# Parcial #1

1. La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt.$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$$x_1(t) = Ae^{-jnw_0 t}$$

$$x_2(t) = Be^{jmw_0 t}$$

con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Determine la distancia entre las dos señales. Compruebe sus resultados con Python.

$$x_1(t) = A e^{-jnwot} \qquad x_2(t) = B e^{imwot}$$

$$wo = \frac{2\pi}{T} \qquad A \quad B > 0 \qquad n, m \in Z$$

$$d^2(x_1, x_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt$$

$$|x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^* = |x_1|^2 + |x_2|^2 - x_1 x_2^* - x_1^* x_2$$

$$|x_1|^2 = A^2, \quad |x_2|^2 = B^2$$

$$x_1 x_2^* = A B e^{-j(n+m)wot}$$

$$x_1^* x_2 = A B e^{j(n+m)wot}$$

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B^2 - AB\left(e^{-j(n+m)wot} + e^{j(n+m)wot}\right)$$

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B - 2AB\cos((n+m)\omega_0 t)$$

ortonalidad de exponenciales

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(K\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 1, & K = 0 \\ 0, & K \neq 0 \end{cases} \qquad K = n+m$$

- si $n+m \neq 0 \rightarrow$ promedio del coseno es cero
- si $n+m = 0 \rightarrow m = -n \longrightarrow \cos(0) = 1$

$$d^2(x_1, x_2) = A^2 + B^2 - 2AB\,\delta_{n+m,0} \qquad \delta_{n+m,0} = 1 \text{ si } n+m = 0$$

- Armónicos distintos $\rightarrow n+m \neq 0 : d^2 = A^2 + B^2$
- Frecuencias opuestas $\rightarrow n = -m : d^2 = (A-B)^2$
- si $n = m = 0 : d^2 = (A-B)^2$

Se confirma el resultado con python

2. Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de $5kHz$ y 4 bits de capacidad de representación, aplicado a la señal continua:

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t).$$

Realizar la simulación del proceso de discretización (incluyendo al menos tres periodos de $x(t)$). En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

verificamos que la señal x(t) sea una señal cuasiperiodica

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= 1000\pi \\ w_2 &= 3000\pi \\ w_3 &= 11000\pi \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \frac{w_1}{w_2} &= \frac{1000\pi}{3000\pi} = \frac{1}{3} \\ \frac{w_1}{w_3} &= \frac{1000\pi}{11000\pi} = \frac{1}{11} \\ \frac{w_2}{w_3} &= \frac{3000\pi}{11000\pi} = \frac{3}{11} \end{aligned}$$

• en todas las combinaciones da un numero racional, es cuasiperiodica

Hay que discretizar la señal

$$t \to nT_s = \frac{n}{F_s} \to x(t) \longrightarrow x[n] \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{con} \quad F_s = 3KHz$$

Primero vamos a verificar Nyquist con

$F_s = 5\,kHz$

$w_{max} = 11000\pi \rightarrow F_{max} = \frac{w_{max}}{2\pi} = \frac{11000\pi}{2\pi}$

$F_{max} = 5500\ Hz$

La frecuencia de muestreo debe ser 2 veces la frecuencia máxima

Fs debe ser mayor a $2(F_{max}) = 2 \cdot 5500\ Hz = 11000$

$F_s \geq 11000 \rightarrow$ la frecuencia de muestreo que nos entrega el ejercicio no es apta

buscamos una frecuencia apta

$4\,F_{max} = 4(5500) = 22000\,Hz$

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= 1000\pi \\ w_2 &= 3000\pi \\ w_3 &= 11000\pi \end{aligned}\right\}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{3000\pi} = \frac{1}{1500}$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{11000\pi} = \frac{1}{5500}$$

$$T = KT_1 = rT_2 = lT_3$$

$$T = \frac{K\,1}{500} = \frac{r\,1}{1500} = \frac{l\,1}{3500}$$

multiplicamos por 11000

$$T = \frac{1}{500}$$

3. Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(ti - tf)n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes $a_n$ y $b_n$ desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?.

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{ti}^{TF} x(t)\, e^{-jnwot}\, dt \rightarrow x(t) = \sum_n c_n e^{jnwot}$$

$$x'(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_n c_n e^{jnwot} \right\} = \sum_n c_n e^{jnwot} jnwo$$

$$x''(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_n c_n e^{jnwot} (jnwo) \right\} = \sum_n c_n e^{jnwot} (jnwo)^2$$

$$\tilde{c}_n = \frac{\langle x''(t)\ e^{jnwot} \rangle}{\| e^{jnwot} \|^2} = \frac{\int_{ti}^{tF} x''(t)\, e^{-jnwot}\, dt}{T} \ ; T = tF - ti$$

$$\tilde{c}_n = c_n (jnwo)^2 = \frac{\int_{ti}^{tF} x''(t)\, e^{-jnwot}\, dt}{T}$$

$$c_n = \frac{1}{(tF - ti)(jnwo)^2} \int_{ti}^{tF} x''(t)\, e^{-jnwot}\, dt$$

$$= \frac{1}{(tF - ti) n^2 wo^2} \int_{ti}^{tF} x''(t)\, e^{-jnwot}\, dt$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n w_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n w_0 t)$$

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n (-n w_0) \operatorname{sen}(n w_0 t) + b_n (n w_0) \cos(n w_0 t)$$

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n (-n w_0)(n w_0) \cos(n w_0 t) + b_n (n w_0)(-n w_0) \operatorname{sen}(n w_0 t)$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n w_0 t) \, dt$$

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{sen}(n w_0 t) \, dt$$

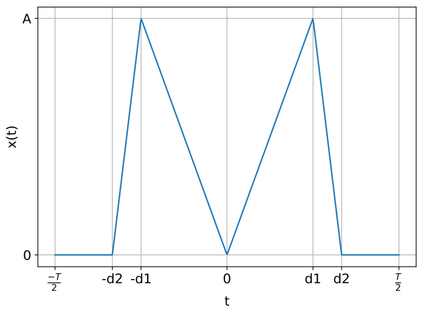
$$a_n (-n^2 w_0^2) = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n w_0 t) \, dt$$

$$a_n = \frac{2}{-T n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n w_0 t) \, dt$$

$$b_n (-n^2 w_0^2) = \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{sen}(n w_0 t) \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{-T n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{sen}(n w_0 t) \, dt$$

4. Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, imaginaria, magnitud, fase y el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$ en la Figura 1. Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$. Presente las simulaciones de Python respectivas.




$$m_1 = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$m_2 = \frac{-A}{d_1}$$

$$m_3 = \frac{A}{d_1}$$

$$m_4 = \frac{-A}{d_2 - d_1}$$

$$J_{-d_2} = m_1 - 0 = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$J_{-d_1} = m_2 - m_1 = \frac{A}{d_1} - \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$J_0 = m_3 - m_2 = \frac{2A}{d_1}$$

$$J_{d_2} = 0 - m_4 = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

periodo

$$x''(t) = \sum_K J_{tK}\, \delta(t - t_K)$$

coeficientes de $x''(t)$

$$x''(t) = \sum (jn\omega_0)^2 c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum n^2 \omega_0^2 c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por ortogonalidad

$$c_n'' = \frac{1}{T} \int_0 x'(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = -n^2 \omega_0^2 c_n$$

$$c_n = \frac{-1}{n^2 \omega_0^2 T} \sum_k J_{Tk} e^{-jn\omega_0 t_k} \quad , n \neq 0$$

$x'(t)$ suma de deltas

Por simetria par

$$c_n = \frac{-2A}{n^2 \omega_0^2 T} \left[ \frac{\cos(n\omega_0 d)^2}{d^2 - d^2} - \left( \frac{1}{d_2 - d_1} + \frac{1}{d_1} \right) \right] n \neq 0$$

el area en $[0, d_2]$ es $\frac{1}{2} A d_2$ por paridad es igual

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{A d_2}{T}$$