多项式的概念

4.1 实部，Re z，虚部，Im z

$z=a+b\mathrm{i}$（a，b 为实数）的
实部$\mathrm{Re}z=a$
虚部$\mathrm{Im}z=b$

由此可写

$$z=\mathrm{Re}z+(\mathrm{Im}z)\mathrm{i}$$

4.2 复共轭，z，绝对值，z

如上z的
复共轭

$$\overline{z}=\mathrm{Re}\,z-(\mathrm{Im}\,z)\mathrm{i}$$

绝对值

$$|z|=\sqrt{(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2}$$

$\mathbf{C}$是1维复向量空间，也可视作2维实向量空间，此时 $|z|$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的原点到$(\mathrm{Re}\,z,\mathrm{Im}\,z)$ 的距离

4.3 实部和虚部、复共轭、绝对值

设 $z=3+2\mathrm{i}$
$Rez=3$
$Imz=2$
$\overline{z}=3-2\mathrm{i}$
$|z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

4.4 复数的性质

$w,z\in\mathbf{C}$
z 与 $\overline{z}$ 的

1. 和 $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}\ z$
2. 差 $z-\overline{z}=2(\mathrm{Im}\,z)\mathrm{i}$
3. 积 $z\overline{z}=|z|^2$
4. 复共轭的复共轭 $\overline{\overline{z}}=z$
5. 复共轭的绝对值 $|\overline{z}|=|z|$
6. 绝对值的可乘性 $|wz|=|w||z|$
7. 三角不等式 $|w+z|\leq|w|+|z|$

证

$$
\begin{aligned}
|w+z|^2 &= (w+z)(w+\bar{z}) \\
&= ww + z\bar{z} + w\bar{z} + zw \\
&= |w|^2 + |z|^2 + w\bar{z} + w\bar{z} \\
&= |w|^2 + |z|^2 + 2\operatorname{Re}(w\bar{z}) \\
&\leq |w|^2 + |z|^2 + 2|w\bar{z}| \\
&= |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z| \\
&= (|w|+|z|)^2
\end{aligned}
$$

两边开平方根得证

4.5 多项式的零点

数 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$ 称多项式 $p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ 的零点（根），若

$$p(\lambda) = 0$$

4.6 因式定理

m 是正整数，$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是 m 次多项式，$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$
$p(\lambda) = 0 \iff \exists m-1$次多项式 $q \in \mathcal{P}(\mathbf{F}), \forall z \in \mathbf{F}, p(z) = (z-\lambda)q(z)$

证

$\Rightarrow)$
设$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$

$$p(z) = p(z) - p(\lambda) = a_1(z-\lambda) + \cdots + a_m(z^m - \lambda^m)$$

$\forall k \in \{1,\ldots,m\}, z^k - \lambda^k = (z-\lambda)\sum_{j=1}^{k} \lambda^{j-1} z^{k-j}$
故$z^k - \lambda^k$等于$z-\lambda$ 乘某 $k-1$次多项式
由4.7，p 等于$z-\lambda$乘某$m-1$次多项式
$\Leftarrow)$
$p(\lambda) = (\lambda-\lambda)q(\lambda) = 0$

4.8 m 次多项式最多 m 个零点

m 是正整数，$p \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ 是m次多项式,则p 在 $\mathbf{F}$ 中最多m 个零点

证

对 m 归纳
$(m=1)$
多项式 $a_0 + a_1 z$ 仅有一零点$-\dfrac{a_0}{a_1}$
$(m-1 \Rightarrow m)$
若p 在 $\mathbf{F}$ 中无零点，成立
下设 p 有一零点 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$
由4.6，$\exists m-1$次多项式 $q \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$，$\forall z \in \mathbf{F}$，$p(z) = (z-\lambda)q(z)$
由归纳假设q 在 $\mathbf{F}$ 中至多 $m-1$ 个零点，而上述等式表明 p 在F 中的零点恰为 q 在 $\mathbf{F}$ 中的零点和 λ，故 p 在 $\mathbf{F}$ 中至多m个零点

上述结论表明多项式的系数是唯一的（若有两组不同系数，将表示形式相减得一某些系数非零却有无穷多零点的多项式）

多项式的带余除法

对非负整数p 和正整数 s ，∃非负整数 q 和 r ， $p=sq+r \wedge r<s$
(p 除以 s 得商 q 和余数 r)
接下来给出多项式的类似结论，因而常被称为多项式带余除法
多项式的带余除法可以不用任何线代知识，但此处巧妙利用$\mathcal{P}_n(\mathbf{F})$ 的基（ $\mathcal{P}_n(\mathbf{F})$ 是由系数在 $\mathbf{F}$ 中且次数至多为 n 的多项式所构成的 $n+1$ 维向量空间）

> **4.9 多项式的带余除法**
>
> $p, s \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ ，其中 $s \neq 0$. 那么存在唯一的多项式 $q, r \in \mathcal{P}(\mathbf{F})$ 满足
> $p=sq+r$且 $\deg r<\deg s$

证

令 $n=\deg p$ 且 $m=\deg s$
若 $n<m$ ，那么取 $q=0$ 与 $r=p$ 即可
欲证 $p=sq+r \wedge \deg r<\deg s$ ，设 $n \geq m$
$1, z, \ldots, z^{m-1}, s, zs, \ldots, z^{n-m} s$在 $\mathcal{P}_n(\mathbf{F})$ 中线性无关（因为该组中每个多项式都有不同的次数）
同时组(4.10) 的长度是 $n+1$（等于 $\dim \mathcal{P}_n(\mathbf{F})$）由2.38(4.10) 就是 $\mathcal{P}_n(\mathbf{F})$ 的一个基
由 $p \in \mathcal{P}_n(\mathbf{F})$ 且 (4.10) 是 $\mathcal{P}_n(\mathbf{F})$ 的一个基， $\exists! a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbf{F} \quad b_0, b_1, \ldots, b_{n-m} \in \mathbf{F}$ ，

$$
\begin{aligned}
p & =a_0+a_1 z+\cdots+a_{m-1} z^{m-1}+b_0 s+b_1 zs+\cdots+b_{n-m} z^{n-m} s \\
& =\underbrace{a_0+a_1 z+\cdots+a_{m-1} z^{m-1}}_r+s(\underbrace{b_0+b_1 z+\cdots+b_{n-m} z^{n-m}}_q).
\end{aligned}
$$

由 和 q 的定义， p 可写成 $p=sq+r$ 且 deg $r<\deg s$ ，存在性得证
满足这些条件的 $q, r \in \mathcal{S}(\mathbf{F})$ 的唯一性源于满足式 (4.11)的常数 $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbf{F}$ 和$b_0, b_1, \ldots, b_{n-m} \in \mathbf{F}$ 的唯一性

多项式在上的分解

通过令 F 指代 R 或 C，我们一直在同时跟实系数多项式与复系数多项式打交道．现在我们将看到这两种情形的区别．我们先讨论复系数多项式，然后用适于复系数多项式的结论来证明适于实系数多项式的对应结论
我们对代数基本定理的证明隐式地用到代数基本定理是个存在性定理．它的证明并不能引出求解零点的方法．二次多项式的零点由二次求根公式明确给出；对于三次和四次多项式也有与之相似但更为复杂的公式对于五次及以上的多项式，这样的求根公式就不存在了
通过上网搜索，你还能看到代数基本定理的一些其他证法。如果你对解析函数得心应手，那么利用刘维尔定理（Liouville'stheorem）的证法尤其好用．代数基本定理的所有证明都需要用到一些分析学的知识，因为如果 C 被替换掉【如换成形如 $c+di$ （ c 和 d 为有理数）的数的集合】，那么这个结论就不再成立了

> **4.12 代数基本定理第一版**
>
> 每个不是常值的复系数多项式都在C 中有零点

证

由棣莫弗定理

$$
(\mathrm{os} \ +\mathrm{i} \sin \ )^k=\mathrm{os}\, k+\mathrm{i} \sin k
$$

该定理可通过对 k 作数学归纳法并用余弦和正弦的加法公式来证明
设 $w \in \mathbf{C}$ 且 k 为正整数．利用极坐标，我们可知存在 $r \geq 0$ 且 $\in \mathbf{R}$ 使得

$$
r(\mathrm{os} \ +\mathrm{i} \sin \ )=w
$$

由棣莫弗定理

$$
\left(r^{1/k}\left(\mathrm{os} \frac{}{k}+\mathrm{i} \sin \frac{}{k}\right)\right)^k=w
$$

故每个复数都有 k 次根

设 p 是不为常值的复系数多项式且最高次非零项为 $c_m z^m$． 那么当 $|z| \to \infty$ 时 $|p(z)| \to \infty$ （因为当 $|z| \to \infty$ 时 $|p(z)|/|z^m||c_m|$ ）
于是连续函数 $z \mapsto |p(z)|$ 在某点 $\in \mathbf{C}$ 处取得全局最小值．为说明 $p() = 0$，设 $p() \neq 0$
定义多项式 q

$$q(z) = \frac{p(z+)}{p()}$$

函数 $z \mapsto |q(z)|$ 在 $z = 0$ 处有全局最小值1．将 $q(z)$ 写成

$$q(z) = 1 + a_k z^k + \cdots + a_m z^m,$$

其中 k 是满足 z^k 的系数非零的最小正整数，换言之， $a_k \neq 0$
令 $\beta \in$ 使 βk = - $\beta^k = -\frac{1}{a_k}$，则存在常数 $c > 1$ 满足：若 $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned} |q(t\beta)| &\leq |1 + a_k t^k \beta^k| + t^{k+1} c \\ &= 1 - t^k(1 - tc) \end{aligned}$$

取 t为 $\frac{1}{2c}$， $|q(t/\beta)| < 1$，与 $z \mapsto |q(z)|$ 的全局最小值为1 矛盾
故$p() = 0$ 原命题得证

计算机能通过精巧的数值计算方法求出任何多项式的零点的充分近似值，即便确切的零点是求不出来的．如$p(x) = x^5 - 5x^4 - 6x^3 + 17x^2 + 4x - 7$无法求其零点的确切求解公式，但计算机可求得 p 的零点大致是−1.87, −0.74, 0.62, 1.47, 5.51 这五个数
代数基本定理第一版引导我们得到复系数多项式的如下分解定理。注意，在该分解式中， p 的零点恰为数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$， 只有当 z 取这些数时才能让下面结论中等式的右侧等于0

4.13 代数基本定理第二版

$p \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ 是不恒为常数的多项式，那么 p 可被唯一分解为（不计因式的顺序）

$$p(z) = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$$

其中 $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in$

证

设 $p \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ 且 $m = \deg p$． 我们对 ∇_m 用数学归纳法．若 $m = 1$， 那么我们所期望的分解式存在且唯一．因此，设 $m > 1$， 并设对于所有 $m - 1$ 次多项式，我们所期望的分解式都存在且唯一
（存在性）
由代数基本定理的版本一（4.12）， p 具有零点 $\lambda \in \mathbf{C}$． 由4.6，存在 $m - 1$ 次多项式 q 使得对所有 $z \in \mathbf{C}$ 都有

$$p(z) = (z - \lambda) q(z)$$

由归纳假设 q 可分解为我们所期望的形式，将其分解式代入上式即得到我们所期望的 p 的分解式
（唯一性）
c 就是 p 中 z^m 前的系数，因此是唯一确定的．所以我们只需证明 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 仅有一种选取方法（不考虑次序）．若

$$(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m) = (z - {}_1) \cdots (z - {}_m)$$

对所有 $z \in \mathbf{C}$ 都成立，那么由于当 $z = \lambda_1$ 时此式左侧等于0，所以此式右侧会有某个 等于 λ_1 我们把下标改一下，即可假设 ${}_1 = \lambda_1$． 那么如果 $z \neq \lambda_1$， 我们就可以将上式两侧同除以 $z - \lambda_1$， 得

$$(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_m) = (z - {}_2) \cdots (z - {}_m)$$

除在 $z = \lambda_1$ 可能不成立外，对其他所有 $z \in \mathbf{C}$ 都成立．事实上，上式一定对所有 $z \in \mathbf{C}$ 都成立，否则，将上式左端减去右端，就会得到一个非零却有无限多个零点的多项式．上面等式和我们的归纳假设表明，各 λ 与各 相同（不考虑次序）

多项式在上的分解

一个实系数多项式可能没有实数零点（如 $1 + x^2$）
代数基本定理在 R 上不成立，由此可解释线性代数在实向量空间和复向量空间上的差异。在之后的章节中我们将对此作进一步了解
利用C上的分解定理得出R上的分解定理

4.14 实系数多项式的非实数零点成对出现

设 $p \in \mathcal{P}(\mathbf{C})$ 为实系数多项式．若 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{C}$ 是 p 的零点，那么 $\bar{\lambda}$ 也是 p 的零点

证

$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m$，其中 $a_0,\ldots,a_m$ 是实数
设 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{C}$ 是 p 的零点，则$a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m=0$
两边取复共轭得$a_0+a_1\bar{\lambda}+\cdots+a_m\bar{\lambda}^m=0$
其中我们用到了复共轭的基本性质（见4.4）
故 $\bar{\lambda}$ 是 p 的零点

我们想得到实系数多项式的分解定理．我们从下面的结论出发
将二次求根公式和下面结论结合起来思考

4.15 二次多项式的分解

$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbf{R}$ 当且仅当 $b^2 \geq 4c$ 时存在 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ 使得$x^2+bx+c=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$分解成立

证

注意到$x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4}\right)$
先设 $b^2<4c$． 于是对每个 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}$， 上式 上式是配方法这个技巧的基础右侧均为正．因此多项式 x^2+bx+c 没有实数零点，从而也就不能被分解成 $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ （其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ ）的形式
反之，现假设 $b^2 \geq 4c$． 那么存在实数 d 使得 $d^2=\frac{b^2}{4}-c$． 根据上面单行列出的公式有，

$$\begin{aligned}
x^2+bx+c &= \left(x+\frac{b}{2}\right)^2-d^2 \\
&= \left(x+\frac{b}{2}+d\right)\left(x+\frac{b}{2}-d\right),
\end{aligned}$$

即得我们想要的分解式

下面结论给出了多项式在 $\mathbf{R}$ 上的分解式．该结论的证明思想是利用代数基本定理的版本二（4.13），这个定理给出的是将 p 视作复系数多项式时的分解式．由 4.14 知， p 的非实数复
零点总是成对出现．于是，如果将 p 视作 $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ 的元素时，所得分解式含有形如 $(x-\lambda)$ 的项（其中 λ 为非实数的复数），那么 $(x-\bar{\lambda})$ 也是分解式的一项．将这两项相乘可得

$$\left(x^2-2(\operatorname{Re}\lambda)x+|\lambda|^2\right),$$

这个二次的项正是我们所需要的形式
根据上段概述的思路基本上能证明我们所期望的分解式是存在的．然而，有一点需要注意：设 λ 是非实数的复数，且 $(x-\lambda)$ 是将 p 视作 $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ 的元素时所得分解式的其中一项，那么根据4.14 我们可以保证 $(x-\bar{\lambda})$ 肯定也是分解式中的一项，但是4.14 并没说这两个因式出现的次数相同，而要使上段的思路可行，这一点是必需的．不过我们将证明这一点的确成立
在下面结果中， m 和 M 中可能会有一个等于0．数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 恰是 p 的实数零点，因为 x 仅有取这些实数值时才能使下面结论中等式的右侧等于0

4.16 多项式在R 上的分解

$p \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ 是一个不恒为常数的多项式．那么 p 可被唯一分解为（不计因式的顺序）

$$p(x)=c(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m)(x^2+b_1x+c_1)\cdots(x^2+b_Mx+c_M),$$

其中 $c,\lambda_1,\ldots,\lambda_m,b_1,\ldots,b_M,c_1,\ldots,c_M\in\mathbf{R}$ 且对各 $k=1,\ldots,M$ 均有 $b_k^2<4c_k$

证

（存在性）
将 p 视作 $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ 的一个元素．如果 p 的所有（复）零点都是实的，那么根据 4.13 就得到了我们想要的分解式．于是，设 p 存在零点 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{C}$ 且 $\lambda\notin\mathbf{R}$ ．由 4.14 可得 λ 也是 p 的零点．于是我们可写出

$$\begin{aligned}p(x)&=(x-\lambda)(x-\lambda)q(x)\\&=\left(x^2-2(\mathrm{Re}\lambda)x+|\lambda|^2\right)q(x)\end{aligned}$$

其中 $q\in\mathcal{P}(\mathbf{C})$ 是比 p 低2次的多项式．如果我们可以证明 q 的系数为实数，那么对 p 的次数用归纳法即可完成存在性部分的证明
为了证明 q 的系数是实数，通过上述方程解出 ，可得对于所有 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}$ ，

$$q(x)=\frac{p(x)}{x^2-2(\mathrm{Re}\lambda)x+|\lambda|^2}$$

上式意味着对于所有 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}$ 都有 $q(x)\in\mathbf{R}$ ．将 q 写成

$$q(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-2}x^{n-2}$$

其中 $n=\deg p$ 且 $a_0,\ldots,a_{n-2}\in\mathbf{C}$ ．由此

$$0=\mathrm{Im}\,q(x)=(\mathrm{Im}\,a_0)x+(\mathrm{Im}\,a_1)x+\cdots+(\mathrm{Im}\,a_{n-2})x^{n-2}$$

对所有 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}$ 都成立．这就意味着 $\mathrm{Im}a_0,\mathrm{Im}a_1,\ldots,\mathrm{Im}a_{n-2}$ 都等于 0（由 4.8）．于是 q 的所有系数都是实数．因此，我们所期望的分解式存在
（唯一性）
p 的一个形如 $x^2+b_kx+c_k$ 且满足 $b_k^2<4c_k$ 的因式，可以被唯一地表示为 $(x-\lambda_k)(x-\lambda_k)$ ，其中 $\boldsymbol{\lambda}_k\in\mathbf{C}$ ．不难想到，若将 p 作为 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ 中元素来看时存在两个不同的分解式，会导致将其作为 $\mathcal{P}(\mathbf{C})$ 中元素来看时，也有两个不同的分解式，而这与 4.13 矛盾