第18节 可数性公理

18-1 可数性公理

我们现在打算介绍的概念，不像紧致性和连通性那样自然地源于对微积分和分析学的研究，而是出于对拓扑学本身深入研究的需要。例如将一个空间嵌入到度量空间或紧致的Hausdorff空间等问题，本质上都是拓扑学的问题，而非分析学的问题。这些特定问题的解决就涉及到可数性公理与分离性公理。

当我们在第21节中研究与收敛序列相关的问题时，曾介绍过第一可数性公理。我们也研究过一个分离性公理，即Hausdorff公理，并提到过另一个，即 T_1 公理。本章我们将介绍另外一些更强的公理，并且研究它们之间的一些关系。主要目的是证明Urysohn度量化定理：如果一个拓扑空间 X 满足某种可数性公理(第二可数性公理)和某种分离性公理(正则性公理)，那么 X 可以嵌入到某一个度量空间中，因此是可度量化的。

本章最后一节还要介绍几何学上一个十分重要的嵌入定理，即给定一个紧致流形（高维曲面的模拟），我们将证明它可以嵌入到某个有限维的欧氏空间之中.

首先重新陈述第21节中给出过的一个定义

x 处可数基(countable basis at x)，第一可数性公理(first countability axiom)

空间 X 称为在 x 处有**可数基(countable basis at x)**，如果存在 x 的邻域的一个可数族 $\mathcal{B}$ ，使得 x 的每一个邻域都至少包含 $\mathcal{B}$ 中的一个成员。如果在空间的每一点处都有可数基，则称这个空间满足**第一可数性公理(first countability axiom)** 或**第一可数的(first-countable)**

我们已经注意到，每一个可度量化空间都满足这个公理，见第21节

考虑满足这个公理的空间的一个重要原因就是，这类空间有一个非常有用的特性，即只要借助于这类空间中的收敛序列就可以确定集合的极限点，并且可以验证函数的连续性。以前我们已经注意到了这一点，现在正式地作为定理来叙述它：

定理30.1 设 X 是一个拓扑空间

(a) 设 A 是 X 的一个子集。若存在 A 中点的序列收敛到 x ，则 $x \in \overline{A}$ 。若 X 满足第一可数性公理，则其逆命题也成立

(b) 设 $f: X \rightarrow Y$ 。若 f 是连续的，则对 X 中的每一个收敛序列 $x_n \rightarrow x$ ，序列 $f(x_n)$ 收敛于 $f(x)$ 。如果 X 满足第一可数性公理，那么其逆命题也成立

这个定理的证明实际上是第21节中在可度量化假设下所给证明的一个直接推广，在此不再重新陈述.

下述公理比第一可数性公理更为重要：

定义 若拓扑空间 X 具有可数基，则称 X 满足第二可数性公理（second countability axiom)或称 X 为第二可数的（second-countable）.

显然第二可数性公理蕴涵着第一可数性公理：若 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个可数拓扑基，则 $\mathcal{B}$ 中由包含着点 x 的那些元素所组成的子族就是 x 处的一个可数基．事实上，第二可数性公理比第一可

数性公理强得多，甚至并不是每一个度量空间都能满足它.

那么，为什么要对这个性质感兴趣呢？因为，一方面，许多熟知的空间具有这个性质。另一方面，正如我们将要看到的，它是证明像Urysohn度量化定理这样一些定理时要用到的一个十分重要的假设。

例1 实直线 $\mathbb{R}$ 具有可数基，即所有端点为有理数的开区间 (a, b) 的族．同样， $\mathbb{R}^n$ 具有可数基，即所有端点为有理数的开区间的积的族．甚至 $\mathbb{R}^n$ 也有可数基，即所有积 $\prod_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$ 构成的族，其中对于有限多个 n 而言， U_n 是端点为有理数的开区间，而对于其他所有的 n ， $U_n=\mathbb{R}$.

例2 在一致拓扑下， $\mathbb{R}^n$ 满足第一可数性公理（因为它是可度量化的），却不满足第二可数性公理。为了证明这一点，我们先要证明：若 X 有可数基 $\mathcal{B}$ ，则 X 的任意离散子空间 A 必定是可数的。对于每一个 $a \in A$ ，选取基中的一个元素 B_a ，使得它与 A 只交于点 a 。若 a 和 b 是 A 中不同的两个点，则 B_a 和 B_b 也不同。这是因为第一个集合包含点 a ，但第二个却不包含。由此可见，映射 $a \rightarrow B_a$ 是从 A 到 $\mathcal{B}$ 的一个单射，所以 A 必是可数的。

我们注意， $\mathbb{R}^\omega$ 中所有0和1序列构成的子空间 A 是不可数的，并且具有离散拓扑．因为对 A 中任意两个不同的点 a 和 b ， $\bar{\rho}(a,b)=1$ ，因此在一致拓扑下， $\mathbb{R}^\omega$ 没有可数基.

这两个可数性公理都具有在取子空间运算或可数积运算下保持不变这一很好的性质.

定理30.2 第一可数空间的子空间是第一可数的。第一可数空间的可数积是第一可数的。第二可数空间的子空间是第二可数的。第二可数空间的可数积是第二可数的。

证 考虑第二可数性公理．若 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个可数基，则 $\{B\cap A \mid B\in\mathcal{B}\}$ 便是 X 的子空间 A 的一个可数基．若 $\mathcal{B}_i$ 是空间 X_i 的一个可数基，则所有积 ΠU_i 构成的族便是 ΠX_i 的一个可数基，其中 U_i 满足条件：对于有限多个 i ， $U_i\in\mathcal{B}_i$ ，而对于其他的所有 i ， $U_i=X_i$ 。

关于第一可数性公理的证明是类似的.

下面定理中给出关于第二可数性公理的两个结论，它们在后面会用到．首先给出以下定义：

定义 空间 X 的子集 A 称为在 X 中是稠密的(dense)，如果 $\overline{A}=X$.

定理30.3 设 X 有一个可数基，则

(a) X 的每一个开覆盖有一个可数子族覆盖 X .
(b) X 存在一个可数子集在 X 中稠密.

证 设 $\{B_n\}$ 是 X 的一个可数基

(a) 令 $\mathcal{A}$ 为 X 的一个开覆盖。对于每一个正整数 n ，只要可能，我们就选取一个 $A_n\in\mathcal{A}$ ，使得 A_n 包含基元素 B_n 。那么，这些集合 A_n 构成的族 $\mathcal{A}'$ 是可数的，因为它的下标集 J 是正整数的一个子集。而且 $\mathcal{A}'$ 覆盖 X ，因为任意给定 X 的一个点 x ，可以在 $\mathcal{A}$ 中选择一个集合 A 包含点 x 。因为 A 是开的，所以存在基元素 B_n 使得 $x\in B_n\subset A$ 。因而 B_n 就必定包含在 $\mathcal{A}$ 的一个成员中，其下标属于集合 J 。于是 A_n 有定义，并且 A_n 包含 B_n ，所以 A_n 包含点 x 。
(b)从基中的每一个非空元素 B_n 中选取一点 x_n ，设这些点 x_n 构成集合 D ，那么 D 在 X 中稠密．这是因为对于 X 中任意给定的一点 $\boldsymbol{x}$ ，每一个包含 $\boldsymbol{x}$ 的基元素都和 D 相交，所以 $\boldsymbol{x}$ 属

于 $\overline{D}$

定理30.3所列出的两个性质有时也分别被当作一种可数性公理．每一个开覆盖都包含可数子覆盖的空间，通常称为Lindelof空间(Lindelof space)．有可数稠密子集的空间常被称为可分的(separable)(这是个容易混淆的术语)①．一般说来，这两个性质都比第二可数性公理弱．但若空间是可度量化的，则它们与第二可数性公理等价(见习题5)．就其重要性而言，它们不及第二可数性公理，但也不可忽视，使用它们会给我们带来方便．例如，通常证明一个空间 X 具有可数稠密子集就比证明 X 具有可数基容易．如果空间还是可度量化的(像分析中常见的那样)，那么这就蕴涵了 X 是第二可数的.

我们并不应用这些性质去证明任何定理，然而其中的Lindelof条件会在处理一些例子时用到．正如下面的一些例子所表明的，对于取子空间和笛卡儿积的运算而言，这两个性质都不像我们所希望的那样能够得以保持.

例3 空间 $\mathbb{R}_t$ 除了不满足第二可数性公理外，满足其他所有的可数性公理.

给定 $x\in\mathbb{R}_t$ ，那么所有形如 $[x,x+1/n)$ 的基元素构成的集合是 x 处的一个可数基。容易看出有理数集在 $\mathbb{R}_t$ 中稠密。

为了证明 $\mathbb{R}_t$ 没有可数基，设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}_t$ 的一个基．对于任意 x ，选取 $\mathcal{B}$ 中的一个元素 B_x ，使得 $x\in B_x\subset[x,x+1)$ ．若 $x\neq y$ ，则 $B_x\neq B_y$ ，这是因为 $x=\inf B_x$ ； $y=\inf B_y$ ，因此 $\mathcal{B}$ 必定是不可数的.

要证明 $\mathbb{R}_t$ 是Lindelof空间，还需要做一些工作．但只要证明 $\mathbb{R}_t$ 中任何一个由基元素构成的开覆盖包含着可数子族覆盖 $\mathbb{R}_t$ 就行了(此处请自行验证)．为此设

$$\mathcal{A}=\{[a_\alpha,b_\alpha)\}_{\alpha\in J}$$

是由下限拓扑的基元素构成的 $\mathbb{R}$ 的一个覆盖．我们希望找到它的一个可数子族覆盖 $\mathbb{R}$ ：

令 C 为一个集合，

$$C=\bigcup_{a\in J}(a_\alpha,b_\alpha),$$

它是 $\mathbb{R}$ 的一个子集．下面证明 $\mathbb{R}-C$ 是可数的.

设 x 是 $\mathbb{R}-C$ 的一个点．我们知道 x 不属于任何一个开区间 (a_α, b_α) ．因此，存在指标 β 使得 $x=a_\beta$ ．选取这样的一个 β 和区间 (a_β, b_β) 中的一个有理数 q_x ．因 (a_β, b_β) 包含于 C 中，所以区间 $(a_\beta, q_x)=(x, q_x)$ 也包含于 C 中．由此推出，如果 x 和 y 是 $\mathbb{R}-C$ 中不同的两个点，并且 $x<y$ ，那么必有 $q_x<q_y$ ．（因为如若不然，我们将会有 $x<y<q_y<q_x$ ，于是 y 必然要落在区间 (x, q_x) 中，因此也就在 C 中.）从而，从 $\mathbb{R}-C$ 到 $\mathbb{Q}$ 的映射 $x \rightarrow q_x$ 是一个单射，因此 $\mathbb{R}-C$ 是可数的.

现在我们证明 $\mathcal{A}$ 的某一个可数子族覆盖 $\mathbb{R}$ 。先对于 $\mathbb{R}-C$ 中的每一个元素选取 $\mathcal{A}$ 中的一个成员包含它，这样便得到了 $\mathcal{A}$ 的一个可数子族 $\mathcal{A}^{\prime}$ 覆盖 $\mathbb{R}-C$ 。取集合 C ，并且赋予这个集合 $\mathbb{R}$ 的子空间的拓扑。相对于这个拓扑， C 满足第二可数性公理。 C 被这些集合 (a_α, b_α) 所覆盖，

它们在 $\mathbb{R}$ 中都是开集，因此在 C 中也都是开集．于是存在可数子族覆盖 C ．设这个可数子族由 (a_α, b_α) 这些元素构成，其中 $\alpha=\alpha_1$ ， α_2 ，…． 于是族

$$\mathcal{A}^{\prime\prime}=\{[a_\alpha, b_\alpha) \mid \alpha=\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$$

是 $\mathcal{A}$ 的可数子族，并且覆盖 C ，并且 $\mathcal{A}^{\prime} \cup \mathcal{A}$ 便是 $\mathcal{A}$ 的一个可数子族，覆盖 $\mathbb{R}_t$.

例4 两个Lindelof空间的积未必是Lindelof的．尽管空间 $\mathbb{R}_t$ 是Lindelof的，我们将证明 $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_t$ 却不是Lindelof的． $\mathbb{R}_t^2$ 空间是拓扑学中一个非常有用的例子，称之为Sorgenfrey平面(Sorgenfreyplane).

空间 $\mathbb{R}_l^2$ 中所有形如 $[a, b) \times[c, d)$ 的集合构成了它的一个基。为了证明它不是一个Lindelof空间，我们考虑它的一个子空间

$$L=\{x \times(-x) \mid x \in \mathbb{R}_{\ell}\}.$$

容易验证 L 是 $\mathbb{R}_t^2$ 中的一个闭集．用开集 $\mathbb{R}_t^2-L$ 和所有形如

$$[a, b) \times[-a, d)$$

的基元素构成 $\mathbb{R}_2^2$ 的一个开覆盖.

这些开集中的每一个最多与 L 交于一点．由于 L 是不可数的，所以不可能有可数子族覆盖 $\mathbb{R}_{\ell}^2$ ，如图30.1所示.

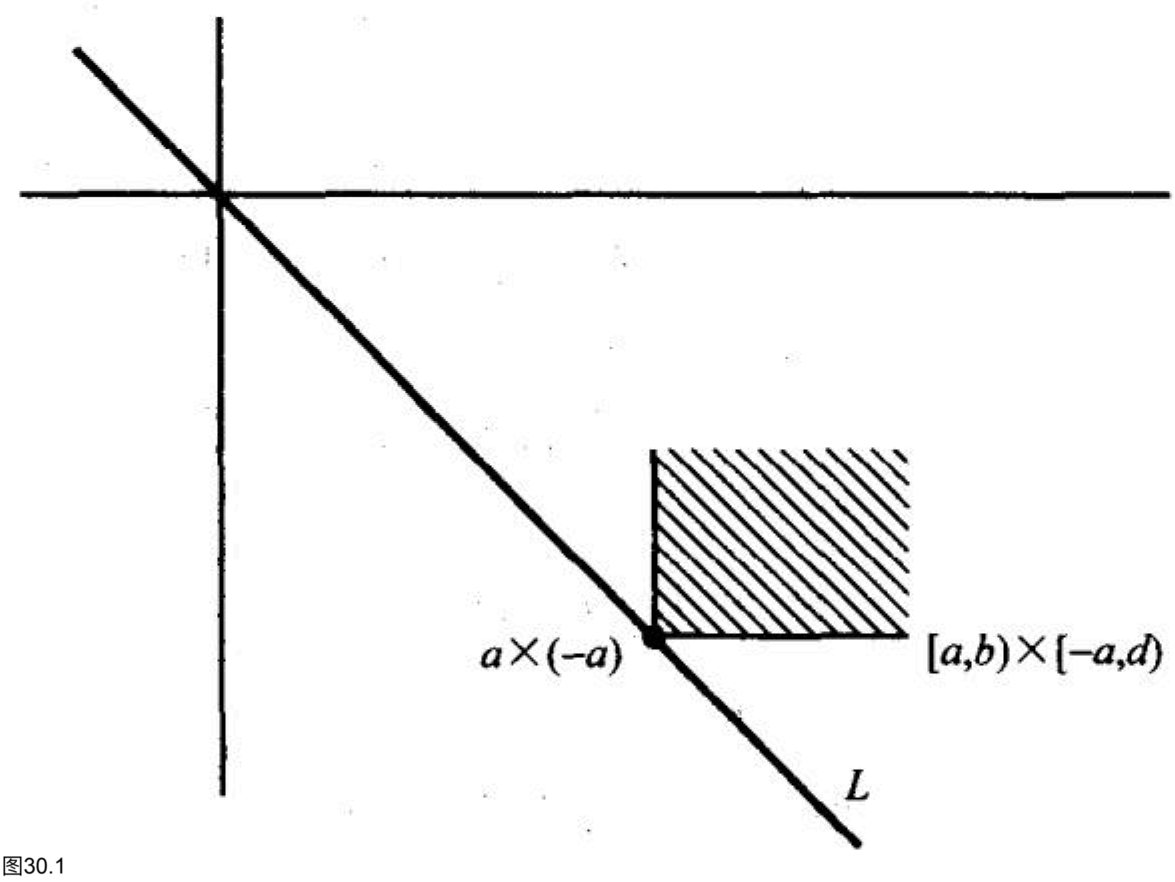


图30.1

例5Lindelof空间的子空间未必是Lindelof空间．有序矩形 I_o^2 是紧致的，所以是Lindelof的．但子空间 $A=I \times(0,1)$ 却不是Lindelof的．因为 A 是两两无交的集合 $U_x=\{x\} \times(0,1)$ 的并，其中的每一个集合都是 A 中的开集．而这些集合构成的集族是不可数的，并且没有真子族能覆

盖 A

练习

1. (a) 若集合 A 是空间 X 中可数个开集的交，则称 A 是 X 中的一个 G_δ 集。证明在满足第一可数性公理的 T_1 空间中，每一个单点集是一个 G_δ 集。

(b)存在一个我们熟悉的空间，它的任何一个单点集都是 G_δ 集，但这个空间却不满足第一可数性公理．它是哪个空间呢?

这个术语来源于德文，其中“ G ”就是“Gebiet”，意思是“开集”。“ δ ”就是“Durchschnitt”，意思是“交”。
2. 证明：若 X 具有可数基 $\{B_n\}$ ，则 X 的每一个基 $\mathcal{C}$ 包含 X 的一个可数基。[提示：对每一对指标 n, m ，只要可能，便选取 $C_{n,m} \in \mathcal{C}$ ，使得 $B_n \subset C_{n,m} \subset B_m$]
3. 设 X 有可数基, A 是 X 的一个不可数子集. 证明 A 中有不可数个点都是 A 的极限点.
4. 证明：每一个紧致度量空间 X 都有可数基。[提示：设 $\mathcal{A}_n$ 是由 $1/n-$ 球构成的 X 的有限覆盖。]
5. (a) 证明：每一个有可数稠密子集的度量空间都有可数基。
(b) 证明：每一个可度量的 Lindelöf 空间都有可数基.
6. 证明： $\mathbb{R}_t$ 和 I_0^2 不可度量化。
7. 对我们所讲的四个可数性公理，空间 S_α 满足哪几个? $\overline{S}_\alpha$ 又如何?
8. 在一致拓扑下，对我们所讲的四个可数性公理，空间 $\mathbb{R}^n$ 满足哪几个?
9. 设 A 是 X 的一个闭子空间。证明：如果 X 是Lindelöf的，那么 A 也是Lindelöf的。举例说明， X 有可数稠密子集， A 却未必有可数稠密子集。
10. 若 X 是可数个有可数稠密子集的空间的积空间，则 X 也有可数稠密子集.
11. 设 $f: X \to Y$ 是连续的。证明：如果 X 是Lindelöf的，或者有可数稠密子集，那么 $f(X)$ 也满足同样的条件。
12. 设 $f: X \to Y$ 是一个连续开映射。证明：如果 X 满足第一或第二可数性公理，那么 $f(X)$ 也满足同样的公理。
13. 证明：若 X 有可数稠密子集，则 X 中的两两无交的开集的族是可数的。
14. 证明：若 X 是Lindelof空间， Y 是紧致的，则 $X \times Y$ 是Lindelof的。
15. 赋予 $\mathbb{R}^I$ 一致度量，其中 $I=[0,1]$ 。设 $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ 是连续函数空间。证明： $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ 有可数稠密子集，因此有可数基。[提示：考虑那些连续函数，它们的图形由有限多个线段构成，并且每一个线段的端点是有理数。]
16. (a) 证明：积空间 $\mathbb{R}^I$ 有可数稠密子集，其中 $I=[0,1]$.
(b)证明：如果 J 的基数大于 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ ，那么积空间 $\mathbb{R}^J$ 没有可数稠密子集。[提示：若 D 在 $\mathbb{R}^J$ 中稠密，定义 $f: J \to \mathcal{P}(D)$ 为 $f(\alpha)=D \cap \pi_\alpha^{-1}((a, b))$ ，其中 (a, b) 是 $\mathbb{R}$ 中的一个固定区间。]
17. 赋予 $\mathbb{R}^\infty$ 箱拓扑。设 $\mathbb{Q}^\infty$ 是由终端为 0 的有理数序列构成的子空间。那么我们所述的四个可数性公理中，这个空间满足哪几个?
18. 设 G 是第一可数的拓扑群。证明：如果 G 有可数稠密子集，或者是Lindelöf的，那么 G 有可数基。[提示：设 $\{B_n\}$ 是 e 点处的可数基。如果 D 是 G 的可数稠密子集，证明：对于 $d \in D$ ，集合 dB_n 构成了 G 的一个基。如果 G 是Lindelöf的，那么对于每一个 n ，选取一个可数集 C_n ，使得集合 cB_n 覆盖 G ，其中 $c \in C_n$ 。证明：当 n 取遍 $\mathbb{Z}_+$ 时，这些集合构成了 G 的一个基。]

第19节 分离公理

19-1 分离公理

本节将引进三个分离公理，并阐明它们的一些性质。前面已经介绍过Hausdorff公理，另一些公理与它类似，只是比它更强一些。每当引进新概念之后，我们总是讨论它们与本书已经给出的那些公理和概念之间的关系。

我们讲过，空间 X 称为Hausdorff的，指的是：如果对于 X 中每两个互不相同的点 x 和 y ，存在无交的两个开集分别包含 x 和 y

定义 设 X 中的每一个单点集在 X 中都是闭的。如果对于任意给定的一个点 x 和不包含这个点的一个闭集 B ，存在无交的两个开集分别包含 x 和 B ，则称 X 为正则的(regular)。如果对于 X 中每一对无交的闭集 A 和 B 总存在无交的开集分别包含它们，则称 X 是正规的(normal).

显然，正则空间是Hausdorff的，正规空间是正则的。(为此必须将单点集是闭的这个条件作为正则性和正规性定义的一部分，具有平庸拓扑的两点集空间，虽然满足正则性和正规性定义中的其余条件，但它却不是Hausdorff的。) 下面的例1和例3表明了正则性公理比Hausdorff公理更强，正规性公理比正则性公理更强。

这些公理之所以被称为分离性公理，是因为它们都涉及用无交的开集，把一定类型的集合彼此“分离”。当然，在学习连通空间之前，我们已经使用过“分割”这个词。但在那里，我们也是试图找到一些无交的开集，使得它们的并就是整个空间。现在所讨论的与此不同，因为这里所说的开集并不要求满足上述条件。

这三个分离公理如图31.1所示，

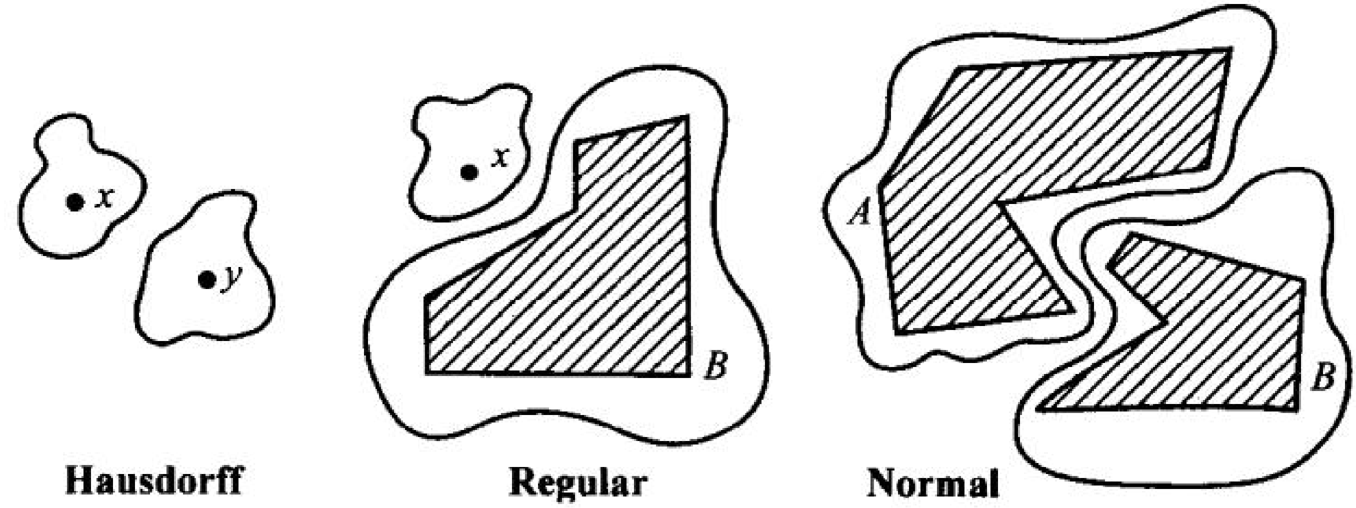


图31.1

还有其他的方式刻画分离性公理．其中常用的一种如下述引理所述：

引理31.1 设 X 是一个拓扑空间， X 中的单点集都是闭的，则

(a) X 是正则的当且仅当对 X 中任意给定的一个点 x 和 x 的任何一个邻域 U ，存在 x 的一个邻域 V ，使得 $\overline{V} \subset U$.
(b) X 是正规的当且仅当对于任意闭集 A 和包含 A 的任何一个开集 U ，存在一个包含 A 的开集 V ，使得 $\bar{V} \subset U$.

证 (a) 设 X 是正则的，给定点 x 和 x 的邻域 U 。令 $B = X - U$ ，则 B 是一个闭集。根据假设，存在分别包含 x 和 B 的无交开集 V 和 W 。因为若 $y \in B$ ，则集合 W 就是 y 的一个邻域，它与 V 无交，所以集合 $\bar{V}$ 与 B 无交。因此 $\bar{V} \subset U$ 。

为了证明其逆命题成立，设给定点 x 和不包含 x 的闭集 B 。令 $U = X - B$ 。根据假设，存在 x 的邻域 V ，使得 $\bar{V} \subset U$ 。于是，开集 V 和 $X - \bar{V}$ 就是分别包含 x 和 B 的无交开集。从而 X 是正则的。

(b)这个证明完全与上面的证明相同，只需在整个证明中用集合 A 代替点 $\boldsymbol{x}$ 就可以了.

现在来研究分离性公理与原先引进的一些概念之间的联系.

定理31.2（a）Hausdorff空间的子空间是Hausdorff的．Hausdorff空间的积空间也是Hausdorff的.

(b)正则空间的子空间是正则的．正则空间的积空间也是正则的.

证 (a) 这是第 17 节习题中的结论, 在这里我们给出证明. 设 X 是一个 Hausdorff 空间, x 和 y 是 X 的子空间 Y 中的两点. 如果 U 和 V 分别是点 x 和 y 在 X 中的无交邻域, 那么 $U \cap Y$ 和 $V \cap Y$ 便分别是 x 和 y 在 Y 中的无交邻域.

设 $\{X_\alpha\}$ 是Hausdorff的空间的一个族．设 $x = (x_\alpha)$ 和 $y = (y_\alpha)$ 是积空间 ΠX_α 中不同的两点.因为 $x \neq y$ ，故存在某一个指标 β ，使得 $x_\beta \neq y_\beta$ ，在 X_β 中选取分别包含 x_β 和 y_β 的无交开集 U 和 V ，这样，集合 $\pi_\beta^{-1}(U)$ 和 $\pi_\beta^{-1}(V)$ 就是 ΠX_α 中分别包含 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的无交开集.

(b) 设 Y 是一个正则空间 X 的子空间．则 Y 中的单点集都是闭的．设 x 是 Y 的一个点， B 是 Y 中不包含 x 的一个闭子集．于是 $\bar{B} \cap Y = B$ ，其中 $\bar{B}$ 表示 B 在 X 中的闭包．因此， $x \notin \bar{B}$ 再应用 X 的正则性，我们可以选取 X 中分别包含 x 和 $\bar{B}$ 的无交开集 U 和 V . 因此 $U \cap Y$ 和 $V \cap Y$ 分别是 Y 中包含 x 和 B 的无交开集.

设 $\{X_\alpha\}$ 是正则空间的一个族．令 $X = \Pi X_\alpha$ ，根据(a)可见， X 是一个Hausdorff空间，因此 X 中的单点集都是闭的．我们应用前面的引理来证明 X 的正则性．设 $\boldsymbol{x} = (x_a)$ 为 X 的一个点， U 为 $\boldsymbol{x}$ 在 X 中的一个邻域．取基中的元素 ΠU_α 使得它包含于 U 中，且包含着点 $\boldsymbol{x}$ ，对于每一个 α ，选取 x_α 在 X_α 中的一个邻域 V_α ，使得 $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$ ，如果恰好有 $U_\alpha = X_\alpha$ ，那就选取 $V_\alpha = X_\alpha$ ，于是 $V = \Pi V_\alpha$ 便是点 $\boldsymbol{x}$ 在 X 中的一个邻域．根据定理19.5， $\bar{V} = \Pi \bar{V}_a$ ，所以 $\bar{V} \subset \Pi U_\alpha \subset U$. 因此， X 是正则的.

稍后我们将在本节和下一节中看到，对于正规空间却没有相似的定理.

例1 空间 $\mathbb{R}_K$ 是Hausdorff的，但不是正则的．前面讲过 $\mathbb{R}_K$ 表示实直线，它以所有开区间 (a, b) 和形如 $(a, b) - K$ 的集合为其拓扑的一个基，其中 $K = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ ．这个空间是Hausdorff的，因为任意两个不同的点都存在两个无交的开区间包含它们.

但这个空间不是正则的．集合 K 是 $\mathbb{R}_K$ 的一个闭集，并且不包含0点．设存在无交的开集 U 和 V 分别包含0和 K ．选取基中包含于 U 的一个元素，使得它包含着0，那么基中的这个元素必定形如 $(a, b) - K$ ，因为基中每一个形如 (a, b) 并包含0的元素都与 K 相交．选取足够大的

n 使得 $1/n \in (a,b)$ ，再取基中包含于 V 且包含 $1/n$ 的一个元素，那么基中这个元素必形如 (c,d) 最后，取点 z ，使得 $z < 1/n$ ，且 $z > \max\{c, 1/(n+1)\}$ ，这样 z 既属于 U 又属于 V ，因此这两个

集合并非无交. 如图31.2所示

例2 空间 $\mathbb{R}_t$ 是正规的。易见单点集都是 $\mathbb{R}_t$ 中的闭集，这是由于 $\mathbb{R}_t$ 的拓扑比 $\mathbb{R}$ 的拓

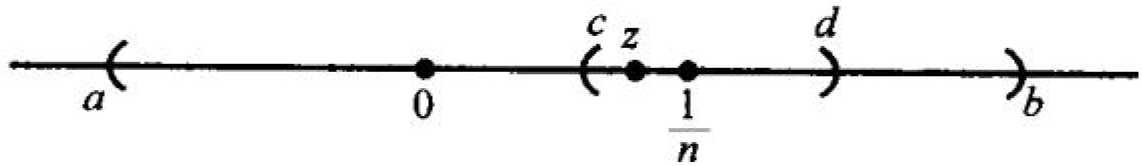


图31.2

扑更细的缘故。为了证明正规性，设 A 和 B 是 $\mathbb{R}_t$ 中无交的两个闭集。对 A 中的每一个点 a 选取一个基元素 $[a, x_a)$ ，使得它与 B 无交。对于 B 中的每一个点 b ，选取一个基元素 $[b, x_b)$ ，使得它与 A 无交。于是开集

$$U = \bigcup_{a\in A}[a, x_a) \quad \text{和} \quad V = \bigcup_{b\in B}[b, x_b)$$

分别包含集合 A 和 B ，并且是无交的.

例3 Sorgenfrey平面 $\mathbb{R}_2^2$ 不是正规的.

空间 $\mathbb{R}_t$ 是正则的(实际上是正规的)，因此积空间 $\mathbb{R}_t^2$ 是正则的．于是，给出这个例子可以达到两个目的．一是说明正则空间未必是正规的，二是说明两个正规空间的积空间未必是正规的.

我们假设 $\mathbb{R}_i^2$ 是正规的，并且由此推出矛盾。设 L 是由 $\mathbb{R}_i^2$ 中所有形如 $x \times (-x)$ 的点构成的一个子空间。 L 在 $\mathbb{R}_i^2$ 中是闭的，并且具有离散拓扑。因 L 中的每一个子集 A 在 L 中都是闭的，所以在 $\mathbb{R}_i^2$ 中也都是闭的。又因为 $L - A$ 在 $\mathbb{R}_i^2$ 中也是闭的，所以对于 L 的任意非空真子集 A 都能找到分别包含 A 和 $L - A$ 的无交开集 U_A 和 V_A 。

设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中坐标为有理数的点构成的集合. D 在 $\mathbb{R}^2$ 中稠密. 定义映射 $\theta : \mathcal{P}(L) \to \mathcal{P}(D)$ 为：

$$\theta(A) = D \cap U_A \quad \text{如 果}\varnothing \subsetneq A \subsetneq L,$$
$$\theta(\emptyset) = \emptyset,$$
$$\theta(L) = D.$$

我们将证明 $\theta : \mathcal{P}(L) \to \mathcal{P}(D)$ 是一个单射.

设 A 是 L 的一个非空真子集. $\theta(A) = D \cap U_A$ 既不是空集（因为 U_A 是开集， D 在 $\mathbb{R}_t^2$ 中稠密），也不是 D （因为 $D \cap V_A \neq \emptyset$ ）. 剩下要证明的是：若 B 是 L 的另外一个非空真子集，则 $\theta(A) \neq \theta(B)$.

存在一点只属于 A 和 B 其中之一而不属于另一个，不妨设 $x \in A$ ，但 $x \notin B$ 。于是 $x \in L - B$ ，因此 $x \in U_A \cap V_B$ 。又因这个集合是开的并且非空，所以其中必包含 D 的点。这些点属于 U_A ，却不属于集合 U_B 。因此， $D \cap U_A \neq D \cap U_B$ ，即 θ 是一个单射。

现在我们证明存在单射 $\phi : \mathcal{P}(D) \to L$ ，因为 D 是可数的无限集， L 与 $\mathbb{R}$ 有相同的基数，因此可以定义从 $\mathcal{P}(Z_+)$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个单射 ψ 。 ψ 的定义如下：将 Z_+ 的子集 S 映到无限的十进小数. $a_1 a_2 \cdots$ ，即

$$\psi(S) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i / 10^i,$$

其中，当 $i \in S$ 时， $a_i = 0$ ，当 $i \notin S$ 时， $a_i = 1$ 。这时，复合映射

$$\mathcal{P}(L) \xrightarrow{\theta} \mathcal{P}(D) \xrightarrow{\psi} L$$

便是从 $\mathcal{P}(L)$ 到 L 的一个单射．根据定理7.8可见，这个映射是不存在的．因此得到一个矛盾.

证明 $\mathbb{R}_2^2$ 不是正规的所用的这个方法，在某些地方并不是那么让人满意。我们只说明了存在 L 的非空真子集 A 使得集合 A 和 $B = L - A$ 不能包含在 $\mathbb{R}_2^2$ 的两个无交的开集中，却没能说明到底集合 A 是怎样的。事实上， L 中所有坐标为有理数的点构成的集合就是我们要找到那个集合，但其证明却不那么容易。我们将其留作练习。

练习

1. 证明：若 X 是正则的，则 X 的任意两点各自有一个邻域，其闭包无交。
2. 证明：若 X 是正规的，则任意两个无交的闭集各自有一个邻域，其闭包无交。
3. 证明：每一个序拓扑都是正则的。
4. 设 X 和 X' 分别表示具有拓扑 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 的同一个集合，并且 $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ 。如果其中一个是Hausdorff(或正则，或正规)空间，那么另一个会怎样呢?
5. 设 $f, g : X \to Y$ 是连续的， Y 是一个Hausdorff空间．证明 $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ 是 X 中的闭集
6. 设 $p : X \to Y$ 是满的连续闭映射。证明：若 X 是正规的，则 Y 也是正规的。[提示：若 U 是包含 $p^{-1}(\{y\})$ 的开集，证明：存在 y 的邻域 W ，使得 $p^{-1}(W) \subset U$.]
7. 设 $p : X \to Y$ 是一个满的连续闭映射，对于每一个 $y \in Y$ ， $p^{-1}(\{y\})$ 是紧致的。(这种映射称为完备映射。)

(a)证明：若 X 是Hausdorff的，则 $\boldsymbol{Y}$ 也是Hausdorff的.
(b)证明：若 X 是正则的，则 Y 也是正则的.
(c)证明：若 X 是局部紧致的，则 Y 也是局部紧致的.
(d) 证明：若 X 满足第二可数性公理，则 Y 也满足第二可数性公理。[提示：设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个可数基。对于 $\mathcal{B}$ 的每一个有限子集 J ，令 U_J 为所有形如 $p^{-1}(W)$ 的集合的并，其中 W 是 Y 中的开集，并且 $p^{-1}(W)$ 包含于 J 的元素的并中。]

8. 设 X 是一个空间， G 是一个拓扑群。 G 在 X 上的一个作用(action)是指一个连续映射 $\alpha : G \times X \to X$ ，满足条件：

(i) $e \cdot x = x$ ，对于所有 $x \in X$
(ii) $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$ ，对于所有 $x \in X$ 和 $g_1, g_2 \in G$.

其中 $g \cdot x$ 表示 $\alpha(g \times x)$ 。对于所有的 x 和 g ，定义 $x \sim g \cdot x$ 。所得到的商空间记为 X/G ，并且称之为作用 α 的轨道空间(orbit space)。

定理 设 G 是一个紧致拓扑群, X 是一个拓扑空间. α 是 G 在 X 上的一个作用. 若对于Hausdorff条件、正则性、正规性、局部紧致性, 以及第二可数性公理这些性质, X 满足其中的一个性质, 则 X/G 也满足同样的性质.

[提示：见第26节的习题13]

*9. 令 A 为 $\mathbb{R}_l^2$ 中所有形如 $x \times (-x)$ 的点的集合，其中 x 是有理数。令 B 为 $\mathbb{R}_l^2$ 中所有形如 $x \times (-x)$ 的点的集合，其中 x 是无理数。如果 V 是 $\mathbb{R}_l^2$ 中包含 B 的一个开集，证明：不存在包含 A 的开集 U 与 V 无交。证明的过程如下：

(a) 设 K_n 为 $[0,1]$ 中所有使得 $[x, x+1/n) \times [-x, -x+1/n)$ 包含于 V 的无理数的集合. 证明 $[0,1]$ 是这些集合 K_n 和可数多个单点集的并.
(b)应用第27节中的习题5证明某一个集合 $\overline{K}_n$ 包含着 $\mathbb{R}$ 的一个开区间 (a, b)
(c) 证明 V 包含着由所有形如 $x \times (-x+\varepsilon)$ 的点 x 构成的开平行四边形，其中 $a < x < b$ ， $0 < \varepsilon < 1/n$.
(d)证明：若 q 是一个有理数， $a < q < b$ ，则 $\mathbb{R}_l^2$ 中的点 $q \times (-q)$ 是 V 的一个极限点.

> **定义**
>
> 拓扑空间 X 称为**完全正规空间**，如果对任意隔离子集 $A, B \subset X$（即 $\overline{A} \cap B = \varnothing$ 且 $A \cap \overline{B} = \varnothing$），存在不相交开集 $U \supset A$、$V \supset B$

> **Q**
>
> X 是完全正规空间 $\iff$ X 的每个子空间都是正规空间

(完全正规 $\Rightarrow$ 每个子空间正规)
设 $Y \subset X$ ，设 E, F 是 Y 中不相交的闭集
则存在 X 中闭集 $\tilde{E}, \tilde{F}$ 使得 $E = \tilde{E} \cap Y$， $F = \tilde{F} \cap Y$
在 X 中

$$\overline{E} \subset \tilde{E} \quad \Rightarrow \quad \overline{E} \cap F \subset \tilde{E} \cap F = \tilde{E} \cap \tilde{F} \cap Y = E \cap F = \varnothing$$

同理 $E \cap \overline{F} = \varnothing$，故 E, F 在 X 中隔离
由 X 完全正规，存在 X 中开集 U, V 使得 $E \subset U$， $F \subset V$， $U \cap V = \varnothing$
令 $U_Y = U \cap Y$， $V_Y = V \cap Y$，则 U_Y, V_Y 是 Y 中开集且分离 E, F

(每个子空间正规 $\Rightarrow$ 完全正规)
取 X 中隔离子集 A, B（即 $\overline{A} \cap B = \varnothing$ 且 $A \cap \overline{B} = \varnothing$）令 $S = A \cup B$ 为 X 的子空间。
在 S 中

$$\mathrm{cl}_S(A) = \overline{A} \cap S = A \cup (\overline{A} \cap B) = A \quad (\text{因为 } \overline{A} \cap B = \varnothing)$$

所以 A 在 S 中闭，同理 B 在 S 中闭
由 S 正规，存在 S 中开集 U_S, V_S 分离 A, B
存在 X 中开集 U, V 使得 $U_S = U \cap S$，$V_S = V \cap S$
令

$$U' = U \setminus \overline{B}, \quad V' = V \setminus \overline{A}$$

则$U' \cap V' = \varnothing$
由 $A \subset U$ 且 $A \cap \overline{B} = \varnothing$，$A \subset U'$；由 $B \subset V$ 且 $B \cap \overline{A} = \varnothing$，$B \subset V'$
故 X 完全正规

第20节 正规空间

现在我们来更全面地研究一下满足正规性公理的空间。从某种意义上说，这个术语“正规”并不是很恰当，因为所谓正规空间并不如我们所想像的那样理想。另一方面，我们所熟知的许多空间都满足这个公理，就像我们下面所见到的那样。它之所以重要，是因为在假设了正规性的情况下，我们所能证明的很多结论都是拓扑学中很重要的结论。其中Urysohn度量化定理和Tietze扩张定理就是这样的两个结论，在本章稍后的几节中，我们将会处理这些问题。

我们先来证明三个定理，它们给出了判断空间是否正规的重要条件.

定理32.1 每一个有可数基的正则空间是正规的。

证 设 X 是有可数基 $\mathcal{B}$ 的一个正则空间， A 和 B 是 X 的两个无交闭子集。 A 中的每一个点 x 都存在一个邻域 U 与 B 无交。应用正则性，选取 x 的一个邻域 V ，使得 $\overline{V}$ 包含于 U 。最后选取 $\mathcal{B}$ 中的一个包含着 x 的元素，使得它包含于 V 。通过对 A 中每一个点 x 选取基中的这样一个元素，我们就构造了 A 的一个开覆盖，其中的每一个开集的闭包都与 B 无交。因 A 的这个覆盖是可数的，故我们可以选用正整数作为其下标，将其记为 $\{U_n\}$ 。

类似地，选取集合 B 的一个可数开覆盖 $\{V_n\}$ ，使得每一个 $\overline{V}_n$ 都与 A 无交。于是集合 $U = \bigcup U_n$ 和 $V = \bigcup V_n$ 就是分别包含 A 和 B 的开集，但它们未必是无交的。我们通过下面的方法来构造两个无交开集。给定 n ，定义

$$U_n' = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i \quad \text{和} \quad V_n' = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i.$$

注意，每一个集合 U_n' 都是开集，因为它是一个开集 U_n 和一个闭集 $\bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i$ 的差．同样，每一个 V_n' 也是开集．又因为 A 中的每一个点 $\boldsymbol{x}$ 都属于某一个 U_n ，却不属于任何一个集合 $\bar{V}_i$ ，所以族 $\{U_n'\}$ 覆盖 A ，同理，族 $\{V_n'\}$ 覆盖 B ，如图32.1所示.

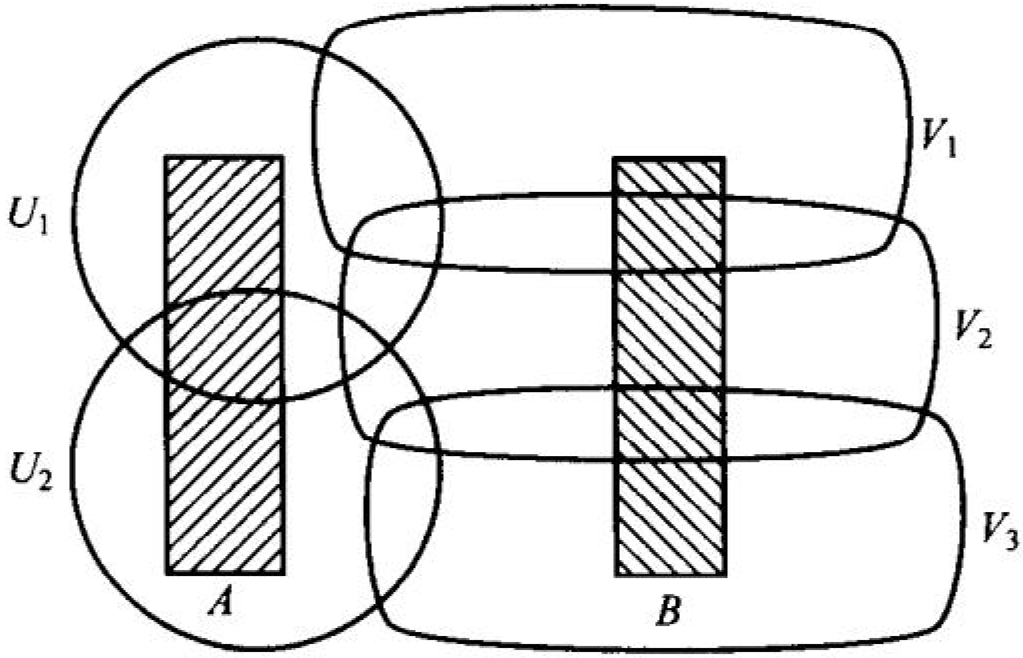
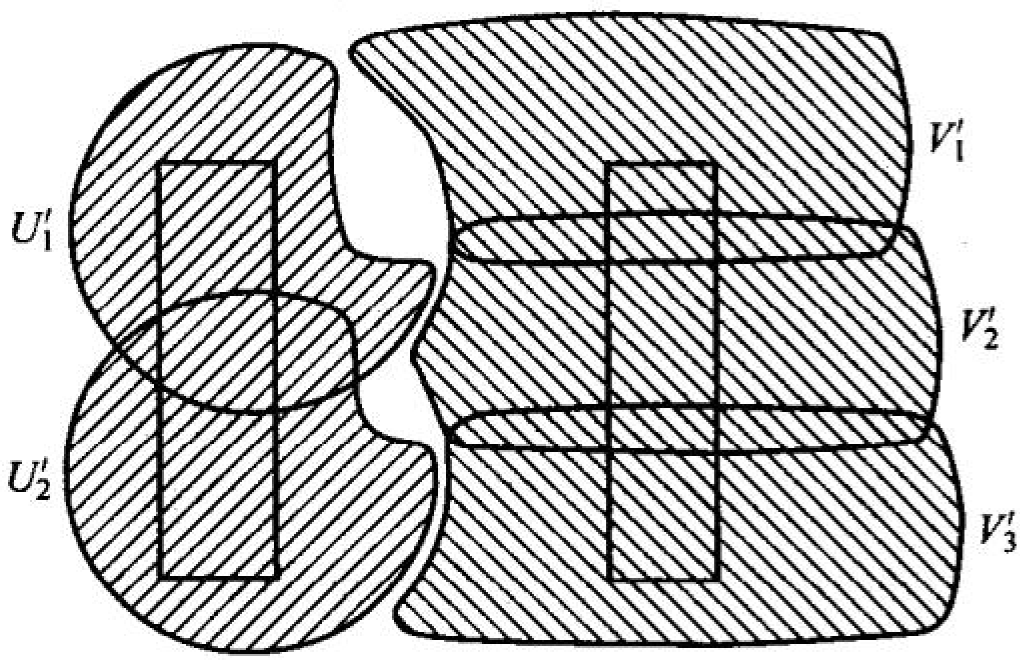


图32.1



最后，集合

$$U' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U'_n \quad 和 \quad V' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} V'_n$$

是无交的．因为若 $x \in U' \cap V'$ ，则对某一个 j ， k ，有 $x \in U'_j \cap V'_k$ ． 不妨设 $j \leqslant k$.根据 U'_j 的定

义，有 $x \in U_j$ 。再根据 $j \leqslant k$ 以及 V'_k 的定义，有 $x \notin \overline{U}_j$ 。对于 $j \geqslant k$ ，也有类似的矛盾产生。

定理32.2 每一个可度量化的空间是正规的，

证 设 X 是一个度量空间，以 d 为度量， A 和 B 是 X 中的两个无交闭集。对于 A 中的任意一个点 a ，选取 ε_a 使得球 $B(a, \varepsilon_a)$ 与 B 无交。类似地，对于 B 中的任意一个点 b ，取 ε_b 使得球 $B(b, \varepsilon_b)$ 与 A 无交。定义

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon_a/2) \quad 和 \quad V = \bigcup_{b \in B} B(b, \varepsilon_b/2),$$

于是 U 和 V 就是分别包含集合 A 和 B 的开集．我们断言：它们是无交的．因为若 $z \in U \cap V$ 则存在 $a \in A$ 和 $b \in B$，使得

$$z \in B(a, \varepsilon_a/2) \cap B(b, \varepsilon_b/2)$$

根据三角不等式可见 $d(a,b) < (\varepsilon_a + \varepsilon_b)/2$. 若 $\varepsilon_a \leqslant \varepsilon_b$, 则 $d(a,b) < \varepsilon_b$, 从而球 $B(b, \varepsilon_b)$ 包含点 a . 若 $\varepsilon_a > \varepsilon_b$, 则 $d(a,b) < \varepsilon_a$, 从而球 $B(a, \varepsilon_a)$ 包含点 b . 但这两种情形都是不可能的. ■

定理32.3 每一个紧致的Hausdorff空间都是正规的.

证 设 X 是一个紧致的 Hausdorff 空间。实际上我们已经证明了 X 是正则的。因为若 x 是 X 的一个点， B 是 X 中不包含 x 的一个闭集，则 B 是紧致的。于是应用第 3 章引理 26.4，就证明了存在无交的开集分别包含 x 和 B 。

采用与上述引理中基本上相同的论证，就可以证得 X 是正规的：给定 X 中无交的闭集 A 和 B ，对于 A 中的每一点 a ，分别选取包含 a 和 B 的无交开集 U_a 和 V_a （这里用到了 X 的正则性.）于是集簇 $\{U_a\}$ 覆盖 A 。再根据 A 的紧致性可见，可以从中选出有限个集合 $U_{a_1}, \ldots,$ U_{a_m} 覆盖 A 。从而

$$U = U_{a_1} \bigcup \cdots \bigcup U_{a_m} \quad \text{和} \quad V = V_{a_1} \bigcap \cdots \bigcap V_{a_m}$$

就是分别包含 A 和 B 的无交的开集.

下面这个关于正规性的定理，在处理一些例子时是很有用的.

定理32.4 每一个良序集 X 在序拓扑下都是正规的。

事实上，每一个序拓扑都是正规的（见[S-S]的例39)，但是我们用不着这个更强的结果.

证 设 X 是一个良序集，我们断言：每一个形如 $(x, y]$ 的区间都是 X 中的开集；若 X 有最大元 y ，则 $(x, y]$ 恰好就是包含 y 的一个基元素。若 y 不是 X 的最大元，则 $(x, y]$ 就等于开集 (x, y') ，其中 y' 为 y 的直接后继元。

现在设 A 和 B 为 X 中无交的两个闭集，并且 A 和 B 都不包含 X 的最小元 a_0 。对于每一个 $a \in A$ ，总存在包含 a 但与 B 无交的基元素，它包含某一个形如 $(x, a]$ 的区间（这里我们利用了 a 不是 X 的最小元这个事实）。这样对于每一个 $a \in A$ ，便有一个与 B 无交的区间 $(x_a, a]$ 。类似地，对于每一个 $b \in B$ ，也有一个与 A 无交的区间 $(y_b, b]$ 。于是，集合

$$U = \bigcup_{a \in A} (x_a, a] \quad \text{和} \quad V = \bigcup_{b \in B} (y_b, b]$$

便是分别包含 A 和 B 的开集，下面我们证明它们无交．因为若 $z \in U \cap V$ ，则对于某一个 $a \in A$ 和 $b \in B$ ，有 $z \in (x_a, a] \cap (y_b, b]$ ．不妨假定 $a < b$ ，若 $a \leqslant y_b$ ，则两个区间无交．若 $a > y_b$ ，则 $a \in (y_b, b]$ ．这和 $(y_b, b]$ 与 A 无交矛盾．同理，对于 $a > b$ ，同样可以得出矛盾.

最后，设 A 和 B 是 X 中无交的两个闭集，并且 A 包含 X 的最小元 a_0 。集合 $\{a_0\}$ 在 X 中是既开又闭的。由上一段的结果知，存在分别包含闭集 $A - \{a_0\}$ 和 B 的无交开集 U 和 V ，于是 $U \cup \{a_0\}$ 和 V 就是分别包含 A 和 B 的无交的开集。

例1 若 J 是不可数的，则积空间 $\mathbb{R}^J$ 就不是正规的。这个结论的证明略有困难，我们将它留作一道具有挑战性的习题(见习题9)。

举这个例子有三个目的。它指出了正则空间 $\mathbb{R}^J$ 未必是正规的。它说明了正规空间的子空间未必是正规的，因为 $\mathbb{R}^J$ 同胚于 $[0,1]^J$ 的子空间 $(0,1)^J$ ，而 $[0,1]^J$ （根据 Tychonoff 定理）是紧致的 Hausdorff 空间，因而是正规的。最后，它还说明了正规空间的不可数积未必是正规的。于是，剩下的问题只有正规空间的有限积或可数积是否正规了。

例2 积空间 $S_\alpha \times \overline{S}_\alpha$ 不是正规的. ①

考虑具有序拓扑的良序集 $\overline{S}_\alpha$ ，及其具有子空间拓扑（与序拓扑相同）的子集 S_α 。根据定理32.4，这两个空间都是正规的。我们将证明积空间 $S_\alpha \times \overline{S}_\alpha$ 不是正规的。

这个例子可以达到三个目的：第一，它表明正则空间未必是正规的。因为 $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ 是正则空间的积，因而是正则的。第二，它表明正规空间的子空间未必是正规的。因为 $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ 是 $\overline{S}_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ 的一个子空间，而 $\overline{S}_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ 是紧致的 Hausdorff 空间，因而是正规的。第三，它表明两个正规空间的积空间未必是正规的。

首先考虑空间 $\overline{S}_\alpha \times \overline{S}_\alpha$ 和它的“对角线” $\Delta = \{x \times x \mid x \in \overline{S}_\alpha\}$ 。因为 $\overline{S}_\alpha$ 是Hausdorff的，所以 Δ 是 $\overline{S}_\alpha \times \overline{S}_\alpha$ 的一个闭集：这是因为若 U 和 V 分别是 x 和 y 的无交的邻域，则 $U \times V$ 是 $x \times y$ 的一个邻域，并且与 Δ 无交。

因此，在子空间 $S_a \times \overline{S}_a$ 中，集合

$$A = \Delta \cap (S_\Omega \times \bar{S}_\Omega) = \Delta - \{\Omega \times \Omega\}$$

是闭的．同样，集合

$$B = S_\Omega \times \{\Omega\}$$

是积空间中的一个“薄片”，所以在 $S_\alpha \times \overline{S}_\alpha$ 中是闭的．并且集合 A 和 B 是无交的．我们断言：若在 $S_\alpha \times \overline{S}_\alpha$ 中存在分别包含 A 和 B 的无交的开集 U 和 V ，则必导致矛盾出现.如图32.2所示.

给定 $x \in S_\Omega$, 考虑竖直的一个“薄片” $x \times \overline{S}_\Omega$. 我们证明存在某一点 $\beta, x < \beta < \Omega$, 使得 $x \times \beta$ 落在 U 的外面. 因为如果 U 包含所有的点 $x \times \beta (x < \beta < \Omega)$, 那么薄片的顶点 $x \times \Omega$ 就是 U 的一个极限点. 但这是不可能的. 因为 V 是与 U 无交的开集, 并且包含这个顶点.

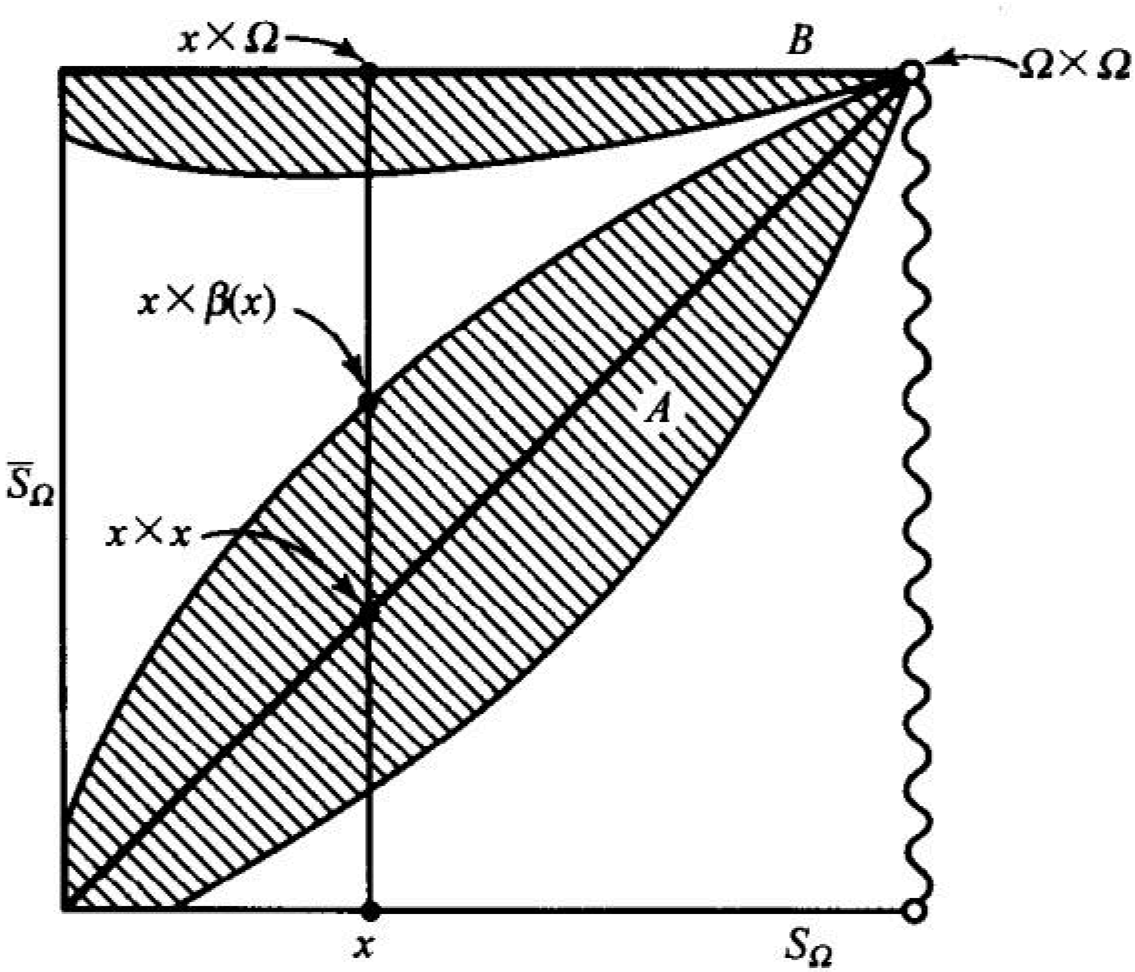


图32.2

选取 $\beta(x)$ 为 S_Ω 中使得 $x < \beta(x) < \Omega$ 并且使得 $x \times \beta(x)$ 落在 U 外面的最小元素。定义 S_Ω 中点的一个序列如下：设 x_1 为 S_Ω 中任意一点，令 $x_2 = \beta(x_1)$ 。对于一般情形， $x_{n+1} = \beta(x_n)$ 。我们有

$$x_1 < x_2 < \ldots.$$

因为对于所有的 x ， $\beta(x) > x$ ，集合 $\{x_n\}$ 是可数的，因而在 S_Ω 中有一个上界．设 $b \in S_\Omega$ 是它的上确界．因为序列是递增的，那么它必收敛于它的上确界．即 $x_n \to b$ ．但是 $\beta(x_n) = x_{n+1}$ ，于是 $\beta(x_n)$ 也收敛于 b ，因此，在积空间中

$$x_n \times \beta(x_n) \to b \times b.$$

参见图32.3．这就产生了矛盾．因为点 $b \times b$ 属于集合 A ，并且集合 A 包含在开集 U 中，但是 $x_n \times \beta(x_n)$ 中没有点在 U 中.

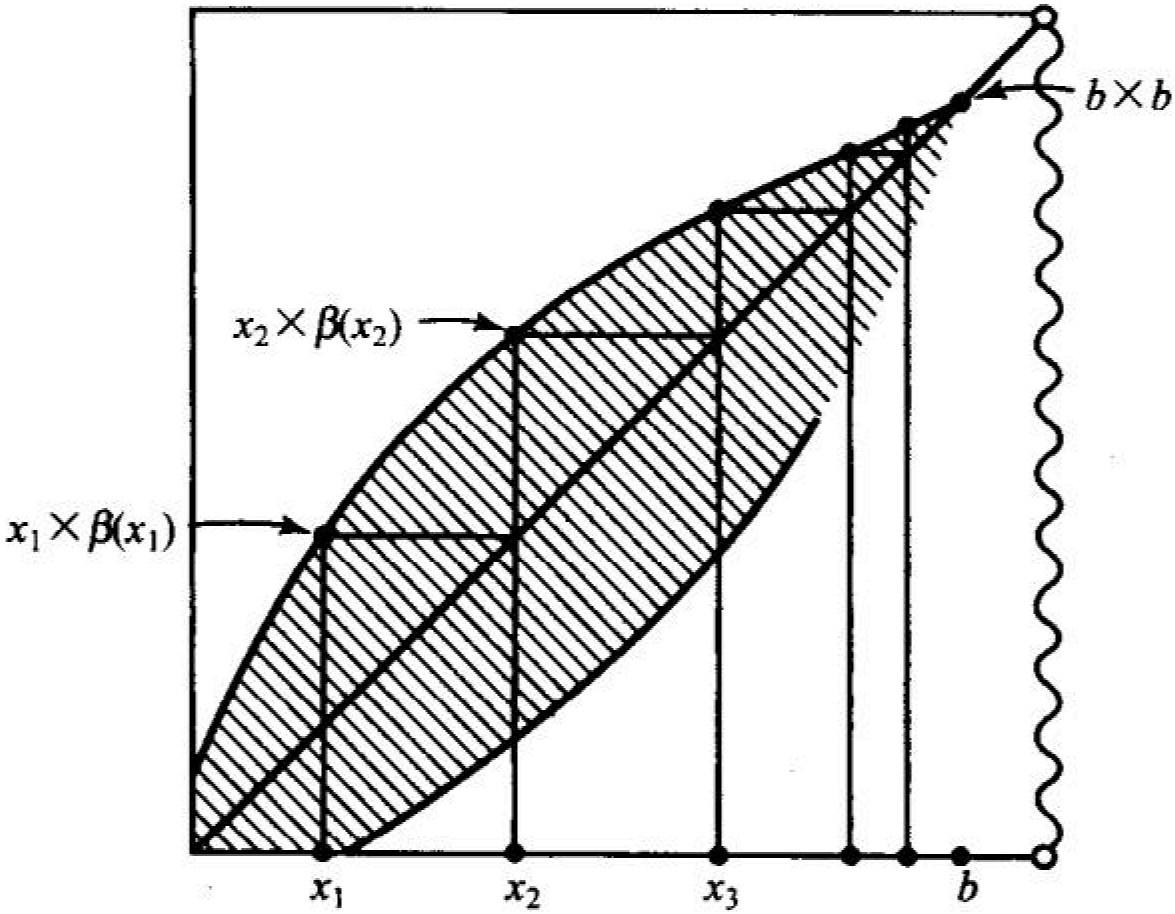


图32.3

练习

1. 证明正规空间的闭子空间是正规的。
2. 证明：若 ΠX_α 是Hausdorff的，或者正则的，或者正规的，则 X_α 也相应地是Hausdorff的，或者正则的，或者正规的。(假设每一个 X_α 都是非空的。)
3. 证明每一个局部紧致的 Hausdorff 空间是正则的。
4. 证明每一个正则的Lindelof空间是正规的
5. 在积拓扑下， $\mathbb{R}^n$ 是正规的吗？在一致拓扑下呢?

$\mathbb{R}^\omega$ 在箱拓扑下是否是正规的，尚属未知．Mary-Ellen Rudin 已证明了在连续统假设的情况下，答案是肯定的[RM]．事实上，她还证明了这个空间满足一个称之为仿紧致性的更强的性质.

6. 空间 X 称为完全正规的 (completely normal), 如果 X 的每一个子空间都是正规的. 证明: X 是完全正规的当且仅当 X 中的每一对分离集 A, B (即 A 和 B 满足: $\overline{A}\cap B=\emptyset$ 和 $A\cap\overline{B}=\emptyset$), 存在无交的开集分别包含着它们. [提示: 若 X 是完全正规的, 考虑 $X-(\overline{A}\cap\overline{B})$.]
7. 以下空间中的哪一个是完全正规的？证明你的结论

(a) 完全正规空间的子空间.
(b)两个完全正规空间的积空间
(c) 序拓扑下的良序集.
(d)可度量化空间.
(e) 紧致的 Hausdorff 空间.
(f) 具有可数基的正则空间.
(g)空间 $\mathbb{R}_\ell$

*8. 证明以下结论：

定理 每一个线性连续统 X 是正规的.

(a) 设 C 是 X 的一个非空闭子集。如果 U 是 $X-C$ 的一个分支，证明 U 是一个形如 (c,c') ， (c,∞) 或者 $(-\infty,c)$ 的集合，其中 $c,c'\in C$ 。
(b) 设 A 和 B 是 X 的两个无交闭子集。对于 $X-A\cup B$ 的那些一个端点在 A 中，另一个端点在 B 中的分支 W ，选取 W 的一个点 c_W 。证明这些点 c_W 构成的集合 C 是闭的。
(c)证明：若 V 是 $X-C$ 的一个分支，则 V 与 A 和 B 都无交.

*9. 证明以下结论：

定理 若 J 是不可数的，则 $\mathbb{R}^j$ 不是正规的.

证明(这个证明由A．H．Stone给出，[S-S]中作了改写)：设 $X=(\mathbb{Z}_+)^J$ ，只要证明 X 不是正规的就可以了，因为 X 是 $\mathbb{R}^j$ 的一个闭子集. 对于 X 的元素，我们使用函数记号，于是 X 中的元素就是一个函数 $\boldsymbol{x}$ ： $J\to Z_+$

(a) 设 $x\in X$ ， B 是 J 的有限子集。用 $U(x,B)$ 表示 X 中所有满足 $y(\alpha)=x(\alpha)$ 的点 y 构成的集合，其中 $\alpha\in B$ 。证明：所有的集合 $U(x,B)$ 构成了 X 的一个基。
(b) 定义 P_n 为 X 中所有那些点 $\boldsymbol{x}$ 构成的集合，这些点 $\boldsymbol{x}$ 在集合 $J-x^{-1}(n)$ 上是单射。证明： P_1 和 P_2 都是闭集，并且无交。
(c) 设 U 和 V 是分别包含 P_1 和 P_2 的开集．给定 J 的子序列 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ （其元素两两不同），和一个整数序列

$$0=n_0<n_1<n_2<\ldots,$$

对于每一个 $i\geqslant 1$ ，令

$$B_i=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n_i}\}$$

并且用等式

$$x_i(\alpha_j)=j \qquad \text{如 果}1\leqslant j\leqslant n_{i-1},$$
$$x_i(\alpha)=1 \qquad \text{当}\alpha\text{取 其 他 值 时}.$$

定义 $x_i\in X$ ，证明：可以选取序列 α_j 和 n_j ，使得对于每一个 i 以下包含关系成立

$$U(x_i,B_i)\subset U.$$

[提示：注意，对于所有的 α 有 $x_1(\alpha)=1$ ，选取 B_1 使得 $U(x_1,B_1)\subset U$.]

(d) 设 A 为上步(c)中的集合 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots\}$. 定义 $y:J\to\mathbb{Z}_+$ 为

$$y(\alpha_j)=j \qquad \text{当}\alpha_j\in A\text{时},$$
$$y(\alpha)=2 \qquad \text{当}\alpha\text{取 其 他 值 时}.$$

选取 B 使得 $U(\mathbf{y},B)\subset V$. 再取 i 使得 $B\cap A$ 包含在集合 B_i 中. 证明

$$U(\boldsymbol{x}_{i+1},B_{i+1})\cap U(\boldsymbol{y},B)$$

非空.

10. 每一个拓扑群都是正规的吗?

第21节 Urysohn引理

现在我们遇到了本书中的第一个深刻的定理，这个定理通常称为“Urysohn引理”。它断言：正规空间 X 上存在着某种实值连续函数。这个定理是证明许多重要定理的一个至关重要的工具。其中的三个，即 Urysohn 度量化定理，Tietze 扩张定理，以及关于流形的一个嵌入定理，我们将在本章以后几节中给出证明。

为什么说 Urysohn 引理是一个“深刻的”定理呢？因为它的证明包含着以前的证明中所没有的那种新颖的思想。或许我们可以用以下方式来解释清楚我们的意思：如果将本书所给出的证明通篇删去，然后再把这本书交给一个没有学过拓扑学但很聪明的学生，大体上可以设想，这个学生应该能够通读这本书并且由他自己来完成证明（当然要花费很多时间和精力了，并且不能期望他解决那些棘手的例子）。然而 Urysohn 引理则完全不同，如果不给出详尽的提示，要想掌握这个引理的证明势必要有相当超常的创造性。

定理33.1[Urysohn引理(Urysohn lemma)]设 X 为正规空间， A 和 B 是 X 中两个无交的闭集． $[a,b]$ 是实直线上的一个闭区间．则存在一个连续映射

$$f\colon X\to[a,b]$$

使得对于 A 中的每一个 x ，有 $f(x)=a$ ，并且对于 B 中每一个 x ，有 $f(x)=b$

证 我们只要就区间 $[0,1]$ 的情形来讨论就够了。一般情形可以由此推出。证明的第一步是应用正规性构造 X 的开集族 U_p ，其中下标是有理数。然后利用这些集合来确定连续函数 f 。

第一步．设 P 是区间[0，1]中的所有有理数构成的集合①，对于每一个 $p \in P$ ，我们定义 X 中的一个开集 U_p ，使得当 $p<q$ 时，有

$$\bar{U}_p \subset U_q.$$

这样，包含关系便是这些集合 U_p 间的一个全序，这个全序与下标在实直线上通常的序关系相同.

由于 P 是可数的，我们可以通过归纳原则(确切地说是应用归纳定义原理)来定义这些集合 U_p 。以某种方式将 P 中元素排列成一个无穷序列；为了方便起见，不妨设1和0就是序列最前面的两个元素。

现在定义集合 U_p 如下：首先，令 $U_1=X-B$ 。其次，因为 A 是包含在开集 U_1 中的闭集，根据 X 的正规性，可以选取一个开集 U_0 使得

$$A \subset U_0 \quad \text{和} \quad \bar{U}_0 \subset U_1.$$

一般地，令 P_n 表示有理数序列中前 n 项所构成的集合，假设对于所有属于 P_n 的有理数 p ，开集 U_p 都已经定义好了，并且满足条件

$$p<q \Longrightarrow \bar{U}_p \subset U_q. \tag{*}$$

设 r 表示有理数序列中第 $n+1$ 项，我们来定义 U_r

考虑集合 $P_{n+1}=P_n \cup\{r\}$ 。它是区间 $[0,1]$ 的一个有限子集，并且它有一个由实直线上通常的序关系 $<$ 给出的全序。在一个有限的全序集中，每一个元素（除了最小元和最大元外）有一个直接前元和一个直接后元（见定理10.1）。这个全序集 P_{n+1} 的最小元是0，最大元是1， r 既不是0也不是1，所以 r 在 P_{n+1} 中有一个直接前元 p 和一个直接后元 q 。集合 U_p 和 U_q 已有定义，并且根据归纳假设，有 $\overline{U}_p \subset U_q$ 。应用 X 的正规性，我们能找到 X 的一个开集 U_r ，使得

$$\bar{U}_p \subset U_r \quad \text{和} \quad \bar{U}_r \subset U_q.$$

我们断言：对于 P_{n+1} 中的每一对元素， $(*)$ 成立。若这两个元素都属于 P_n ，则由归纳假定可见 $(*)$ 成立。若它们中有一个是 r ，另一个是 P_n 中的点 s ，那么在 $s \leqslant p$ 的情况下有

$$\bar{U}_s \subset \bar{U}_p \subset U_r,$$

在 $s \geqslant q$ 的情况下有

$$\bar{U}_r \subset U_q \subset U_s.$$

于是，对于 P_{n+1} 中每一对元素， $(\star)$ 成立.

根据归纳原则，对于所有的 $p \in P$ ， U_p 已有定义.

为更清楚地说明这个过程，假设我们先用标准方式将 P 中的元素排成无穷序列：

$$P=\left\{1,0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\ldots\right\}$$

在定义 U_0 和 U_1 之后，我们定义 $U_{1/2}$ ，使得 $\overline{U}_0 \subset U_{1/2}$ ，且 $\overline{U}_{1/2} \subset U_1$ 。于是在 U_0 与 $U_{1/2}$ 之间有相应的 $U_{1/3}$ 。在 $U_{1/2}$ 与 U_1 之间有相应的 $U_{2/3}$ 等等。图33.1里所描绘的就是第八步时的情况，而第九步就是在 $U_{1/3}$ 和 $U_{1/2}$ 之间选取开集 $U_{2/5}$ 。如此等等。

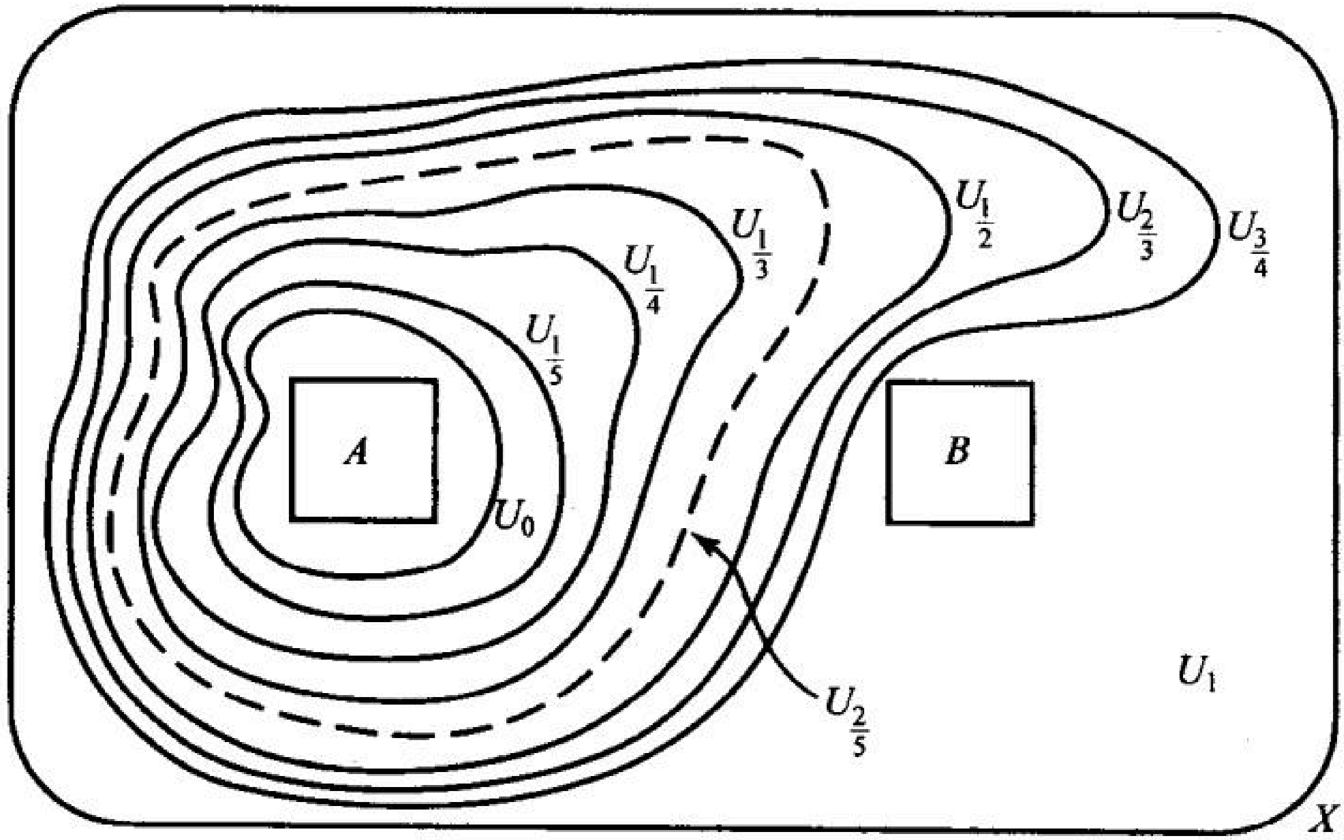


图 33.1

第二步．现在对于区间[0，1]中每一个有理数 p ，我们已定义了 U_p ．我们将上述定义扩充到 $\mathbb{R}$ 中所有的有理数 p 上，方法如下：

$$U_p = \emptyset \qquad \text{如 果} p < 0,$$
$$U_p = X \qquad \text{如 果} p > 1.$$

可以验证，对于任意一对有理数 p 和 q ，

$$p < q \Longrightarrow \bar{U}_p \subset U_q$$

仍然是正确的.

第三步．给定 X 的一个点 $\boldsymbol{x}$ ，我们定义 $\mathbb{Q}(x)$ 为这样一些有理数 $\boldsymbol{p}$ 的集合： $\boldsymbol{p}$ 所对应的开集 U_p 包含 $\boldsymbol{x}$ ，即

$$\mathbb{Q}(x) = \{p \mid x \in U_p\}.$$

因为对于 $p < 0$ ，没有点 x 属于 U_p ，所以 $\mathbb{Q}(x)$ 不包含小于0的数．又因为对于 $p > 1$ ，每一个

x 都在 U_p 中，所以 $\mathbb{Q}(x)$ 包含大于1的每一个数．因此， $\mathbb{Q}(x)$ 是有下界的，并且它的下确界是区间[0，1]中的点．于是规定

$$f(x) = \inf_{\mathbb{Q}}(x) = \inf \{p \mid x \in U_p\}.$$

第四步．证明 f 就是所求的函数．若 $x \in A$ ，则对于每一个 $p \geqslant 0$ ，有 $x \in U_p$ ，于是 $\mathbb{Q}(x)$ 等于非负有理数集，所以 $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = 0$ ，类似地，若 $x \in B$ ，因没有 $p \leqslant 1$ 使得 $x \in U_p$ ，于是 $\mathbb{Q}(x)$ 由所有大于1的有理数组成．因此 $f(x) = 1$

所有这些都是容易的，唯一困难的部分是证明 f 的连续性．为此，我们先证明以下几个基本事实：

(1) $x \in \overline{U}_r \Rightarrow f(x) \leqslant r$.
(2) $x \notin U_r \Rightarrow f(x) \geqslant r$.

为了证明(1)，注意这样一个事实：如果 $x \in \overline{U}_r$ ，则对任何 $s > r$ ， $x \in U_s$ 。因此， $\mathbb{Q}(x)$ 包含所有大于 r 的有理数。于是根据定义有

$$f(x) = \inf_{\mathbb{Q}}(x) \leqslant r.$$

再来证明(2). 注意这样一个事实: 如果 $x \notin U_r$, 则对于任何 $s<r$, x 不在 U_s 中. 因此, $\mathbb{Q}(x)$ 不包含小于 r 的有理数, 于是

$$f(x)=\inf_{\mathbb{Q}}(x) \geqslant r$$

现在我们来证明 f 的连续性．给定 X 的一个点 x_0 和 $\mathbb{R}$ 中包含点 $f(x_0)$ 的开区间 (c,d) 要找 x_0 的一个邻域 U ，使得 $f(U) \subset (c,d)$ ．取有理数 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ ，使得

$$c<p<f\left(x_0\right)<q<d$$

我们断言开集

$$U=U_q-\bar{U}_p$$

就是所要找的点 x_0 的邻域．如图33.2所示，

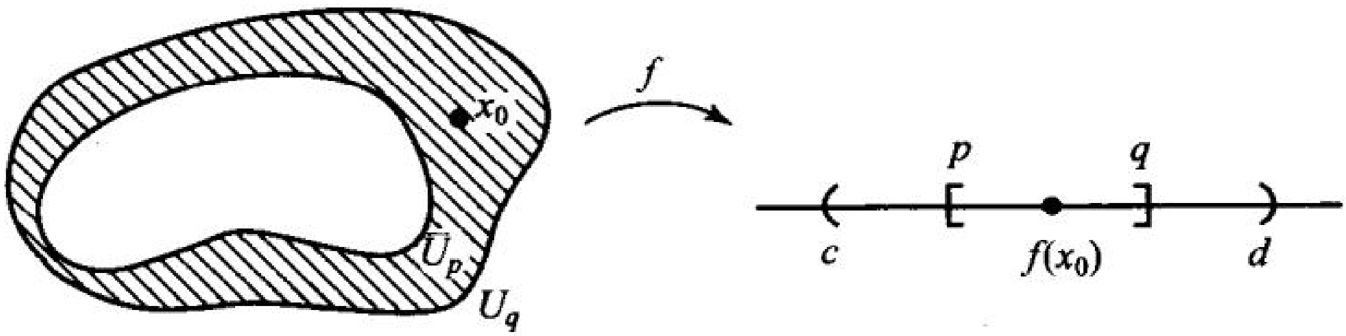


图 33.2

首先，注意 $x_0 \in U$ 。因为根据(2)及 $f(x_0)<q$ 可见 $x_0 \in U_q$ 。同时，再根据(1)及 $f(x_0)>p$ 可见 $x_0 \notin \overline{U}_p$
其次，我们证明 $f(U) \subset (c,d)$ 。令 $x \in U$ 。这时有 $x \in U_q \subset \overline{U}_q$ ，因此根据(1)可见 $f(x) \leqslant q$ 。又由于 $x \notin \overline{U}_p$ ，所以 $x \notin U_p$ ，并且根据(2)有 $f(x) \geqslant p$ 。从而， $f(x) \in [p,q] \subset (c,d)$ 。定理证毕

能用一个连续函数分离（can be separated by a continuous function）

A 和 B 是拓扑空间 X 的两个子集，如果存在一个连续函数 $f: X \rightarrow [0,1]$ ，使得 $f(A)=\{0\}$ 及 $f(B)=\{1\}$ ，那么就称 A 和 B **能用一个连续函数分离（can be separated by a continuous function）**

Urysohn 引理说明，如果 X 中每一对无交的闭集能用无交的开集分离，那么它们也能用一个连续函数分离。其逆是显然的。因为若 $f: X \rightarrow [0,1]$ 是所述的连续函数，则 $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ 和 $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right)$ 就是分别包含 A 和 B 的无交的开集。

现在可能会提出这样的问题：Urysohn引理的证明是否能推广到正则空间上．既然在正则空间上能用无交的开集来分离点和闭集，那么是否也能用连续函数来分离点和闭集呢?

乍看起来，似乎可以像 Urysohn 引理的证明一样，先取一点 a 和一个不包含这一点的闭集 B ，如前面那样，定义 $U_1=X-B$ 。然后应用 X 的正则性，选取包含点 a 的一个开集 U_0 ，使得它的闭包含在 U_1 中。但在紧接着下一步的证明中，就遇到了困难。设 p 是序列中在 0 和 1 后面的一个有理数，要想找到一个开集 U_p ，使得 $\overline{U}_0 \subset U_p$ ，并且 $\overline{U}_p \subset U_1$ 。对于这一点，光靠正则性就不够了。

事实上，能够用一个连续函数来分离点和闭集，这比要求用无交的开集来分离它们的条件更强．我们把这一条件当作一个新的分离公理:

定义 空间 X 称为完全正则的 (completely regular), 如果每一个单点集是闭集, 并且对于 X 中的每一个点 x_0 和不包含 x_0 的任何一个闭集 A , 存在一个连续函数 $f: X \rightarrow [0,1]$, 使得 $f(x_0)=1$ 和 $f(A)=\{0\}$.

根据Urysohn引理，一个正规空间一定是完全正则的，并且一个完全正则的空间一定是正则的．这是因为，给定 f ，集合 $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$ 和 $f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$ 是分别包含 A 和点 x_0 的无交开集．于是，完全正则性就介于分离公理中的正则性和正规性之间．注意，定义中我们可以让函数 f 将 x_0 映射到0，将 A 映射到 $\{1\}$ ．因为函数 $g(x)=1-f(x)$ 就满足这一条件．但我们的定义要方便些.

在拓扑学的早年发展中，分离公理曾根据其性质由弱到强被排序为 T_1 、 T_2 (Hausdorff)、 T_3 (正则性)、 T_4 (正规性)和 T_5 (完全正规性). 字母“T”就是德语“Trennungsaxiom”，意思是“分离公理”. 后来，当引入了完全正则的概念时，一些学者建议将其称为“ $T_{3\frac{1}{2}}$ 公理①”，因为它介于正则性和正规性之间．事实上，在一些文献中就用到这一术语.

与正规性不同，这个新的分离公理对于子空间和积空间而言有良好的表现.

定理33.2 完全正则空间的子空间是完全正则的，完全正则空间的积空间是完全正则的。

证 设 X 是完全正则的， Y 是 X 的一个子空间。令 x_0 是 Y 的一个点， A 是 Y 中的一个不包含点 x_0 的闭集。那么 $A=\overline{A}\cap Y$ ，其中 $\overline{A}$ 表示 A 在 X 中的闭包。因此， $x_0\notin\overline{A}$ 。根据 X 的完全正则性，我们可以选取连续函数 $f:X\to[0,1]$ ，使得 $f(x_0)=1$ 和 $f(\overline{A})=\{0\}$ 。于是 f 在 Y 上的限制就是所要求的连续函数。

设 $X=\Pi X_\alpha$ 是完全正则空间的一个积空间．令 $\boldsymbol{b}=(b_\alpha)$ 是 X 的一个点， A 是 X 中不包含点 $\boldsymbol{b}$ 的闭集．选取一个基元素 ΠU_α ，使得它包含点 $\boldsymbol{b}$ 并且与 A 无交．于是除了有限多个 α 外，有 $U_\alpha=X_\alpha$ ，这有限多个 α 不妨设为 $\alpha=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ，给定 $i=1,\ldots,n$ ，选取连续函数

$$f_i:X_{\alpha_i}\to[0,1],$$

使得 $f_i(b_{\alpha_i})=1$ 及 $f_i(X-U_{\alpha_i})=\{0\}$. 令 $\phi_i(\boldsymbol{x})=f_i(\pi_{\alpha_i}(\boldsymbol{x}))$, 则 ϕ_i 连续地将 X 映射到 $\mathbb{R}$, 并且在 $\pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ 之外取值为零. 于是积

$$f(\boldsymbol{x})=\phi_1(\boldsymbol{x})\cdot\phi_2(\boldsymbol{x})\cdot\cdots\cdot\phi_n(\boldsymbol{x})$$

就是所求的 X 上的连续函数，因为在 $\boldsymbol{b}$ 点处取值为1，在 ΠU_α 外取值为零.

例1 空间 $\mathbb{R}_l^2$ 和 $S_\Omega\times\bar{S}_\Omega$ 都是完全正则的，但不是正规的。因为它们都是完全正则空间（实际上是正规空间）的积空间。

要找一个正则却非完全正则的空间是比较困难的，已给出的大多数例子都很复杂，并要求熟悉基数理论．最近，Thomas[T]构造了一个简单得多的例子，我们放在习题11中.

练习

1. 验证 Urysohn 引理的证明，并且证明：对于给定的 r

$$f^{-1}(r)=\bigcap_{p>r}U_p-\bigcup_{q<r}U_q,$$

其中 p 和 q 为有理数

2. (a) 证明：多于一点的连通的正规空间是不可数的。

(b) 证明：多于一点的连通的正则空间是不可数的。①[提示：任意可数空间都是Lindelöf空间。]

3. 在度量空间 (X,d) 上令

$$f(x)=\frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)},$$

据此给出 Urysohn 引理的一个直接证明.

4. 我们曾经说过，若 A 能表示成 X 中可数个开集的交，则称 A 是 X 中的一个“ G_δ 集”

定理 设 X 是正规的。存在一个连续函数 $f:X\to[0,1]$ ，使得当 $x\in A$ 时， $f(x)=0$ ；当 $x\notin A$ 时， $f(x)>0$ 的充分必要条件是 A 为 X 中的一个闭的 G_δ 集。

满足此定理要求的函数称作是恰好在 $\boldsymbol{A}$ 上蜕化的（vanish precisely on A).

5. 证明：

定理(Urysohn引理的强形式）设 X 是一个正规空间．存在一个连续函数 $f:X\to[0,1]$ 使得当 $x\in A$ 时 $f(x)=0$ ；当 $x\in B$ 时 $f(x)=1$ ；对于其他情形，有 $0<f(x)<1$ 当且仅当 A 和 B 是 X 的两个无交的闭的 G_δ 集.

6. 一个空间 X 被称为完美正规的(perfectly normal)，如果 X 的每一个闭子集都是 X 的一个 G_δ 集。

(a)证明：每一个可度量化空间都是完美正规的，
(b)证明：完美正规空间都是完全正规的．因此，有时将完美正规条件称为“ T_6 公理”．[提示：设 A 和 B 是 X 中的两个分离集．选取连续函数 $f,g:X\to[0,1]$ 使得它们分别恰在 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 上蜕化．考虑函数 $f-g$.]
(c)存在一个熟悉的空间，它是完全正规的，但不是完美正规的．这个空间是哪个呢?

7. 证明每一个局部紧致的 Hausdorff 空间是完全正则的。
8. 设 X 是完全正则的， A 和 B 是 X 中的无交闭子集。证明：若 A 是紧致的，则存在连续函数 $f: X \to [0,1]$ 使得 $f(A)=\{0\}$ 和 $f(B)=\{1\}$ 。
9. 证明 $\mathbb{R}^J$ 在箱拓扑下是完全正则的。[提示：指出只需要考虑箱邻域 $(-1,1)^J$ 与集合 A 无交，点 x 为坐标原点这样一个特殊情形。然后再应用一致拓扑下的连续函数也是箱拓扑下的连续函数这个结论。]

*10. 证明以下结论：

定理 每一个拓扑群都是完全正则的.

证明：在拓扑群 G 中，设 V_0 是单位元 $\boldsymbol{e}$ 的一个邻域．一般地，选取 $\boldsymbol{e}$ 的一个邻域 V_n ，使得 $V_n \cdot V_n \subset V_{n-1}$ ．考虑所有二进制有理数 $\boldsymbol{p}$ 构成的集合，即所有形如 $k/2^n$ 的有理数，其中 $\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 都是整数．对于(0，1]中的每一个二进制有理数 $\boldsymbol{p}$ ，给出一个开集 $U(p)$ ，其中 $U(p)$ 用以下方式归纳定义： $U(1)=V_0$ ，并且 $U\left(\frac{1}{2}\right)=V_1$ ．给定 $\boldsymbol{n}$ ，假设对于 $0<k/2^n \leqslant 1$ ， $U(k/2^n)$ 已有定义，然后对于 $0<k<2^n$ 定义

$$\begin{aligned}&U(1/2^{n+1})=V_{n+1},\\&U((2k+1)/2^{n+1})=V_{n+1}\cdot U(k/2^n).\end{aligned}$$

对于 $p \leqslant 0$ ，令 $U(p)=\varnothing$ 。对于 $p>1$ ，令 $U(p)=G$ 。证明对于所有的 k 和 n ，

$$V_n \cdot U(k/2^n) \subset U((k+1)/2^n).$$

后面的证法如Urysohn引理的证明.

这个习题来自[M-Z]，读者可以在那里看到更多的关于拓扑群的结论.

*11. 定义集合 X 如下：对于每一个偶数 m ，令 L_m 表示平面中的线段 $m \times[-1,0]$ ，对于每一个奇数 n 和整数 $k \geqslant 2$ ，设 $C_{n,k}$ 为平面中的线段 $(n+1-1/k)\times[-1,0]$ 和 $(n-1+1/k)\times[-1,0]$ 以及半圆

$$\{x \times y \mid (x-n)^2+y^2=(1-1/k)^2 \quad 且 y \geqslant 0\}$$

的并．设 $p_{n,k}$ 是这个半圆的最高的点 $n \times(1-1/k)$ ，设 X 是集合 L_m 和 $C_{n,k}$ ，以及另外的两个点 a, b 的并．通过取以下四种集合构成拓扑基，将 X 拓扑化：

(i) X 与不包含点 $p_{n,k}$ 的水平开线段的交

(ii)从这些集合 $C_{n,k}$ 的某一个中删除有限多个点得到的集合.

(iii)对于每一个偶数 m ， $\{a\}$ 与 X 中所有满足 $x<m$ 的点 $x \times y$ 构成的集合之并.

(iv) 对于每一个偶数 m , $\{b\}$ 与 X 中所有满足 $x>m$ 的点 $x \times y$ 构成的集合之并.

(a) 画出 X 的草图. 证明: 这些集合构成了 X 的一个拓扑基.

(b) 设 f 是 X 上的一个连续实值函数。证明：对于任意 c ，集合 $f^{-1}(c)$ 是 X 中的一个 G_δ 集。(这一点对于任意空间 X 都是正确的。）证明由 $C_{n,k}$ 中满足 $f(p) \neq f(p_{n,k})$ 的点 p 构成的集合 $S_{n,k}$ 是可数的。选取 $d \in[-1,0]$ ，使得直线 $y=d$ 与集合 $S_{n,k}$ 无交。证明：对于奇数 n ，

$$f((n-1)\times d)=\lim_{k\to\infty} f(p_{n,k})=f((n+1)\times d).$$

验证 $f(a)=f(b)$

(c)证明 X 是正则的，但不是完全正则的.

第22节 Urysohn度量化定理

现在我们来证明本章的标志性定理，这个定理给出了拓扑空间为可度量化空间的条件。它的证明融汇了本书前面陈述的许多内容，不仅要用到第2章关于度量拓扑的结论，而且还要用到本章刚刚证明的与可数性公理及分离性公理有关的结论。证明的基本思路虽然简单但却很实用，读者将在后文中多次见到它的不同表达形式
这里有两种证明方式，因为每一种方式在今后都有相应的推广，因此，我们把这两种方式都写出来。第一种方式将在第5章中证明关于完全正则空间的一个嵌入定理时得到推广，第二种方式则在第6章中证明 Nagata-Smirnov 度量化定理时得到推广

> **THM Urysohn度量化定理(Urysohn metrization theorem)**

每一个有可数基的正则空间 X 都可度量化

我们通过证明 X 能够被嵌入到一个可度量化的空间 Y 中，也就是证明 X 同胚于 Y 的一个子空间，从而得到 X 是可度量化的。两种证明的差别就在于对可度量化空间 Y 的选择。第一种方式，将 Y 取作具有积拓扑的空间 $\mathbb{R}^\omega$ ，我们已经证明了这个空间是可度量化的（定理20.5）。第二种方式仍取 Y 为 $\mathbb{R}^\omega$ ，但拓扑是由一致度量 $\bar{\rho}$ （见第20节）所诱导的。在每一种情形下，我们的证明本质上都是要把 X 嵌入到 $\mathbb{R}^\omega$ 的子空间 $[0,1]^\omega$ 中。

第一步．我们证明：存在由连续函数 f_n ： $X \to [0,1]$ 构成的一个可数族，满足条件：对于 X 中任意给定的一个点 x_0 及 x_0 的一个邻域 U ，存在一个指标 $\boldsymbol{n}$ ，使得 f_n 在 x_0 处取正值，而在 U 的外部蜕化

这是Urysohn引理的一个直接结果，即对于给定的 x_0 和 x_0 的一个邻域 U ，存在这样一个连续函数．然而，倘若我们对于每一偶对 (x_0,U) 都选取一个相应的函数的话，那么所得到的函数族一般来说是不可数的．因此，我们的任务就是减小这个函数族的基数．以下是一种可行的方法

设 $\{B_n\}$ 是 X 的一个可数基．对于每一对使得 $\overline{B}_n \subset B_m$ 的指标 n,m ，应用Urysohn引理，选取一个连续函数 $g_{n,m}: X \to [0,1]$ 使得 $g_{n,m}(\overline{B}_n)=\{1\}$ 且 $g_{n,m}(X-B_m)=\{0\}$ ．于是，函数族 $\{g_{n,m}\}$ 满足：对于给定的 x_0 及 x_0 的邻域 U ，我们可以选取基中一个元素 B_m 包含 x_0 并且包含于 U ．根据正则性，我们然后可以选取 B_n 使得 $x_0 \in B_n$ 和 $\overline{B}_n \subset B_m$ ．于是，对于指标的偶对 n,m ，就给出了 $g_{n,m}$ 的定义，并且 $g_{n,m}$ 在 x_0 取正值，在 U 外蜕化．由于函数族 $\{g_{n,m}\}$ 的指标集是 $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ 的一个子集，所以它是一个可数族．因此它可以用正整数作为指标重新标记，于是我们便得到了所需的函数族 $\{f_n\}$

第二步（第一种方式）. 设 $\{f_n\}$ 为第一步中给出的函数族．赋予 $\mathbb{R}^\omega$ 积拓扑，并且给定一个映射 $F: X \to \mathbb{R}^\omega$ ，定义为：

$$F(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots)$$

我们断言 F 是一个嵌入

首先，由于 $\mathbb{R}^\omega$ 上具有积拓扑，并且每一个 f_n 都是连续的，所以 F 是连续的．其次，因为对于给定的 $x \neq y$ ，便存在一指标 n 使得 $f_n(x)>0$ 和 $f_n(y)=0$ ，所以 $F(x) \neq F(y)$ ，因此 F 是一个单射

最后，我们还须证明 F 是从 X 到像集的一个同胚，也就是到 $\mathbb{R}^\omega$ 的子空间 $Z=F(X)$ 的一个同胚．我们知道： F 定义了一个从 X 到 Z 的连续的一一映射，因而仅需证明对于 X 的每一开集 U ， $F(U)$ 是 Z 中的一个开集．设 z_0 为 $F(U)$ 中一点，我们只需证明存在 Z 中的一个开集 W 使得

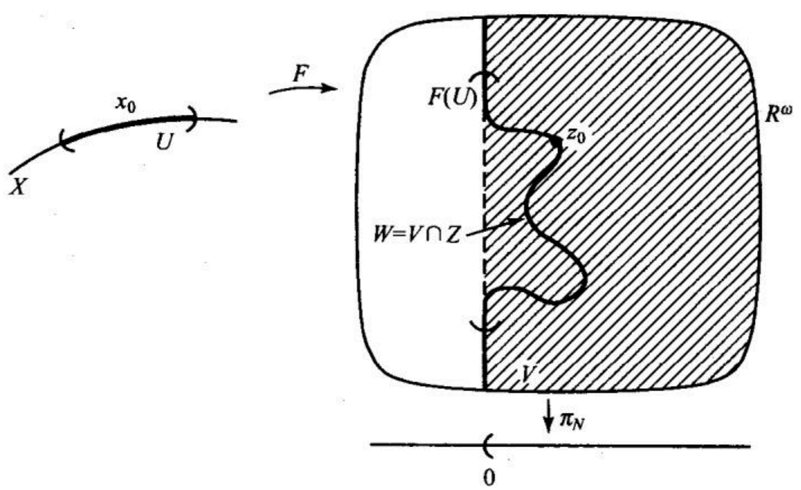
$$z_0 \in W \subset F(U)$$

设 x_0 为 U 的一个点，使得 $F(x_0)=z_0$ 。选取一个指标 N 使得 $f_N(x_0)>0$ 并且 $f_N(X-U)=\{0\}$ 。取 $\mathbb{R}$ 中的开射线 $(0,+\infty)$ ，令 V 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的开集

$$V=\pi_N^{-1}((0,+\infty))$$

设 $W=V \cap Z$ 。于是根据子空间拓扑的定义可见 W 是 Z 的一个开集。参见图34.1。我们断言： $z_0 \in W \subset F(U)$ 。首先， $z_0 \in W$ ，因为

$$\pi_N(z_0)=\pi_N(F(x_0))=f_N(x_0)>0$$



其次， $W \subset F(U)$ ，这是由于：若 $z \in W$ ，则对于某一个 $x \in X$ 有 $z=F(x)$ ，并且 $\pi_N(z) \in (0,+\infty)$ ，因为 $\pi_N(z)=\pi_N(F(x))=f_N(x)$ 以及 f_N 在 U 外蜕化，所以点 $\boldsymbol{x}$ 必定属于 U ，于是 $z=F(x)$ 在 $F(U)$ 中．这便是我们所要证明的

从而 F 便是一个 X 到 $\mathbb{R}^n$ 的嵌入

第三步（第二种方式）．在以下证明中，我们是将 X 嵌入到度量空间 $(\mathbb{R}^\omega,\bar{\rho})$ 中．事实上，我们是将 X 嵌入到度量空间 $[0,1]^\omega$ ， $\bar{\rho})$ 中，其中度量 $\bar{\rho}$ 就等于度量

$$\rho(x,y)=\sup\{|\ x_i-y_i\ |\}$$

我们应用第一步中构造的函数 f_n: $X \to [0,1]$ 的可数族。但这次我们附加一个条件：对于所有的 x ， $f_n(x) \leqslant 1/n$ 。（这个条件是容易满足的，我们仅需将每一个函数 f_n 除以 n 便可以了）
像前面一样，定义函数 $F: X \to [0,1]^\omega$ 使其满足

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots)$$

我们断言： F 是到度量空间 $([0,1]^\omega, \rho)$ 中的一个嵌入。由第二步的证明中可见 F 是一个单射。此外，我们知道：若在 $[0,1]^\omega$ 上取积拓扑，那么映射 F 将 X 的开集映为子空间 $Z = F(X)$ 的开集。而当我们考虑由度量 ρ 诱导的 $[0,1]^\omega$ 上更细的拓扑时，上述性质依然成立
余下有待证明的就是 F 的连续性．它已不再是各个分量函数连续性的直接推论，因为现在使用的已经不再是 $\mathbb{R}^n$ 上的积拓扑了．这就是要附加 $f_n(x) \leqslant 1/n$ 这个条件的原因
设 x_0 是 X 的一个点， $\varepsilon > 0$ 。为了证明连续性，我们需要找到 x_0 的一个邻域 U 使得对于所有 $x \in U$ ，有

$$x \in U \Longrightarrow \rho(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$$

首先，选取充分大的 N ，使得 $1/N \leqslant \varepsilon/2$ 那么对于每一个 $n = 1$ ， $\ldots$， N 应用 f_n 的连续性，选取 x_0 的一个邻域 U_n 使得对于 $x \in U_n$ 有

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant \varepsilon/2$$

令 $U = U_1 \cap \cdots \cap U_N$ ，我们证明 U 就是所求的 x_0 的邻域．设 $x \in U$ ．若 $n \leqslant N$ ，则由 U 的选取可见

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leqslant \varepsilon/2$$

若 $n > N$ ，则

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < 1/N \leqslant \varepsilon/2$$

因为 f_n 将 X 映入 $[0, 1/n]$. 所以，对于每一个 $x \in U$ 有

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$$

定理证毕

在上述证明的第二步中，实际上我们证明了一个比所陈述的结果更强的结论．为以后使用方便起见，我们在此将其表述如下

> **THM 嵌入定理(imbedding theorem)**
>
> X 是一个空间，其中的每一个单点集是闭集。假定 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是连续函数的一个加标族，其中 $f_\alpha: X \to \mathbb{R}$ 满足：对于 X 中每一点 x_0 以及 x_0 的每一邻域 U ，存在一个指标 α 使得 f_α 在 x_0 取正值并且在 U 之外取0。那么由
>
> $$F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$
>
> 所定义的函数 $F: X \to \mathbb{R}^J$ 是一个 X 到 $\mathbb{R}^J$ 的嵌入。若对于每一个 α 有 f_α 将 X 映入$[0,1]$中，则 F 将 X 嵌入$[0,1]$

证明几乎完全是上述定理证明中第二步的翻版，只须用 α 代替 n ，用 $\mathbb{R}^J$ 代替 $\mathbb{R}^\omega$ 。其中 X 中的单点集是闭集的条件是为了保证当 $x \neq y$ 时存在一个指标 α 使得 $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$

满足这一定理中条件的连续函数族称之为分离 X 中的点与闭集的函数族。我们已清楚地看到：对于每一个满足单点集是闭集的空间，这样的函数族的存在等价于 X 是完全正则的。因而，我们有以下直接推论

> **COR**
>
> 一个空间 X 是完全正则空间当且仅当对于某一个 J , X 同胚于 $[0,1]^J$ 的一个子空间

练习

1. 举例说明具有可数基的Hausdorff空间未必是一个可度量化空间.
2. 举例说明一个完全正规并且满足第一可数性公理、Lindelöf条件及具有可数稠密子集的空间未必是一个可度量化空间。
3. 设 X 是一个紧致的 Hausdorff 空间。证明 X 是可度量化的当且仅当 X 有可数基。
4. 设 X 是一个局部紧致的 Hausdorff 空间。 X 有可数基是否意味着 X 是可度量化的? X 是一个度量空间是否意味着 X 有可数基?
5. 设 X 是一个局部紧致的 Hausdorff 空间。设 Y 为 X 的单点紧致化。 X 有可数基是否蕴涵着 Y 是可度量化的? Y 可度量化是否意味着 X 有可数基?
6. 验证定理 34.2 证明的细节.
7. 一个空间称为局部可度量化的 (locally metrizable), 如果对于 X 的每一个点 x , 存在一个邻域关于子空间拓扑是可度量化的. 证明: 一个紧致的 Hausdorff 空间, 如果它是局部可度量化的, 那么它是可度量化的. [提示: 证明 X 是有限个具有可数基的开子空间之并.]
8. 证明：一个局部可度量化空间，如果它是正则的Lindelof空间，那么它是可度量化的。[提示．Lindelof空间的闭子空间是Lindelof空间。]正则性是关键的。你的证明中何处用到了它?
9. 设紧致的 Hausdorff 空间 X 是两个闭子空间 X_1 和 X_2 之并。若 X_1 和 X_2 是可度量化的，证明 X 也是可度量化的。[提示：构造 X 的开集所组成的一个可数族 $\mathcal{A}$ ，使得对于 $i=1,2,\mathcal{A}$ 的元素与 X_i 的交构成了 X_i 的一个基。假设 X_1-X_2 和 X_2-X_1 属于 $\mathcal{A}$ 。取 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 中所有元素的有限交所构成的族。]

第23节 Tietze 扩张定理

Tietze 扩张定理是 Urysohn 引理的一个直接推论, 这是一个很有用的定理. 它所处理的问题是, 将定义在 X 的一个子空间上的实值连续函数扩张成为定义在整个空间 X 上的连续函数. 这个定理在拓扑学的许多应用中很重要.

定理35.1[Tietze扩张定理（Tietze extension theorem)] 设 X 是一个正规空间。 A 是 X 的一个闭子集。则

(a) 任何一个从 A 到 $\mathbb{R}$ 的闭区间 $[a,b]$ 中的连续映射都可以扩张为从整个空间 X 到 $[a,b]$ 中的一个连续映射.

(b) 任何一个从 A 到 $\mathbb{R}$ 中的连续映射都可以扩张为从整个空间 X 到 $\mathbb{R}$ 中的一个连续映射.

证 定理证明的思路是构造一个定义在整个空间 X 上的连续函数序列 s_n ，使得序列 s_n 一致收敛，并且 s_n 在 A 上的限制随着 n 的增大愈来愈逼近 f 。于是其极限函数是连续的，并且它在 A 上的限制等于 f 。

第一步．这一步是在整个 X 上构造一个特别的函数 $\boldsymbol{g}$ ，使得 $\boldsymbol{g}$ 不太大并且在集合 A 上可

以相当精确地逼近 f ，更确切地说，我们考虑 $f:A\to[-r,r]$ 的情形．我们断言：存在一个连续函数 $g:X\to\mathbb{R}$ 使得

$$|g(x)|\leqslant\frac{1}{3}r$$

对于所有 $x\in X$

$$|g(a)-f(a)|\leqslant\frac{2}{3}r$$

对于所有 $a\in A$

函数 g 的构造如下:

将区间 $[-r,r]$ 分成三个长度都等于 $\frac{2}{3}r$ 的区间.

$$I_1=[-r,-\frac{1}{3}r],\quad I_2=[-\frac{1}{3}r,\frac{1}{3}r],\quad I_3=[\frac{1}{3}r,r].$$

令 A 的子集 B 和 C 分别为

$$B=f^{-1}(I_1)\quad 和 \quad C=f^{-1}(I_3).$$

因为 f 是连续的，所以 B 和 C 是 A 中无交的闭子集．因此，它们是 X 的闭集．根据Urysohn引理，存在一个连续函数

$$g:X\to\left[-\frac{1}{3}r,\frac{1}{3}r\right]$$

满足条件：对于 B 中每一点 x ， $g(x)=-\frac{1}{3}r$ ，对于 C 中每一点 x ， $g(x)=\frac{1}{3}r.$

于是对于所有的 x ， $|g(x)|\leqslant\frac{1}{3}r.$ 我们断言：对于 A 中的每一个点 a ，

$$| g(a)-f(a) | \leqslant \frac{2}{3} r.$$

这里有三种情况。若 $a \in B$ ，则 $f(a)$ 和 $g(a)$ 都在 I_1 中。若 $a \in C$ ，则 $f(a)$ 和 $g(a)$ 都在 I_3 中。若 $a \notin B \cup C$ ，则 $f(a)$ 和 $g(a)$ 都在 I_2 中。因此，无论哪种情形，都有 $|g(a)-f(a)| \leqslant \frac{2}{3} r$ 。参见图 35.1。

第二步．现在我们来证明Tietze定理中的结论(a)．不失一般性，我们可以将 $\mathbb{R}$ 的任意闭区间 $[a, b]$ 改换成区间[-1，1].

设 $f: X \rightarrow[-1,1]$ 是一个连续映射。则 f 满足第一步中的假设的要求，其中 $r=1$ 。因此，存在一个定义在 X 上的连续实值函数 g_1 ，使得

$$\left|g_1(x)\right| \leqslant 1 / 3$$

对于 $x \in X$

$$| f(a)-g_1(a) | \leqslant 2 / 3$$

对于 $a \in A$.

考虑函数 $f-g_1$ ，它是从 A 到 $[-2 / 3,2 / 3]$ 中的映射，从而我们可以对于 $r=2 / 3$ 再次应用第一步的结果．我们得到一个定义在整个空间 X 上的实值函数 g_2 ，使得

$$| g_2(x) | \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$$

对于 $x \in X$

$$| f(a)-g_1(a)-g_2(a) | \leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

对于 $a \in A$

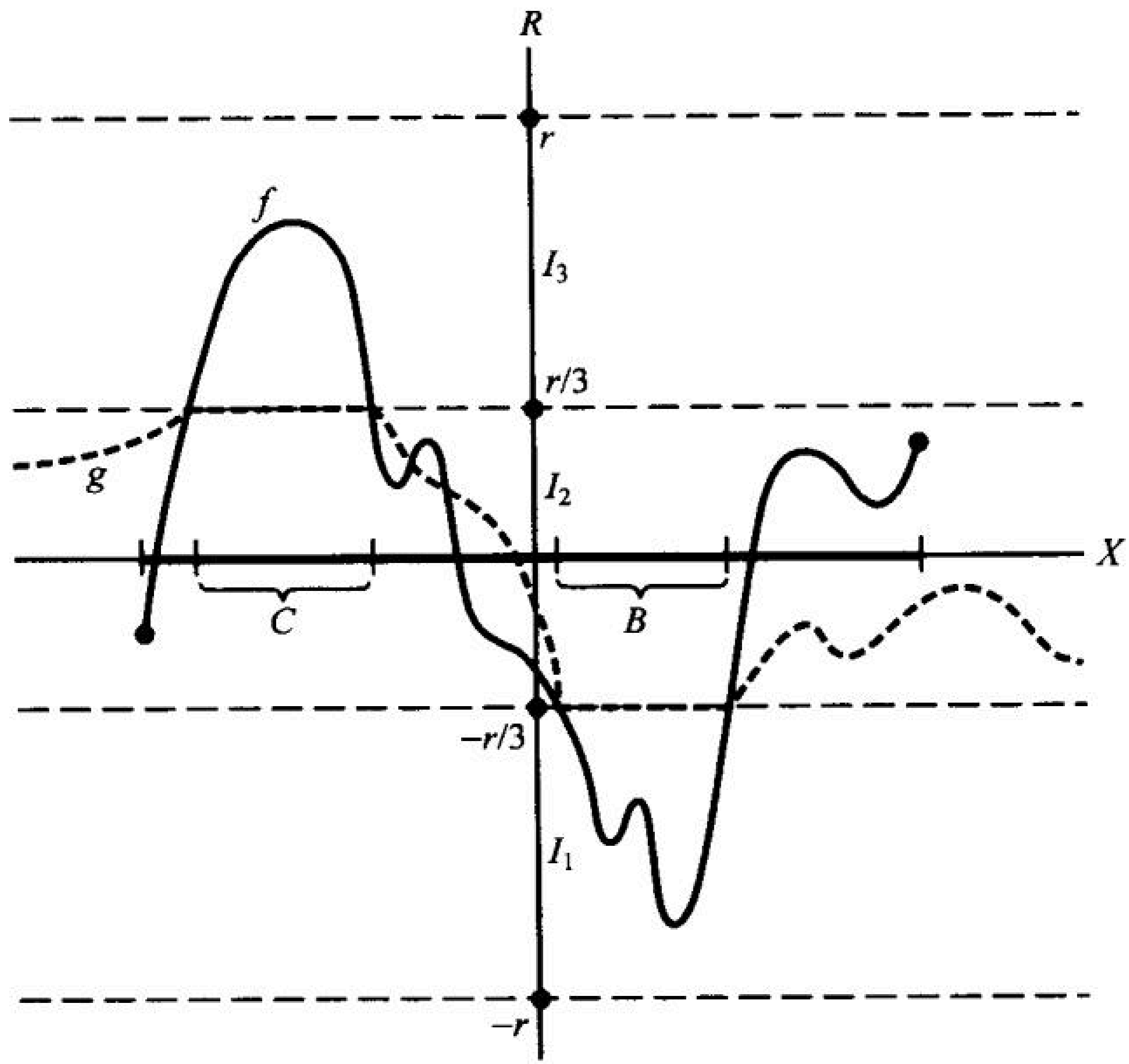


图35.1

然后，我们再对函数 $f-g_1-g_2$ 应用第一步的结果．依此类推.

一般地，我们有定义在整个空间 X 上的实值函数 $g_1,...,g_n$ ，使得对于 $a\in A$ 有

$$|\ f(a)-g_1(a)-\cdots-g_n(a)\ |\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

对于函数 $f-g_1-\cdots-g_n$ 以及 $r=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 应用第一步中的结论，我们得到一个定义在整个空间 X 上的实值函数 g_{n+1} ，使得

$$|\ g_{n+1}(x)\ |\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

对于 $x\in X$

$$|\ f(a)-g_1(a)-\cdots-g_{n+1}(a)\ |\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

对于 $a\in A$

根据归纳原则，对于每一个 n 定义了 g_n

对于 X 中的每一点 $\boldsymbol{x}$ ，我们现在定义

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x).$$

当然，我们还必须知道这个无穷级数的收敛性．而我们可以通过将其与几何级数

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

进行比较，应用微积分中的比较定理，得知这个级数是收敛的．

为了证明 g 的连续性，我们需要证明序列 s_n 一致收敛到 g 。根据数学分析中的“Weierstrass M-判别法”便可得到这个序列的一致收敛性。如果不用这个判别法，我们只须注意：当 $k>n$

时有

$$\begin{aligned}&\mid s_k(x)-s_n(x)\mid=\left|\sum_{i=n+1}^{k}g_i(x)\right|\\&\leqslant\tfrac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{k}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i-1}\\&<\tfrac{1}{3}\sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{i-1}=\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n}.\end{aligned}$$

固定 n ，并且令 $k\to\infty$ ，可见对于任何一个 $x\in X$ 有

$$\mid g(x)-s_n(x)\mid\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n}.$$

因此 s_n 一致收敛到 $\boldsymbol{g}$

以下证明：对于 $a\in A$ ， $g(a)=f(a)$ 。设 $s_n(x)=\sum_{i=1}^{n}g_i(x)$ ，即级数前 n 项的部分和。那么 $g(x)$ 是部分和的无穷序列 $s_n(x)$ 的极限。由于对于所有 A 中的点 a ，有

$$\left|f(a)-\sum_{i=1}^{n}g_i(a)\right|=|f(a)-s_n(a)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n},$$

所以对于所有的 $a\in A$ 有 $s_n(a)\to f(a)$. 从而，对于 $a\in A$ 有 $f(a)=g(a)$.

最后，我们来证明 g 是从 X 到 $[-1,1]$ 中的映射。事实上，它可以由级数 $(1/3)\sum(2/3)^n$ 收敛于 1 而轻松获得。然而，它不过是证明中的一个幸运巧合，而非证明的实质部分。倘若，我们已知的仅是 g 为从 X 到 $\mathbb{R}$ 中的一个映射，映射 $r:\mathbb{R}\to[-1,1]$ 为

$$r(y)=y$$

如果 $|y|\leqslant 1$

$$r(y)=y/|y|$$

如果 $|y|\geqslant 1$

则从 X 到 $[-1,1]$ 的映射 $r\circ g$ 便是 f 的一个扩张.

第三步．现在我们来证明定理中的结论(b)，这时 f 是从 A 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射．我们可以用 $(-1,1)$ 来代替 $\mathbb{R}$ ，因为这个区间同胚于 $\mathbb{R}$ ：

因而，令 f 是从 A 到 $(-1,1)$ 的一个连续映射。已经证明了的Tietze定理的前一部分告诉我们： f 可以扩张为从 X 到闭区间的一个连续映射 $g:X\to[-1,1]$ 。如何找到一个映射 h 将 X 映到这个开区间呢?

对于给定的 g ，定义一个 X 的子集 D

$$D=g^{-1}(\{-1\})\cup g^{-1}(\{1\}).$$

根据 g 的连续性可见， D 是 X 的一个闭子集。由于 $g(A)=f(A)$ 包含于 $(-1,1)$ ，所以集合 A 与 D 无交。再根据 Urysohn 引理，存在一个连续函数 $\phi:X\to[0,1]$ 使得 $\phi(D)=\{0\}$ 和 $\phi(A)=\{1\}$ 。定义

$$h(x)=\phi(x)g(x).$$

h 作为两个连续映射的乘积是连续的．由于对于 A 中的每一个点 $\boldsymbol{a}$ 有

$$h(a)=\phi(a)g(a)=1\cdot g(a)=f(a),$$

所以 h 也是 f 的一个扩张．最后， h 将整个空间 X 映入开区间 $(-1,1)$ 中．因为若 $x\in D$ ，则

$h(x)=0\cdot g(x)=0$ ；而当 $x\notin D$ 时， $\mid g(x)\mid<1$ ，由此可见 $\mid h(x)\mid\leqslant 1\bullet\mid g(x)\mid<1.$

练习

1. 证明Tietze扩张定理蕴涵着Urysohn引理
2. 在Tietze扩张定理的证明中，第一步将区间 $[-r,r]$ 三等分，这一巧妙方法的实质是什么？倘若将以上方式改为把这个区间拆分成以下三个区间

$$I_1=[-r,-ar],\quad I_2=[-ar,ar],\quad I_3=[ar,r],$$

其中 a 是满足 $0<a<1$ 的某一个实数。试问除 $a=1/3$ 以外， a 还有哪些值（如果存在的话）可以用于完成定理的证明?

3. 设 X 是可度量化的。证明以下命题等价：

(i) X 相对于每一个导出 X 的拓扑的度量是有界的.
(ii) 每一连续函数 $\phi:X\to\mathbb{R}$ 是有界的.
(iii) X 是极限点紧致的.

[提示：若 $\phi:X\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数，则 $F(x)=x\times\phi(x)$ 是从 X 到 $X\times\mathbb{R}$ 中的一个嵌入。如果 A 是 X 的一个没有极限点的无限子集，则 ϕ 是从 A 到 $\mathbb{Z}_+$ 的一个连续满射。]

4. 设 Z 是一个拓扑空间。若 Y 是 Z 的子空间，我们说 Y 是 Z 的一个收缩核(retract)，如果存在一个连续映射 $r:Z\to Y$ 使得对于任何一个 $y\in Y$ 有 $r(y)=y$ 。

(a) 证明：若 Z 是一个Hausdorff空间，并且 Y 是 Z 的一个收缩核，则 Y 是 Z 的一个闭子集.
(b) 设 A 是由 $\mathbb{R}^2$ 中两个点组成的子集，证明 A 不是 $\mathbb{R}^2$ 的收缩核.
(c) 设 S^1 为 $\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周。证明： S^1 是 $\mathbb{R}^2-\{\mathbf{0}\}$ 的一个收缩核，其中 $\mathbf{0}$ 是原点。请判断 S^1 是否为 $\mathbb{R}^2$ 的收缩核?

5. 一个空间 Y 称为具有通有扩张性质 (universal extension property), 若对于任意给定的由正规空间 X 、 X 的闭子集 A 以及一个连续函数 $f:A\to Y$ 所组成的每一个三元组, 存在一个从 X 到 Y 的连续映射为 f 的扩充.

(a) 证明 $\mathbb{R}^j$ 具有通有扩张性质.
(b) 证明：若 Y 同胚于 $\mathbb{R}^j$ 的一个收缩核，则 Y 也具有通有扩张性质.

6. 设 Y 是一个正规空间．称 Y 是一个绝对收缩核(absolute retract)，是指对于每一个空间偶对 (Y_0,Z) ，若 Z 是一个正规空间并且 Y_0 是 Z 中同胚于 Y 的一个闭子空间，则空间 Y_0 是 Z 的一个收缩核.

(a)证明：若 Y 具有通有扩张性质，则 Y 是一个绝对收缩核.
(b)证明：若 Y 是一个绝对收缩核并且 Y 是紧致的，则 Y 具有通有扩张性质．[提示：假设Tychonoff定理成立，从而有 $[0,1]^J$ 是正规的．将 Y 嵌入到 $[0,1]^J$.]

7. (a) 证明对数螺线

$$C=\{0\times 0\}\cup\left\{\mathrm{e}^t\cos t\times\mathrm{e}^t\sin t\mid t\in\mathbb{R}\right\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 的一个收缩核．你能给出这样的一个收缩 r： $\mathbb{R}^2\to C$ 吗?

(b) 证明由图35.2所示的“ x -轴扭结” K 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个收缩.

*8. 证明以下结论：

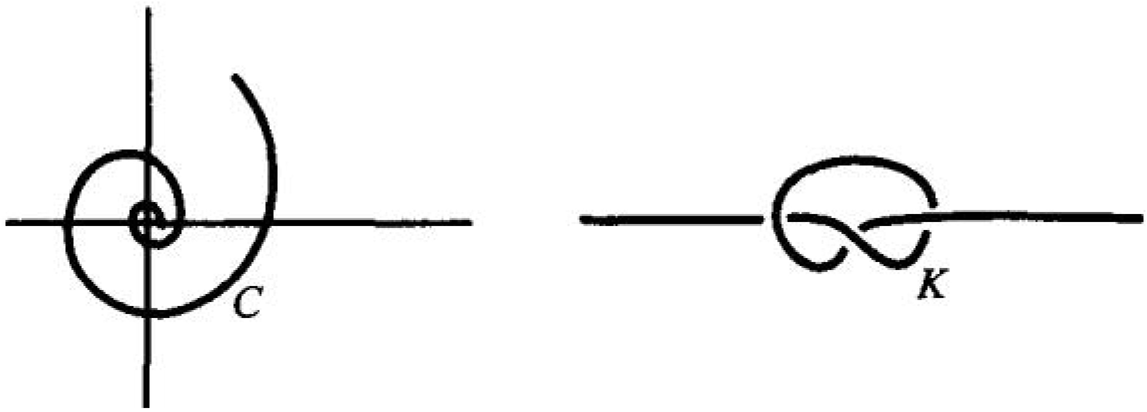


图35.2

定理 设 Y 是一个正规空间. 则 Y 是一个绝对收缩核当且仅当 Y 有通有扩张性质.

[提示：若 X 和 Y 是无交的两个正规空间， A 是 X 的一个闭子集，并且 $f: A \to Y$ 是一个连续映射，则贴附空间(adjunction space) Z_f 被定义为一个商空间，它是在 $X \cup Y$ 中黏合 A 中点 a 、 $f(a)$ 和 $f^{-1}(\{f(a)\})$ 的所有点所得到的空间。应用Tietze扩张定理，证明 Z_f 是正规的。若 $p: X \cup Y \to Z_f$ 是一个商映射，证明 $p \mid Y$ 是 Y 与 Z_f 的一个闭子空间之间的一个同胚。]

9. 设 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ 是空间的一个序列，其中，对于每一个 i ， X_i 是 X_{i+1} 的一个闭子空间。设 X 是所有 X_i 的并。我们可以将 X 拓扑化： X 的子集 U 称为 X 的一个开集，如果对于每一个 i ， $U \cap X_i$ 在 X_i 中是开的。①

(a) 证明：如上定义的开集确实决定了 X 上的一个拓扑，并且每一个空间 X_i 关于这一拓扑是 X 的子空间（事实上，是闭子空间）。这个拓扑称为与各个子空间 X_i 相通的 (coherent) 拓扑。

(b) 证明：若对于每一个 i ， $f \mid X_i$ 连续，则 $f: X \to Y$ 也连续.

(c)证明：若每一个空间 X_i 都是正规的，则 X 也是正规的. [提示：任意给定 X 的两个无交的闭子集 A 和 B ，令 f 在 A 上等于0，在 B 上等于1，然后将 f 依次扩张到 $A \cup B \cup X_i$ 上，其中 $i = 1,2,\dots .]$

第24节 流形的嵌入

我们已经证明了每一个具有可数基的正则空间可以嵌入到“无穷维”欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中. 一个自然的问题是在怎样的条件下空间 X 可以被嵌入到某一个有限维欧氏空间 $\mathbb{R}^N$. 本节我们将回答上述问题. 在第8章我们研究维数论时，将对这个问题给出一个更具一般性的回答.

m 维流形 (m -manifold)，曲线(curve)，曲面(surface)

一个 m **维流形** (m **-manifold)** 是指一个具有可数基的 Hausdorff 空间 X ，它的每一点 x 有一个邻域同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开子集
1-维流形通常称为**曲线(curve)**，2-维流形称为**曲面(surface)**

流形是一类很重要的空间.在微分几何和代数拓扑中有充分的研究
我们将证明若 X 是一个紧致流形，则 X 可以嵌入到一个有限维欧氏空间中. 去掉紧致性的假设，这个定理也成立，但是证明将变得相当困难
首先，我们需要介绍某些术语

支撑(support)

若 $\phi: X \to \mathbb{R}$ ，则 ϕ 的 **支撑(support)** 定义为集合 $\phi^{-1}(\mathbb{R} - \{\mathbf{0}\})$ 的闭包

因此若 x 在 ϕ 的支撑之外，则 x 有一个邻域，在这个邻域上 ϕ 蜕化

单位分拆(partition of unity)

设 $\{U_1,...,U_n\}$ 是空间 X 的一个加标有限开覆盖。连续函数的一个加标族

$$\phi_i : X \longrightarrow [0,1] \quad 对于 i=1,\ldots,n$$

称为由 $\{U_i\}$ 控制的一个**单位分拆(partition of unity)** 若
(1) 对于每一个 i，（ϕ_i 的支撑）$\subset U_i$
(2) 对于每一个 $x, \sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$

> **THM 有限单位分拆的存在性(existence of finite partitions of unity)**
>
> 设 $\{U_1,...,U_n\}$ 是正规空间 X 的一个有限开覆盖，则存在一个由 $\{U_i\}$ 控制的单位分拆

第一步。首先证明覆盖 $\{U_i\}$ 能"缩小"为 X 的一个开覆盖 $\{V_1,\ldots,V_n\}$，使得对于每一个 i 有 $\bar{V}_i \subset U_i$
用归纳法证明．首先注意：集合

$$A = X - \left(U_2 \bigcup \ldots \bigcup U_n\right)$$

是 X 的一个闭子集．因为 $\{U_1,\ldots,U_n\}$ 覆盖 X，所以集合 A 被包含在开集 U_1 中．应用正规性，选取一个包含 A 的开集 V_1，使得 $\overline{V}_1 \subset U_1$．于是集族 $\{V_1,U_2,\ldots,U_n\}$ 覆盖 X
一般地，设开集 $V_1,\ldots,V_{k-1}$ 已经给定，使得集族

$$\{V_1,\ldots,V_{k-1},U_k,U_{k+1},\ldots,U_n\}$$

覆盖 X，令

$$A = X - \left(V_1 \bigcup \ldots \bigcup V_{k-1}\right) - \left(U_{k+1} \bigcup \ldots \bigcup U_n\right).$$

则 A 是 X 的一个闭集，并且包含在开集 U_k 中．选取 V_k 为包含 A 的一个开集，使得 $\bar{V}_k \subset U_k$ 于是 $\{V_1,\ldots,V_{k-1},V_k,U_{k+1},\ldots,U_n\}$ 覆盖 X，经 n 步归纳，我们便可证明结论.
第二步．现在来证明定理．给定 X 的一个开覆盖 $\{U_1,\ldots,U_n\}$，选取 X 的一个开覆盖 $\{V_1,\ldots,V_n\}$，使得对于每一个 i 有 $\overline{V}_i \subset U_i$，再选取 X 的一个开覆盖 $\{W_1,\ldots,W_n\}$，使得对于每一个 i 有 $\overline{W}_i \subset V_i$，应用Urysohn引理，对于每一个 i，选取一个连续函数

$$\psi_i : X \longrightarrow [0,1]$$

使得 $\psi_i(\overline{W}_i) = \{1\}$ 和 $\psi_i(X - V_i) = \{0\}$ 成立．因为 $\psi_i^{-1}(\mathbb{R} - \{\mathbf{0}\})$ 包含在 V_i 中，从而(ψ_i 的支撑）$\subset \overline{V}_i \subset U_i$
又由于集族 $\{W_i\}$ 覆盖 X，对于每一个 x，$\Psi(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x)$ 取正值．因此，对于每一个 j，定义

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)}$$

容易验证函数 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ 便是我们所需的单位分拆
有一个与单位分拆相似的概念，其中开覆盖和函数族不是有限的，甚至不是可数的．在第 6 章研究仿紧致性时，我们将讨论相关问题

> **THM**
>
> X 是一个 m -维紧致流形，则 X 可以嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中，其中 N 是某一个正整数

证 用有限多个开集 $\{U_1,\ldots,U_n\}$ 覆盖 X，其中每一个开集都可以嵌入到 $\mathbb{R}^m$ 中。对于每一个 i，选取一个嵌入 $g_i : U_i \to \mathbb{R}^m$。由于 X 是一个紧致的 Hausdorff 空间，所以它是正规的。设 $\phi_1,\ldots,\phi_n$ 是由 $\{U_i\}$ 控制的一个单位分拆。令 $A_i = \phi_i$ 的支撑。对于 $i=1,\ldots,n$，定义函数 $h_i : X \to \mathbb{R}^m$ 为

$$h_i(x) = \begin{cases} \phi_i(x) \bullet g_i(x) & 当 x \in U_i, \\ \mathbf{0} = (0,\ldots,0) & 当 x \in X - A_i. \end{cases}$$

[这里 $\phi_i(x)$ 是一个实数 c，$g_i(x)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个点 $y = (y_1,\ldots,y_m)$。显然，乘积 $c \cdot y$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的点 $(cy_1,\ldots,cy_m)$。]由于决定 h_i 的两个函数在它们的定义域的交上取值相同，因此 h_i 的定义是确切的。由于 h_i 在开集 U_i 和 $X - A_i$ 上的限制都是连续的，所以 h_i 也是连续的
现在定义函数

$$F: X \longrightarrow (\underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n个}\times\underbrace{\mathbb{R}^m\times\cdots\times\mathbb{R}^m}_{n个})$$

为

$$F(x)=(\phi_1(x),\ldots,\phi_n(x),h_1(x),\ldots,h_n(x))$$

显然， F 是连续的．为了证明 F 是一个嵌入，我们只须证明 F 是一个单射(因为 X 是紧致的).假设 $F(x)=F(y)$ ，则对于所有的 i ，有 $\phi_i(x)=\phi_i(y)$ 和 $h_i(x)=h_i(y)$ ，总存在某一个 i ，使得 $\phi_i(x)>0[$ 因为 $\sum\phi_i(x)=1]$ ，因此，也必定有 $\phi_i(y)>0$ ，从而 x ， $y\in U_i$ ，于是

$$\phi_i(x)\cdot g_i(x)=h_i(x)=h_i(y)=\phi_i(y)\cdot g_i(y)$$

又因为 $\phi_i(x)=\phi_i(y)>0$ ，所以 $g_i(x)=g_i(y)$.再根据 g_i ： $U_i\to\mathbb{R}^m$ 是一个单射，可见 $x=y$
在单位分拆的许多应用中，正像上面给出的那样，都只需用到：对于每一个 x ， $\sum\phi_i(x)$ 是正的．然而，在其他一些情形下，就需要一个更强的条件 $\sum\phi_i(x)=1$ ，参见第50节.

练习

1. 证明每一个流形是正则的，从而是可度量化的。在哪里你要用到Hausdorff条件?
2. 设 X 是一个紧致的 Hausdorff 空间。假设对于每一个 $x\in X$ ，存在 x 的一个邻域 U 和一个正整数 k 使得 U 可以被嵌入到 $\mathbb{R}^k$ 中。证明：对于某一正整数 N ， X 可以嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中。
3. 设 X 是一个Hausdorff空间， X 的每一点有一个邻域与 $\mathbb{R}^m$ 的一个开集同胚．证明：若 X 是紧致的，则 X 是一个 m -维流形.
4. X 的子集的一个加标族 $\{A_\alpha\}$ 被称为点态有限加标族（point-finite indexed family），如果每一个 $x\in X$ ，仅仅对于有限多个 α 有 $x\in A_\alpha$.

引理（收缩引理）设 X 是一个正规空间．设 $\{U_1,U_2,\ldots\}$ 是 X 的点态有限加标开覆盖．则存在 X 的一个加标开覆盖 $\{V_1,V_2,\ldots\}$ ，使得 $\bar{V}_n\subset U_n$

5. 流形定义中的Hausdorff条件是关键的，它不能根据定义中的其他条件推出．考虑以下空间：设 X 是 $\mathbb{R}-\{0\}$ 与两点集 $\{p,q\}$ 的并．规定 X 上的拓扑由以下子集组成的基所生成： $\mathbb{R}$

的所有不包含点0的开区间，所有形如 $(-a,0)\cup\{p\}\cup(0,a)$ 的集合以及所有形如 $(-a,0)\cup\{q\}\cup(0,a)$ 的集合，其中 $a>0$ 。空间 X 称为具有双原点的直线(line with two origins).

(a)验证这是某个拓扑的一个基
(b) 证明 $X-\{p\}$ 和 $X-\{q\}$ 分别同胚于 $\mathbb{R}$.
(c) 证明 X 满足 T_1 公理，但不是一个Hausdorff空间.
(d)证明：除了Hausdorff条件之外， X 满足1-维流形的所有条件.

* 附加习题：基本内容复习

考虑一个空间可能具有的以下性质：

(1)连通性
(2)道路连通性
（3）局部连通性
（4）局部道路连通性
(5) 紧致性
（6）极限点紧致
(7)局部紧致Hausdorff空间
(8)Hausdorff空间
(9)正则
(10)完全正则
(11)正规
(12)第一可数
(13)第二可数
(14)Lindelof性质
(15)有可数稠密子集
(16)局部可度量化
(17)可度量化

1. 对于下列的每一空间，试确定（如果能够的话）它满足上述的哪些性质。(必要时，可设 Tychonoff 定理成立。)

(a) S_Ω
(b) $\bar{S}_a$
(c) $S_\alpha \times \bar{S}_\alpha$
(d) 有序矩形
(e)R
(f) $\mathbb{R}_\ell^2$
(g)具有积拓扑的 $\mathbb{R}^n$
(h) 具有一致拓扑的 $\mathbb{R}^n$

(i)具有箱拓扑的 $\mathbb{R}^n$
(j)具有积拓扑的 $\mathbb{R}^I$ ，其中 $I=[0,1]$

$(\mathbf{k})\mathbb{R}_K$

2. 一个度量空间具有上述的哪些性质?
3. 紧致的 Hausdorff 空间具有上述的哪些性质?
4. 子空间或闭子空间或开子空间保持上述的哪些性质?
5. 有限积或可数积或任意积保持上述的哪些性质?
6. 连续映射保持上述的哪些性质?
7. 学习了第 6 章和第 7 章，就下列性质回答上述习题 $1\sim 6$ 中的问题:

(18)仿紧致性
(19)拓扑完备性

对于整个习题 $1\sim 6$ 中的340个问题除1个外，习题7中的40个问题除1个外，读者应该能够回答其他的全部问题．这两个问题至今尚未解决．见第32节中的习题5的注记.