1}, \qquad z \in \mathbb{R}^3, \tag{12.21}$$

also die charakteristische Funktion auf D. Um (12.21) numerisch zu implementieren, plottet man

$$J(z) := \Big(\sum_{j=1}^{N} \frac{|\langle \phi_z, \psi_j \rangle_{L^2(\mathcal{S}^2)}|^2}{|\lambda_j|}\Big)^{-1}, \qquad z \in B_R(0).$$

Die Funktion J hat typischerweise viel größere Werte für $z \in D$ als für $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Ein wesentlicher Vorteil dieser Methode besteht darin, dass keinerlei Annahmen an die Art und Anzahl der Streukörper getroffen wurden.

13 Ein iteratives Verfahren zur Lösung des inversen Streuproblems

Wir beschreiben noch ein Verfahren zur Rekonstruktion von n^2 (nicht nur $\operatorname{supp}(n^2-1)$, wie in Kapitel 12) aus $u^\infty(\widehat{x};d)$ für einige $\widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2$. Dazu nehmen wir an, dass $n^2 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $n^2(x) = 1$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_R(0)}$ für ein $R > 0$. Mit Hilfe der Lippmann-Schwinger-Gleichung (4.7)

$$u(\,\cdot\,;d) - k^2 V\big(qu(\,\cdot\,;d)\big) = u^i(\,\cdot\,;d), \qquad \text{in } B_R(0),$$

wobei $q = n^2 - 1$, $u^i(x;d) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx\cdot d}$ und V das Volumenpotential aus (4.1) bezeichnet, folgt

$$\begin{aligned} u^s(\,\cdot\,;d) &= k^2 V\big(qu(\,\cdot\,;d)\big), && \text{in } \mathbb{R}^3,\\ u^\infty(\widehat{x};d) &= \frac{k^2}{4\pi}\int_{B_R(0)} q(y)u(y;d)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}\mathrm{d}y, && \widehat{x} \in \mathcal{S}^2. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Definiert man den Integraloperator $W\colon L^\infty\big(B_R(0)\big) \to L^\infty(\mathcal{S}^2)$ durch

$$\big(W\psi\big)(\widehat{x}) := \frac{k^2}{4\pi}\int_{B_R(0)} \psi(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\widehat{x}\cdot y}\mathrm{d}y, \qquad \widehat{x} \in \mathcal{S}^2, \tag{13.2}$$

so kann man das inverse Streuproblem als System von Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} u(\,\cdot\,;d) - k^2 V\big(qu(\,\cdot\,;d)\big) &= u^i(\,\cdot\,;d), && \text{in } B_R(0),\\ W\big(qu(\,\cdot\,;d)\big) &= f, && \text{auf } \mathcal{S}^2. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Hierbei ist f das „gemessene“ Fernfeld. Da ein Fernfeld in der Regel nicht ausreicht, um n^2 zu rekonstruieren, betrachten wir $u^i = u^i(\,\cdot\,;d)$, $u = u(\,\cdot\,;d)$ und $f = f(\,\cdot\,;d)$ als Funktion von zwei Variablen (Beobachtungsrichtung und Ausbreitungsrichtung des Primärfelds). Dementsprechend betrachten wir V und W als beschränkte lineare Operatoren

$$V\colon L^\infty\big(B_R(0)\times\mathcal{S}^2\big) \to L^\infty\big(B_R(0)\times\mathcal{S}^2\big), \tag{13.4}$$

$$W\colon L^\infty\big(B_R(0)\times\mathcal{S}^2\big) \to L^\infty\big(\mathcal{S}^2\times\mathcal{S}^2\big). \tag{13.5}$$

Damit kann man nun ein Regularisierungsverfahren (zB. ein regularisiertes Newton-Verfahren) anwenden, um das nichtlineare Gleichungssystem (13.3) zu lösen.

Ein vereinfachtes Newton-Verfahren:
Im Folgenden nehmen wir an, dass $n^2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ und, dass $n^2 = 1$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ für Gebiet $D \subset B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$. O.B.d.A. können wir (durch Umskalieren) annehmen, dass $D \subset Q = [-\pi,\pi]^3 \subset \mathbb{R}^3$ ist. Wir definieren den nichtlinearen Operator

$$\begin{aligned} T\colon \mathcal{C}(Q)\times\mathcal{C}(Q\times\mathcal{S}^2) &\to \mathcal{C}(Q\times\mathcal{S}^2)\times\mathcal{C}(\mathcal{S}^2\times\mathcal{S}^2),\\ (q,u) &\mapsto \big(u - k^2V(qu), W(qu)\big). \end{aligned} \tag{13.6}$$

Dann kann das inverse Streuproblem geschrieben werden als

$$T(q,u) = (u^i, f).$$

Das Newton-Verfahren berechnet Approximationen (q_ℓ, u_ℓ), $\ell = 1,2,\ldots$, vermöge

$$(q_{\ell+1}, u_{\ell+1}) = (q_\ell, u_\ell) - \big(T'(q_\ell,u_\ell)\big)^{-1}\big(T(q_\ell,u_\ell) - (u^i,f)\big). \tag{13.7}$$

Hier bezeichnet $T'(q,u)$ die Fréchet-Ableitung von T in (q,u). Aus (13.6) folgt, dass

$$\big(T'(q,u)\big)(\mu,\nu) = \big(-k^2V(\mu u) + \nu - k^2V(q\nu), W(\mu u) + W(q\nu)\big), \tag{13.8}$$

für $\mu \in \mathcal{C}(Q)$ und $\nu \in \mathcal{C}(Q\times\mathcal{S}^2)$.

Im vereinfachten Newtonverfahren ersetzt man $T'(q_\ell,u_\ell)$ durch ein festes $T'(\widehat{q},\widehat{u})$. Damit kann man unter gewissen Voraussetzungen lineare Konvergenz erwarten. Wir wählen $\widehat{q} = 0$ und $\widehat{u} = u^i$. Dann berechnet das vereinfachte Newtonverfahren $q_{\ell+1} = q_\ell + \mu$ und $u_{\ell+1} = u_\ell + \nu$, wobei (μ,ν) die Gleichung

$$\big(T'(0,u^i)\big)(\mu,\nu) = (u^i,f) - T(q_\ell,u_\ell),$$

löst. Damit erhält man den folgenden Algorithmus

(a) Setze $q_0 = 0$, $u_0 = u^i$ und $\ell = 0$.

(b) Bestimme $(\mu, \nu) \in \mathcal{C}(Q) \times \mathcal{C}(Q \times \mathcal{S}^2)$, sodass

$$\begin{aligned} -k^2 V(\mu u^i) + \nu &= u^i - u_\ell + k^2 V(q_\ell u_\ell), \\ W(\mu u^i) &= f - W(q_\ell u_\ell). \end{aligned} \tag{13.9}$$

(c) Setze $q_{\ell+1} = q_\ell + \mu$ und $u_{\ell+1} = u_\ell + \nu$, ersetze $\ell = \ell + 1$ und gehe zu (b).

Wir nehmen an, dass die gegebenen Fernfelder f stetig sind, d.h. $f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2)$. Eine Gleichung der Form $W(\mu u^i) = \rho$ zu lösen, bedeutet die Integralgleichung

$$\int_Q \mu(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky\cdot(d-\widehat{x})} \mathrm{d}y = -\frac{4\pi}{k^2} \rho(\widehat{x}; d), \qquad \widehat{x}, d \in \mathcal{S}^2, \tag{13.10}$$

zu lösen. Diese Gleichung kann (zB.) mit einem Kollokationsverfahren numerisch gelöst werden. Die linke Seite von (13.10) ist die Fouriertransformation von μ ausgewertet in $\xi = k(d - \widehat{x}) \in \mathbb{R}^3$.

Sei $N \in \mathbb{N}$ die größte Zahl, sodass $\sqrt{3}N \leq 2k$,

$$Z_N := \{ j \in \mathbb{Z}^3 \colon |j_s| \leq N, s = 1, 2, 3 \}, \tag{Gitter}$$

und

$$X_N := \Big\{ \sum_{j \in Z_N} a_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\cdot x} \mid a_j \in \mathbb{C} \Big\} \subset \mathcal{C}(Q). \tag{endlich-dim. Unterraum}$$

Dann gibt es für alle $j \in Z_N$ Vektoren $\widehat{x}_j, d_j \in \mathcal{S}^2$, sodass $j = k(\widehat{x}_j - d_j)$ (das gilt genau dann, wenn $\frac{j}{k} + d_j = \widehat{x}_j$; schneide $\mathcal{S}^2$ mit der Sphäre vom Radius 1 um $\frac{j}{k}$). Nun setzen wir x_j, d_j in (13.10) ein

$$\int_Q \mu(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}j\cdot y} \mathrm{d}y = -\frac{4\pi}{k^2} \rho(x_j, d_j), \qquad j \in Z_N. \tag{13.11}$$

Auf der linken Seite stehen die Fourierkoeffizienten von μ, also ist die eindeutige Lösung von (13.11) in X_N gegeben durch $\mu = L_1 \rho$, wobei $L_1 \colon \mathcal{C}(\mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2) \to X_N$ definiert ist durch

$$\big(L_1 \rho\big)(x) := -\frac{1}{2\pi^2 k^2} \sum_{j \in Z_N} \rho(\widehat{x}_j, d_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\cdot x}. \tag{13.12}$$

Der regularisierte Algorithmus ist nun gegeben durch

(a) Setze $q_0 = 0$, $u_0 = u^i$ und $\ell = 0$.

(b) Setze

$$\begin{aligned} \mu &= L_1\big(f - W(q_\ell u_\ell)\big), \\ \nu &= u^i - u_\ell - k^2 V(q_\ell u_\ell) - k^2 V(\mu u^i). \end{aligned}$$

(c) Setze $q_{\ell+1} = q_\ell + \mu$, $u_{\ell+1} = u_\ell + \nu$, ersetze $\ell = \ell + 1$ und gehe zu (b).

Man kann folgenden Satz zeigen:

Satz 13.1. *Es gibt $\varepsilon > 0$, sodass für $q \in \mathcal{C}(Q)$ mit $\|q\|_\infty \leq \varepsilon$ zu zugehörigem Gesamtfeld $u = u(\widehat{x}; d)$ und exakten Fernfelddaten $f(\widehat{x}; d) = u^\infty(\widehat{x}; d)$, die Folge (q_ℓ, u_ℓ), $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, aus dem regularisierten Algorithmus (a)-(c) gegen ein $(\widetilde{q}, \widetilde{u}) \in X_N \times \mathcal{C}(Q \times \mathcal{S}^2)$ konvergiert, das das Streuproblem (mit Brechungsindex $\widetilde{n}^2 = \widetilde{q} + 1$) löst.*

Das zugehörige Fernfeld $\widetilde{u}^\infty$ stimmt in den Punkten $(\widehat{x}_j, \widehat{d}_j) \in \mathcal{S}^2 \times \mathcal{S}^2$, $j \in Z_N$, mit den gegebenen Daten f überein. Falls zusätzlich die exakte Lösung q in X_N liegt, konvergiert die Folge (q_ℓ, u_ℓ) gegen (q, u).

Beweis. Vgl. Gutmann & Klibanov, Inverse Problems, 1994 □