Parcial #1

1. La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt.$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$$x_1(t) = Ae^{-jnw_0 t}$$

$$x_2(t) = Be^{jmw_0 t}$$

con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Determine la distancia entre las dos señales. Compruebe sus resultados con Python.

$$x_1(t) = A e^{-jnwot} \qquad x_2(t) = B e^{imwot}$$

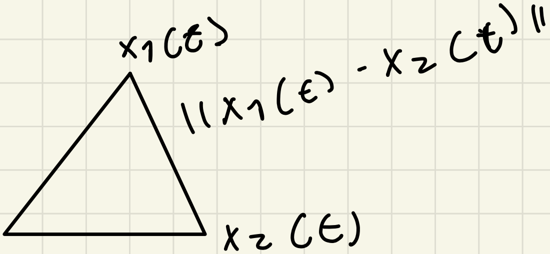
$$wo = \frac{2\pi}{T} \qquad A \quad B > 0 \qquad n, m \in Z$$

$$Px_1 - X_2 = \frac{1}{T} \int_T |X_1(t) - X_2(t)|^2 \, dt = d^2(x_1, X_2)$$

$$Px_1 - X_2 = P_x - \frac{2}{T} \langle x_1(t) X_2(t) \rangle + Px_2$$

$$\epsilon_x = \int |x(t)|^2 = \|X(t)\|^2$$

$$P\alpha = \frac{1}{T} \epsilon x = \frac{1}{T} \int |x(t)|^2 \, dt$$



$$\|x_1(t)\| = \sqrt{\int (x_1(t))^2 \, dt}$$

$$\|x_1(t)\|^2 = \int |x_1(t)|^2 \, dt$$

$$P_{x_1} = \frac{1}{T} \int | A e^{-jn\omega_0 t} |^2 \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int (A e^{-jn\omega_0 t} (A e^{-jn\omega_0 t}) | \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int A^2 \, e^{-jn\omega_0 t} \, e^{jn\omega_0 t} \, dt$$

$$|a| = \sqrt{Re^2 + Im} = \sqrt{a \cdot a^*}$$

$$P_{x_1} = \frac{1}{T} \int A^2 e^0 \, dt = \frac{1}{T} A^2 \int dt = \frac{A^2}{T}(T - 0) = A^2$$

$$- \frac{2}{T} \int A e^{-jn\omega_0 t} (B e^{jm\omega_0 t})^* \, dt$$

$$= \frac{-2}{T} \int AB e^{-jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} \, dt$$

$$= -\frac{2AB}{T} \int_T e^{j(-n-m)\omega_0 t} \, dt$$

$$= \frac{-2AB}{T} \int_T e^{j(r-n)\omega_0 t}$$

ortonalidad de exponenciales

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(K\omega_0 t)\, dt = \begin{cases} 1, & K=0 \\ 0, & K \neq 0 \end{cases} \qquad K = n+m$$

- si $n+m \neq 0 \rightarrow$ promedio del coseno es cero
- si $n+m = 0 \rightarrow m = -n \longrightarrow \cos(0) = 1$

$$d^2(x_1, x_2) = A^2 + B^2 - 2AB\,\delta_{n+m,0} \qquad \delta_{n+m,0} = 1 \text{ si } n+m=0$$

- Armónicos distintos $\rightarrow n+m \neq 0$: $d^2 = A^2 + B^2$
- Frecuencias opuestas $\rightarrow n = -m$: $d^2 = (A-B)^2$
- si $n = m = 0$: $d^2 = (A-B)^2$

$$d^2(x_1, x_2) = \begin{cases} A^2 + B^2 & n+m = 0 \\ [6\,pt]\,(A-B)^2 & n+m = 0 \end{cases}$$

$$d(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{A^2 + B^2} & n+m = 0 \\ [4\,pt]\,|A-B| & n+m = 0 \end{cases}$$

2. Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de $5kHz$ y 4 bits de capacidad de representación, aplicado a la señal continua:

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t).$$

Realizar la simulación del proceso de discretización (incluyendo al menos tres periodos de $x(t)$). En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

verificamos que la señal x(t) sea una señal cuasi periodica

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= 1000\pi \\ w_2 &= 3000\pi \\ w_3 &= 11000\pi \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{1000\pi}{3000\pi} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{w_1}{w_3} = \frac{1000\pi}{11000\pi} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{w_2}{w_3} = \frac{3000\pi}{11000\pi} = \frac{3}{11}$$

- en todas las combinaciones da un numero racional, es cuasiperiodica

periodo

$$T_1 = \frac{2\pi}{w_1} = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{w_2} = \frac{2\pi}{3000\pi} = \frac{1}{1500}$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{11000} = \frac{1}{5500}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 T &= r\, 2\pi \\ \omega_2 T &= \theta\, 2\pi \\ \omega_3 T &= \alpha\, 2\pi \end{aligned}\right\} \quad r, \theta, \alpha \in \mathbb{Z} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{\cancel{2\pi}}{T_1} \cdot T = r\, \cancel{2\pi} \;;\; \frac{\cancel{2\pi}}{T_2} \cdot T = \theta\, \cancel{2\pi} \;;\; \frac{\cancel{2\pi}}{T_3} \cdot T = \alpha\, \cancel{2\pi}$$

$$T = r \cdot T_1 = \theta T_2 = \alpha T_3$$

$$MCM(T_1, T_2, T_3) = T$$

$$\left(\frac{1}{500}, \frac{1}{1500}, \frac{1}{5500}\right) = 16500$$

$$16500\, T = 33 r = 11 \theta = 3 \alpha$$

$$MCM(33 r, 11\theta, 3\alpha) = 33$$

$$16500\, T = 33$$

$$T = \frac{33}{16500} = 0{,}002$$

Primero vamos a verificar Nyquist con

$F_s = 5\ kHz$

$w_{max} = 11000\pi \rightarrow F_{max} = \frac{w_{max}}{2\pi} = \frac{11000\pi}{2\pi}$

$F_{max} = 5500\ Hz$

La frecuencia de muestreo debe ser 2 veces la frecuencia máxima

Fs debe ser mayor a $2(F_{max}) = 2 \cdot 5500\ Hz = 11000$

$F_s \geq 11000 \rightarrow$ la frecuencia de muestreo que nos entrega el ejercicio no es apta

buscamos una frecuencia apta

$4 F_{max} = 4(5500) = 22000\ Hz$

Determinamos $x[nts]$ con alising

$t \to nts \qquad ts = \frac{1}{fs} = \frac{1}{3000} = 0{,}0002$

$x[n] = x[nts]$

$3\cos(1000\pi(nts)) + 5\operatorname{sen}(3000\pi(nts)) +$

$10\cos(11000\pi(nts))$

$3\cos(1000\pi(0{,}0002)) + 5\operatorname{sen}(3000\pi(0{,}0002)) +$

$10\cos(11000\pi(0{,}0002))$

$3\cos(0{,}2\pi n) + 5\operatorname{sen}(0{,}6\pi n) + 10\cos(2{,}2\pi n)$

Periodicidad de $x[n]$ que sufre de alising $(2{,}2\pi n)$

$\cos(2{,}2\pi n) = \cos(\pi n + 0{,}2\pi n)$

$= \cos(0{,}2\pi n)$

$\cos(2\pi n)(\cos 0{,}2\pi n) + \cancel{\operatorname{sen}}\overset{0}{(\ldots)}$

$\cos(0{,}2\pi n)$

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= 1000\pi \\ \omega_2 &= 3000\pi \\ \omega_3 &= 11000\pi \end{aligned}\right\}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{3000\pi} = \frac{1}{1500}$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{11000\pi} = \frac{1}{5500}$$

$$T = KT_1 = rT_2 = lT_3$$

$$T = \frac{K\,1}{500} = \frac{r\,1}{1500} = \frac{l\,1}{3500}$$

multiplicamos por 11000

$$T = \frac{1}{500}$$

3. Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(ti - tf)n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?.

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{ti}^{TF} x(t)\, e^{-jnwot}\, dt \rightarrow x(t) = \sum_n c_n e^{jnwot}$$

$$x'(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt}\left\{\sum_n c_n e^{jnwot}\right\} = \sum_n c_n e^{jnwot} jnwo$$

$$x''(t) = \frac{d}{dt}\left\{\sum_n c_n e^{jnwot}(jnwo)\right\} = \sum_n c_n e^{jnwot}(jnwo)^2$$

$$\tilde{c}_n = \frac{\langle x''(t)\ e^{jnwot}\rangle}{\| e^{inwot}\|^2} = \frac{\int_{ti}^{tF} x''(t)\, e^{-jnwot}\, dt}{T} \quad ; T = tF - ti$$

$$\tilde{c}_n = c_n (jnwo)^2 = \frac{\int_{ti}^{tF} x''(t)\, e^{-jnwot}\, dt}{T}$$

$$C_n = \frac{1}{(tf - ti)(jnwo)^2}\int_{ti}^{tF} x''(t)\, e^{-jnwot}\, dt$$

$$= \frac{1}{(tf - ti)n^2 wo^2}\int_{ti}^{tF} x''(t)\, e^{-jnwot}\, dt$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n w_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n w_0 t)$$

$$x'(t) = \sum a_n \frac{\partial}{\partial t} \{\cos(n w_0 t)\} + b_n \frac{\partial}{\partial t} \{\operatorname{sen}(n w_0 t)\}$$

$$x'(t) = \sum a_n (-\operatorname{sen}(n w_0 t) n w_0)\ b_n \cos(n w_0 t) n w_0$$

$$x''(t) = \sum a_n \cos(n w_0 t)(-(n w_0)^2) + b_n \operatorname{sen}(n w_0 t)(-(n w_0)^2)$$

$$= \sum \underbrace{(-a_n n^2 w_0^2)}_{a_n} \cos(n w_0 t) + \underbrace{(-b_n n^2 w_0^2)}_{b_n} \operatorname{sen}(n w_0 t)$$

$$\hat{a}_n = \frac{2}{T} \int x''(t) \cos(n w_0 t)\, dt$$

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{sen}(n w_0 t)\, dt$$

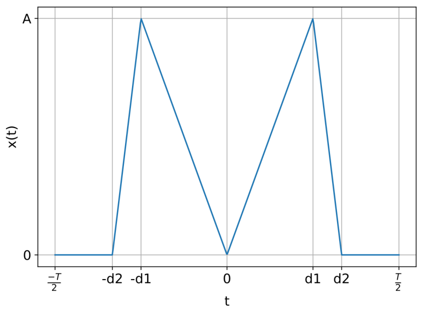
$$T = t_f - t_i$$

$$a_n = \frac{2}{(t_1 - t_f) n^2 w_0^2} \int x''(t) \cos(n w_0 t)\, dt$$

$$b_n(-n^2 w_0^2) = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{sen}(n w_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{(t_i - t_f) n^2 w_0^2} \int^{t} x''(t) \operatorname{sen}(n w_0 t)\, dt$$

4. Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, imaginaria, magnitud, fase y el error relativo para $n \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$, a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$ en la Figura 1. Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$. Presente las simulaciones de Python respectivas.



$$m_1 = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$m_2 = \frac{-A}{d_1}$$

$$m_3 = \frac{A}{d_1}$$

$$m_4 = \frac{-A}{d_2 - d_1}$$

$$J_{-d_2} = m_1 - 0 = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$J_{-d_1} = m_2 - m_1 = \frac{A}{d_1} - \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$J_0 = m_3 - m_2 = \frac{2A}{d_1}$$

$$J_{d_2} = 0 - m_4 = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

periodo

$$x''(t) = \sum_K J_{tK}\, \delta(t - t_K)$$

coeficientes de $x''(t)$

$$x''(t) = \sum (jn\omega_0)^2 c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum n^2 \omega_0^2 c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por ortogonalidad

$$c_n'' = \frac{1}{T} \int_0 x'(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = -n^2 \omega_0^2 c_n$$

$$c_n = \frac{-1}{n^2 \omega_0^2 T} \sum_k J_{Jk} e^{-jn\omega_0 t_k}, \; n \neq 0$$

$x'(t)$ suma de deltas

Por simetria par

$$c_n = \frac{-2A}{n^2 \omega_0^2 T} \left[\frac{\cos(n\omega_0 d)^2}{d^2 - d^2} - \left(\frac{1}{d_2 - d_1} + \frac{1}{d_1} \right) \right] n \neq 0$$

el area en $[0, d_2]$ es $\frac{1}{2} A d_2$ por paridad es igual

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{A d_2}{T}$$