3.1 介绍

令C,D是两个范畴。有时，我们能找到一个函子 $F \in [\mathbf{C},\mathbf{D}]$ 和一个函子 $G \in [\mathbf{D},\mathbf{C}]$ ，使得对任意 $X \in \mathbf{C}$ 和 $Y \in \mathbf{D}$ 都有 $\mathbf{C}(X,G(Y))$ 和 $\mathbf{D}(F(X),Y)$ 一一对应。更进一步，我们要求这样的一一对应对 X 和 Y 来说都是自然同构。我们称这样的 F 是 G 的左伴随；反过来， G 是 F 的右伴随
实际上，这样的例子是非常普遍的，我们来举几个例子，为了简洁性，我们将自然性的结论放到下一节中证明
考虑从Set到Grp的自由函子 F 和从Grp到Set的遗忘函子 G 。任取一个集合 S 和一个群 A 。利用自由群的知识，我们不难发现，从 $F(S)$ 到 A 的群同态和从 S 到 $G(A)$ 的映射是一一对应的。怎么一一对应呢？事实上，因为 $S \subset F(S)$ ，所以每一个从 $F(S)$ 到 A 的群同态当然给出了 S 的每一个元素的像；反过来，只要确定了 S 的像，我们就可以唯一确定地定义出 $F(S)$ 在群同态下的像——这是根据群同态的性质。因此，自由函子是遗忘函子的左伴随
考虑从Grp到 $\mathbf{Grp}^2$ 的对角函子 Δ 和从 $\mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp}$ 到Grp的乘积函子 F ，分别定义为 $\Delta(G) = (G,G)$ 和 $\pi(G,G') = G \times G'$ 。现在令 $G \in \mathbf{Grp}$ 以及 $(G_1,G_2) \in \mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp}$ 。我们需要证明从 (G,G) 到 (G_1,G_2) 的群同态和从 G 到 $G_1 \times G_2$ 的群同态是一一对应的。事实上，从 (G,G) 到 (G_1,G_2) 的群同态就是两个群同态，一个从 G 到 G_1 ，另一个从 G 到 G_2 。利用群论的知识，这是显然的。因此，对角函子是乘积函子的左伴随
考虑从Ab到Grp的嵌入函子i和从Grp到Ab的阿贝尔化函子 $\cdot\mathrm{ab}$ 。令 A 是一个阿贝尔群， G 是一个群，则从 A 到 G^{ab} 的（阿贝尔群的）群同态和从 $i(A) = A$ 到 G 的群同态是一一对应的。根据阿贝尔化的泛性质，这是显然的。因此，嵌入函子是阿贝尔化函子的左伴随
下面，我们给出定义

3.2 伴随函子

伴随函子

假设C,D是两个范畴， $F \in [\mathbf{C},\mathbf{D}]$ ， $G \in [\mathbf{D},\mathbf{C}]$ 。我们称 F 是 G 的左伴随，或者 G 是 F 的右伴随，当且仅当对任意 $X \in \mathbf{C}$ 和 $Y \in \mathbf{D}$ ，都有 $\mathbf{C}(X,G(Y))$ 和 $\mathbf{D}(F(X),Y)$ 一一对应，并且这样的一一对应对 X 和 Y 都是自然同构。具体地，我们指的是函子 $\mathbf{C}(-,G(Y)),\mathbf{D}(F(-),Y) \in [\mathbf{C}^{\mathrm{op}},\mathbf{Set}]$ 是自然同构的，且函子 $\mathbf{C}(X,G(-))\ \mathbf{D}(F(X),-) \in [\mathbf{D},\mathbf{Set}]$ 是自然同构的。

PROP

从Set到Grp的自由函子 F 是从Grp到Set的遗忘函子 G 的一个左伴随

证明令 $S \in \mathbf{Set}$ ， $A \in \mathbf{Grp}$ ，则 $F(S)$ 是由 S 生成的自由群。对任意 $f \in \mathbf{Set}(S,F(A))$ ，即任意映射 $f : S \to A$ ，我们下面定义 $\hat{f} \in \mathbf{Grp}(F(S),A)$ 。 $\hat{f}$ 将 $F(S)$ 中每一个单词的每一个 $s \in S$ 都按 f 改成 A 中的元素。反过来，对于任意 $g \in \mathbf{Grp}(F(S),A)$ ，我们定义 $\overline{g} \in \mathbf{Set}(S,G(A))$ 为 $\overline{g} = g|_S$ 。
根据上一节的知识，和显然都是一一对应，且互为逆映射
接着，我们证明 $\mathbf{Set}(-,G(A)),\mathbf{Grp}(F(-),A) \in [\mathbf{Set}^{\mathrm{op}},\mathbf{Set}]$ 是自然同构的。为了方便。我们称这两个函子分别为 H 和 H'
令 $S,T \in \mathbf{Set}$ ， $f \in \mathbf{Set}(S,T)$ 。令 $\eta_A =$
在Hom函子中，我们已经定义过 $H(f)(g) = g \circ f$ 。不难发现， $H'(f)$ 的合适定义为 $H'(f)(g) = g \circ F(f)$ 。我们只须证明 $\hat{\cdot}_T \circ H(f) = H'(f) \circ \hat{\cdot}_S$ ，而这是因为

$$(\hat{\gamma}_T \circ H(f))(g) = \hat{\gamma}_T(g \circ f) = \widehat{g \circ f}$$

$$(H'(f) \circ \hat{\gamma}_S)(g) = \hat{g} \circ F(f)$$

以及显然地， $\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f} = \hat{g} \circ F(f)$
最后，我们证明 $\mathbf{Set}(S,G(-1),\mathbf{Grp}(F(S),-) \in [\mathbf{Grp},\mathbf{Set}]$ 是自然同构的
令 $A,B \in \mathbf{Grp}$ $f \in \mathbf{Grp}(A,B)$ 。为了方便，我们称这两个函子为 L 和 L' 。同理，我们定义 $L(f)(g) = G(f) \circ g$ 以及 $L'(f)(g) = f \circ g$ ，其中 $G(f)$ 指的是映射 $f \in \mathbf{Set}(A,B)$ 。我们定义 $\eta_A = \hat{\cdot} = \hat{\cdot}_A = \hat{\cdot}_{S_A}$ 。我们只须证明 $\eta_B \circ L(f) = L'(f) \circ \eta_A$ ，而这是因为

$$(\eta_B \circ L(f))(g) = \hat{\cdot}(G(f) \circ g) = \widehat{G(f)} \circ g = \widehat{G(f)} \circ g$$

$$(L'(f) \circ \eta_A)(g) = f \circ \hat{g}$$

除此以外，注意到 f 本身是个群同态，因此 $\widehat{G(F)} = f$

综上所述，我们就证明了自由函子是遗忘函子的左伴随

PROP

从 $\mathbf{Grp}$ 到 $\mathbf{Grp}^2$ 的对角函子 Δ 是从 $\mathbf{Grp}^2$ 到 $\mathbf{Grp}$ 的乘积函子 π 的一个左伴随

令 $G, G_1, G_2 \in \mathbf{Grp}$ 。对任意 $f \in \mathbf{Grp}(G, \pi(G_1, G_2)) = \mathbf{Grp}(G, G_1 \times G_2)$ ，我们定义 $\hat{f} \in \mathbf{Grp}^2(\Delta(G), (G_1, G_2)) = \mathbf{Grp}^2((G, G), (G_1, G_2))$ 为 $\hat{f} = [f_1, f_2] = [\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f]$ 。反过来，对任意 $g \in \mathbf{Grp}^2(\Delta(G), (G_1, G_2)) = \mathbf{Grp}^2((G, G), (G_1, G_2))$ 我们定义 $\overline{g} \in \mathbf{Grp}(G, \pi(G_1, G_2)) = \mathbf{Grp}(G, G_1 \times G_2)$ 为 $\overline{g} = (g_1, g_2)$ 。显然，和 $\hat{}$ 给出了一个我们需要的一一对应，并且互为逆映射。
接着，我们来证明函子 $\mathbf{Grp}(-, G_1 \times G_2), \mathbf{Grp}^2(\Delta(-), (G_1, G_2)) \in [\mathbf{Grp}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ 是自然同构的。令 $G, G' \in \mathbf{Grp}$ $f \in \mathbf{Grp}(G, G')$ 。为了方便，令这个两个函子分别为 H 和 H' 。我们当然定义 $H(f)(g) = g \circ f$ ， $H'(f)([g_1, g_2]) = [g_1, g_2] \circ \Delta(f) = [g_1, g_2] \circ [f, f] = [g_1 \circ f, g_2 \circ f]$ ，以及 $\eta_G = \hat{\gamma}_G$
下面，我们只须证明 $\eta_{G'} \circ H(f) = H'(f) \circ \eta_G$ 。而这是因为

$$(\eta'_G \circ H(f))(g) = \widehat{g \circ f} = [\pi_1 \circ g \circ f, \pi_2 \circ g \circ f]$$

以及

$$(H'(f) \circ \eta_{G'}(g) = g \circ \Delta(f) = [\pi_1 \circ g, \pi_2 \circ g] \circ f = [\pi_1 \circ g \circ f, \pi_2 \circ g \circ f]$$

最后，我们来证明函子 $\mathbf{Grp}(G, \pi(-))$ $\mathbf{Grp}^2(\Delta(G), -) \in [\mathbf{Grp}^2, \mathbf{Set}]$ 是自然同构的。令 $(G_1, G_2), (G'_1, G'_2) \in \mathbf{Grp}^2$ ， $[f_1, f_2] \in \mathbf{Grp}^2((G_1, G_2), (G'_1, G'_2))$ 。为了方便，令这个函子分别为 L 和 L' 。我们当然定义 $L([f_1, f_2])(g) = \pi([f_1, f_2]) \circ g = (f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2) \circ g = (f_1 \circ \pi_1 \circ g, f_2 \circ \pi_2 \circ g) = (f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2)$ ，以及 $L'([f_1, f_2])([g_1, g_2]) = [f_1, f_2] \circ [g_1, g_2] = [f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2]$ 。
下面，我们只须证明 $\eta_{(G'_1, G_2)} \circ L([f_1, f_2]) = L'([f_1, f_2]) \circ \eta_{(G_1, G_2)}$ 。而这是因为

$$(\eta_{(G'_1, G_2)} \circ L([f_1, f_2]))(g) = (f_1 \circ \widehat{g_1, f_2} \circ g_2) = [f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2]$$

以及

$$(L'([f_1, f_2]) \circ \eta_{G_1, G_2})(g) = [f_1, f_2] \circ [g_1, g_2] = [f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2]$$

综上所述，我们就证明了对角函子是乘积函子的一个左伴随

PROP

从Grp到Ab的阿贝尔化函子- ab是从Ab到Grp的嵌入函子i的左伴随。

证明是类似的，我们会跳过一些细节，尽可能快地证明这个命题。
令 $G, G' \in \mathbf{Grp}$ ， $A, B \in$ ， $f \in \mathbf{Grp}(G, i(A))$ ， $g \in (G^{\mathrm{ab}}, A)$ 。我们定义 $\hat{f} = f^{\mathrm{ab}}$ ， $\overline{g} = g \circ \pi$ 。利用群论的知识，和显然都是一一对应，并且互为逆映射
我们先证明对于 G 是一个自然同构
令 $f \in \mathbf{Grp}(G, G')$ 。令 $H = \mathbf{Grp}(-, i(A))$ ， $H' = (-^{\mathrm{ab}}, A)$ 。我们只须证明 $\hat{}_{G'} \circ H(f) = H'(f) \circ \hat{}_G$ ，而这是因为

$$(\hat{}_{G'} \circ H(f))(g) = \widehat{g \circ f} = (g \circ f)^{\mathrm{ab}} = g^{\mathrm{ab}} \circ f^{\mathrm{ab}}$$

以及

$$(H'(f) \circ \hat{}_G)(g) = \hat{g} \circ f^{\mathrm{ab}} = g^{\mathrm{ab}} \circ f^{\mathrm{ab}}$$

我们再证明对于 A 是一个自然同构
令 $f \in (A, B)$ 。令 $H = \mathbf{Grp}(G, i(-))$ ， $H' = (G^{\mathrm{ab}}, -)$ 。我们只须证明 $\hat{}_B \circ H(f) = H'(f) \circ \hat{}_A$ ，而这是因为

$$(\hat{}_B \circ H(f))(g) = i(\widehat{f}) \circ g = f^{\mathrm{ab}} \circ g^{\mathrm{ab}} = f \circ g^{\mathrm{ab}}$$

以及

$$(H'(f) \circ \hat{}_A)(g) = f \circ \hat{g} = f \circ g^{\mathrm{ab}}$$

综上所述，我们就证明了阿贝尔化函子是嵌入函子的一个左伴随

3.3泛态射

为了更好地理解伴随，我们此时引入泛态射

泛态射

令C,D是两个范畴， $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是一个函子， $X \in \mathbf{D}$ ， $A \in \mathbf{C}$ ， $u \in \mathbf{D}(X, F(A))$ 。我们称 (A, u) 是一个从 X 到 F 的泛态射当且仅当对任意 $A' \in \mathbf{C}$ 和任意 $f \in \mathbf{D}(X, F(A'))$ ，都存在唯一的态射 $h \in \mathbf{C}(A, A')$ ，使得 $f = F(h) \circ u$ 0

泛态射有一个重要的性质：若存在则唯一，并且是在唯一的同构下唯一。我们下面进一步阐释这一性质

PROP 泛态射的泛性质

令C,D是两个范畴， $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是一个函子， $X \in \mathbf{D}$ 。从 X 到 F 的泛态射 (A, u) 若存在则唯一，并且在唯一的同构下唯一。换言之，如果 (A, u) ， (A', u') 是两个从 X 到 F 的泛态射，则存在唯一的同构 $h \in \mathbf{C}(A, A')$ 使得 $u' = F(h) \circ u$ 。

设 (A, u) ， (A', u') 是两个泛态射，则我们分别可以取 $h \in \mathbf{C}(A, A')$ ， $h' \in \mathbf{C}(A', A)$ ，使得 $u' = F(h) \circ u\ u = F(h') \circ u'$ 。特别地，这告诉我们 $u = F(h') \circ u' = F(h') \circ F(h) \circ u = F(h' \circ h) \circ u$ 。注意到对于 $u \in \mathbf{D}(X, F(A))$ 我们有唯一的 $k \in \mathbf{C}(A, A)$ ，使得 $u = F(k) \circ u$ 。这样的 k 显然是 id_A 。因此，根据泛态射的定义，我们必须有 $h' \circ h = id_A$ 。利用对称性，同理可知 $h \circ h' = id_{A'}$ 。这就告诉我们 h 是一个从 A 到 A' 的同构。这就证明了同构的存在性
同构的唯一性是由 h 的唯一性得到的，而 h 的唯一性显然是通过泛态射的定义得到的
综上所述，我们就证明了从 X 到 F 的泛态射 (A, u) 若存在则唯一，并且在唯一的同构下唯一

注

通过上面的方式，我们可以在唯一的同构下唯一地定义出 (A, u) 。我们将泛态射满足的性质称为一个泛性质。反过来，我们可以完全对偶地定义出一个从 F 到 X 的泛态射

从 F 到 X 的泛态射

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴， $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是一个函子， $X \in \mathbf{D}$ ， $A \in \mathbf{C}$ ， $u \in \mathbf{D}(F(A), X)$ 。我们称 (A, u) 是一个从 F 到 X 的泛态射当且仅当时任意 $A' \in \mathbf{C}$ 和任意 $f \in \mathbf{D}(F(A'), X)$ ，都有在唯一的态射 $h \in \mathbf{C}(A', A)$ ，使得 $f = u \circ F(h)$ 0

完全同理地，这样的泛态射若存在则也在唯一的同构下唯一

PROP

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴， $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是一个函子， $X \in \mathbf{D}$ 。从 F 到 X 的泛态射 (A, u) 若存在则唯一，并且在唯一的同构下唯一。换言之，如果 (A, u) ， (A', u') 是两个从 F 到 X 的泛态射，则存在唯一的同构 $h \in \mathbf{C}(A', A)$ 使得 $u' = u \circ F(h)$

证明是完全对偶的

我们在下一章中会看到泛态射的推广，即极限与余极限。我们把悬念留到下一章中。极限与余极限和泛态射一样，可以不存在，但是只要存在就在唯一的同构下唯一。通过泛态射，我们可以定义出一些在唯一的同构下唯一的对象。同样，利用极限与余极限，我们将这样的想法高度推广。
在下一节中，我们会看到泛态射和伴随函子的关联。

3.4 伴随函子与泛态射

这一节中，我们重点要证明伴随函子的一个等价命题

> **PROP 伴随函子的泛性质**
>
> 假设 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴， $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ ，则存在 $G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$ ，使得 F 是 G 的一个左伴随当且仅当对任意 $Y \in \mathbf{D}$ ，都存在从 F 到 Y 的泛态射。换言之，对任意 $Y \in \mathbf{D}$ ，我们都可以找到一个 $G(Y) \in \mathbf{C}$ 和对应的 $u_Y \in \mathbf{D}(F(G(Y)), Y)$ ，使得对任意 $X \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{D}(F(X), Y)$ ，都能找到唯一的 $h \in \mathbf{C}(X, G(Y))$ ，使得 $f = u_Y \circ F(h)$

先证充分性。假设 F 是 G 的一个左伴随。令 $Y \in \mathbf{D}$ ，我们当然取 $G(Y) \in \mathbf{C}$ 。对 $id_{G(Y)} \in \mathbf{C}(G(Y), G(Y))$ 我们可以在自然同构的一一对应下找到 $u_Y = \widehat{id_{G(Y)}} \in \mathbf{D}(F(G(Y)), Y)$ 。令 $X \in \mathbf{C}$ ， $f \in \mathbf{D}(F(X), Y)$ 。令 $\overline{\cdot} = \hat{\cdot}^{-1}$ 则 $\overline{f} \in \mathbf{C}(X, G(Y))$
因为 F 是 G 的一个左伴随，所以 $H = \mathbf{C}(-, G(Y)), H' = \mathbf{D}(F(-), Y)$ 是自然同构的。因此，我们有

$$\left(G(Y) \circ H\left(\overline{f}\right)\right)\left(id_{G(Y)}\right) = \left(H'\left(\overline{f}\right) \circ \circ_{G(Y)}\right)\left(id_{G(Y)}\right)$$

换言之，

$$f = \hat{\overline{f}} = \widehat{id_{G(Y)}} \circ F\left(\overline{f}\right) = u_Y \circ F\left(\overline{f}\right)$$

这就证明了存在性。下面，我们证明唯一性。假设 $f = u_Y \circ F(h)$ 。我们只须证明 $h = \overline{f}$ 。注意到我们可以把 h 写作 $\overline{\hat{h}}$ ，所以 $\hat{h} = u_Y \circ F\left(\overline{\hat{h}}\right) = u_Y \circ F(h) = f$ 。对左右两边同时取，我们就得到了 $h = \overline{\hat{h}} = \overline{f}$ 。这就证明了唯一性，也便证明了充分性
再证必要性。假设对任意 $Y \in \mathbf{D}$ ，都存在 $G(Y) \in \mathbf{C}$ 和 $u_Y \in \mathbf{D}(F(G(Y), Y))$ ，使得对任意 $X \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{D}(F(X), Y)$ ，都能找到唯一的 $h \in \mathbf{C}(X, G(Y))$ ，使得 $f = u_Y \circ F(h)$
下面，我们定义和。对任意 $h \in \mathbf{C}(X, G(Y))$ ，我们定义 $\hat{h} = u_Y \circ F(h)$ 。反过来，对于任意的 $f \in \mathbf{D}(F(X), Y)$ 我们定义 $\overline{f}$ 为唯一的态射 h ，使得 $h = u_Y \circ F(h)$ 。根据 h 的存在性和唯一性，和互为逆映射，因此是从 $\mathbf{C}(X, G(Y))$ 到 $\mathbf{D}(F(X), Y)$ 的一一对应
接着，我们证明对于 X 是一个自然同构。令 $H = \mathbf{C}(-, G(Y))$ $H' = \mathbf{D}(F(-), Y)$ 。令 $X, X' \in \mathbf{C}$ $f \in \mathbf{C}(X, X')$ 。只须证

$$\eta_{X'} \circ H(f) = H'(f) \circ \eta_X$$

而这是因为

$$(\eta_{X'} \circ H(f))(g) = \widehat{g \circ f} = u_Y \circ F(g \circ f) = u_Y \circ F(g) \circ F(f)$$

以及

$$(H'(f) \circ \eta_X)(g) = \hat{g} \circ F(f) = u_Y \circ F(g) \circ F(f)$$

现在，我们证明对于 Y 是一个自然同构。令 $L = \mathbf{C}(X, G(-))$ $L' = \mathbf{D}(F(X), -)$ 令 $Y, Y' \in \mathbf{D}$ $f \in \mathbf{D}(Y, Y')$ 。我们只须证

$$\eta_{Y'} \circ L(f) = L'(f) \circ \eta_Y$$

注意到

$$(\eta_{Y'} \circ L(f))(g) = \widehat{G(f)} \circ g = u_Y \circ F(G(f) \circ g) = u_{Y'} \circ F(G(f)) \circ F(g)$$

以及

$$(L'(f) \circ \eta_Y)(g) = f \circ u_Y \circ F(g)$$

因此只须证 $u_{Y'} \circ F(G(f)) = f \circ u_Y$
我们将 $f \circ u_Y$ 看成一个整体，根据 $u_{Y'}$ 的泛性质，我们知道存在唯一的 h ，使得 $u_{Y'} \circ F(h) = f \circ u_Y$
事实上，我们还没有定义过 $G(f)$ ，也没有证明过 G 是一个函子。因此，我们当然令 $G(f) = h$ ，这就使得 $u_{Y'} \circ F(G(f)) = f \circ u_Y$
最后，我们只须证明 G 是一个函子
1．一方面，注意到 $u_Y \circ F(id_{G(Y)}) = u_Y \circ id_{F(G(Y))} = id_Y \circ u_Y$ ，因此根据定义，我们有 $G(id_Y) = id_{G(Y)}$
2. 另一方面，因为 $u_Y \circ F(G(g)) = g \circ u_Y$ 以及 $u_Y \circ F(G(f)) = f \circ u_Y$ ，所以 $u_Y \circ F(G(g) \circ G(f)) = u_Y \circ F(G(g)) \circ F(G(f)) = g \circ u_Y \circ F(G(f)) = g \circ f \circ u_Y$ 。根据定义，我们有 $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$
这样，我们就证明了必要性
综上所述，我们证明了 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 有一个左伴随 $G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$ 当且仅当对任意 $Y \in \mathbf{D}$ ，都有一个从 F 到 Y 的泛态射。换言之，对任意 $Y \in \mathbf{D}$ ，都能找到一个 $G(Y) \in \mathbf{C}$ 以及一个 $u_Y \in \mathbf{D}(F(G(Y)), Y)$ ，使得对任意 $X \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{D}(F(X), Y)$ ，都能找到唯一的 $h \in \mathbf{C}(X, G(Y))$ ，使得 $f = u_Y \circ F(h)$

现在，我们重新证明上面的三对伴随函子

> **LEM**
>
> 从Set到Grp的自由函子 F 是从Grp到Set的遗忘函子 G 的一个左伴随

令 A 是一个群，我们定义 $G(A)$ 为集合 A 。我们下面定义 $u_A \in \mathbf{Grp}(F(G(A)), A) = \mathbf{Grp}(F(A), A)$ 。对任意 $F(A)$ 的单词，我们将其映射为其在 A 中的值。这显然是一个群同态。令 $S \in \mathbf{Set}$ ， $f \in \mathbf{Grp}(F(S), A)$ 。我们只须证明存在唯一的 $h \in \mathbf{Set}(S, G(A))$ ，使得 $f = u_Y \circ F(h)$ 0
显然， $f|_S$ 是满足条件的一个映射。反过来，如果 h 满足这个条件，那么同时右乘嵌入映射 $i \in \mathbf{Set}(S, F(S))$ 我们就得到了

$$f|_S = f \circ i = u_A \circ F(h) \circ i = h$$

> **LEM**
>
> 从Grp到 $\mathbf{Grp}^2$ 的对角函子 Δ 是从 $\mathbf{Grp}^2$ 到Grp的乘积函子 π 的一个左伴随

令 $(G_1, G_2) \in \mathbf{Grp}^2$ ， 我们定义 $\pi(G_1, G_2) = G_1 \times G_2$ 。我们下面定义 $u_{G_1,G_2} \in \mathbf{Grp}^2(\Delta(\pi(G_1, G_2)), (G_1, G_2)) = \mathbf{Grp}^2((G_1 \times G_2, G_1 \times G_2), (G_1, G_2))$ 为 $u_{G_1,G_2} = [\pi_1, \pi_2]$ 0
令 $G \in \mathbf{Grp}$ ， $[f_1, f_2] \in \mathbf{Grp}^2((G, G), (G_1, G_2))$ 。我们只须证明存在唯一的 $h \in \mathbf{Grp}(G, G_1 \times G_2)$ ，使得 $[f_1, f_2] = u_{G_1,G_2} \circ [h, h] = [\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h]$ 0
很显然，唯一的取法是 $h = (h_1, h_2)$

> **LEM**
>
> 从Grp到Ab的阿贝尔化函子 ab 是从Ab到Grp的嵌入函子 i 的左伴随

令 A 是一个阿贝尔群，我们定义 $i(A)$ 为群 A ， $u_G \in (i(A)^{\mathrm{ab}}, A)$ 为恒等映射 id_A 。令 G 是一个群， $f \in (G^{\mathrm{ab}}, A)$ 。我们只须证明存在唯一的 $h \in \mathbf{Grp}(G, i(A))$ ，使得 $f = u_A \circ h^{\mathrm{ab}} = h^{\mathrm{ab}}$ 0
显然，我们可以令 $h = f \circ \pi$
利用群论的知识，唯一性是熟知的结论
