

第25节 Tychonoff定理

25-1 吉洪诺夫定理

现在考虑第2部分中遗留下来的问题。我们将证明Tychonoff定理：任意多个紧致空间的积还是紧致空间。它的证明要用到Zorn引理（见第11节）。也有一个依赖于良序定理的证明，在习题中我们给出了这个证明方法的概要。

Tychonoff定理对分析学家非常有用（几何学家用的相对少些）。在第38节中，我们用它构造完全正则空间的 Stone-Čech 紧致化，并在第47节中用它来证明 Ascoli 定理的一般形式。

与 Urysohn 引理一样，Tychonoff 定理也是一个“深刻的”定理。它的证明涉及的思想较新颖，并非直接了当。在给出这个定理的证明之前，我们要详细地讨论在证明中的某些关键性的想法。

第3章中，我们曾证明过两个紧致空间的积 $X \times Y$ 是紧致的。在那个证明中，只用紧致性的开覆盖形式就完全够了。给定 $X \times Y$ 的一个由基元素构成的开覆盖，先用其中的有限多个元素覆盖每一个薄片 $x \times Y$ ，进而构造 $X \times Y$ 的一个有限覆盖。

但对于紧致空间的任意积，类似于上面的做法已经行不通了，必须将指标集良序化并且应用超限归纳（参见习题5）。另外一个办法就是放弃开覆盖方式，代之以紧致性的闭集形式，借助Zorn引理来处理。

为了弄明白这一思路，我们先考虑最简单的情形，即两个紧致空间的积 $X_1 \times X_2$ 这种情形。假定 \mathcal{A} 为 $X_1 \times X_2$ 的一个具有有限交性质的闭子集族，考虑投射 $\pi_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ 。 X_1 的子集族

$$\{\pi_1(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

也具有有限交性质，并且其中元素的闭包 $\overline{\pi_1(A)}$ 的族也具有这个性质。同时 X_1 的紧致性又保证了所有集合 $\overline{\pi_1(A)}$ 的交非空。我们从这个交中选择一点 x_1 。类似地，可以从所有集合 $\pi_2(A)$ 的交中选择一点 x_2 。于是我们自然希望 $x_1 \times x_2$ 在 $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ 中。如果果真如此，定理也就证明了。

但遗憾的是这个设想行不通。考虑下面的例子：设 $X_1 = X_2 = [0, 1]$ ，集族 \mathcal{A} 是以下所有椭圆形区域族，其中每一个椭圆形区域的边界都是以 $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ， $q = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ 为公共焦点的椭圆，如图37.1所示。当然 \mathcal{A} 具有有限交性质。现在，我们在这些集合 $\{\overline{\pi_1(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$ 的交中选取一点 x_1 ，显然可以选取区间 $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ 中的任意一点，比如选定 $x_1 = \frac{1}{2}$ 。类似地，在集合 $\{\overline{\pi_2(A)} \mid A \in \mathcal{A}\}$ 的交中选取一点 x_2 ，可以选区间

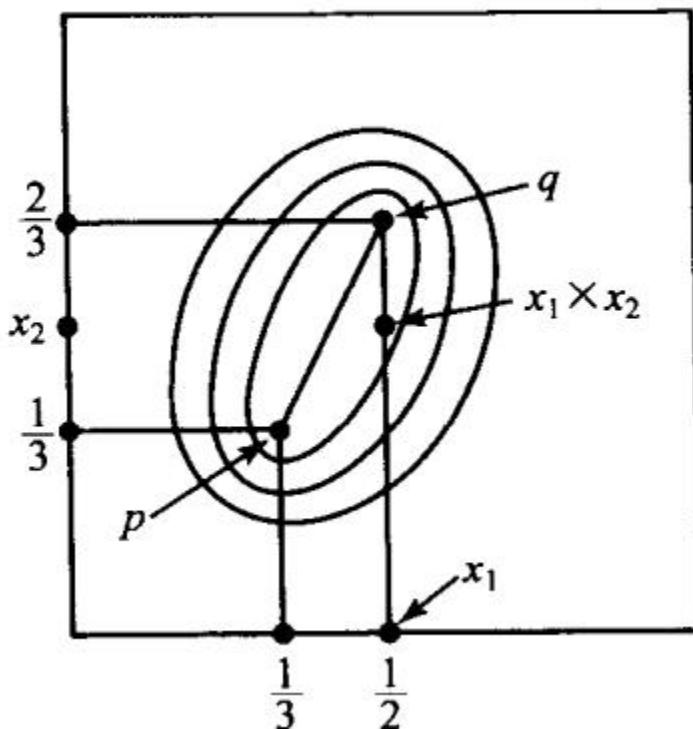


图37.1

$[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ 中的任意一点，比如选定 $x_2 = \frac{1}{2}$ 。这是一个不幸的选择，因为点

$$x_1 \times x_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

不在所有集合 A 的交之中。

你也许会说，“你选的不合适嘛！如果在选定了 $x_1 = \frac{1}{2}$ 之后，再选 $x_2 = \frac{2}{3}$ ，那么就找到了交 $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ 的一个点。”然而，因为在我们所设计的试探性的证明中， x_1 和 x_2 的选取是具有随意性的，所以这种“不好”的选取便难以避免了。

那么，怎样改进证明解决这个问题呢？

这就引出了证明的第二个想法：也许我们可以扩大集族 \mathcal{A} （当然还要保持有限交性质），藉此来制约 x_1 和 x_2 的选取，以确保我们做出一个“正确的”选择。例如，在前面的例子中，把集族 \mathcal{A} 扩大为以下椭圆形区域族 \mathcal{D} ，其中每一个区域的边界都是以 $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 为一个焦点，而另一个焦点落在线段 pq 上。集族 \mathcal{D} 如图37.2所示。这个新族 \mathcal{D} 仍具有有限交性质，但是，如果你想在交

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_1(D)}$$

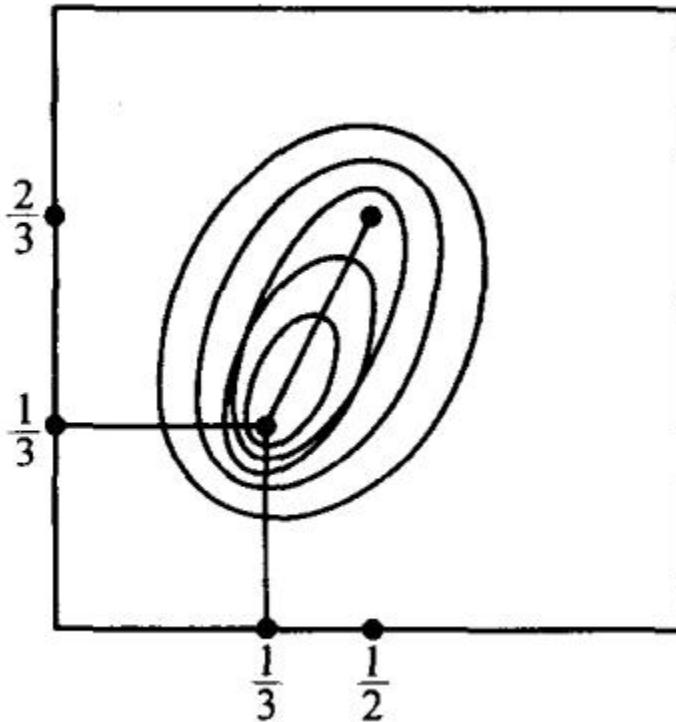


图37.2

中选出一点 x_1 ，则只能选 $x_1 = \frac{1}{3}$ 。类似地，只能选 $x_2 = \frac{1}{3}$ 。

而 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 必然属于每一个集合 D ，因此也属于每一个集合 A 。换句话说，将集族 \mathcal{A} 扩大成集族 \mathcal{D} ，就能使我们得出理想的选择。

当然，在这个例子中，我们精心地选择了 \mathcal{D} ，使得证明能够进行下去，但在一般情况下，我们对于 \mathcal{D} 的选择应该有些什么要求呢？这里就产生了证明的第三个想法：为什么不能简单地要求选择“尽可能大”的 \mathcal{D} ——以至于没有比它更大的族具有有限交性质了，再来看这个 \mathcal{D} 是否满足要求呢？这个族 \mathcal{D} 的存在性并非显而易见，需要证明。并且证明中我们要用到Zorn引理。但在我门证明了 \mathcal{D} 的存在性之后，实际上也就证明了 \mathcal{D} 已大到足以保证我们得出恰当选择的程度了。

最后还需说明的是，在我们的讨论中，对于集族 \mathcal{A} 中的每一个元素都是闭集的假设是没有必要的。因为即使 $A \in \mathcal{A}$ 是闭集， $\pi_1(A)$ 也未必是闭集，因此我们只要通过取闭包来得到具有紧致性的闭集。基于上述原因，我们只需对 X 的任意具有有限交性质的子集族，证明它们的闭包的交是非空的。事实上，这一方法的确是简便易行的。

引理37.1 设 X 是一个集合。 \mathcal{A} 是 X 的一个具有有限交性质的子集族，则存在 X 的一个子集族 \mathcal{D} ，使得 \mathcal{D} 包含 \mathcal{A} ， \mathcal{D} 具有有限交性质，并且每一个以 \mathcal{D} 为真子集的 X 的子集族都不再具有有限交性质。

对于满足引理要求的族 \mathcal{D} ，我们通常称它关于有限交性质是极大的。

证 下面，我们就应用 Zorn 引理来构造 \mathcal{D} 。回忆一下，给定一个定义了严格偏序关系的集合 A ，如果 A 的任意全序子集都有上界，那么 A 便有一个极大元。

需说明的是，将要应用Zorn引理的集合 A ，它既不是 X 的子集，也不是 X 的一个子集族，而是以集族为元素的集合。我们把这样的集合称之为“超集”，并用一个空心字母表示它。于是综述现在所用的记号就是，

c 是 X 的一个元素。

C 是 X 的一个子集。

\mathcal{C} 是 X 的一个子集族。

\mathbb{C} 是 X 的子集族构成的超集。

根据假设，给定 X 的一个具有有限交性质的子集族 \mathcal{A} ，用 \mathbb{A} 表示 X 的所有满足 $B \supset \mathcal{A}$ 及有限交性质的子集族 B 组成的超集。我们用真包含关系 \subsetneq 作为 \mathbb{A} 上的一个严格偏序。为了证明引理，我们需要说明 \mathbb{A} 有一个极大元 \mathcal{D} 。

为了应用 Zorn 引理，需要说明的是：若 B 是 \mathbb{A} 的一个“子超集”，并且在真包含关系下是全序的，则 B 在 \mathbb{A} 中有一个上界。实际上我们将要证明集族

$$\mathcal{C} = \bigcup_{B \in \mathbb{B}} B$$

是 \mathbb{A} 中的一个元素，就是所求的上界。

为了说明 \mathcal{C} 是 \mathbb{A} 的一个元素，就须证明 $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ ，并且 \mathcal{C} 具有有限交性质。首先根据 \mathbb{B} 中的每一个元素都包含着 \mathcal{A} ，可见 $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}$ 。为了证明 \mathcal{C} 具有有限交性质，设 C_1, \dots, C_n 是 \mathcal{C} 的一些元素。因为 \mathcal{C} 是 \mathbb{B} 中一些元素的并，所以对于每一个 i ，存在 \mathbb{B} 中的一个元素 B_i ，使得 $C_i \in B_i$ 。现在超集 $\{B_1, \dots, B_n\}$ 包含于 \mathbb{B} ，因此，它也是由真包含关系决定的全序集。因为它是有限的，所以有一个最大元，也就是说存在一个指标 k ，使得对于 $i = 1, \dots, n$ 有 $B_i \subset B_k$ 。从而，集合 C_1, \dots, C_n 都属于 B_k 。又因为 B_k 具有有限交性质，所以集合 C_1, \dots, C_n 有非空交。引理证毕。

引理37.2 设 X 是一个集合， \mathcal{D} 是 X 的一个子集族并且关于有限交性质是极大的。则

(a) \mathcal{D} 中元素的任意有限交仍属于 \mathcal{D}

(b) 若 A 是 X 的一个子集并且与 \mathcal{D} 中的每一个元素都相交，则 A 属于 \mathcal{D} 。

证 (a) 设 B 是 \mathcal{D} 中有限多个元素的交。将 B 加到 \mathcal{D} 中来定义一个族 ε ，即 $\varepsilon = \mathcal{D} \cup \{B\}$ 。我们证明 ε 满足有限交性质，于是由 \mathcal{D} 的极大性可见 $\varepsilon = \mathcal{D}$ ，因此 $B \in \mathcal{D}$ 。

取 ε 中有限多个元素。如果其中没有一个是 B ，那么根据 \mathcal{D} 具有有限交性质，可见它们的交非空。如果其中有一个是 B ，则它们的交形如

$$D_1 \cap \dots \cap D_m \cap B.$$

因为 B 等于 \mathcal{D} 中元素的有限交，所以这个交非空

(b) 给定 A ，定义 $\varepsilon = \mathcal{D} \cup \{A\}$ ，我们证明 ε 具有有限交性质，从而推出 A 属于 \mathcal{D} 。取 ε 中有限多个元素，如果其中没有 A ，它们的交当然非空。否则，它们的交形如

$$D_1 \cap \dots \cap D_n \cap A.$$

根据(a)可见 $D_1 \cap \dots \cap D_n$ 属于 \mathcal{D} ，因此根据假设，上述交非空。

◻ Tychonoff定理(Tychonoff theorem)

积拓扑下，紧致空间的任意积还是紧致空间

证设

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha,$$

其中每一个空间 X_α 是紧致的。设 \mathcal{A} 是 X 的一个子集族，具有有限交性质，我们证明交

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A}$$

非空，从而推出 X 的紧致性。

应用引理37.1，选择 X 的子集族 \mathcal{D} ，使得 $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ ，并且关于有限交性质是极大的。这就足以证明 $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D}$ 非空。

给定 $\alpha \in J$ ，令 $\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ 为通常的投射。考虑 X_α 的子集族

$$\{\pi_\alpha(D) \mid D \in \mathcal{D}\}.$$

它具有有限交性质，这是因为 \mathcal{D} 具有有限交性质。由 X_α 的紧致性，可以对于每一个 α ，选取一点 $x_\alpha \in X_\alpha$ ，使得

$$x_\alpha \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)}.$$

令 \mathbf{x} 为 X 的一个点 $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ ，我们将证明对于每一个 $D \in \mathcal{D}$ ， $\mathbf{x} \in \bar{D}$ ，从而完成定理的证明。

首先证明，如果 $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ 是包含 \mathbf{x} 的任意子基元（就 X 的积拓扑而言），那么 $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ 与 \mathcal{D} 的任何成员都相交，这里 U_β 是 x_β 在 X_β 中的一个邻域。因为根据定义 $x_\beta \in \overline{\pi_\beta(D)}$ ， U_β 与 $\pi_\beta(D)$ 交于某一点 $x_\beta(y)$ ，其中 $y \in D$ ：于是 $y \in \pi_\beta^{-1}(U_\beta) \cap D$

根据引理37.2的结论(b)可见包含 \mathbf{x} 的每一个子基元都属于 \mathcal{D} 。于是，再由这个引理的结论(a)可见每一个包含 \mathbf{x} 的基元也属于 \mathcal{D} 。因为 \mathcal{D} 具有有限交性质，这就意味着每一个包含 \mathbf{x} 的基元与 \mathcal{D} 的每一个元素都相交，因此对于每一个 $D \in \mathcal{D}$ ， $\mathbf{x} \in \bar{D}$ 证毕。

练习

1. 设 X 是一个空间， \mathcal{D} 是 X 的关于有限交性质的一个极大子集族，

(a) 证明：对于每一个 $D \in \mathcal{D}$ ， $x \in \bar{D}$ 当且仅当 x 的每一个邻域属于 \mathcal{D} ，试指出，证明哪一个蕴涵关系时用到了 \mathcal{D} 的极大性？

(b) 设 $D \in \mathcal{D}$ 。证明：如果 $A \supset D$ ，那么 $A \in \mathcal{D}$ 。

(c) 证明：若 X 满足 T_1 公理，则最多有一个点属于 $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bar{D}$

2. 若 X 的一个子集族 \mathcal{A} 中任意可数个元素的交非空，则称 \mathcal{A} 满足可数交性质 (countable intersection property)。证明： X 是 Lindelöf 空间当且仅当 X 的每一个满足可数交性质的子集族 \mathcal{A} ，有

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \bar{A} \neq \emptyset.$$

3. 考虑下述三个论断：

(i) 若 X 是一个集合， \mathcal{A} 是 X 的一个满足可数交性质的子集族，则存在 X 的一个子集族 \mathcal{D} ，使得 $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ ，并且 \mathcal{D} 关于可数交性质是极大的。

(ii) 设 \mathcal{D} 关于可数交性质是极大的，则 \mathcal{D} 的元素的可数交仍然是 \mathcal{D} 的元素，并且如果 A 是 X 的一个子集，它与 \mathcal{D} 的每一个元素都相交，那么必然有 $A \in \mathcal{D}$ 。

(iii) Lindelof 空间的积仍然是 Lindelof 空间。

(a) 证明：(i) 和 (ii) 蕴涵着 (iii)。

(b) 证明 (ii)。

(c) Lindelof 空间的积未必是 Lindelof 空间（见第30节），因此 (i) 不成立。试指出若将引理37.1的证明推广到可数交性质，那么证明在什么地方行不通。

4. 下面是另一个应用 Zorn 引理证明的定理。以前曾经提到过：设 A 是一个空间，若 $x, y \in A$ ，不存在 A 的分割 $A = C \cup D$ （ C 和 D 是 A 中两个无交的开集），使得 $x \in C$ ， $y \in D$ ，则称 x 和 y 在 A 的同一个拟连通分支中。

定理 设 X 是紧致的 Hausdorff 空间，则 x 和 y 属于 X 的同一拟连通分支当且仅当它们属于 X 的同一分支。

(a) 令 \mathcal{A} 为 X 的闭子空间的族，满足条件：对于每一个 $A \in \mathcal{A}$ ， x, y 在 A 的同一拟连通分支中。令 \mathcal{B} 为 \mathcal{A} 的一个子族，在真包含关系下是全序集。证明 \mathcal{B} 的所有元素的交属于 \mathcal{A} 。[提示：与第26节的练习11比较。]

(b) 证明 \mathcal{A} 有极小元 D .

(c) 证明 D 是连通的.

*5. 下面是 Tychonoff 定理的另外一个证明, 它主要利用了良序定理而非 Zorn 引理。先来证明管状引理的以下形式, 再证明定理。

引理 设 \mathcal{A} 是 $X \times Y$ 积拓扑的基元素构成的族, 满足条件: \mathcal{A} 没有有限子族覆盖 $X \times Y$ 。若 X 是紧致的, 则存在点 $x \in X$ 使得 \mathcal{A} 的有限子族都不能够覆盖薄片 $\{x\} \times Y$ 。

定理 任意紧致空间的积在积拓扑下是紧致的。

证明: 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是紧致空间的一个加标族. 令

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha,$$

$\pi_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ 为投射. 赋予 J 一个良序, 使得有一个最大元.

(a) 令 $\beta \in J$, 对于任意 $i < \beta$ 假设已经给定 $p_i \in X_i$, 对于任意 $\alpha < \beta$, 定义 X 的子空间 Y_α 为

$$Y_\alpha = \{\mathbf{x} \mid \pi_i(\mathbf{x}) = p_i, \text{ 对 } i \leq \alpha\}.$$

注意, 若 $\alpha < \alpha'$, 则 $Y_\alpha \supset Y_{\alpha'}$ 。证明: 若 \mathcal{A} 是 X 的基元素构成的一个有限族, 并且 \mathcal{A} 覆盖

$$Z_\beta = \bigcap_{\alpha < \beta} Y_\alpha = \{x \mid \pi_i(x) = p_i, i < \beta\},$$

则对于某一个 $\alpha < \beta$, \mathcal{A} 覆盖 Y_α 。[提示: 若在 J 中 β 有一个紧接前元, 用 α 表示这个紧接前元。否则, 对于每一个 $A \in \mathcal{A}$, 令 J_A 为使得 $\pi_i(A) \neq X_i$ 的那些指标 $i < \beta$ 的集合。集合 $J_A (A \in \mathcal{A})$ 的并是有限的。令 α 为这个并的最大元。]

(b) 设 \mathcal{A} 是 X 的基元素的族, 满足条件: \mathcal{A} 没有有限子族覆盖 X 。证明对于所有 i , 可以选取点 $p_i \in X_i$, 使得对于每一个 α , (a) 中所定义的空间 Y_α 不能被 \mathcal{A} 有限子族覆盖。当 α 是 J 的最大元时, 便有了矛盾。[提示: 若 α 是 J 的最小元, 则应用前面的引理选择 p_α 。若 p_i 对于所有 $i < \beta$ 有定义, 由于根据(a) 可见空间 Z_β 不能被 \mathcal{A} 的有限子族覆盖, 应用这个引理找出 p_β 。]

第26节 Stone-Čech 紧致化

26-1 Stone-Čech 紧致化

我们已经研究过拓扑空间 X 紧致化的一种方法, 那便是单点紧致化(第29节). 从某种意义上说, 这是 X 的极小紧致化, 而 Stone-Cech 紧致化则是 X 的极大紧致化. 这里介绍的这种紧致化是由 M. Stone 和 E. Čech 于 1937 年各自独立完成的. 它在近代分析中有着许多应用, 但那些都已超出了本书的范围.

让我们先来回顾以下定义:

定义 空间 X 的一个紧致化(compactification) Y 是一个包含 X 的紧致的 Hausdorff 空间, 以 X 为其子空间, 并且使得 $\overline{X} = Y$ 。 X 的两个紧致化 Y_1 和 Y_2 是等价的(equivalent), 若存在一个同胚 $h : Y_1 \rightarrow Y_2$, 使得对于每一个 $x \in X$ 有 $h(x) = x$.

如果空间 X 有一个紧致化 Y , 那么 X 必须是完全正则的, 因为它是完全正则空间 Y 的子空间。反之, 若 X 是完全正则空间, 则 X 至少有一个紧致化。这是因为对于某一个 J , X 能被嵌入到紧致的 Hausdorff 空间 $[0, 1]^J$ 中, 并且, 正如下面的引理所说, 任何一个这样的嵌入将会给出 X 的一个紧致化:

引理 38.1 设 X 是一个空间, $h : X \rightarrow Z$ 是从 X 到紧致的 Hausdorff 空间 Z 的一个嵌入, 则存在 X 的一个相应的紧致化 Y 具有以下性质: 存在一个嵌入 $H : Y \rightarrow Z$ 使得 H 在 X 上的限制等于 h 。在不区别等价的两个空间的意义下, 紧致化 Y 是唯一确定的。

这个空间 Y 称为由嵌入 h 所诱导的紧致化

证 给定 h , 令 X_0 为 Z 的子空间 $h(X)$, Y_0 为它在 Z 中的闭包。于是 Y_0 是一个紧致的 Hausdorff 空间, 并且 $\overline{X_0} = Y_0$ 。因此 Y_0 就是 X_0 的一个紧致化。

现在我们来构造一个包含 X 的空间 Y , 使得空间偶对 (X, Y) 同胚于空间偶对 (X_0, Y_0) 。选择与 X 无交的一个集合 A , 以及 A 与 $Y_0 - X_0$ 之间的一个一一对应 $k : A \rightarrow Y_0 - X_0$ 。定义 $Y = X \cup A$, 并且定义一一对应 $H : Y \rightarrow Y_0$ 为

$$\begin{aligned} H(x) &= h(x), && \text{对于 } x \in X, \\ H(a) &= k(a), && \text{对于 } a \in A. \end{aligned}$$

赋予 Y 一个拓扑，使得 U 是 Y 的一个开集当且仅当 $H(U)$ 是 Y_0 的一个开集。映射 H 当然是一个同胚；而且空间 X 是 Y 的一个子空间，因为当 H 限制在 Y 的子集 X 上时，等于同胚 h 通过扩大 H 的值域，我们便得到了所求的从 Y 到 Z 的一个嵌入。

现在假设 Y_i 是 X 的一个紧致化，嵌入 $H_i : Y_i \rightarrow Z$ 是 h 的扩张， $i = 1, 2$ 。于是 H_i 将 X 映射到 $h(X) = X_0$ 上。因为 H_i 是连续的，所以它将 Y_i 映射到 \overline{X}_0 中；又因为 $H_i(Y_i)$ 包含着 X_0 并且还是闭的（因为是紧致的），所以 $H_i(Y_i)$ 包含着 \overline{X}_0 。因此 $H_i(Y_i) = \overline{X}_0$ ，并且 $H_2^{-1} \circ H_1$ 定

义了从 Y_1 到 Y_2 的一个同胚，并且在 X 上等于恒等映射。

一般地说，对于一个给定的空间 X ，可以有多种不同的紧致化方法。例如对于开区间 $X = (0, 1)$ ，可有以下一些紧致化：

例1 在 \mathbb{R}^2 中取单位圆周 S^1 ，令映射 $h : (0, 1) \rightarrow S^1$ 为

$$h(t) = (\cos 2\pi t) \times (\sin 2\pi t).$$

嵌入 h 诱导的紧致化等价于 X 的单点紧致化。

例2 设 Y 为空间 $[0, 1]$ 。则 Y 是 X 的一个紧致化，它是由“在 $(0, 1)$ 的两端各加上一点”而得到的。

例3 考虑 \mathbb{R}^2 中单位方形 $[-1, 1]^2$ ，令映射 $h : (0, 1) \rightarrow [-1, 1]^2$ 为

$$h(x) = x \times \sin(1/x).$$

空间 $Y_0 = \overline{h(X)}$ 为拓扑学家的正弦曲线（见第24节例7）。嵌入 h 所产生的 $(0, 1)$ 的紧致化与前面两个完全不同，它是由在 $(0, 1)$ 的右端加上一点，在左端加上一条线段而得到的。

紧致化研究中的一个基本问题是：

如果 Y 是 X 的一个紧致化，那么在什么条件下，定义在 X 上的一个连续实值函数 f 可以连续地扩张到 Y 上？

函数 f 如果能够扩张，则它必是有界的，因为它的扩张将紧致空间 Y 映入 \mathbb{R} 中，因而是有界的。但是，有界性一般说来并不充分，考虑下面的例子：

例4 设 $X = (0, 1)$ ，考虑例1中给出的 X 的单点紧致化。有界连续函数 $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 可以扩张到这个紧致化上的充分必要条件是极限

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

存在并且相等。

对于例2中给出的 X 的“两点紧致化”函数 f 可以扩张的充分必要条件是上述两个极限都存在。

例3中的紧致化，对于一类更广泛的函数都存在扩张。容易看到，如果上面两个极限都存在，则 f 可以扩张。但是，函数 $f(x) = \sin(1/x)$ 也可以扩张到这个紧致化上：令 H 是从 Y 到 \mathbb{R}^2 中的嵌入，在子空间 X 上它等于 h ，则复合映射

$$Y \xrightarrow{H} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}$$

就是所要求的 f 的扩张：因为如果 $x \in X$ ，则 $H(x) = h(x) = x \times \sin(1/x)$ ，于是 $\pi_2(H(x)) = \sin(1/x)$ 。

关于最后这个紧致化，有一点非常重要，为了得到它，我们选择一个嵌入

$$h : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

其分量函数是 x 及 $\sin(1/x)$ ，这时我们发现，函数 x 和 $\sin(1/x)$ 都能扩张到 X 的紧致化上。这对于我们很有启发，如果在 $(0, 1)$ 上定义了连续有界函数构成的族，我们可用它们作为从 $(0, 1)$ 到 R^J 中的一个嵌入（对于某一个 J ），从而得到一个紧致化，使上述族中每一个函数都可以扩张。

这一思想是 Stone-Čech 紧致化中的主要思想，陈述如下：

定理38.2 设 X 是完全正则空间, 则存在 X 的一个紧致化 Y 满足条件: 对于每一个有界连续函数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ 都可以唯一地扩张为从 Y 到 \mathbb{R} 的一个连续函数.

证设 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是 X 上所有有界连续实值函数所构成的族, 以 J 为其指标集. 对于每一个 $\alpha \in J$, 选取 \mathbb{R} 中一个包含 $f_\alpha(X)$ 的闭区间 I_α , 为了确定起见, 选取

$$I_\alpha = [\inf f_\alpha(X), \sup f_\alpha(X)].$$

然后定义 $h : X \rightarrow \prod_{\alpha \in J} I_\alpha$ 为

$$h(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}.$$

根据 Tychonoff 定理, $\prod I_\alpha$ 是紧致的. 由于 X 是完全正则的, 函数族 $\{f_\alpha\}$ 分离 X 中的点和闭集. 因此根据定理 34.2, h 是一个嵌入。

设 Y 是由嵌入 h 所诱导的紧致化. 则存在一个嵌入 $H : Y \rightarrow \prod I_\alpha$, 它在 Y 的子空间 X 上的限制就是 h . 给定 X 上的一个连续有界实值函数 f , 我们指出它可以扩充到 Y 上. 因为函数 f 属于族 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$, 所以存在指标 β , 使得 f 等于 f_β . 设 $\pi_\beta : \prod I_\alpha \rightarrow I_\beta$ 为投射. 则连续映射 $\pi_\beta \circ H : Y \rightarrow I_\beta$ 就是所要求的 f 的扩张. 这是因为, 如果 $x \in X$, 则有

$$\pi_\beta(H(x)) = \pi_\beta(h(x)) = \pi_\beta((f_\alpha(x))_{\alpha \in J}) = f_\beta(x).$$

扩张的唯一性是以下引理的一个推论

引理38.3 设 $A \subset X$, $f : A \rightarrow Z$ 是从 A 到 Hausdorff 空间 Z 中的一个连续映射. 则最多存在 f 的一个连续扩张 $g : \bar{A} \rightarrow Z$.

证 这个引理曾在第18节中作为习题出现过. 我们在这里给出证明. 假定 $g, g' : \bar{A} \rightarrow Z$ 是 f 的两个不同的扩张, 选择 x 使得 $g(x) \neq g'(x)$. 令 U 和 U' 分别为 $g(x)$ 和 $g'(x)$ 的无交的邻域, 选取 x 的邻域 V , 使得 $g(V) \subset U$ 并且 $g'(V) \subset U'$. 于是 V 与 A 交于某一点 y , 从而 $g(y) \in U$, $g'(y) \in U'$, 但是, 由于 $y \in A$, 所以 $g(y) = f(y)$ 及 $g'(y) = f(y)$. 这就与 U 及 U' 无交矛盾.

定理38.4 设 X 是一个完全正则空间, Y 是 X 的一个紧致化, 它满足定理38.2所说的扩张条件. 给定从 X 到紧致Hausdorff空间 C 中的任意一个连续映射 $f : X \rightarrow C$, 则 f 可以唯一扩张为一个连续映射 $g : Y \rightarrow C$.

证 注意, 由于 C 是完全正则的, 所以对于某一个 J , 它可以嵌入到 $[0, 1]^J$ 中. 于是, 我们总可以假定 $C \subset [0, 1]^J$. 映射 f 的每一个分支函数 f_α 是 X 上的连续实值有界函数. 根据假设, f_α 可以扩张为从 Y 到 \mathbb{R} 的一个连续映射 g_α , 定义 $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^J$ 为 $g(y) = (g_\alpha(y))_{\alpha \in J}$, 我们说映射 g 是连续的, 因为 \mathbb{R}^J 有积拓扑. 实际上 g 确实将 Y 映到 \mathbb{R}^J 的子空间 C 中. 因为根据 g 的连续性, 有

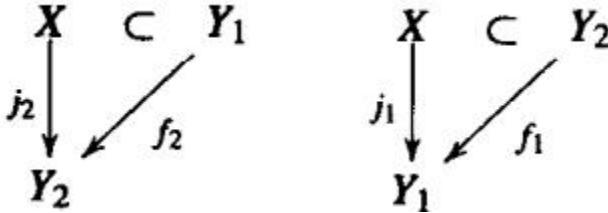
$$g(Y) = g(\bar{X}) \subset \overline{g(X)} = f(\bar{X}) \subset \bar{C} = C.$$

因此, g 就是所求的 f 的扩张.

定理38.5 设 X 是一个完全正则空间. 若 Y_1 和 Y_2 是 X 的两个紧致化, 具有定理38.2的扩张性质, 则 Y_1 和 Y_2 等价.

证考虑内射 $j_2 : X \rightarrow Y_2$, 它是 X 到紧致的Hausdorff空间 Y_2 的一个连续映射. 因为 Y_1

具有扩张性质, 由前述定理, 我们可以把 j_2 扩张为一个连续映射 $f_2 : Y_1 \rightarrow Y_2$, 类似地, 可以把内射 $j_1 : X \rightarrow Y_1$ 扩张为一个连续映射 $f_1 : Y_2 \rightarrow Y_1$ (因为 Y_2 具有扩张性质, 而且 Y_1 是一个紧致的Hausdorff空间).



复合函数 $f_1 \circ f_2 : Y_1 \rightarrow Y_1$ 具有以下性质: 对于每一个 $x \in X$, $f_1(f_2(x)) = x$. 因此 $f_1 \circ f_2$ 是恒等映射 $i_X : X \rightarrow X$ 的一个连续扩张, 但是 Y_1 上的恒等映射也是 i_X 的一个连续扩张, 按照扩张的唯一性(引理38.3), $f_1 \circ f_2$ 必然等于 Y_1 上的恒等映射. 类似地, $f_2 \circ f_1$ 必然等于 Y_2 上的恒等映射. 因此, f_1 与 f_2 是同胚.

定义 对于每一个完全正则空间 X , 取 X 的满足定理38.2中扩张条件的一个紧致化. 记 X 的这一个紧致化为 $\beta(X)$, 并且称之为 X 的 Stone-Cech 紧致化 (Stone-Cech compactification). 它的一个重要性质就是: 从 X 映到一个紧致的 Hausdorff 空间的任意一个连续映射 $f : X \rightarrow C$ 有唯一的一个连续映射 $g : \beta(X) \rightarrow C$ 为它的扩张.

练习

1. 证明例4中的论断
2. 证明: 用 $g(x) = \cos(1/x)$ 定义的有界连续函数 $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 不能扩张到例3中的紧致化。定义一个嵌入 $h : (0, 1) \rightarrow [0, 1]^3$, 使得函数 x 、 $\sin(1/x)$ 及 $\cos(1/x)$ 都能扩张到由 h 所诱导的紧致化上去。
3. 在什么条件下, 可度量化空间有一个可度量化的紧致化?
4. 设 Y 是 X 的任意一个紧致化, $\beta(X)$ 是 Stone-Cech 紧致化。证明存在一个满的连续闭映射 $g : \beta(X) \rightarrow Y$, 使得在 X 上它等于恒等映射。

[这个习题清楚地说明 $\beta(X)$ 是 X 的“极大”紧致化。于是, X 的每一个紧致化都等价于 $\beta(X)$ 的一个商空间.]

5. (a) 证明: 定义在 S_Ω 上的每一个连续实值函数是“终于常数”的。[提示: 首先证明, 对于每一个 ε , 存在 S_Ω 的一个元素 α 使得对于所有的 $\beta > \alpha$, 有 $|f(\beta) - f(\alpha)| < \varepsilon$ 。然后, 对于 $n \in \mathbb{Z}_+$ 令 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 再考虑相应点 α_n 。]

(b) 证明: S_α 的单点紧致化和 Stone-Cech 紧致化是等价的。

(c) 证明 S_n 的每一个紧致化等价于单点紧致化

6. 设 X 是一个完全正则空间。证明: X 是连通的当且仅当 $\beta(X)$ 是连通的。[提示: 如果 $X = A \cup B$ 为 X 的一个分割, 则对于 $x \in A$, 令 $f(x) = 0$; 对于 $x \in B$, 令 $f(x) = 1$.]

7. 设 X 是一个离散空间, 考虑空间 $\beta(X)$

(a) 证明: 若 $A \subset X$, 则 \overline{A} 与 $\overline{X - A}$ 是无交的, 其中闭包是在 $\beta(X)$ 求取的。

(b) 证明: 若 U 是 $\beta(X)$ 的一个开集, 则 \overline{U} 是 $\beta(X)$ 的一个开集。

(c) 证明: $\beta(X)$ 是全不连通的。

8. 证明: $\beta(Z_+)$ 的基数不小于 I^I 的基数, 其中 $I = [0, 1]$ 。[提示: I^I 有可数稠密子集。]

9. (a) 设 X 是正规的, y 是 $\beta(X) - X$ 的一个点。证明 y 不是 X 中点的一个序列的极限。

(b) 证明: 若 X 是完全正则的但不是紧致的, 则 $\beta(X)$ 不是可度量化的。

10. 对于每一个完全正则的空间 X 与它的 Stone-Cech 紧致化 $\beta(X)$, 我们已经建立了一个对应 $X \rightarrow \beta(X)$ 。现在对于完全正则空间之间的每一个连续映射 $f : X \rightarrow Y$, 指派映射 $i \circ f$ 的唯一连续扩张 $\beta(f) : \beta(X) \rightarrow \beta(Y)$ 与其对应, 其中 $i : Y \rightarrow \beta(Y)$ 是内射。验证以下结论:

(i) 若 $1_X : X \rightarrow X$ 是恒等映射, 则 $\beta(1_X)$ 是 $\beta(X)$ 上的恒等映射。

(ii) 若 $f : X \rightarrow Y$ 及 $g : Y \rightarrow Z$, 则 $\beta(g \circ f) = \beta(g) \circ \beta(f)$.

这些性质说明我们所构造的这个对应就是所谓的函子 (functor), 它是从完全正则空间和这类空间上连续映射的“范畴”, 到紧致的 Hausdorff 空间和其上连续映射的“范畴”的一个函子。在本书的第二部分中你将还会看到这些性质; 它们是代数学和代数拓扑学的基础。