2A 张成空间和线性无关性

线性组合和张成空间

2.1 向量组

书写组时通常不用圆括号括起来

如（4, 1, 6），（9, 5, 7）是 $\mathbf{R}^3$ 中长为2的向量组

2.2 线性组合

$a_1\nu_1 + \cdots + a_m\nu_m$ （$a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$）称$V$中向量组 $\nu_1, \ldots, \nu_m$ 的线性组合

2.3 是否是$(2,1,-3),(1,-2,4)$的线性组合

$(17, 4, 2)$ 是

$$(17,-4,2) = 6(2,1,-3) + 5(1,-2,4)$$

$(17,-4,5)$ 不是：$\nexists a_1, a_2 \in \mathbf{F}$,

$$(17,-4,5) = a_1(2,1,-3) + a_2(1,-2,4)$$

换言之

$$\begin{cases} 17 = 2a_1 + a_2 \\ -4 = a_1 - 2a_2 \\ 5 = -3a_1 + 4a_2 \end{cases}$$

无解

2.4 张成空间(线性张成空间)

V 中向量组 $\nu_1, \ldots, \nu_m$ 的所有线性组合构成的集合称 $\nu_1, \ldots, \nu_m$ 的张成空间

$$\operatorname{span}(\nu_1, \ldots, \nu_m) = \{a_1\nu_1 + \cdots + a_m\nu_m : a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}\}$$

定义空向量组的张成空间为 $\{0\}$

2.5 张成空间

上例说明 $\mathbf{F}^3$ 中
$(17,-4,2) \in span\big((2,1,-3),(1,-2,4)\big)$
$(17,-4,5) \notin span\big((2,1,-3),(1,-2,4)\big)$

2.6 向量组的张成空间是最小的包含组中所有向量的子空间

V 中向量组的张成空间是最小的包含这向量组中所有向量的 V 的子空间

证（?）

设 $\nu_1, \ldots, \nu_m$ 是 V 中的向量组
(子空间)

- 加法恒等元属于span$(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ (因$0 = 0\nu_1 + \cdots + 0\nu_m$)
- 对加法封闭，因

$$(a_1\nu_1 + \cdots + a_m\nu_m) + (c_1\nu_1 + \cdots + c_m\nu_m) = (a_1 + c_1)\nu_1 + \cdots + (a_m + c_m)\nu_m$$

- 对标量乘法封闭，因

$$\lambda(a_1\nu_1 + \cdots + a_m\nu_m) = \lambda a_1\nu_1 + \cdots + \lambda a_m\nu_m$$

由1.34得证
（最小）
由每个 ν_k 都是 $\nu_1, \ldots, \nu_m$ 的线性组合（令2.2的$a_k = 1$ 且其他各a 都等于 0）
$\text{span}(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ 包含每个 ν_k
由子空间对标量乘法和加法封闭，V 的每个包含所有 ν_k 的子空间都包含 $\text{span}(\nu_1, \ldots, \nu_m)$
得证

2.7 张成

若 span$(\nu_1, \ldots, \nu_m) = V$，称 $\nu_1, \ldots, \nu_m$ 张成 V

2.8 $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$张成 $\mathbf{F}^n$ （n 为正整数，第 k 个向量的第 k 个坐标是1，而其他坐标都是0）

设 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{F}^n$，$(x_1, \ldots, x_n) = x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, \ldots, 0, 1)$
故 $(x_1, \ldots, x_n) \in \text{span}\left((1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\right)$

2.9 有限维向量空间

如果一个向量空间可由其中某个向量组张成，则称该向量空间是有限维的

2.8表明，$\mathbf{F}^n$ 是有限维向量空间

2.10 多项式 多项式集

函数 $p : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$，若 $\exists a_0, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$，$\forall z \in \mathbf{F}$,

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$$

则称 p 为系数在 $\mathbf{F}$ 中的多项式
$\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是系数在 $\mathbf{F}$ 中的全体多项式所构成的集合

带有通常的加法和标量乘法运算的 $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是 $\mathbf{F}$ 上的向量空间，因此 $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是 $\mathbf{F}^{\mathbf{F}}$ 的子空间
若一多项式（由 $\mathbf{F}$ 到 $\mathbf{F}$ 的函数）可由两组系数表示，那么将其中一种表示法减去另一种，可得恒等于0 的多项式（0多项式）（证明见4.8）
结论：一个多项式的系数由该多项式唯一决定
于是下述定义唯一地规定了多项式的次数

2.11 多项式的次数

对多项式 $p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$，若 $\exists a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ 且 $a_m \neq 0$，

$$\forall z \in \mathbf{F},\ p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$

称 p 的次数是 m，记作 $\mathrm{d}\, p$
多项式 0 的次数定义为 $-\infty$ ，应用广义实数集的算术规则。

如对任整数 m ， $-\infty < m$ （这意味着多项式0属于 $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ ）， $-\infty + m = -\infty$
这样一来许多结论（如 $\mathrm{d}(pq) = \mathrm{d}\, p + \mathrm{d}\, q$）无需考虑特殊情况

2.12 $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$

对非负整数 m ， $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ 表示系数在 $\mathbf{F}$ 中且次数不高于 m 的所有多项式所构成的集合
若 m 是非负整数，那么 $\mathcal{P}_m(\mathbf{F}) = \operatorname{span}(1, z, \ldots, z^m)$ （此处令 z^k 表示一个函数，这有点滥用记号）

故对每个非负整数 m ， $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ 都是有限维向量空间

2.13 无限维向量空间

若一向量空间不是有限维的，称它是无限维的

2.14 多项式全体无限维

$\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是无限维的

证

固定 $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 中任一组元素。 m 表示组中多项式的最高次数。故 z^{m+1} 不在这个组的张成空间里．因此没有组能张成 $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ ，故 $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是无限维的

线性无关性

设 $\nu_1, \ldots, \nu_m \in V$ ， $\nu \in \operatorname{span}(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ ，由张成空间的定义

$$\exists a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F},\ \nu = a_1\nu_1 + \cdots + a_m\nu_m$$

上式标量的选取是否唯一?
设 $c_1, \ldots, c_m$ 是另一组标量且

$$\nu = c_1\nu_1 + \cdots + c_m\nu_m$$

作差得

$$0 = (a_1 - c_1)\nu_1 + \cdots + (a_m - c_m)\nu_m$$

故我们将0写成了 $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ 的线性组合。如果这样表达0唯一，那么每个 ${}_k - {}_k$ 都等于 0，即每个 a_k 等于相应的 c_k （所以标量选取唯一）
这种情形很重要，所以我们赋予其特别的名称。

2.15 线性无关

对 V 中向量组 $\nu_1, \ldots, \nu_m$ ，若使

$$a_1\nu_1 + \cdots + a_m\nu_m = 0$$

成立的 $a_1, \ldots, a_m \in \mathbf{F}$ 的唯一方式是 $a_1 = \cdots = a_m = 0$ ，则称该向量组是线性无关的(向量组线性无关)
规定空向量组线性无关

上面的推导说明， $\nu_1, \ldots, \nu_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ span $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ 中的每个向量都只能唯一表成 $\nu_1, \ldots, \nu_m$ 的线性组合

2.16 线性无关组

(a) 组 $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)$
设 $a_1,a_2,a_3\in\mathbf{F}$ 且$a_1(1,0,0,0)+a_2(0,1,0,0)+a_3(0,0,1,0)=(0,0,0,0)$
故$(a_1,a_2,a_3,0)=(0,0,0,0)$，$a_1=a_2=a_3=0$，此组在 $\mathbf{F}^4$ 中线性无关
(b) m 是非负整数。为说明组 $1,z,\dots,z^m$ 在 $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 中线性无关，设 $a_0,a_1,\dots,a_m\in\mathbf{F}$ 且

$$a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m=0$$

此处将式子两侧都看成 $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 中的元素，则

$$\forall z\in\mathbf{F},\ a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m=0$$

正如前面讨论过的那样（由 4.8 亦可得），$a_0=a_1=\cdots=a_m=0$，故$1,z,\dots,z^m$ 是 $\mathcal{P}(\mathbf{F})$ 中的线性无关组
(c) 向量空间中长为1的向量组线性无关 $\Longleftrightarrow$ 组中的向量不是0
(d) 向量空间中长为2的向量组线性无关 $\Longleftrightarrow$ 组中任一向量都不是另一个向量的标量倍6
若从一个线性无关组中移除某些向量，余下的向量构成的向量组仍线性无关（读者自证）

2.17 线性相关

V 中一向量组不线性无关则称线性相关

即对 V 中的向量组 $\nu_1,\dots,\nu_m$，线性相关若$\exists a_1,\dots,a_m\in\mathbf{F}$ 不全为0，$a_1\nu_1+\cdots+a_m\nu_m=0$

2.18 线性相关组

$(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,8)$ 在 $\mathbf{F}^3$ 中线性相关：

$$2(2,3,1)+3(1,-1,2)+(-1)(7,3,8)=(0,0,0)$$

$(2,3,1),(1,-1,2),(7,3,c)$ 在 $\mathbf{F}^3$ 中线性相关 $\Longleftrightarrow$ $c=8$

命题

V 中一向量组的某个是其他的线性组合$\Rightarrow$线性相关

证

将那个向量线性表出后移项，系数是1。故存在系数不全为0的写法

命题

V 中每个包含向量0的向量组都线性相关

证

0是其他向量的线性组合（让系数全为0）由上条定理得证

2.19 线性相关性引理（一线性相关向量组中有某个在排在其之前的向量的张成空间里，进而可去掉那个向量而不改变该组的张成空间）

$\nu_1,\ldots,\nu_m$在V中线性相关$\Rightarrow \exists k\in\{1,2,\ldots,m\}$，$\nu_k\in\operatorname{span}(\nu_1,\ldots,\nu_{k-1})$
进而移除此项后张成空间不变

证

由线性相关$\exists a_1,\ldots,a_m\in\mathbf{F}$不全为0，

$$a_1\nu_1+\cdots+a_m\nu_m=0$$

令 k 是 $\{1,\ldots,m\}$ 中使 $a_k\neq 0$ 的最大者，则

$$\nu_k=-\frac{a_1}{a_k}\nu_1-\cdots-\frac{a_{k-1}}{a_k}\nu_{k-1}$$

故$\nu_k\in\operatorname{span}(\nu_1,\ldots,\nu_{k-1})$
设 k 是 $\{1,\ldots,m\}$ 中任一使得 $\nu_k\in\operatorname{span}(\nu_1,\ldots,\nu_{k-1})$ 成立的元素，令 $b_1,\ldots,b_{k-1}\in\mathbf{F}$ 满足

$$\nu_k=b_1\nu_1+\cdots+b_{k-1}\nu_{k-1} \tag{2.20}$$

（下证原张成空间与新张成空间相等）
$\subseteq$)
设 $u\in\operatorname{span}(\nu_1,\ldots,\nu_m)\Rightarrow\exists c_1,\ldots,c_m\in\mathbf{F}$，

$$u=c_1\nu_1+\cdots+c_m\nu_m$$

将 ν_k 换成式(2.20) 的右端得 u 处于去掉此项所得的向量组的张成空间
$\supseteq$)
显然去掉后的空间包含于去掉前的空间

若线性相关性引理中 $k=1$，则 $\nu_k\in\operatorname{span}(\nu_1,\ldots,\nu_{k-1})$ 意味着 $\nu_1=0$，因为 $\operatorname{span}(\emptyset)=\{0\}$
还要注意$k=1$时线性相关性引理证明的一部分需修改
一般书中其余部分的证明将不会关注一些必须考虑的特殊情况，包括长度为 0 的组、子空间 $\{0\}$，以及其余平凡的情形。结论对于这些情形也正确，只是证明过程稍有不同（读者自证）

2.21 线性相关性引理中 k 的最小值

考虑 $\mathbf{R}^3$ 中的组

我们马上就会看到，这个长度为 4 的组是线性相关的．于是线性相关性引理告诉我们，存在$k\in\{1,2,3,4\}$ 使得组中第 k 个向量是该组中排在它前面的向量的线性组合．我们来看怎么得出 k 的最小值
线性相关性引理中当且仅当

- 组中第一个向量等于0时才可取 $k=1$，因为 1, 2, 3 不是向量0，所以对于该组不能取 $k=1$
- 组中第二个向量是第一个向量的标量倍时才可取 $k=2$ 然而，并不存在 $\in\mathbf{R}$ 使得 $(6,5,4)=c(1,2,3)$．于是对于该组我们不能取 $k=2$
- 组中第三个向量是前两个向量的线性组合时才可取 $k=3$ 于是对于本例中的组，想知道是否存在 , $\in\mathbf{R}$ 使

  $$(15,16,17)=a(1,2,3)+b(6,5,4)$$

  上述方程等价于一个由三个方程组成、含有两个未知数 a,b 的线性方程组，用高斯消元求出 $a=3,b=2$ 是上述方程的解，故对本例中的组，$k=3$ 是满足线性相关性引理的最小 k 值

2.22 线性无关组与张成组的长度

有限维向量空间中线性无关组的长度张成组的长度

证

设V中线性无关组 $u_1,\ldots,u_m$，设：$w_1,\ldots,w_n$张成 V
证明共 m 步，每步都加入某个 u 且去掉某个 w

步骤1
中加入 u_1 可得一个线性相关组，由张成，u_1 能写成 $w_1,\ldots,w_n$ 的线性组合，故组$u_1,w_1,\ldots,w_n$线性相关
由线性相关性引理（2.19）此组中某向量是它前面向量的线性组合
由向量组 $u_1,\ldots,u_m$ 线性无关，$u_1\neq 0$（等于0一定线性相关）
故 u_1 不属于它前面向量的张成空间（即空组的张成空间 $\{0\}$ ）
由线性相关性引理，可以移除此组中某个 w 使新组 （长度为 n ）仍张成 V
步骤 k ($k=2,\ldots,m$)
由第 $k-1$ 步得到的组 （长度为 n ）张成 V，特别地，u_k 在 的张成空间中。将 u_k 接在 $u_1,\ldots,u_{k-1}$ 后面插入 中得一长度为$n+1$的线性相关组，由线性相关性引理（2.19），该组中的某向量处于排它前面的向量的张成空间中。又$u_1,\ldots,u_k$ 线性无关，此向量不可能是某个 u
故此步肯定仍剩下至少一个 w，可从新组中去某个 w （它是排在它前面向量的线性组合）得新新组（长度为 n ）由 $u_1,\ldots,u_k$ 和剩余各 w 构成且仍张成 V
m步后将所有 u 都加入了，过程结束。每步加 u 时，由线性相关性引理定有某个 w 将被移除，故各 w 至少有各 u 那么多

用上面的结论不用计算就可判断一些情况下的线性相关或无法张成

2.23

向量组 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 长度为3且张成 $\mathbf{R}^3$，故 $\mathbf{R}^3$ 中长度超过3的组都线性相关

2.24

向量组 $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$ 长度为 4 且在 $\mathbf{R}^4$ 中是线性无关的，故长度少于4的向量组都不能张成 $\mathbf{R}^4$

直觉告诉我们有限维向量空间的各子空间也是有限维的。现证这个直觉是对的

2.25 定理

有限维向量空间的各子空间都有限维

证

设U是有限维V的子空间
步骤1
若$U=\{0\}$，则U有限维，证完
若$U\neq\{0\}$，则取一非零向量$u_1\in U$
步骤 k
若$U=\operatorname{span}(u_1,\ldots,u_{k-1})$，则$U$有限维，证完
若$U\neq span(u_1,\ldots,u_{k-1})$，则取一向量 $u_k\in U$，$u_k\notin\operatorname{span}(u_1,\ldots,u_{k-1})$
由线性相关性引理（2.19），进行过程每步都构造出一线性无关组，这个线性无关组不能长于 V 的任一张成组（由2.22），故此过程终会停止，即U有限维

2B 基

基

上节中讨论了线性无关组和张成组，现研究同时有这两性质的组

2.26 基

张成V的线性无关组称V的基

2.27 基

(a) 组$(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)$ 是 $\mathbf{F}^n$的基（称$\mathbf{F}^n$ 的标准基）
(b) 组$(1,2),(3,5)$是$\mathbf{F}^2$的基，注意此组与 $\mathbf{F}^2$ 的标准基一样长（为2），下节中会讲这非巧合
(c) 组$(1,2,-4),(7,-5,6)$ 在 $\mathbf{F}^3$ 线性无关但非$\mathbf{F}^3$ 的基，因为它不张成 $\mathbf{F}^3$
(d) 组$(1,2),(3,5),(4,13)$张成$\mathbf{F}^2$但非$\mathbf{F}^2$ 的基，因为它不线性无关
(e) 组$(1,1,0),(0,0,1)$ 是 $\{(x,x,y)\in\mathbf{F}^3 : x,y\in\mathbf{F}\}$ 的基
(f) 组$(1,-1,0),(1,0,-1)$ 是 $\{(x,y,z)\in\mathbf{F}^3 : x+y+z=0\}$ 的基
(g) 组$1,z,\dots,z^m$ 是 $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ 的基（称 $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ 的标准基）

接下来的结果有助于说明为什么基是很有用的

2.28 基的判定

V 中组 $\nu_1,\dots,\nu_n$ 是 V 的基 $\iff$ $\forall\nu\in V$都可唯一写成

$$\nu = a_1\nu_1+\cdots+a_n\nu_n \tag{2.29}$$

$(a_1,\dots,a_n\in\mathbf{F})$

证(本质上再现了定义线性无关时的思想)

$\Rightarrow$)
设 $\nu_1,\dots,\nu_n$ 是 V 的基,令 $\nu\in V$
由$\nu_1,\dots,\nu_n$ 张成 V，$\exists a_1,\dots,a_n\in\mathbf{F}$ 使2.29成立
为了说明2.29的表示唯一，设还有一组标量 $c_1,\dots,c_n$ 使$\nu=c_1\nu_1+\cdots+c_n\nu_n$
用2.29减去上式得

$$0=(a_1-c_1)\nu_1+\cdots+(a_n-c_n)\nu_n$$

由$\nu_1,\dots,\nu_n$ 线性无关，各 ${}_k-{}_k$ 都为0，故$a_1=c_1,\dots,a_n=c_n$
$\Leftarrow$)
设每个 $\nu\in V$ 都能被唯一表为2.29的形式，则组$\nu_1,\dots,\nu_n$ 张成 V
设 $a_1,\dots,a_n\in\mathbf{F}$ 使$0=a_1\nu_1+\cdots+a_n\nu_n$
由式(2.29) 表达法（取 $\nu=0$ ）的唯一性， $a_1=\cdots=a_n=0$
故$\nu_1,\dots,\nu_n$线性无关，进而是V的基

张成组不一定是基（可能线性相关）
下结果表明可去张成组中某些（也可能没有）向量使新组线性无关且仍能张成同一向量空间（即基）
举个 $\mathbf{F}^2$ 中的例子：对组 $(1,2),(3,6),(4,7),(5,9)$ ，第2，4个向量可丢掉，剩下 $(1,2),(4,7)$ 是 $\mathbf{F}^2$ 的基

2.30 每个张成组都可删成基

向量空间中的每个张成组都能被削减成该向量空间的基

证

设 $\nu_1,\dots,\nu_n$ 张成 V，想从 $\nu_1,\dots,\nu_n$ 中去除某些向量以使剩下的向量形成 V 的基
令 等于向量组 $\nu_1,\dots,\nu_n$
步骤1
若$\nu_1=0$，从 中删去 ν_1

若$\nu_1 \neq 0$，不动
步骤 k
若ν_k 在 $\mathrm{span}(\nu_1,\dots,\nu_{k-1})$ 中，从 中删去 ν_k
若ν_k 不在 $\mathrm{span}(\nu_1,\dots,\nu_{k-1})$ 中，不动
n步后停止该过程得组。这个组张成 V，因为原本的组就张成 V，而我们只是将那些处于排在自身之前的向量的张成空间中的向量去掉。此过程还保证了 中没有一个向量处于排在自身之前的向量的张成空间中，由线性相关性引理（2.19）线性无关，故是V的基

我们现在得到上述结果的一重要推论

2.31 有限维向量空间的基

有限维向量空间都有基

证

由定义有限维向量空间含张成组，由2.32每个张成组都能削成基

接下来这个结果某种意义上是2.30 的对偶。2.30 说每个张成组都能被削减成基，现在给定某个空间中线性无关组可添加些向量（也可能不用）使新组仍线性无关但能张成这个空间

2.32 每个线性无关组都可扩成基

有限维向量空间中每个线性无关向量组都可被扩充成该向量空间的基

证

设有限维V中$u_1,\dots,u_m$线性无关，令 $w_1,\dots,w_n$ 是 V 中张成 V 的向量组，故$u_1,\dots,u_m,w_1,\dots,w_n$张成 V
将2.30证明中各步用于该组将其删成 V 的一基，其由 $u_1,\dots,u_m$ 和某些 w 构成（过程中没有 u 被删，因 $u_1,\dots,u_m$ 线性无关）

举个 $\mathbf{F}^3$ 中的例子：组 $(2,3,4),(9,6,8)$ 线性无关，扩成$\mathbf{F}^3$ 的基：$(2,3,4),(9,6,8),(0,1,0)$

2.33 V 的每个子空间都是等于V 的直和的组成部分

U 是有限维V的子空间$\Rightarrow$ $\exists V$ 的子空间 $W, V=U\oplus W$

证

由V有限维及2.25，U有限维。由2.31，U 中$\exists$基$u_1,\dots,u_m \Rightarrow$其线性无关，由2.32其可扩为$V$的一基$u_1,\dots,u_m,w_1,\dots,w_n$，令$W=\mathrm{span}(w_1,\dots,w_n)$
$(+)$
设 $\nu\in V$，由$u_1,\dots,u_m,w_1,\dots,w_n$ 张成 V
$\exists a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n\in\mathbf{F}$，$\nu=\underbrace{a_1u_1+\cdots+a_mu_m}_{u}+\underbrace{b_1w_1+\cdots+b_nw_n}_{w}$
故$\nu=u+w$，其中 $u\in U$ 且 $w\in W$
$(\cap=0)$
设 $\nu\in U\cap W$，则$\exists a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n\in\mathbf{F}, \nu=a_1u_1+\cdots+a_mu_m=b_1w_1+\cdots+b_nw_n$
故$a_1u_1+\cdots+a_mu_m-b_1w_1-\cdots-b_nw_n=0$
由 $u_1,\dots,u_m,w_1,\dots,w_n$ 线性无关，$a_1=\cdots=a_m=b_1=\cdots=b_n=0$

2C 维数

维数

尽管一直讨论有限维向量空间，仍未定义维是什么。合理的定义应能使 $\mathbf{F}^n$ 的维数为 n
注意到 $\mathbf{F}^n$ 的标准基长度是 n， 考虑把维数定义为基长。但一有限维向量空间有很多不同的基，只有等长时定义才合理。幸好事实就是如此。

> **2.34 基的长度不依赖于基的选取**
>
> 有限维向量空间的基等长

证

设$_1$ 和 $_2$ 是有限维V的两基，则他们线性无关且张成 V
由2.22 $_1$ 的长度不超过 $_2$ 的长度，同理$_2$ 的长度不超过 $_1$ 的长度，故等长

现可正式定义有限维向量空间的维数了

2.35 维数

有限维向量空间 V 的维数是这个向量空间中任意一个基的长度，记作$dimV$

2.36 维数

dim $\mathbf{F}^n = n$ 因 $\mathbf{F}^n$ 的标准基的长度是 n
$\dim \mathcal{P}_m(\mathbf{F}) = m+1$ 因 $\mathcal{P}_m(\mathbf{F})$ 的标准基 $1, z, \ldots, z^m$ 的长度是 $m+1$
$U = \{(x,x,y) \in \mathbf{F}^3 : x, y \in \mathbf{F}\}$，则$\mathrm{dim} U = 2$ 因 $(1,1,0)$, $(0,0,1)$ 是 U 的基
$U = \{(x,y,z) \in \mathbf{F}^3 : x+y+z = 0\}$，则$\mathrm{dim} U = 2$因$(1,-1,0),(1,0,-1)$ 是 U 的基

有限维向量空间的子空间是有限维的（由 2.25），其也有维数。

> **2.37 子空间的维数**
>
> U 是有限维V的子空间$\Rightarrow \dim U \quad \dim V$

证

将U的基看成线性无关组，V的基看成张成组，由2.22得

用定义证基，必须证线性无关和张成。事实上若组有恰当长度，只需证它满足两条之一
先证每个恰当长度的线性无关组是基
$\mathbf{R}^2$ 的维数是2，$\mathbf{C}$ 的维数是1。作为集合 $\mathbf{R}^2$ 可以被认为与$\mathbf{C}$等同（并且加法相同，标量为实数时标量乘法也相同）故当我们讨论维数时，不可忽视$\mathbf{F}$的选取带来的影响

> **2.38 长度恰当的线性无关组是基**

有限维V 中每个长$\dim V$的线性无关组都是其基

证

由2.32这个线性无关组可扩成V的基，因V的每个基都长dim$V$，扩充是平凡的（没添加元素），故其为基

2.39 某空间中与之维数相同的子空间等于这整个空间

V 有限维， U 是 V 的子空间
$\dim U=\dim V \Rightarrow U=V$

证

令 $u_1,...,u_n$ 是 U 的基，则$n=\dim U$，根据前提条件又知 $n=\dim V$． 于是 $u_1,...,u_n$ 是 V 中的线性无关向量组 （因为它是 U 的基）且长度为 $\dim V$
由 2.38，$u_1,...,u_n$ 是 V 的基
特别地 V 中每个向量都是 $u_1,...,u_n$ 的线性组合。故 $U=V$

2.40 例

$\mathbf{F}^2$中线性无关组 $(5,7),(4,3)$，由2.38它是基（因$\mathbf{F}^2$ 2维）

2.41 $_3(\mathbf{R})$ 的一个子空间的一个基

令 $U=\{p\in\mathcal{P}_3(\mathbf{R}):p'(5)=0\}$ 是 $_3(\mathbf{R})$ 的子空间，为求 U 的一个基
首先注意到多项式 $1,(x-5)^2$ 和 $(x-5)^3$ 在 U 中
设 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且

$$\forall x\in\mathbf{R},\ a+b(x-5)^2+c(x-5)^3=0$$

由LHS有 cx^3 项，RHS无x^3项，$c=0$
由$c=0$，LHS含bx^2项，$b=0$
由$b=c=0$，同理$a=0$
故$a=b=c=0$
故$1,(x-5)^2,(x-5)^3$线性无关，故3 $\dim U$，由2.37

$$3\ \ \dim U\ \ \dim\mathcal{P}_3(\mathbf{R})=4$$

多项式 x 不在 U 中，因为它的导数等于常值函数 1．于是 $U\neq\mathcal{P}_3(\mathbf{R})$． 所以 dim$U\neq 4$ （由2.39）．这样，上述的不等式就表明 dim$U=3$． 于是， U 中的线性无关组 $1,(x-5)^2,(x-5)^3$ 的长度为 $\dim U$，因此是 U 的基（由 2.38）

2.42 长度恰当的张成组是基

有限维的 V 中每个长$\dim V$的张成组都是 V 的基

证

由2.30此张成组可删成V的基，而V中每个基都长dim$V$，此处删是平凡的（没东西被删掉），故其为V的基

接下来给出有限维向量空间的两子空间和的维数公式，这个公式类似于
计数公式

> **2.43 子空间之和的维数**
>
> V_1 和 V_2 是一有限维向量空间的子空间，则
>
> $$\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$$

证

令 $\nu_1,\ldots,\nu_m$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基，于是 $\dim(V_1\cap V_2)=m$ 。因为 $\nu_1,\ldots,\nu_m$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基，所以在 V_1 中它是线性无关的．因此这个组可以被扩充为 V_1 的基 $\nu_1,\ldots,\nu_m,u_1,\ldots,u$ （由2.32）．于是 $\dim V_1=m+.$ ．同样，将 $\nu_1,\ldots,\nu_m$ 扩充为 V_2 的基 $\nu_1,\ldots,\nu_m,w_1,\ldots,w_k$ ．于是 $\dim V_2=m+k$
我们将证明，

$$\nu_1,\ldots,\nu_m,u_1,\ldots,u,w_1,\ldots,w_k$$

是 V_1+V_2 的基，这是因为由此我们就能得到

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2)&=m++k\\&=(m+)+(m+k)-m\\&=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2),\end{aligned}$$

进而完成证明
(2.44) 这个组含于 $V_1\cup V_2$ ，则也含于 V_1+V_2 ．又知该组的张成空间包含 V_1 和 V_2 ，因此该组的张成空间就等于 V_1+V_2 ．于是，要证明 (2.44) 是 V_1+V_2 的基，我们只需证明它是线性无关的
为了证明(2.44) 是线性无关的，假设

$$a_1\nu_1+\cdots+a_m\nu_m+b_1u_1+\cdots+bu+c_1w_1+\cdots+c_kw_k=0,$$

其中各 a,b,c 都是标量。需证各 a,b,c 都等于0。可将上式重写成

$$c_1w_1+\cdots+c_kw_k=-a_1\nu_1-\cdots-a_m\nu_m-b_1u_1-\cdots-bu$$

这证明了 $c_1w_1+\cdots+c_kw_k\in V_1.$ ．又因为各 w 都在 V_2 中，所以上式进一步表明 $c_1w_1+\cdots+c_kw_k\in V_1\cap V_2$ ．因为 $\nu_1,\ldots,\nu_m$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基，所以存在标量 $d_1,\ldots,d_m$ 使

$$c_1w_1+\cdots+c_kw_k=d_1\nu_1+\cdots+d_m\nu_m$$

但是 $\nu_1,\ldots,\nu_m,w_1,\ldots,w_k$ 是线性无关的，所以由上式推出各 $_c$ （以及各 d ）都等于 0．于是，式 (2.45) 成为下式

$$a_1\nu_1+\cdots+a_m\nu_m+b_1u_1+\cdots+bu=0$$

因为组 $\nu_1,\ldots,\ldots,\nu_m,u_1,\ldots\ldots,u$ 是线性无关的，所以由此式推出各 $_a$ 和各 b 都等于0，证毕

对有限集 S ，令#S 代表 S 的元素个数
下表将有限集与有限维向量空间做了对比，显示了#S（对集合）和 $\dim V$ （对向量空间）的类似性，以及子集的并（就集合而言）和子空间的和（就子空间而言）的类似性

集合	向量空间
S是有限集	V是有限维向量空间
#S	dim V
对于S的一堆子集，它们的并集是S中小的包含它们的子集	对于V的一堆子空间，它们的和是V中最小的包含它们的子空间
#(S U S') = #S+#S'-#(S ∩S')	dim(V + V') = dim V + dim V'-dim(V ∩ V')
#(S U S')= #S+#S' 若交集为空（无交并）	dim(V + V')= dim V + dim V‘ 若交集为{0}（直和）