9A 双线性型和二次型

双线性型

V 上的一个双线性型是一个从 $V\times V$ 到 $\mathbf{F}$ 的函数 $\beta(\cdot,\cdot)$ ，它在两个位置上分别是线性的，意即如果我们固定任意一个位置中的向量，那么就会得到另一个位置上的线性函数．正式的定义如下

9.1 双线性型

V 上的一个双线性型是一个函数 $\beta: V\times V\to\mathbf{F}$ ，该函数满足，对于所有 $u\in V$ ，
都是 V 上的线性泛函

如，若 V 是实内积空间，那么将有序对 $(u,\nu)\in V\times V$ 对应到 u,ν 的函数就是 V 上的双线性型．若 V 是非零复内积空间，那么这个函数就不是双线性型，因为内积在第二个位置上不是线性的（第二个位置上的复数被提出时会变为其复共轭）
回忆线性泛函意为映射至标量域 F的线性函数．因而术语“双线性泛函”比“双线性型”与之更具有一致性．不幸的是，后者已经成为标准用法了
若 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ ，那么双线性型与内积的不同之处在于，内积需要具备对称性【意即对所有$\nu,w\in V$ ， $\beta(\nu,w)=\beta(w,\nu)$.】和正定性【意即对所有 $\nu\in V\backslash\{0\}$ ， $\beta(\nu,\nu)>0$ 】，但是双线性型不需要具备这些性质

9.2 双线性型

定义为

$$\beta\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big)=x_1y_2-5x_2y_3+2x_3y_1$$

的函数 $\beta:\mathbf{F}^3\times\mathbf{F}^3\mathbf{F}$ 是 $\mathbf{F}^3$ 上的双线性型
设 A 是 $n\times n$ 矩阵，其中第 j 行第 k 列元素 $A_{j,k}\in\mathbf{F}$ ．定义 $\mathbf{F}^n$ 上的双线性型 β_A 为

$$\beta_A\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{j,k}x_jy_k.$$

第一个例子就是本例取 $n=3$ 和

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-5\\2&0&0\end{pmatrix}$$

时的特殊情况
设 V 是实内积空间且 $T\in\mathcal{L}(V)$ ．那么定义为

$$\beta(u,\nu)=\langle u,T\nu\rangle$$

的函数 $\beta: V\times V\to\mathbf{R}$ 是 V 上的双线性型
若 n 是正整数，那么定义为

$$\beta(p,q)=p(2)\cdot q'(3)$$

的函数 $\beta:\mathcal{P}_n(\mathbf{R})\times\mathcal{P}_n(\mathbf{R})\mathbf{R}$ 是 $\mathcal{P}_n(\mathbf{R})$ 上的双线性型
设 $\varphi,\tau\in V'$ ．那么定义为

$$\beta(u,\nu)=\varphi(u)\cdot\tau(\nu)$$

的函数 $\beta: V\times V\to\mathbf{F}$ 是 V 上的双线性型
更一般地，设 $\varphi_1,\ldots,\varphi_n,\tau_1,\ldots,\tau_n\in V'$ ．那么定义为

$$\beta(u,\nu)=\varphi_1(u)\cdot\tau_1(\nu)+\cdots+\varphi_n(u)\cdot\tau_n(\nu)$$

的函数 $\beta: V\times V\to\mathbf{F}$ 是 V 上的双线性型
V 上的双线性型是从 $V\times V$ 到 $\mathbf{F}$ 的函数， $V\times V$ 是向量空间，由此生出一个问题：一个双线性型能否也是从 $V\times V$ 到 $\mathbf{F}$ 的线性映射？注意到，

9.2 中的各双线性型，除了在某些特殊情况下等于零映射外，其余时候都不是线性映射．习题3 表明， V 上的双线性型 β 是 $V\times V$ 上的线性映射仅当 $\beta=0$

9.3 V(2)

V 上的双线性型构成的集合记为 $V^{(2)}$

定理

在通常的函数加法与标量乘法运算下， $V^{(2)}$ 是向量空间

对于 n 维向量空间 V 上的算子 T 和 V 的基 $e_1,...,e_n$ ，我们用一个 $n\times n$ 矩阵来给出 T 的信息．现在我们对 V 上的双线性型也采取同样做法

9.4 双线性型的矩阵 m(β)

设 β 是 V 上的双线性型， $e_1,...,e_n$ 是 V 的基． β 关于该基的矩阵是 $n\times n$ 矩阵 $\mathcal{M}(\beta)$ ，其中第 j 行第 k 列中的元素

$$M(\beta)_{j,k}=\beta(e_j,e_k)$$

如果从上下文不能明确基 $e_1,...,e_n$ 的选取，就用 $M(\beta,(e_1,...,e_n))$ 这个记号

回忆一下， $\mathbf{F}^{n,n}$ 代表由元素属于 $\mathbf{F}$ 的 $n\times n$ 矩阵构成的向量空间，且有 $\dim \mathbf{F}^{n,n}=n^2$ （见3.39 和 3.40）

9.5 定理

设 $e_1,...,e_n$ 是 V 的基．那么映射 $\beta\mapsto\mathcal{M}(\beta)$ 是将 $V^{(2)}$ 映成 $\mathbf{F}^{n,n}$ 的同构．此外， $\dim V^{(2)}=(\dim V)^2$

证

映射 $\beta\mapsto M(\beta)$ 显然是从 $V^{(2)}$ 到 $\mathbf{F}^{n,n}$ 的线性映射
对于 $A\in\mathbf{F}^{n,n}$ ， 定义 V 上的双线性型 β_A 为：对 $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n\in\mathbf{F}$ ，

$$\beta_A(x_1e_1+\cdots+x_ne_n,y_1e_1+\cdots+y_ne_n)=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n A_{j,k}x_jy_k$$

（若 $V=\mathbf{F}^n$ 且 $e_1,...,e_n$ 是 $\mathbf{F}^n$ 的标准基，那么该 β_A 就与例9.2 中第二例所给出的双线性型 β_A 相同）
从 $V^{(2)}$ 到 $\mathbf{F}^{n,n}$ 的线性映射 $\beta\mapsto\mathcal{M}(\beta)$ 和从 $\mathbf{F}^{n,n}$ 到 $V^{(2)}$ 的线性映射 $A\mapsto\beta_A$ 是彼此的逆，这是因为，对所有 $\beta\in V^{(2)}$ 皆有 $\beta_{\mathcal{M}(\beta)}=\beta$ ，且对所有 $A\in\mathbf{F}^{n,n}$ 皆有 $\mathcal{M}(\beta_A)=A$ （你应自行验证）
于是这两个映射都是同构，它们所联系的两个空间就有相同的维数．因此 $\dim V^{(2)}=\dim\mathbf{F}^{n,n}=n^2=(\dim V)^2$

回忆一下， C^t 表示矩阵 c 的转置．将 c 的行与列互换可得到矩阵 C^t ，

9.6 双线性型与算子的复合

设 β 是 V 上的双线性型， $T\in\mathcal{L}(V)$ ．定义 V 上的双线性型 α 和 为

$$\alpha(u,\nu)=\beta(u,T\nu)\quad(u,\nu)=\beta(Tu,\nu)$$

定理

令 $e_1,\ldots,e_n$ 是 V 的基，

$$\mathcal{M}(\alpha)=\mathcal{M}(\beta)\mathcal{M}(T) \qquad \mathcal{M}()=\mathcal{M}(T)^{\mathrm{t}}\mathcal{M}(\beta)$$

若 $j,k\in\{1,\ldots,n\}$，则

证

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\alpha)_{j,k}&=\alpha(e_j,e_k)\\&=\beta(e_j,Te_k)\\&=\beta\Big(e_j\sum_{m=1}^{n}\mathcal{M}(T)_{m,k}e_m\Big)\\&=\sum_{m=1}^{n}\beta(e_j,e_m)\mathcal{M}(T)_{m,k}\\&=\big(\mathcal{M}(\beta)\mathcal{M}(T)\big)_{j,k}\end{aligned}$$

于是 $\mathcal{M}(\alpha)=\mathcal{M}(\beta)\mathcal{M}(T)$ 类似可证 $\mathcal{M}()=\mathcal{M}(T)^{\mathrm{t}}\mathcal{M}(\beta)$

下面结论展示了当基改变时，双线性型的矩阵如何变化．下面结论中的公式应与算子的矩阵的换基公式（见3.84）比照看待．两个公式是类似的，区别在于下面公式中含转置 C^{t}，而算子的矩阵的换基公式中含逆 C^{-1}

9.7 换基公式

设 $\beta\in V^{(2)}$．设 $e_1,\ldots,e_n$ 和 $f_1,\ldots,f_n$ 是 V 的基．令

$$A=\mathcal{M}\big(\beta,(e_1,\ldots,e_n)\big) \qquad B=\mathcal{M}\big(\beta,(f_1,\ldots,f_n)\big)$$

以及 $C=\mathcal{M}\big(I,(e_1,\ldots,e_n),(f_1,\ldots,f_n)\big)$．那么

$$A=C^{\mathrm{t}}BC$$

证

由线性映射引理（3.4）存在算子 $T\in\mathcal{L}(V)$ 使得 $Tf_k=e_k$ 对每个 $k=1,\ldots,n$ 成立．由算子关于一基的矩阵的定义可得

$$M\left(T,(f_1,\ldots,f_n)\right)=C$$

定义 V 上的双线性型 α，为
那么对所有 $j,k\in\{1,\ldots,n\}$ 均有 $\beta(e_j,e_k)=\beta(Tf_j,Tf_k)=(f_j,f_k)$．于是

$$\begin{aligned}A&=M\big(,(f_1,\ldots,f_n)\big)\\&=C^{\mathrm{t}}M\big(\alpha,(f_1,\ldots,f_n)\big)\\&=C^{\mathrm{t}}BC,\end{aligned}$$

其中第二、三行都源自9.6

9.8 $\mathscr{P}_2(\mathbf{R})$ 上的一个双线性型的矩阵

定义 $\mathscr{P}_2(\mathbf{R})$ 上的双线性型 β 为 $\beta(p,q)=p(2)\cdot q'(3)$．令

$$A=\mathcal{M}\big(\beta,(1,x-2,(x-3)^2)\big)$$

$$B=\mathcal{M}\big(\beta,(1,x,x^2)\big)$$

以及 $C=\mathcal{M}\big(I,(1,x-2,(x-3)^2),(1,x,x^2)\big)$．那么

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \quad \mu \quad B=\begin{pmatrix}0&1&6\\0&2&12\\0&4&24\end{pmatrix} \quad \mu \quad C=\begin{pmatrix}1&-2&9\\0&1&-6\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

现由换基公式 $A=C^{t}BC$，可通过用上面这些矩阵作乘法来验证

对称双线性型

9.9 对称双线性型

称双线性型 $\in V^{(2)}$ 是对称的若$(u,w)=(w,u)$对所有 $u,w\in V$ 都成立． V 上对称双线性型构成的集合记作 $V^{(2)}_{\mathrm{sm}}$

9.10 对称双线性型

V 是实内积空间
$\in V^{(2)}$ 定义为$(u,w)=\langle u,w\rangle$，那么 是 V 上的对称双线性型
$T\in\mathcal{L}(V)$． 定义 $\in V^{(2)}$ 为

$$(u,w)=u,Tw$$

当且仅当 T 是自伴算子时， 是 V 上的对称双线性型（上个例子就是 $T=I$ 时的特殊情况）
定义 $:\mathcal{L}(V)\times\mathcal{L}(V)\to\mathbf{F}$ 为

$$(S,T)=\mathrm{tr}(ST)$$

那么 是 $\mathcal{L}(V)$ 上的对称双线性型，这是因为迹是 $\mathcal{L}(V)$ 上的线性泛函，且 $\mathrm{tr}(ST)=\mathrm{tr}(TS)$ 对所有 $S,T\in\mathcal{L}(V)$ 成立（参见8.56）

9.11 对称矩阵

若方阵 A 与其转置相等，则称 A 是对称的

V 上的算子可能关于 V 的某些基（但不是所有基）具有对称矩阵．相比之下，下面结论表明 V 上的双线性型要么关于 V 的所有基都具有对称矩阵，要么关于 V 的所有基都不具有对称矩阵

9.12 对称双线性型是可对角化的

设 $\in V^{(2)}$． 那么下面各命题等价
(a) 是 V 上的对称双线性型
(b) $M(,(e_1,\dots,e_n))$ 对 V 的每个基 $e_1,\dots,e_n$ 都是对称矩阵
(c) $M(,(e_1,\dots,e_n))$ 对 V 的某个基 $e_1,\dots,e_n$ 是对称矩阵
(d) $M(,(e_1,\dots,e_n))$ 对 V 的某个基 $e_1,\dots,e_n$ 是对角矩阵

证

先设(a) 成立，则 是对称双线性型．设 $e_1,\dots,e_n$ 是 V 的一个基且 $j,k\in\{1,\dots,n\}$． 那么因为 是对称的，所以 $(e_j,e_k)=(e_k,e_j)$． 于是 $M(,(e_1,\dots,e_n))$ 是对称矩阵，这说明(a) 蕴涵 (b)

显然 (b) 蕴涵 (c)
现设 (c) 成立，并设 $e_1,\dots,e_n$ 是 V 的一个基，使得 $M(,(e_1,\dots,e_n))$ 是对称矩阵．设$u,w\in V$． 存在 $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbf{F}$ 使得 $u=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$ 与 $w=b_1e_1+\cdots+b_ne_n$ 成立．则

$$(u,w) = \left(\sum_{j=1}^n a_j e_j \sum_{k=1}^n b_k e_k\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_k (e_j, e_k)$$

$$= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j b_k (e_k, e_j)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n b_k e_k \sum_{j=1}^n a_j e_j\right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n b_k e_k \sum_{j=1}^n a_j e_j\right)$$

其中，第三行成立是因为 $\mathcal{M}()$ 是对称矩阵．上式表明 是对称双线性型，证明了(c) 蕴涵(a)

现在，我们已证明了(a)、(b)、(c) 等价．因为每个对角矩阵都是对称的，所以(d) 蕴涵(c)为完成证明，我们通过对 $n = \dim V$ 作归纳法来说明(a) 蕴涵(d)

若 $n = 1$，那么因为每个 1×1 矩阵都是对角矩阵，所以 (a) 蕴涵 (d)．现设 $n > 1$ 且蕴涵关系 ( ) $\Longrightarrow$ (d) 对维数少 1 的情形成立．设 (a) 成立，则 是对称双线性型．如果 $= 0$，那

么 关于 V 的每个基的矩阵都是零矩阵，即为对角矩阵．因此我们可设 $\neq 0$，这意味着存在$u, w \in V$ 使得 $(u, w) \neq 0$．我们有

$$2(u,w) = (u+w, u+w) - (u,u) - (w,w).$$

因为上式左侧是非零的，所以右侧三项不会都等于0．因此存在 $\nu \in V$ 使得 $(\nu, \nu) \neq 0$

令 $U = \{u \in V : (u, \nu) = 0\}$．于是 U 是 V 上的线性泛函 $u \mapsto (u, \nu)$ 的零空间．因为 $\nu \notin U$，所以这个线性泛函不是零线性泛函．于是 $\dim U = n - 1$．由归纳假设，存在 U 的基 $e_1, \ldots, e_{n-1}$ 使得对称双线性型 $|_{U \times U}$ 关于该基有对角矩阵

因为 $\nu \notin U$，所以 $e_1, \ldots, e_{n-1}, \nu$ 是 V 的一个基．设 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$．那么由 U 的定义可知 $(e_k, \nu) = 0$．因为 是对称的，所以我们也有 $(\nu, e_k) = 0$．于是 关于 $e_1, \ldots, e_{n-1}, \nu$ 的矩阵是对角矩阵，这就完成了(a) 蕴涵(d) 的证明

上述结论说明每个对称双线性型都关于某个基有对角矩阵．如果我们讨论的向量空间恰好又是实内积空间，那么下面结论说明每个对称双线性型都关于某个规范正交基有对角矩阵注意，此处内积与双线性型无关

9.13 用规范正交基将对称双线性型对角化

V 是实内积空间， 是 V 上的对称双线性型．那么 关于 V 的某个规范正交基有对角矩阵

证

令 $f_1, \ldots, f_n$ 是 V 的规范正交基．令 $B = M\big(,(f_1, \ldots, f_n)\big)$．那么 B 是对称矩阵（由9.12）令 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是使得 $M(T, (f_1, \ldots, f_n)) = B$ 的算子．于是 T 是自伴的

实谱定理（7.29）表明 T 关于 V 的某个规范正交基 $e_1, \ldots, e_n$ 具有对角矩阵．令 $C = \mathcal{M}\big(I, (e_1, \ldots, e_n), (f_1, \ldots, f_n)\big)$．那么 $C^{-1}BC$ 是 T 关于 $e_1, \ldots, e_n$ 的矩阵（由3.84）．因此 $C^{-1}BC$ 是对角矩阵．则

$$M\big(,(e_1, \ldots, e_n)\big) = C^{t}BC = C^{-1}BC$$

其中第一个等号成立是由 9.7 所得，第二个等号成立是因为 c 是各元素均为实数的幺正矩阵（这意味着 $C^{-1} = C^{t}$，见 7.57）

现在我们将注意力转向交错双线性型．在本章靠后部分，我们学习行列式时，交错双线性型会起重要作用

9.14 交错双线性型

双线性型 $\alpha \in V^{(2)}$ 是交错的，若对于所有 $\nu \in V$ 有

$$\alpha(\nu, \nu) = 0$$

V 上交错双线性型所构成的集合记为 $V^{(2)}_{\text{alt}}$

9.15 交错双线性型

$n \geq 3$， $\alpha : \mathbf{F}^n \times \mathbf{F}^n \mathbf{F}$ 定义为

$$\alpha\big((x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)\big) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1$$

那么 α 是 $\mathbf{F}^n$ 上的交错双线性型
$\varphi, \tau \in V'$， 定义为

$$\alpha(u,w) = \varphi(u)\tau(w) - \varphi(w)\tau(u)$$

的 V 上的双线性型 α 是交错的

下面结论表明，一个双线性型是交错的当且仅当交换两个输入量会使输出量乘-1

9.16 交错双线性型的刻画

V 上的双线性型 α 是交错的，当且仅当$\alpha(u,w) = -\alpha(w,u)$对所有 $u, w \in V$ 都成立

证

设 α 是交错的．若 $u, w \in V$， 那么

$$0 = \alpha(u+w, u+w)$$

$$\begin{aligned} &= \alpha(u,u) + \alpha(u,w) + \alpha(w,u) + \alpha(w,w) \\ &= \alpha(u,w) + \alpha(w,u) \end{aligned}$$

因此 $\alpha(u,w) = -\alpha(w,u)$
另一方向，设 $\alpha(u,w) = -\alpha(w,u)$ 对所有 $u, w \in V$ 都成立．那么$\alpha(\nu,\nu) = -\alpha(\nu,\nu)$ 对所有 $\nu \in V$ 都成立，这表明 $\alpha(\nu,\nu) = 0$ 对所有 $\nu \in V$ 都成立．因此 α 是交错的

现在我们证明， V 上双线性型所构成的向量空间，等于 V 上对称双线性型和 V 上交错双线性型各自构成的向量空间的直和

9.17 定理

集合 $V^{(2)}_{\text{sm}}$ 和 $V^{(2)}_{\text{alt}}$ 都是 $V^{(2)}$ 的子空间，且有

$$V^{(2)} = V^{(2)}_{\text{sm}} \oplus V^{(2)}_{\text{alt}}$$

证

由对称双线性型的定义， V 上任意两个对称双线性型的和仍是 V 上的对称双线性型，并且 V 上任意对称双线性型乘以任意标量仍得到 V 上的对称双线性型．于是 $V^{(2)}_{\text{sm}}$ 是 $V^{(2)}$ 的子空间．类似地，容易验证 $V^{(2)}_{\text{alt}}$ 是 $V^{(2)}$ 的子空间
接下来我们想证明 $V^{(2)} = V^{(2)}_{\text{sm}} + V^{(2)}_{\text{alt}}$． 为此，设 $\beta \in V^{(2)}$． 定义 $, \alpha \in V^{(2)}$ 为

$$(u,w) = \frac{\beta(u,w) + \beta(w,u)}{2} \quad \mathcal{G} \quad \alpha(u,w) = \frac{\beta(u,w) - \beta(w,u)}{2}$$

那么 $\in V^{(2)}_{\text{sm}}$ 且 $\alpha \in V^{(2)}_{\text{alt}}$， 且 $\beta = +\alpha$． 于是 $V^{(2)} = V^{(2)}_{\text{sm}} + V^{(2)}_{\text{alt}}$
为证两个子空间的交集是 $\{0\}$， 设 $\beta \in V^{(2)}_{\text{sm}} \cap V^{(2)}_{\text{alt}}$． 则由 9.16,

$$\beta(u,w) = -\beta(w,u) = -\beta(u,w)$$

对所有 $u, w \in V$ 成立，这表明 $\beta = 0$． 于是由 1.46， $V^{(2)} = V^{(2)}_{\text{sm}} \oplus V^{(2)}_{\text{alt}}$

二次型

9.18 关联于双线性型的二次型

对于 V 上的双线性型 β，定义函数 $q_\beta : V \to \mathbf{F}$ 为 $q_\beta(\nu) = \beta(\nu, \nu)$． 称函数 $q : V \to \mathbf{F}$ 是V 上的二次型，如果存在 V 上的双线性型 β 使得 $q = q_\beta$

注意，如果 β 是双线性型，那么 $q_\beta = 0$ 当且仅当 β 是交错的

9.19 二次型

设 β 是 $\mathbf{R}^3$ 上的双线性型，定义为

$$\beta\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = x_1y_1 - 4x_1y_2 + 8x_1y_3 - 3x_3y_3.$$

那么 $\mathbf{R}^3$ 上的二次型 q_β 由下式给出：

$$q_\beta(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_3^2.$$

上例中的二次型具有 $\mathbf{F}^n$ 上的二次型的典型特点，如下面结论所示

9.20 F^n 上的二次型

n 是正整数， q 是 $\mathbf{F}^n$ 到 $\mathbf{F}$ 的函数．那么 q 是 $\mathbf{F}^n$ 上的二次型 $\Longleftrightarrow$ 存在数 $A_{j,k} \in \mathbf{F}$ $(j, k \in \{1, \dots, n\}$ ）使得

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{j,k} x_j x_k$$

对所有 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}^n$ 成立

证

设 q 是 $\mathbf{F}^n$ 上的二次型．于是存在 $\mathbf{F}^n$ 上的双线性型 β 使得 $q = q_\beta$ ． 令 A 是 β 关于 $\mathbf{F}^n$ 的标准基的矩阵．那么对于所有 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}^n$

$$q(x_1, \dots, x_n) = \beta\big((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{j,k} x_j x_k$$

此即我们欲得的等式
反之，设存在数 $A_{j,k} \in \mathbf{F}$ ($j, k \in \{1, \dots, n\}$) ）使得

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{j,k} x_j x_k$$

对所有 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F}^n$ 成立．定义 $\mathbf{F}^n$ 上的双线性型 β 为

$$\beta\big((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{j,k} x_j y_k$$

那么 $q = q_\beta$ ， 原命题得证

尽管二次型的定义中用的是一个任意的双线性型，但下面结果中 (a) 和 (b) 的等价关系说明，每个二次型总可与一个对称双线性型相对应

9.21 二次型的刻画

$q : V \to \mathbf{F}$ 是一个函数．下面各命题等价
(a) q 是一个二次型

(b) V 上存在唯一的对称双线性型 使得 $q = q$ 成立
(c) $q(\lambda\nu) = \lambda^2 q(\nu)$ 对所有 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$ 和 $\nu \in V$ 成立，并且函数

$$(u, w) \mapsto q(u + w) - q(u) - q(w)$$

是 V 上的对称双线性型
(d) $q(2\nu) = 4q(\nu)$ 对所有 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$ 和 $\nu \in V$ 成立，并且函数

$$(u, w) \mapsto q(u + w) - q(u) - q(w)$$

是 V 上的对称双线性型

证

设 (a) 成立，则 q 是二次型．因此存在双线性型 β 满足 $q = q_\beta$．由 9.17，存在 V 上的对称双线性型 和 V 上的交错双线性型 α 满足 $\beta = \ + \alpha$．则

$$q = q_\beta = q + q_\alpha = q.$$

若 $' \in V_{\text{sm}}^{(2)}$ 也满足 $q_{'} = q$，那么 $q_{'-} = 0$，从而 $' - \ \in V_{\text{sm}}^{(2)} \cap V_{\text{alt}}^{(2)}$，这表明 $' = $ （由 9.17）这就完成了(a) 蕴涵(b) 的证明
设(b) 成立，故存在 V 上的对称双线性型 使得 $q = q$．若 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$ 且 $\nu \in V$，那么

$$q(\lambda\nu) = (\lambda\nu, \lambda\nu) = \lambda(\nu, \lambda\nu) = \lambda^2(\nu, \nu) = \lambda^2 q(\nu),$$

这说明(c) 的前半部分成立
若 $u, w \in V$，那么

$$q(u + w) - q(u) - q(w) = (u + w, u + w) - (u, u) - (w, w) = 2(u, w).$$

于是函数 $(u, w) \mapsto q(u + w) - q(u) - q(w)$ 等于 2，即为 V 上的对称双线性型，这就完成了(b)蕴涵(c) 的证明
显然 (c) 蕴涵 (d)
设(d) 成立．令 是 V 上的对称双线性型，定义为

$$(u, w) = \frac{q(u + w) - q(u) - q(w)}{2}.$$

若 $\nu \in V$，那么

$$(\nu, \nu) = \frac{q(2\nu) - q(\nu) - q(\nu)}{2} = \frac{4q(\nu) - 2q(\nu)}{2} = q(\nu).$$

从而 $q = q$，这就完成了(d) 蕴涵(a) 的证明

9.22 与二次型相关联的对称双线性型

设 q 是 $\mathbf{R}^3$ 上的二次型

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_3^2.$$

例 9.19 给出了一个满足 $q = q_\beta$ 的 $\mathbf{R}^3$ 上的双线性型 β，但这个双线性型不是对称的．然而，定义为

$$\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_1y_3 + 4x_3y_1 - 3x_3y_3$$

的 $\mathbf{R}^3$ 上的双线性型 是对称的，且满足 $q = q$，这与 9.21 (b) 相吻合

下面结果指出，对每个二次型，我们都可选取一个基，使得该二次型看起来像是各坐标平方的加权和，意即没有形如 x_jx_k （$j \neq k$）的交叉项

9.23 二次型的对角化

设 q 是 V 上的二次型
(a) 存在 V 的基 $e_1, \ldots, e_n$ 和 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{F}$，

$q(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$对所有\$$x_1,\ldots,x_n\in\mathbf{F}$ 成立
(b) 若 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ 且 V 是内积空间，那么(a) 中的基可取为 V 的规范正交基

证

(a) 存在 V 上的对称双线性型 使得 $q=q$ 成立（由 9.21）．则存在 V 的基 $e_1,\ldots,e_n$ 使得$M(,(e_1,\ldots,e_n))$ 是对角矩阵（由9.12）．令 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 代表该矩阵对角线上各元素．那么

$$(e_j,e_k)=\begin{cases}\lambda_j & .j=k\\ 0 & .j\neq k\end{cases}$$

对于所有 $j,k\in\{1,\ldots,n\}$ 成立．若 $x_1,\ldots,x_n\in\mathbf{F}$，那么

$$\begin{aligned}&q(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)=(x_1e_1+\cdots+x_ne_n,x_1e_1+\cdots+x_ne_n)\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_jx_k(e_j,e_k)\\&=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2,\end{aligned}$$

则原命题得证
(b) 设 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$ 且 V 是内积空间．那么9.13 告诉我们，(a) 中的基可取为 V 的规范正交基

9B 交错多重线性型

多重线性型

9.24 V^m

对于正整数 m，定义

$$V^m=\underbrace{V\times\cdots\times V}_{mV}$$

现在我们可将上节中所讨论的双线性型推广得到 m 重线性型的定义

9.25 m 重线性型、多重线性型

对正整数 m， V 上的 m 重线性型是一个函数 $\beta:V^m\mathbf{F}$，它在每个位置都是线性的（当其他位置的值固定时）．这意味着，对每个 $k\in\{1,\ldots,m\}$ 和所有 $u_1,\ldots,u_m\in V$，函数

$$\nu\mapsto\beta(u_1,\ldots,u_{k-1},\nu,u_{k+1},\ldots,u_m)$$

是 V 到 $\mathbf{F}$ 的线性映射
V 上 ∇_m 重线性型所构成的集合记作 $V^{(m)}$ 若函数 β 是 V 上的 m 重线性型（ m 为正整数），则称该函数为一个多重线性型

9.26 m 重线性型

上述定义中 $\beta(u_1,\ldots,u_{k-1},\nu,u_{k+1},\ldots,u_m)$ 在 $k=1$ 时表示 $\beta(\nu,u_2,\ldots,u_m)$，在$k=m$ 时表示 $\beta(u_1,\ldots,u_{m-1},\nu)$
V 上的 1 重线性型是 V 上的线性泛函． V 上的 2 重线性型是 V 上的双线性型．你可验证，带有通常的函数加法和标量乘法运算的 $V^{(m)}$ 是向量空间

设 $\alpha,\in V^{(2)}$．定义函数 $\beta:V^4\rightarrow\mathbf{F}$ 为

$$\beta(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4)=\alpha(\nu_1,\nu_2)(\nu_3,\nu_4)$$

那么 $\beta\in V^{(4)}$
定义函数 $\beta:(\mathcal{L}(V))^m\mathbf{F}$ 为

$$\beta(T_1,\dots,T_m)=\operatorname{tr}(T_1\cdots T_m)$$

那么 β 是 $\mathcal{L}(V)$ 上的 ∇_m 重线性型

现在，我们定义交错多重线性型．在我们向行列式定义进发之路上，它将发挥重要作用

9.27 交错型

m 是正整数，对 V 上的 m 重线性型 α ，如果只要 V 中向量组 $\nu_1,\dots,\nu_m$ 满足对于某两个不同的$j,k\in\{1,\dots,m\}$ 有 $\boldsymbol{\nu}_j=\boldsymbol{\nu}_k$ ，就有 $\alpha(\nu_1,\dots,\nu_m)=0$ ，则称 α 是交错的· $V_{\text{alt}}^{(m)}=\{\alpha\in V^{(m)}:\alpha$ 是 V 上的交错 m 重线性型 $\}$

你应自行验证 $V_{\text{alt}}^{(m)}$ 是 $V^{(m)}$ 的子空间．交错2 重线性型的例子见例9.15．交错3 重线性型的例子见习题2
下面结论说明将一个线性相关组作为交错多重线性型的输入，那么输出为0

9.28 交错多重线性型和线性相关性

m 是正整数， α 是 V 上的交错 m 重线性型．若 $\nu_1,\dots,\nu_m$ 是 V 中的线性相关组，那么

$$\alpha(\nu_1,\dots,\nu_m)=0.$$

证

设 $\nu_1,\dots,\nu_m$ 是 V 中的线性相关组．由线性相关性引理（2.19），某个 ν_k 是 $\nu_1,\dots,\nu_{k-1}$ 的线性组合．于是存在 $b_1,\dots,b_{k-1}$ 使得 $\nu_k=b_1\nu_1+\cdots+b_{k-1}\nu_{k-1}$ ．则

$$\begin{aligned}&\alpha(\nu_1,\dots,\nu_m)=\alpha\Big(\nu_1,\dots,\nu_{k-1},\sum_{j=1}^{k-1}b_j\nu_j,\nu_{k+1},\dots,\nu_m\Big)\\&=\sum_{j=1}^{k-1}b_j\alpha(\nu_1,\dots,\nu_{k-1},\nu_j,\nu_{k+1},\dots,\nu_m)\\&=0.\end{aligned}$$

下面结果是说，如果 $m>\dim V$ ，那么除定义在 V^m 上的常值函数 0 以外， V 上不存在交错 m 重线性型

9.29 对 m > dim$V$，不存在非零交错 m 重线性型

设 $m>\dim V$ ．那么 0 是 V 上唯一的交错 m 重线性型

证

设 α 是 V 上的交错 m 重线性型，且 $\nu_1,\dots,\nu_m\in V$ ．因为 $m>\dim V$ ，所以该组不是线性无关的（由2.22）．于是9.28 就表明 $\alpha(\nu_1,\dots,\nu_m)=0$ ．因此 α 是从 V^m 到 $\mathbf{F}$ 的零函数

交错多重线性型和排列

9.30 交换交错多重线性型的输入向量

设 m 是正整数， α 是 V 上的交错 m 重线性型，且 $\nu_1,\dots,\nu_m$ 是 V 中的向量组．那么交换$\alpha(\nu_1,\dots,\nu_m)$ 中任意两个位置上的向量会使 α 的值变为原来的-1倍

证

在前两个位置上都取 $\nu_1+\nu_2$ 可得

$$0=\alpha(\nu_1+\nu_2,\nu_1+\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_m)$$

利用 α 的多重线性，可如 9.16 的证明一般将上式右侧展开，得到

$$\alpha(\nu_2,\nu_1,\nu_3,\ldots,\nu_m)=-\alpha(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\ldots,\nu_m).$$

类似地，交换 $\alpha(\nu_1,\ldots,\nu_m)$ 中任意两个位置上的向量都使 α 的值变为原来的 -1 倍

下面观察多次交换各输入向量会发生什么．设 α 是 V 上的交错3 重线性型且 $\nu_1,\nu_2,\nu_3\in V$ 为用 $\alpha(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ 表示 $\alpha(\nu_3,\nu_1,\nu_2)$，先将 $\alpha(\nu_3,\nu_1,\nu_2)$ 第一个位置和第三个位置中的项互换，得到 $\alpha(\nu_3,\nu_1,\nu_2)=-\alpha(\nu_2,\nu_1,\nu_3)$，再将此式右侧的第一个位置和第二个位置中的项互换，可得

$$\alpha(\nu_3,\nu_1,\nu_2)=-\alpha(\nu_2,\nu_1,\nu_3)=\alpha(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$$

更一般地，我们可发现如果我们做奇数次交换，那么 α 的值变为原来的 1 倍；而如果我们做偶数次交换，那么 α 的值不变
为了处理任意多次的交换，我们需要一些有关排列的知识

9.31 排列

m 是正整数
$(1,\ldots,m)$ 的一个排列是不重不漏地包含 $1,\ldots,m$ 的组 $(j_1,\ldots,j_m)$
$(1,\ldots,m)$ 的所有排列所构成的集合记为perm m

如 $(2,3,4,5,1)\in\operatorname{perm}5$
你应将 perm m 的一个元素看成对于头 m 个正整数的重排
将一个排列 $(j_1,\ldots,j_m)$ 变回标准排列 $(1,\ldots,m)$ 所用交换的次数与交换的方法是有关的下面定义的好处在于，给所有排列都赋予了一个定义完善的符号

9.32 排列的符号

排列 $(j_1,\ldots,j_m)$ 的符号定义为

$$\operatorname{sign}(j_1,\ldots,j_m)=(-1)^N,$$

其中 N 是所有整数对 $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell})$ （$1\le k<\ell\le m$）中，满足 k 在组 $(j_1,\ldots,j_m)$ 中排在 ℓ 之后的数目

因此，若一排列中有偶数个不合自然顺序之处，则其符号等于1；而若一排列中有奇数个不合自然顺序之处，则其符号等于 -1

9.33 符号

$(1,\ldots,m)$ （保持自然顺序不变）的符号是1
在 2, 1, 3, 4 这个组中，唯一满足 k 排在 ℓ 之后的整数对 $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\ell})$ （$k<\ell$）是 $(1,2)$．因此排列 2, 1, 3, 4 的符号是 -1
在排列 $(2,3,\ldots,m,1)$ 中，满足 k 排在 ℓ 之后的整数对 (k,ℓ) ($k<\ell$) 仅有$(1,2),(1,3),\ldots,(1,m)$．因为这些整数对共有 $m-1$ 个，所以该排列的符号等于 $(-1)^{m-1}$

9.34 定理

交换排列中的两项会将排列的符号乘以 1

证

设我们有两个排列，其中第二个排列是通过交换第一个排列中的两项得到的．若被交换的两项在第一个排列中按其自然顺序排列，那么它们在第二个排列中就不按其自然顺序排列；反之亦然．于是到目前为止，不符合自然顺序的数对个数净变化量为1 或 1（都是奇数）
考虑两个被交换的项之间的各项．若某个中间项最初与两个被交换的项都符合自然顺序，那么它现在与两个被交换的项就都不符合自然顺序．类似地，若某个中间项最初与两个被交换的项都不符合自然顺序，那么它现在与两个被交换的项就都符合自然顺序．若某个中间项最初恰与两个被交换的项之一符合自然顺序，那么现在仍是如此．于是，对于所有仅包含一个特定中间项的数对，不符合自然顺序的数对个数净变化量为2、0 或 2（都是偶数）
对于其他所有数对，它们是否符合自然顺序的情况都不改变．于是，不符合自然顺序的数对的个数变化总量是奇数．因此第二个排列的符号就等于第一个排列的符号乘以 1

9.35 排列和交错多重线性型

设 m 是正整数，且 $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(m)}$．那么

$$\alpha(\nu_{j_1}, \ldots, \nu_{j_m}) = (\text{sign}(j_1, \ldots, j_m))\alpha(\nu_1, \ldots, \nu_m)$$

对 V 中每个向量组 $\nu_1, \ldots, \nu_m$ 以及所有 $(j_1, \ldots, j_m) \in \text{perm}m$ 成立

证

设 $\nu_1, \ldots, \nu_m \in V$ 且 $(j_1, \ldots, j_m) \in \text{perm}m$．我们可通过对 α 不同位置上的向量进行一系列交换操作，使其下标构成的排列由 $(j_1, \ldots, j_m)$ 变为 $(1, \ldots, m)$．每次交换都将 α 的值乘以$^{-1}$ （由 9.30），也会将所得排列的符号乘以 $^{-1}$ （由 9.34）．在一定数量的交换之后，我们得到了排列 $1, \ldots, m$，它的符号是1．于是若 $\text{sign}(j_1, \ldots, j_m) = 1$，那么 α 的值改变符号偶数次；若$\text{sign}(j_1, \ldots, j_m) = -1$，那么 α 的值改变符号奇数次，此即为我们欲证的结论

这样一来，利用排列，我们就可以很自然地得到下面这个漂亮的公式，它用于表达 n 维向量空间上的 n 重线性型

9.36 V 上交错 dim$V$ 重线性型的公式

令 $n = \dim V$．设 $e_1, \ldots, e_n$ 是 V 的一个基且 $\nu_1, \ldots, \nu_n \in V$．对每个 $k \in \{1, \ldots, n\}$，令$b_{1,k}, \ldots, b_{n,k} \in \mathbf{F}$ 满足

$$\nu_k = \sum_{j=1}^{n} b_{j,k} e_j$$

那么

$$\alpha(\nu_1, \ldots, \nu_n) = \alpha(e_1, \ldots, e_n) \sum_{(j_1, \ldots, j_n) \in \text{perm}n} (\text{sign}(j_1, \ldots, j_n)) b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n}$$

对于 V 上每个交错 n 重线性型都成立

证

设 α 是 V 上的交错 n 重线性型．那么

$$\begin{aligned}
&\alpha(\nu_1, \ldots, \nu_n) = \alpha\left(\sum_{j_1=1}^{n} b_{j_1,1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} b_{j_n,n} e_{j_n}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} b_{j_1,1} \ldots b_{j_n,n} \alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) \\
&= \sum_{(j_1, \ldots, j_n) \in \text{promn}} b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n} \alpha(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) \\
&= \alpha(e_1, \ldots, e_n) \underbrace{\textstyle\sum_{j_1=1}^{n} \cdots (e_{j_1}, \ldots, j_n) b_{j_1,1} \cdots b_{j_n,n}}_{(j_1, \ldots, j_n) \in \text{promn}}
\end{aligned}$$

其中第三行成立是因为如果 $j_1,\dots,j_n$ 不是互异的整数，那么 $\alpha(e_{j_1},\dots,e_{j_n})=0$；最后一行成立是由于 9.35

下面结论是引出下一节中行列式的定义的关键

9.37 定理

dim V (dim V) $\frac{\langle\langle\langle|||\rangle\rangle}{\langle||}\in\mathbb{I}$

向量空间 V (dim V) 的维数是1

证

令 $n=\dim V$． 设 α 和 $|\alpha'$ 是 V 上的交错 n 重线性型且 $\alpha\neq 0$． 令 $e_1,\dots,e_n$ 满足$\alpha(e_1,\dots,e_n)\neq 0$． 存在 $c\in\mathbf{F}$ 使得

$$\alpha'(e_1,\dots,e_n)=c\alpha(e_1,\dots,e_n).$$

此外，9.28 表明， $e_1,\dots,e_n$ 是线性无关的，因而它是 V 的一个基

设 $\nu_1,\dots,\nu_n\in V$． 令 $b_{j,k}$ $(j,k=1,\dots,n$ ） 定义如9.36．那么

$$\begin{aligned}&\alpha'(\nu_1,\dots,\nu_n)=\alpha'(e_1,\dots,e_n)\sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathrm{perm}n}(\mathrm{sign}(j_1,\dots,j_n))b_{j_1,1}\cdots b_{j_n,n}\\&=c\alpha(e_1,\dots,e_n)\textstyle\sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathrm{perm}n}(\mathrm{sign}(j_1,\dots,j_n))b_{j_1,1}\cdots b_{j_n,n}\\&=c\alpha(\nu_1,\dots,\nu_n),\end{aligned}$$

其中第一行和最后一行源于 9.36．上式表明 ：$\alpha'=c\alpha$ ：． 于是 $\boldsymbol{\alpha'},\boldsymbol{\alpha}$ 不是线性无关组，这就表明$\dim V_{\mathrm{alt}}^{(n)}\leq 1$.

为了完成证明，我们只需证明 V 上总存在非零的交错 n 重线性型 α （由此排除 $\dim V_{\mathrm{alt}}^{(n)}=0$ 的可能性）．为此，令 $e_1,\dots,e_n$ 是 V 的任意一个基，并令 $\varphi_1,\dots,\varphi_n\in V'$ 是 V 上的线性泛函，且它们可用以将 V 的每个元素都表达为 $e_1,\dots,e_n$ 的线性组合，也就是说

$$\nu=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\nu)e_j$$

对每个 $\nu\in V$ 成立（见3.114）．现在对 $\nu_1,\dots,\nu_n\in V$ ， 定义

$$\alpha(\nu_1,\dots,\nu_n)=\sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathrm{perm}n}(\mathrm{sign}(j_1,\dots,j_n))\varphi_{j_1}(\nu_1)\cdots\varphi_{j_n}(\nu_n).$$

容易验证 α 是 V 上的 n 重线性型

为了说明 α 是交错的，设 $\nu_1,\dots,\nu_n\in V$ 满足 $\nu_1=\nu_2$． 对于每个 $(j_1,\dots,j_n)\in\mathrm{perm}n$， 排列 $(j_2,j_1,j_3,\dots,j_n)$ 都有与之相反的符号．因为 $\nu_1=\nu_2$， 所以式(9.38) 的求和中有关这两个排列的两项彼此抵消．因此 $\alpha(\nu_1,\nu_1,\nu_3,\dots,\nu_n)=0$． 类似地，如果组 $\nu_1,\dots,\nu_n$ 中任意两个向量相等，那么 $\alpha(\nu_1,\dots,\nu_n)=0$． 于是 α 是交错的

最后，在式 (9.38) 中取各 $\nu_k=e_k$． 因为 $\varphi_j(e_k)$ 等于 0（如果 $j\neq k$ ）或 1（如果 $j=k$)，所以求和式右端只有关于排列 $(1,\dots,n)$ 的一项是非零的，于是可得 $\alpha(e_1,\dots,e_n)=1$． 于是我们就构造出了 V 上的非零交错 n 重线性型，则原命题得证

前面我们证明了将交错多重线性型作用于线性相关组会得到 0（见 9.28）．下面结果给出了 9.28 在 $n=\dim V$ 情形下的逆命题．在上个证明中用于构造非零交错 n 重线性型的式(9.38) 来源于9.36 中的公式，而后者可很自然地由交错多重线性型的性质得到
下面结果中，“ α 非零”意为 α 不是 V^n 上的常值函数0（与它用于函数时的常见含义相同）

9.39 交错 dim$V$ 重线性型与线性无关性

令 $n=\dim V$．设 α 是 V 上的非零交错 n 重线性型，且 $e_1,\dots,e_n$ 是 V 中的向量组．那么

$$\alpha(e_1,\dots,e_n)\neq 0$$

当且仅当 $e_1,\dots,e_n$ 是线性无关的

证

先设 $\alpha(e_1,\dots,e_n)\neq 0.$．那么由9.28， $e_1,\dots,e_n$ 是线性无关的
为了证明另一方向的蕴涵关系，现设 $e_1,\dots,e_n$ 是线性无关的．因为 $n=\dim V$，所以$e_1,\dots,e_n$ 是 V 的一个基（见 2.38）
因为 α 是非零 n 重线性型，所以存在 $\nu_1,\dots,\nu_n\in V$ 满足 $\alpha(\nu_1,\dots,\nu_n)\neq 0$．现由 9.36 可得$\alpha(e_1,\dots,e_n)\neq 0$

9C 行列式

定义行列式

下面定义将把我们引向算子的行列式的一个简洁、美妙且不依赖于基的定义

9.40 αT

设 m 是正整数， $T\in\mathcal{L}(V)$．对 $\alpha\in V_{\text{alt}}^{(m)}$，定义 $\alpha_T\in V_{\text{alt}}^{(m)}$ 为：对 V 中每个向量组 $\nu_1,\dots,\nu_m$，

$$\alpha_T(\nu_1,\dots,\nu_m)=\alpha(T\nu_1,\dots,T\nu_m)$$

$T\in\mathcal{L}(V)$．如果 $\alpha\in V_{\text{alt}}^{(m)}$， $\nu_1,\dots,\nu_m$ 是 V 中的向量组且对某个 $j\neq k$ 存在 $\nu_j=\nu_k$，那么 $T\nu_j=T\nu_k$，这表明 $\alpha_T(\nu_1,\dots,\nu_m)=\alpha(T\nu_1,\dots,T\nu_m)=0$．于是函数 $\alpha\mapsto\alpha_T$ 是从 $V_{\text{alt}}^{(m)}$ 到其自身的线性映射
我们知道 $\dim V_{\text{alt}}^{(\dim V)}=1$（见9.37）．每个从一维向量空间到该空间本身的线性映射，就是将向量与某个特定的标量相乘．我们现在就将 det T 定义为线性映射 $\alpha\mapsto\alpha_T$ 中乘在向量之前的那个标量

9.41 算子的行列式

$T\in\mathcal{L}(V)$． T 的行列式，记作det T，定义为 $\mathbf{F}$ 中唯一使得

$$\alpha_T=(\det T)\alpha$$

对所有 $\alpha\in V_{\text{alt}}^{(\dim V)}$ 都成立的数

9.42 算子的行列式

令 $n=\dim V$
若 I 是 V 上的恒等算子，那么对所有 $\alpha\in V_{\text{alt}}^{(n)}$， $\alpha_I=\alpha$．于是 det $I=1$
更一般地如果 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{F}$，那么对所有 $\alpha\in V_{\text{alt}}^{(n)}$， $\alpha_{\lambda I}=\lambda^n\alpha$．于是 $\det(\lambda I)=\lambda^n$
进一步若 $T\in\mathcal{L}(V)$ 且 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{F}$，那么对所有 $\alpha\in V_{\text{alt}}^{(n)}$， $\alpha_{\lambda T}=\lambda^n\alpha_T=\lambda^n(\det T)\alpha$．于是$\det(\lambda T)=\lambda^n$ det T
设 $T\in\mathcal{L}(V)$， $e_1,\dots,e_n$ 是由 T 的特征向量（分别对应于特征值 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$) 构成的 V 的基若 $\alpha\in V_{\text{alt}}^{(n)}$，那么

$$\alpha_T(e_1,\dots,e_n)=\alpha(\lambda_1e_1,\dots,\lambda_ne_n)=(\lambda_1\cdots\lambda_n)\alpha(e_1,\dots,e_n)$$

若 $\alpha\neq 0$，那么由 9.39 得 $\alpha(e_1,\dots,e_n)\neq 0$．于是上式表明

我们接下来的任务，是定义方阵的行列式并给出其公式．为此，我们将每个方阵都与一算子关联起来，然后定义方阵的行列式是其所关联的算子的行列式

9.43 矩阵的行列式

设 n 是正整数，且 A 是各元素均属于 $\mathbf{F}$ 的 $n\times n$ 方阵．令 $T\in\mathcal{L}(\mathbf{F}^n)$ 关于 $\mathbf{F}^n$ 的标准基的矩阵等于 A． A 的行列式，记为det A，定义为 det $A=\det T$

9.44 矩阵的行列式

I 是 $n\times n$ 恒等矩阵，那么它对应的 $\mathbf{F}^n$ 上的算子是 $\mathbf{F}^n$ 上的恒等算子 I． 于是由9.42 的第一例可得恒等矩阵的行列式是1
设 A 是对角矩阵，对角线上元素为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$． 那么其对应的 $\mathbf{F}^n$ 上算子有一组特征向量是 $\mathbf{F}^n$ 的标准基，其中各向量分别对应于特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$． 于是由 9.42 的最后一例可得det $A=\lambda_1\cdots\lambda_n$

对于下面结果，将 $\mathbf{F}^n$ 中每个由 n 个向量 $\nu_1,\ldots,\nu_n$ 构成的组看成由若干个 $n\times 1$ 列向量构成的组．这样，记号 $(\nu_1 \quad \cdots \quad \nu_n)$ 就表示第 k 列是 ν_k （ $k=1,\ldots,n$ ，）的 $n\times n$ 方阵

9.45 行列式是交错多重线性型

设 n 是正整数．将 $\mathbf{F}^n$ 中向量组 $\nu_1,\ldots,\nu_n$ 对应到 $\det(\nu_1 \quad \cdots \quad \nu_n)$ 的映射是 $\mathbf{F}^n$ 上的交错 n 重线性型

证

令 $e_1,\ldots,e_n$ 是 $\mathbf{F}^n$ 的标准基，并假设 $\nu_1,\ldots,\nu_n$ 是 $\mathbf{F}^n$ 中的向量组．令 $T\in\mathcal{L}(\mathbf{F}^n)$ 是满足$Te_k=\nu_k$ （ $k=1,\ldots,n$ ）的算子．于是 T 关于 $e_1,\ldots,e_n$ 的矩阵是 $(\nu_1 \quad \cdots \quad \nu_n)$． 于是由矩阵的行列式的定义，det $(\nu_1 \quad \cdots \quad \nu_n)=\det T$.
令 α 是 $\mathbf{F}^n$ 上的交错 n 重线性型且使得 $\alpha(e_1,\ldots,e_n)=1$． 那么

$$\begin{aligned}\det\left(\nu_1 \quad \ldots \quad \nu_n\right)&=\det T\\&=(\det T)\alpha\left(e_1,\ldots,e_n\right)\\&=\alpha(Te_1,\ldots,Te_n)\\&=\alpha\left(\nu_1,\ldots,\nu_n\right),\end{aligned}$$

其中第三行来自算子的行列式的定义．上式表明，将 $\mathbf{F}^n$ 中向量组 $\nu_1,\ldots,\nu_n$ 对应到d et $(\nu_1 \quad \cdots \quad \nu_n)$ 的映射是 $\mathbf{F}^n$ 上的交错 n 重线性型 α_α

上述结论有几个重要推论．例如，由该结论立刻可知，有两列相同的矩阵的行列式等于0我们稍后会回过头来讨论其他推论，在此之前我们先给出方阵的行列式的公式．回忆一下，如果 A 是一个矩阵，那么 $A_{j,k}$ 表示 A 第 j 行第 k 列中的元素

9.46 矩阵的行列式的公式

设 n 是正整数且 A 是 $n\times n$ 方阵．那么

$$\det A=\sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\text{perm}n}(\text{sign}(j_1,\ldots,j_n))A_{j_1,1}\cdots A_{j_n,n}$$

证

由9.36，取 $V=\mathbf{F}^n$ 、 $e_1,\ldots,e_n$ 为 $\mathbf{F}^n$ 的标准基、 α 为 $\mathbf{F}^n$ 上将 $\nu_1,\ldots,\nu_n$ 对应到det $\nu_1 \quad \cdots \quad \nu_n\Big)$ 的交错 n 重线性型（见9.45）．若各 ν_k 等于 A 的第 k 列，则9.36 中的各 $b_{j,k}$ 等于 $A_{j,k}$． 最后

$$\alpha(e_1,\ldots,e_n)=\det(\,e_1\ \cdots\ e_n\,)=\det I=1$$

于是9.36 中的公式就成为了本结果所述的公式

9.47 行列式公式的具体示例

若 A 是 2×2 矩阵，那么9.46 中的公式变为

$$\det A = A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2}$$

若 A 是 3×3 矩阵，那么9.46 中的公式变为

$$\det A = A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} - A_{2,1}A_{1,2}A_{3,3} - A_{3,1}A_{2,2}A_{1,3}$$

$$-A_{1,1}A_{3,2}A_{2,3} + A_{3,1}A_{1,2}A_{2,3} + A_{2,1}A_{3,2}A_{1,3}$$

9.46 中的公式包含 $n!$ 个求和项．因为随 n 增长， $n!$ 会急剧增加，所以即便对于中等大小的 n 阶行列式，用 9.46 中的公式来求其值也不可行．例如，10! 超过三百万，100! 接近 10^{158} ，即使用最快的计算机也无法计算如此多项之和．很快我们将看到一些比直接运用 9.46 中的求和式更快的行列式求值方法

9.48 上三角矩阵的行列式

设 A 是上三角矩阵，其对角线上各元素是 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ ． 那么 det $A=\lambda_1\cdots\lambda_n$

证

若 $(j_1,\ldots,j_n)\ \in\ \operatorname{perm} n$ 满足 $(j_1,\ldots,j_n)\neq(1,\ldots,n)$ ，那么对某些 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 有$j_k>k$ ，这表明 $A_{j_k,k}=0$ ． 于是只有 $(1,\ldots,n)$ 这个排列为 9.46 中求和式贡献了非零项．因为对各 $k=1,\ldots,n$ 有 $A_{k,k}=\lambda_k$ ，故det $A=\lambda_1\cdots\lambda_n$

行列式的性质

行列式的定义可引出行列式可乘性的如下妙证

9.49 行列式是可乘的

(a) $S,T\in\mathcal{L}(V)$，则$\det(ST)=(\det S)(\det T)$
(b) A 和 B 是大小相同的方阵，则

$$det(AB)=(detA)(detB)$$

证

(a) 令 $n=\dim V$． 设 $\alpha\in V_{\text{alt}}^{(n)}$ 且 $\nu_1,\ldots,\nu_n\in V$． 那么

$$\alpha_{ST}(\nu_1,\ldots,\nu_n)=\alpha(ST\nu_1,\ldots,ST\nu_n)$$
$$=(detS)\alpha(T\nu_1,\ldots,T\nu_n)$$
$$=(detS)(detT)\alpha(\nu_1,\ldots,\nu_n)$$

其中第一个等式是由 α_{ST} 的定义而来，第二个等式是由 det s 的定义而来，第三个等式则源于 det T 的定义．上式就表明 $\det(ST)=(\det S)(\det T)$
(b) 令 $S,T\in\mathcal{L}(\mathbf{F}^n)$ 使得 $M(S)=A$ 及 $\mathcal{M}(T)=B$ （本证明中所有算子的矩阵都是关于 $\mathbf{F}^n$ 的标准基)．那么 $\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{ST})=\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{S})\boldsymbol{\mathcal{M}}(\boldsymbol{T})=$ （见 3.43)．于是

$$det(AB)=det(ST)=(detS)(detT)=(detA)(detB)$$

其中第二个等号源于(a) 中结论

算子的行列式决定了该算子是否可逆

9.50 可逆 / 行列式非零

算子 $T \in$ L(V) 可逆当且仅当 det$T \neq 0$
T 可逆则 det(T^{-1}) = (det T)$^{-1}$

证

先设 T 可逆．于是 $TT^{-1} = I$． 现由 9.49

$$1 = \det I = \det(TT^{-1}) = (\det T)\left(\det(T^{-1})\right)$$

因此 det $T \neq 0$ 且 $\det(T^{-1})$ 是 det T 的乘法逆元
为证另一方向，设det $T \neq 0$
设 $\nu \in V$ 且 $\nu \neq 0$． 令 $\nu, e_2, \ldots, e_n$ 是 V 的一个基，并令$\alpha \in V_{\text{alt}}^{(n)}$ 满足 $\alpha \neq 0$，则$\alpha(\nu, e_2, \ldots, e_n) \neq 0$ （由 9.39）．则

$$\alpha(T\nu, Te_2, \ldots, Te_n) = (\det T)\alpha(\nu, e_2, \ldots, e_n) \neq 0$$

从而 $T\nu \neq 0$，故 T 可逆

任何 $n \times n$ 矩阵 A 可逆（可逆矩阵的定义见 3.80）当且仅当与 A （通过 $\mathbf{F}^n$ 的标准基）关联的 $\mathbf{F}^n$ 上算子是可逆的．于是上面结果就表明，方阵 A 可逆当且仅当det $A \neq 0$

9.51 特征值和行列式

$T \in \mathcal{L}(V)$ 且 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$． 那么 λ 是 T 的特征值，当且仅当 $det(\lambda I - T) = 0

证

数 λ 是 T 的特征值当且仅当 $T - \lambda I$ 不可逆（见 5.7），这等价于 $\lambda I - T$ 不可逆，进而等价于 $\det(\lambda I - T) = 0$ （由 9.50）
设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 且 $S: W \to V$ 是可逆线性映射．为证明 $\det(S^{-1}TS) = \det T$， 我们可尝试利用9.49 和 9.50 写出

$$\det(S^{-1}TS) = \left(\det S^{-1}\right)(\det T)(\det S)$$

$$= \det T$$

若 $W = V$， 那么可用这个证法；但如果 $W \neq V$， 那么此方法没有意义，因为行列式只对由一个向量空间到其自身的线性映射有定义，而 s 将 W 映射到 V， 则 det s 无定义．下面的证明规避了这个问题，因而对 $W \neq V$ 情形也成立

9.52 行列式是相似不变量

设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 且 $S: W \to V$ 是可逆线性映射，则

$$\det(S^{-1}TS) = \det T$$

证

令 $n = \dim W = \dim V$． 设 $\tau \in W_{\text{alt}}^{(n)}$． 定义 $\alpha \in V_{\text{alt}}^{(n)}$ 为：对 $\nu_1, \ldots, \nu_n \in V$，

$$\alpha(\nu_1, \ldots, \nu_n) = \tau(S^{-1}\nu_1, \ldots, S^{-1}\nu_n).$$

设 $w_1, \ldots, w_n \in W$． 那么

$$\begin{aligned}\tau_{S^{-1}TS}(w_1, \ldots, w_n) &= \tau(S^{-1}TSw_1, \ldots, S^{-1}TSw_n) \\ &= \alpha(TSw_1, \ldots, TSw_n) \\ &= \alpha_T(Sw_1, \ldots, Sw_n) \\ &= (\det T)\alpha(Sw_1, \ldots, Sw_n) \\ &= (\det T)\tau(w_1, \ldots, w_n).\end{aligned}$$

结合上式与算子 $S^{-1}TS$ 的行列式的定义可知d $\operatorname{let}(S^{-1}TS)=\det T$

对于 $V=\mathbf{F}^n$ 且 $e_1,\ldots,e_n$ 是 $\mathbf{F}^n$ 的标准基这个特殊情形，由矩阵的行列式的定义知下面结论成立．下面结论中等式左侧并不依赖于基的选取，这表明等式右侧也与基的选取无关

9.53 算子的行列式等于其矩阵的行列式

$T\in\mathcal{L}(V)$ 且 $e_1,\ldots,e_n$ 是 V 的基．那么

$$\det T=\det\mathcal{M}\big(T,(e_1,\ldots,e_n)\big)$$

证

令 $f_1,\ldots,f_n$ 是 $\mathbf{F}^n$ 的标准基．令 $S:\mathbf{F}^n\to V$ 是满足 $Sf_k=e_k$ （$k=1,\ldots,n$）的线性映射于是 $M(S,(f_1,\ldots,f_n),(e_1,\ldots,e_n))$ 和 $\mathcal{M}\big(S^{-1},(e_1,\ldots,e_n),(f_1,\ldots,f_n)\big)$ 都等于 $n\times n$ 恒等矩阵因此运用 3.43 两次得

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}\big(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{TS},(f_1,\ldots,f_n)\big)=\boldsymbol{\mathcal{M}}\big(T,(e_1,\ldots,e_n)\big)$$

于是

$$\begin{aligned}\det T&=\det(S^{-1}TS)\\&=\det\boldsymbol{\mathcal{M}}\big(S^{-1}TS,(f_1,\ldots,f_n)\big)\\&=\det\boldsymbol{\mathcal{M}}\big(T,(e_1,\ldots,e_n)\big)\end{aligned}$$

其中第一行源于 9.52，第二行源于矩阵的行列式的定义，第三行则由式(9.54) 得到

下面结论给出了另一种看待行列式的方式，它比行列式定义或9.46 中的公式都更直观．我们可以将下面结论所给出的行列式的特性，作为有限维复向量空间上算子的行列式的定义，这样的话，现行定义就变成了这个新定义的一个结论

9.55 若 F = C，那么行列式等于特征值之积

设 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 且 $T\in\mathcal{L}(V)$．那么 det T 等于 T 的特征值之积（其中每个特征值出现次数等于其重数）

证

存在 V 的一个基，使得 T 关于该基有上三角矩阵，且该矩阵对角线上各元素是 T 的特征值，各特征值出现次数等于其重数——见8.37．于是9.53 和9.48 表明，det T 等于 T 的特征值之积（其中每个特征值出现次数等于其重数）

接下来这条结果表明对方阵的转置、算子的对偶及内积空间上算子的伴随这些操作，行列式都具有很好的性质

9.56 定理

(a) A 是方阵则det $A^{\mathrm{t}}=\det A$
(b) $T\in\mathcal{L}(V)$ 则 det $T'=\det T$
(c) V 是内积空间且 $T\in\mathcal{L}(V)$，则

$$\det(T^*)=\overline{\det T}$$

证

证

(a) 令 n 为正整数，定义 $\alpha:(\mathbf{F}^n)^n\to\mathbf{F}$ 为：对所有 $\nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbf{F}^n$ ，

$$\alpha(\nu_1,\ldots,\nu_n)=\det\Big(\begin{pmatrix}\nu_1 & \cdots & \nu_n\end{pmatrix}^{\mathrm{t}}\Big)$$

9.46 中的矩阵的行列式公式表明 α 是 $\mathbf{F}^n$ 上的 n 重线性型

设 $\nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbf{F}^n$ 且对某个 $j\neq k$ 有 $\boldsymbol{\nu}_j=\boldsymbol{\nu}_k$ ．若 B 是 $n\times n$ 矩阵，那么 $(\nu_1\quad\ldots\quad\nu_n)^{\mathrm{t}}B$ 不等于恒等矩阵，因为 $(\nu_1\quad\ldots\quad\nu_n)^{\mathrm{t}}B$ 的第 j 行和第 k 行相等．于是 $(\nu_1\quad\cdots\quad\nu_n)^{\mathrm{t}}$ 不可逆，这表明 $\alpha(\nu_1,\ldots,\nu_n)=0$ ．因此 α 是 $\mathbf{F}^n$ 上的交错 n 重线性型

注意到将 α 作用于 $\mathbf{F}^n$ 的标准基会得到1．因为 $\mathbf{F}^n$ 上交错 n 重线性型构成的向量空间的维数是1（由 9.37），所以这表明 α 就是行列式函数3．于是(a) 成立

(b) 由 (a)、9.53 及 3.132 可得等式 det $T'=\det T$

(c) 选取 V 的一个规范正交基． T^* 关于该基的矩阵是 T 关于该基的矩阵的共轭转置（由7.9）于是由 9.53、9.46 及 (a) 可得 $\det(T^*)=\overline{\det T}$

9.57 有助于计算行列式的若干结论

(a) 如果一方阵中任意两行或两列相等，则该矩阵的行列式等于0

(b) 设 A 是方阵，且 B 是通过交换 A 中任意两行或两列所得的矩阵．则det $A=-\det B$

(c) 若将方阵的某行或某列乘以一个标量，则其行列式的值也会被乘以同一个标量

(d) 若将一方阵中某列的标量倍加到该矩阵中另一列，则其行列式的值不变

(e) 若将一方阵中某行的标量倍加到该矩阵中另一行，则其行列式的值不变

证

上述结果中的所有论断成立，都是由于 $\nu_1,\ldots,\nu_n\mapsto\det(\nu_1\quad\cdots\quad\nu_n)$ 和$\nu_1,\ldots,\nu_n\mapsto\det(\nu_1\quad\cdots\cdots\quad\nu_n)^{\mathrm{t}}$ 这两个映射都是 $\mathbf{F}^n$ 上的交错 n 重线性型【见 9.45 和 9.56 (a)】例如，为证明(d)，设 $\nu_1,\ldots,\nu_n\in\mathbf{F}^n$ 且 $c\in\mathbf{F}$ ．那么

$$\begin{aligned} &\det(\nu_1+c\nu_2\quad\nu_2\quad\cdots\quad\nu_n)\\ \boldsymbol{\Psi}\quad&=\det(\nu_1\quad\nu_2\quad\cdots\quad\nu_n)+c\det(\nu_2\quad\nu_2\quad\nu_3\quad\cdots\quad\nu_n)\\ &=\det(\nu_1\quad\nu_2\quad\cdots\quad\nu_n)\end{aligned}$$

其中第一个等式源于行列式的多重线性性质，第二个等式则源于行列式的交错性质．上式表明，将一矩阵第二列的标量倍加到该矩阵第一列不改变其行列式的值．同样的结论对于任意的两列也是成立的．于是(d) 成立

(e) 的证明可由 (d) 和 9.56(a) 得出．(a)、(b) 和 (c) 的证明所用手段类似，留给读者完成

对各元素都为具体的数的矩阵，上述结果可引出一种比直接应用 9.46 中的公式更快的计算行列式的方法．具体而言，应用高斯消元法，即交换两行【由 9.57 (b)，这将把行列式变为原来的 1 倍】、将一行乘以非零常数【由9.57 (c)，这将把行列式乘以相同常数】以及将一行的若干倍加到另一行【由9.57 (e)，这不改变行列式的值】，可将矩阵化为上三角矩阵，而上三角矩阵的行列式就是对角线上各元素之积（由9.48）．如果你的软件能记录交换各行的次数，以及将一行乘以常数时所用的常数，那么就可以反算出原矩阵的行列式

因为数 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{F}$ 是算子 $T\in\mathcal{L}(V)$ 的特征值当且仅当 $\det(\lambda I-T)=0$ （由 9.51），你可能由此想到一种快速求解特征值的方法：取 V 的一个基，令 $A=\mathcal{M}(T)$ ，求出 $\det(\lambda I-A)$ ，然后求解方程 $\det(\lambda I-A)=0$ 来得出 λ ．然而，这个过程往往并不高效，除非 $\dim V=2$ （或3 和4，如果你愿意使用三次或四次求根公式的话）．有个问题是，当矩阵中包含符号（例如 $\lambda I-A$ 中的λ）时，上段所述的计算行列式的过程就不适用了．出现此问题，是因为在高斯消元过程中需要确定某些量是否等于0，而这在涉及符号 λ 的表达式中比较复杂

回忆有限维内积空间上的算子是幺正的当且仅当它是保范数的（见 7.51 及其后的一段）．幺正算子的每个特征值的绝对值都是1（由7.54）．于是幺正算子的特征值之积的绝对值是1．因此（至少在 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 情况下）幺正算子的行列式的绝对值是1（由9.55）．下面结论给出了不依赖于 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 这个前提的证明

9.58 每个幺正算子的行列式绝对值都为1

V 是内积空间， $S\in\mathcal{L}(V)$ 是幺正算子，则 $|\det S|=1$

证

因为 s 是幺正的，所以 $I=S^*S$ （见7.53）．于是

$$1 = \det(S^*S) = (\det S^*)(\det S) = \overline{(\det S)}(\det S) = |\det S|^2$$

其中第二个等号源于 9.49 (a)，第三个等号源于9.56 (c)．上式表明 $|\det S| = 1$

内积空间上正算子的行列式与将这类算子对应成非负实数的类比吻合得很好

> **9.59 正算子行列式非负**
>
> V 是内积空间， $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正算子，则det $T \geq 0$

证

由谱定理（7.29 或 7.31）， V 有由 T 的特征向量构成的规范正交基．于是由 9.42 的最后一例， det$T$ 等于 T 的特征值之积（其中可能有重复的特征值）． T 的每个特征值都是非负数（由 7.38）．于是我们得出结论det $T \geq 0$

设 V 是内积空间且 $T \in \mathcal{L}(V)$ ．回忆一下， T^*T 的特征值的非负平方根构成的组（各数出现次数等于其对应特征值的重数）被称为 T 的奇异值构成的组（见 7E 节）

> **9.60 det $T \cdot T$ 的奇异值之积**
>
> V 是内积空间且 $T \in \mathcal{L}(V)$ ．那么

证

我们有

$$|\det T|^2 = \overline{(\det T)}(\det T) = \big(\det(T^*)\big)(\det T) = \det(T^*T),$$

其中第二个等号源于9.56 (c)，最后一个等号源于9.49 (a)．将上式两边同时开平方根就证明了$|\det T| = \sqrt{\det(T^*T)}$
令 $s_1, \ldots, s_n$ 表示 T 的奇异值构成的组．于是 $s_1^2, \ldots, s_n^2$ 是 T^*T 的特征值构成的组（可能有重复），它们对应由 T^*T 的特征向量构成的 V 的规范正交基．因此由9.42 的最后一例得

$$\det(T^*T) = s_1^2 \cdots s_n^2.$$

于是 $|\det T| = s_1 \cdots s_n$ ，原命题得证

实内积空间上的算子 T 作用于体积，会将其乘以 T 的奇异值之积（由7.111）．于是由7.111和 9.60 立即可得接下来的结果．这个结果解释了为什么在多变量微积分的变量替换公式中会出现行列式的绝对值

> **9.61 T 将体积变为其 det$T$ 倍**
>
> 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ 且 $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$ ．那么

对于有限维复向量空间上的算子，我们现将其行列式与前面见过的一个多项式联系起来

> **9.62 若 F = C，那么 T 的特征多项式等于 det zI T**
>
> 设 $\mathbf{F} = \mathbf{C}$ 且 $T \in \mathcal{L}(V)$ ．令 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 表示 T 的所有互异特征值，并令 $d_1, \ldots, d_m$ 表示它们的重数．那么

$$\det(zI-T)=(z-\lambda_1)^{d_1}\cdots(z-\lambda_m)^{d_m}.$$

证

存在 V 的一个基，使得 T 关于该基有上三角矩阵，且各 λ_k 恰在其对角线出现 d_k 次（由8.37）．关于该基， $zI-T$ 有上三角矩阵，且各 $z-\lambda_k$ 恰在其对角线出现 d_k 次．从而由9.48 可得欲证等式
设 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 且 $T\in\mathcal{L}(V)$． 在 8.26 中， T 的特征多项式被定义作9.62 中的等式右端．我们之前并未对有限维实向量空间上的算子定义特征多项式，因为这类算子可能没有特征值，用9.62中的等式右端来定义就不合适了
我们现呈上特征多项式的一个新定义，它是由 9.62 所启发的．这个新定义对实向量空间和复向量空间都成立．9.62 中的等式说明， $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 时，这个新定义等价于我们之前所作的定义（8.26）

9.63 特征多项式

设 $T\in\mathcal{L}(V)$． 定义为

$$z\mapsto\det(zI-T)$$

的多项式被称为 T 的特征多项式

9.46 中的公式表明，算子 $T\in\mathcal{L}(V)$ 的特征多项式是一个次数为 dim$V$ 的首一多项式． T 的特征多项式在 $\mathbf{F}$ 中的零点恰为 T 的特征值（由9.51）
之前我们证明了复数情形下的凯莱-哈密尔顿定理（8.29）．现在我们可将这条结果拓展至实向量空间上的算子了

9.64 凯莱-哈密尔顿定理

设 $T\in\mathcal{L}(V)$ 且 q 是 T 的特征多项式．那么 $q(T)=0$

证

若 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$， 那么由 9.62 和 8.29 得等式 $q(T)=0$
现设 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$． 取定 V 的一个基，并令 A 是 T 关于该基的矩阵．令 S 是 $\mathbf{C}^{\dim V}$ 上的算子，满足 S （关于 $\mathbf{C}^{\dim V}$ 的标准基）的矩阵是 A． 对所有 $z\in\mathbf{R}$， 我们有

$$q(z)=\det(zI-T)=\det(zI-A)=\det(zI-S)$$

于是 q 是 S 的特征多项式．现由 $\mathbf{F}=\mathbf{C}$ 的情形（本证明第一句话）得 $0=q(S)=q(A)=q(T)$

凯莱-哈密尔顿定理（9.64）表明，算子 $T\in\mathcal{L}(V)$ 的特征多项式是最小多项式的多项式倍（由5.29）．于是，如果 T 的最小多项式的次数等于 $\dim V$， 那么 T 的特征多项式等于 T 的最小多项式．绝大多数算子，比如超过 99.999% 的 4×4 矩阵对应的算子【矩阵各元素均为整数且处于 100, 100 区间，见式 (5.25) 下面一段】，都满足这种情况
之前我们在复数情形下证明了下面结果中的最后一句话（见 8.54）．现在我们可给出在实向量空间和复向量空间上都适用的证明

9.65 特征多项式、迹和行列式

$T\in\mathcal{L}(V)$． 令 $n=\dim V$． 那么 T 的特征多项式可写为

$$z^n-(\operatorname{tr}T)z^{n-1}+\cdots+(-1)^n(\det T)$$

证

关于 z 的多项式函数的常数项，就是该多项式在 $z=0$ 时所取的值．于是 T 的特征多项式的常数项就等于 $\det(-T)$， 也就等于 $(-1)^n$ det T （由 9.42 的第三例可得）

取定 V 的基，并令 A 是 T 关于该基的矩阵． $zI-T$ 关于该基的矩阵就是 $zI-A$． 9.46 给出的 $\det(zI-A)$ 的公式中，来自恒等排列 $\{1,\ldots,n\}$ 的项是

$$(z-A_{1,1})\cdots(z-A_{n,n}).$$

上述表达式中 z^{n-1} 的系数是 $-(A_{1,1}+\cdots+A_{n,n})$， 就等于 $-\mathrm{tr}T$． det $(zI-A)$ 的公式中来自perm n 的其他各元素的项至多包含 $n-2$ 个形如 $z-A_{k,k}$ 的因子，因此对于 T 的特征多项式中 z^{n-1} 的系数没有贡献

在下面这条结果中，将 $n\times n$ 矩阵 A 的各列看成 $\mathbf{F}^n$ 的元素．那么下面所示的范数就产生于 $\mathbf{F}^n$ 上的标准内积，回忆下面证明中的记号 $R_{\cdot,k}$ 意为矩阵 R 的第 k 列（定义于3.44）

9.66 阿达马不等式

设 A 是 $n\times n$ 矩阵．令 $\nu_1,\ldots,\nu_n$ 表示 A 的各列．那么

$$|\det A| \le {}_{k=1}^{n} \|\nu_k\|$$

证

若 A 不可逆，则det $A=0$， 因此欲证不等式在此情形下成立
于是假设 A 可逆．QR 分解（7.58）告诉我们，存在一个幺正矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和一个对角线上元素均为正数的上三角矩阵 R， 使得 $A=QR$． 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{et}A| = |\mathrm{d}\mathbf{i}| = |\mathrm{dt}|\partial| \\ &= |\mathrm{dt}|\partial| \\ &= {}_{k=1}^{N} R_{k,k} \\ &\le {}_{k=1}^{N} \|R_{k,k}\| \\ &\le {}_{k=1}^{N} \|R_{k,k}\| \\ &= {}_{k=1}^{N} \|\sigma R\| \\ &= {}_{k=1}^{N} \|\sigma R\| \\ &= {}_{k=1}^{N} \|r_k\|,\end{aligned}$$

其中第一行源于9.49 (b)，第二行源于9.58，第三行源于9.48，第五行成立则是由于 $\boldsymbol{Q}$ 是等距映射

下面给出阿达马不等式的几何解释．设 $\mathbf{F}=\mathbf{R}$.． 令 $T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ 是满足 $Te_k=\nu_k$ （ $k=1,\ldots,n$， $e_1,\ldots,e_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的标准基）的算子．那么 T 将长方体 $P(e_1,\ldots,e_n)$ 映成平行体 $P(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ 【要回顾这两个记号和术语，请看 7.102 和 7.105】．因为长方体 $P(e_1,\ldots,e_n)$ 的体积是 1，所以这表明（由9.61）平行体 $P(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ 的体积是 $|\det T|$， 也就等于 |det |． 于是上述阿达马不等式就可解释成，在各边长为 $\|\nu_1\|,\ldots,\|\nu_n\|$ 的所有平行体中，体积最大的是各边都正交的平行体（其体积为 ${}_{k=1}^{n}\|\nu_k\|$ ）
阿达马不等式取得等号的充要条件见于本节习题18
接下来这条结果中的矩阵被称为范德蒙矩阵（Vandermonde matrix）．范德蒙矩阵在多项式插值、离散傅里叶变换和数学中其他领域有重要应用．下面结果的证明很好地展现了在矩阵和线性映射之间来回切换的威力

9.67 范德蒙矩阵的行列式

设 $n>1$ 及 $\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbf{F}$． 那么

证

令 $1,z,\ldots,z^{n-1}$ 是 $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbf{F})$ 的标准基，并令 $e_1,\ldots,e_n$ 是 $\mathbf{F}^n$ 的标准基．定义线性映射$S:\mathcal{P}_{n-1}(\mathbf{F})\to\mathbf{F}^n$ 为

$$Sp=\big(p(\beta_1),\ldots,p(\beta_n)\big).$$

令 A 表示上面结果框所示的范德蒙矩阵．注意到

$$A=\mathcal{M}\big(S,(1,z,\ldots,z^{n-1}),(e_1,\ldots,e_n)\big).$$

令 $T:\mathcal{P}_{n-1}(\mathbf{F})\to\mathcal{P}_{n-1}(\mathbf{F})$ 是 $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbf{F})$ 上的算子，它满足 $T1=1$ 以及对于 $k=1,\ldots,n-1$，

$$Tz^k=(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_k)$$

令 $B=\mathcal{M}\left(T,(1,z,\ldots,z^{n-1}),(1,z,\ldots,z^{n-1})\right)$．那么 B 是对角线上元素均为1 的上三角矩阵．从而 det $B=1$ （由 9.48）
令 $C=\mathcal{M}\big(ST,(1,z,\ldots,z^{n-1}),(e_1,\ldots,e_n)\big)$．于是 $C=AB$ （由3.81），这表明
由 c,s 和 T 的定义可得， C 等于

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \beta_2-\beta_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \beta_3-\beta_1 & (\beta_3-\beta_1)(\beta_3-\beta_2) & \cdots & 0 & \\ & & & \ddots & & \\ 1 & \beta_n-\beta_1 & (\beta_n-\beta_1)(\beta_n-\beta_2) & \cdots & (\beta_n-\beta_1)(\beta_n-\beta_2)\cdots(\beta_n-\beta_{n-1}) & \end{pmatrix}.$$

则 det $A=\det C=$ $(\beta_k-\beta_j)$，其中我们用到了 9.56 (a) 和 9.48$1\le j<k\le n$

9D 张量积

两向量空间的张量积

接下来这个主题的动机，源于我们需要建立向量 $\nu\in V$ 和向量 $w\in W$ 的乘积．这一乘积将表示为 $\nu\ w$，念作“ ν 圈乘 w ”（“ ν tensor w ”）4，也是某个被称为 $V\ W$ （同样念作“ $\nabla\cdot\nabla V$ 圈乘W”）的新向量空间的元素
我们已经有了向量空间 $V\times W$ （见章节3E)，它被称为 V 和W 的乘积．然而， $V\times W$ 与我们此处的意图不符，因为它并没有提供一种自然的方式来让 V 中的元素乘以W 中的元素．我们希望的是，张量积满足乘法的一些常见性质．比如，满足分配性质，意即，如果 $\nu_1,\nu_2,\nu\in V$ 且 $w_1,w_2,w\in W$，就有

$$(\nu_1+\nu_2)\ w=\nu_1\ w+\nu_2\ w\quad\|\quad \nu\ (w_1+w_2)=\nu\ w_1+\nu\ w_2$$

我们还希望标量乘法和这种新的乘法 在 $_{\mathrm{E}}$ 中键入 \otimes 即可打出 “和谐共处”，意即

$$\lambda(\nu\ \nu)=(\lambda\nu)\ \nu=\nu\ (\lambda w)$$

对所有 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{F}$、 $\nu\in V$ 和 $w\in W$ 成立
另外，如果 V 的任一基和W 的任一基相结合都可以得到 $V\ W$ 的基，那就好了．具体而言，如果 $e_1,\ldots,e_m$ 是 V 的基， $f_1,\ldots,f_n$ 是 W 的基，那么我们希望，由 $e_j\ f_k$ （以任意顺序）构成的组是 $V\ W$ 的基，其中 j 取遍 1 到 m 而 k 取遍 1 到 n．这意味着， $\dim(V\ W)$ 应该等于 $(\dim V)(\dim W)$．回顾一下， $\dim(V\times W)=\dim V+\dim W$ （见3.92)，这表明 $V\times W$ 这一乘积与我们此处的意图不符
为了用一种自然的方式由 V 和 W 得到维数为 $(\dim V)(\dim W)$ 的向量空间，我们关注双线性泛函构成的向量空间，其定义如下

9.68 V、W 上的双线性泛函

$V\times W$ 上的双线性泛函是函数 $\beta:V\times W\to\mathbf{F}$，使得：对于任一 $w\in W$， $\nu\mapsto\beta(\nu,\boldsymbol{w})$ 都是 V 上的线性泛函；对于任一 $\nu\in V$， $\boldsymbol{w}\mapsto\beta(\nu,\boldsymbol{w})$ 都是 W 上的线性泛函0 $V\times W$ 上的双线性泛函构成的向量空间，记为 (V,W)

如果 $W=V$，那么 $V\times W$ 上的双线性泛函就是双线性型了（见9.1)
(V,W) 上的加法和数乘运算，定义为函数通常的加法和标量乘法．你可以验证，这些运算使 (V,W) 成为向量空间，其加法恒等元是从 $V\times W$ 到 $\mathbf{F}$ 的零函数

9.69 双线性泛函

设 $\varphi\in V'$ 且 $\tau\in W'$．定义 $\beta:V\times W\to\mathbf{F}$ 为 $\beta(\nu,w)=\varphi(\nu)\tau(w)$．那么 β 是 $V\times W$ 上的双线性泛函
设 $\nu\in V$ 且 $w\in W$．定义 $\beta:V'\times W'\to\mathbf{F}$ 为 $\beta(\varphi,\tau)=\varphi(\nu)\tau(w)$．那么 β 是 $V'\times W'$ 上的双线性泛函
定义 $\beta:V\times V'\to\mathbf{F}$ 为 $\beta(\nu,\varphi)=\varphi(\nu)$．那么 β 是 $V\times V'$ 上的双线性泛函
设 $\varphi\in V'$．定义 $\beta:V\times\mathcal{L}(V)\to\mathbf{F}$ 为 $\beta(\nu,T)=\varphi(T\nu)$．那么 β 是 $V\times\mathcal{L}(V)$ 上的双线性泛函
设 ∇_m 和 n 是正整数．定义 $\beta:\mathbf{F}^{m,n}\times\mathbf{F}^{n,m}\mathbf{F}$ 为 $\beta(A,B)=\mathrm{tr}(AB)$．那么 β 是 $\mathbf{F}^{m,n}\times\mathbf{F}^{n,m}$ 上的双线性泛函

9.70 双线性泛函构成的向量空间的维数

$\dim(V, W) = (\dim V)(\dim W)$

证

令 $e_1, \ldots, e_m$ 是 V 的基， $f_1, \ldots, f_n$ 是 W 的基．对于双线性泛函 $\beta \in (V, W)$ ，令 $\mathcal{M}(\beta)$ 是第 j 行第 k 列元素为 $\beta(e_j, f_k)$ 的 $m \times n$ 矩阵．
$\beta \mapsto \mathcal{M}(\beta)$ 这一映射是从 (V, W) 到 $\mathbf{F}^{m,n}$ 的线性映射
对于矩阵 $C \in \mathbf{F}^{m,n}$ ，在 $V \times W$ 上定义双线性泛函 β_C 为

$$\beta_C(a_1e_1 + \cdots + a_me_m, b_1f_1 + \cdots + b_nf_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{j,k}a_jb_k,$$

其中 $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{F}$
从 (V, W) 到 $\mathbf{F}^{m,n}$ 的线性映射 $\beta \mapsto \mathcal{M}(\beta)$ ，与从 $\mathbf{F}^{m,n}$ 到 (V, W) 的线性映射 $C \mapsto \beta_C$ 互为彼此的逆．这是因为，对所有 $\beta \in (V, W)$ 有 $\beta_{M(\beta)} = \beta$ ，而对所有 $C \in \mathbf{F}^{m,n}$ 有 $\mathcal{M}(\beta_C) = C$ （你应该自行验证）
因此，这两个映射都是同构，而且它们所关联的这两个空间维数相同．于是， $\dim(V, W) = \dim \mathbf{F}^{m,n} = mn = (\dim V)(\dim W)$

在数学文献中，也会出现 $V \ W$ 的一些其他定义．至少在有限维的语境下，这些定义是彼此等价的，因为维数相同的任意两个向量空间都是同构的
以上结果指出， (V, W) 的维数正是我们要找的， $\mathcal{L}(V, W)$ 和 $\mathbf{F}^{\dim V, \dim W}$ 的也是．这就可能诱使我们把 $V \ W$ 定义为 (V, W) 、 $\mathcal{L}(V, W)$ 或者 $\mathbf{F}^{\dim V, \dim W}$ ．然而，这些定义都不能引出$\nu \ w \ \Omega \nu \in V, w \in W$ ）的一个与基无关的定义
接下来这条定义，尽管乍一看有点奇怪而抽象，但是有个巨大的优势，就是以一种与基无关的方式定义了 $\nu \ \boldsymbol{w}$ ．我们将 $V \ W$ 定义为在 $V' \times W'$ 上的双线性泛函构成的向量空间，而不是在 $V \times W$ 上的（尽管你可能忍不住想这样定义）

9.71 张量积

张量积 $V \ W$ 定义为 (V', W')
对于 $\nu \in V$ 和 $w \in W$ ，张量积 $\nu \ \boldsymbol{w}$ 是 $V \ W$ 的元素5，定义为

$$(\nu \ w)(\varphi, \tau) = \varphi(\nu)\tau(w)$$

对所有 $(\varphi, \tau) \in V' \times W'$

我们可以很快地证明 $V \ W$ 的这一定义能让它有我们想要的维数

9.72 两向量空间的张量积的维数

$$\dim(V \ W) = (\dim V)(\dim W)$$

证

因为向量空间和它的对偶维数相同（根据3.111），所以我们有 $\dim V' = \dim V$ 和 $\dim W' = \dim W$ ．因此，9.70 告诉我们 (V', W') 的维数等于 $(\dim V)(\dim W)$

为了理解两向量 $\nu \in V$ 和 $w \in W$ 的张量积 $\nu \ w$ 的定义，就要关注 $\nu \ w$ 究竟是何种类型的对象． $V \ W$ 的元素是 $V' \times W'$ 上的双线性泛函，特别地，它是从 $V' \times W'$ 到 $\mathbf{F}$ 的函数．因此，输入 $V' \times W'$ 中的每个元素，它都输出 $\mathbf{F}$ 中的一个元素．以上定义就具有这样的性质，因为将 $\nu \ w$ 作用于 $V' \times W'$ 的一个元素 (φ, τ) ，就能得到 $\varphi(\nu)\tau(w)$ 这个数
$\nu \ w$ 这有点抽象的本质，应该无关紧要．重点在于这些对象的性质．接下来这条结果表明，向量的张量积具有我们预期的双线性性质

9.73 张量积的双线性

设 $\nu, \nu_1, \nu_2 \in V$ ， $w, w_1, w_2 \in W$ ， $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$ ．那么就有
以及

$$\lambda(\nu\ \ w) = (\lambda\nu)\ \ w = \nu\ \ (\lambda w).$$

证

设 $(\varphi, \tau) \in V' \times W'$. 那么

$$\begin{aligned} \big((\nu_1 + \nu_2)\ \ w\big)(\varphi, \tau) &= \varphi(\nu_1 + \nu_2)\tau(w) \\ &= \varphi(\nu_1)\tau(w) + \varphi(\nu_2)\tau(w) \\ &= \big(\nu_1\ \ w\big)(\varphi, \tau) + \big(\nu_2\ \ w\big)(\varphi, \tau) \\ &= \big(\nu_1\ \ w + \nu_2\ \ w\big)(\varphi, \tau). \end{aligned}$$

因此, $(\nu_1 + \nu_2)\ \ w = \nu_1\ \ w + \nu_2\ \ w$
另外两个等式可类似这样证明

根据定义,“组”是有序的. 顺序有时很重要,比如组成一算子关于一个基的矩阵时. 而对于本节里这种有两个下标的组,比如接下来这条结果中的 $\{e_j\ \ f_k\}_{j=1,...,mk=1,...,n}$, 顺序就无关紧要了,我们也不做具体说明——只是怎么方便怎么排
下面这条结果的 (a) 中, $V\ \ W$ 中元素的线性无关性,揭示了这一观点: $V\ \ W$ 中的向量之间的关系,要么是来自张量积的双线性(见9.73),要么可能是由于 V 或 W 中的向量组的线性相关性,此外就再没有别的了

9.74 $V \otimes W$ 的基

设 $e_1, \ldots, e_m$ 是 V 中的一组向量, $f_1, \ldots, f_n$ 是 W 中的一组向量
(a) 如果 $e_1, \ldots, e_m$ 和 $f_1, \ldots, f_n$ 都是线性无关组,那么

$$\{e_j\ \ f_k\}_{j=1,...,mk=1,...,n}$$

是 $V\ \ W$ 中的线性无关组
(b) 如果 $e_1, \ldots, e_m$ 是 V 的基, $f_1, \ldots, f_n$ 是 W 的基,那么组 $\{e_j\ \ f_k\}_{j=1,...,mk=1,...,n}$ 是$V\ \ W$ 的基

证

为证明 (a),设 $e_1, \ldots, e_m$ 和 $f_1, \ldots, f_n$ 都是线性无关组. 由这一线性无关性以及线性映射引理(3.4)可得,存在 $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in V'$ 和 $\tau_1, \ldots, \tau_n \in W'$ 使

$$\varphi_j(e_k) = \begin{cases} 1 & \frac{+\surd}{\surd}\ j = k \\ 0 & \frac{+\surd}{\surd}\ j \neq k \end{cases}$$

其中第一个式子中 $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, 第二个式子中 $j, k \in \{1, \ldots, n\}$
设 $a_{j,k}$ $(j = 1, \ldots, m\ k = 1, \ldots. n)$ 是一组标量使

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{j,k}(e_j\ \ f_k) = 0$$

注意到 $(e_j\ \ f_k)(\varphi_M, \tau_N)$ 在 $j = M$ 且 $k = N$ 情况下等于1,其余情况下等于0. 那么,将9.75两侧都作用于 (φ_M, τ_N) , 就得到 $a_{M,N} = 0$, 证明了 $\{e_j\ \ f_k\}_{j=1,...,mk=1,...,n}$ 线性无关
这样一来,根据(a) 和 $\dim(V\ \ W) = (\dim V)(\dim W)$ 【见9.72】,以及“长度恰好的线性无关组是一个基”这一结果(见2.38),可证得(b)
根据以上结果中的(b), $V\ \ W$ 的每个元素都是形如 $\nu\ \ w$ 的元素的有限和,其中 $\nu \in V, w \in W$. 然而,如果 $\dim V > 1$ 且 $\dim W > 1$, 那么由习题4可知

$$\{\nu\ \ w : (\nu, w) \in V \times W\} \neq V\ \ W$$

9.76 $\mathbf{F}^m$ 的元素和 $\mathbf{F}^n$ 的元素所成的张量积

设 m 和 n 是正整数. 令 $e_1, \ldots, e_m$ 表示 $\mathbf{F}^m$ 的标准基,令 $f_1, \ldots, f_n$ 表示 $\mathbf{F}^n$ 的标准基. 设

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \mathbf{F}^m$$

那么

$$\begin{aligned}\nu\ w &= \left(\sum_{j=1}^{m}\nu_j e_j\right)\ \left(\sum_{k=1}^{n}w_k f_k\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\nu_j w_k)(e_j\ \ f_k).\end{aligned}$$

因此，关于 $\mathbf{F}^m\ \ \mathbf{F}^n$ 的【根据 9.74 (b) 得到的】基 $\{e_j\ \ f_k\}_{j=1,...,mk=1,...,n}$， $\nu\ w$ 的系数是$\{\nu_j w_k\}_{j=1,...,mk=1,...,n}$．如果我们不把这些数写成组，而是写成一个 $m\times n$ 矩阵，其中第 j 行第k 列元素为 $\nu_j w_k$，那么我们就可以把 $\nu\ w$ 等同为这个 $m\times n$ 矩阵：

$$\begin{pmatrix}\nu_1 w_1 & \cdots & \nu_1 w_n\\ & \ddots & \\ \nu_m w_1 & \cdots & \nu_m w_n\end{pmatrix}.$$

以上例子指出了一种等同关系，你可通过习题第5、6 题来练习如何运用这种等同关系
我们现在定义双线性映射．不同于双线性泛函，双线性映射的目标空间可以是任一向量空间，而不只是标量域

9.77 双线性映射

从 $V\times W$ 到向量空间 U 的双线性映射是这样一个函数 $\Gamma: V\times W\to U$， 其使得 $\nu\mapsto\Gamma(\nu,w)$ 对任一 $w\in W$ 都是从 V 到 U 的线性映射，
$\boldsymbol{w}\mapsto\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{w})$ 对任一 $\nu\in V$ 都是从 W 到 U 的线性映射

9.78 双线性映射

$V\times W$ 上的每个双线性泛函都是从 $V\times W$ 到 $\mathbf{F}$ 的双线性映射
定义为 $\Gamma(\nu,w)=\nu\ w$ 的函数 $\Gamma: V\times W\to V\ \ W$ 是从 $V\times W$ 到 $V\ \ W$ 的双线性映射（根据 9.73）
定义为 $\Gamma(S,T)=ST$ 的函数 $\Gamma:\mathcal{L}(V)\times\mathcal{L}(V)\to\mathcal{L}(V)$ 是从 $\mathcal{L}(V)\times\mathcal{L}(V)$ 到 $\mathcal{L}(V)$ 的双线性映射
定义为 $\Gamma(\nu,T)=T\nu$ 的函数 $\Gamma: V\times\mathcal{L}(V,W)\to W$ 是从 $V\times\mathcal{L}(V,W)$ 到W 的双线性映射

接下来这条结果表明，张量积使我们能够将 $V\times W$ 上的双线性映射转换为 $V\ \ W$ 上的线性映射（反之亦然）．在数学文献中，下面结果的(a)称为张量积的泛性质

9.79 化双线性映射为线性映射

设 U 是向量空间
(a) 设 $\Gamma: V\times W\to U$ 是双线性映射，那么存在唯一的线性映射 $\hat{\Gamma}: V\ \ WU$ 使得

$$\hat{\Gamma}(\nu\ \ w)=\Gamma(\nu,w)$$

对所有 $(\nu,w)\in V\times W$ 成立
(b) 反之设 $T: V\ \ W\to U$ 是线性映射，那么存在唯一的双线性映射 $T^{\#}: V\times W\to U$ 使得

$$T^{\#}(\nu,w)=T(\nu\ \ w)$$

对所有 $(\nu,w)\in V\times W$ 成立

证

令 $e_1,\ldots,e_m$ 是 V 的基，令 $f_1,\ldots,f_n$ 是 W 的基．根据线性映射引理（3.4）以及9.74 (b)，存在唯一的线性映射 $\hat{\Gamma}: V\ \ WU$ 使得

$$\hat{\Gamma}(e_j\ \ f_k)=\Gamma(e_j,f_k)$$

对所有 $j\in\{1,\ldots,m\}$ 和 $k\in\{1,\ldots,n\}$ 成立
设 $(\nu,w)\in V\times W$． 存在 $a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n\in\ \mathbf{F}$ 使得 $\nu=a_1e_1+\cdots+a_me_m$ 而$w=b_1f_1+\cdots+b_nf_n$． 因此

$$
\begin{aligned}
\hat{\Gamma}(\nu \ \nu) &= \hat{\Gamma}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_j b_k)(e_j \ f_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_j b_k \hat{\Gamma}(e_j \ f_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_j b_k \Gamma(e_j, f_k) \\
&= \Gamma(\nu, \nu),
\end{aligned}
$$

即待证等式成立，其中第二行成立是因为 $\hat{\Gamma}$ 是线性的，第三行成立是因为 $\hat{\Gamma}$ 的定义，第四行成立是因为 Γ 是双线性的

根据 9.74 (b)，可得满足 $\hat{\Gamma}(\nu \ w) = \Gamma(\nu, w)$ 的线性映射 $\hat{\Gamma}$ 具有唯一性，也就完成了(a) 的证明.

为证明 (b)，定义函数 $T^{\#} : V \times W \to U$ 为 $T^{\#}(\nu, w) = T(\nu \ w)$ 对所有 $(\nu, w) \in V \times W$ 成立由张量积的双线性（见 9.73）和 T 的线性，可得 $T^{\#}$ 是双线性的

显然，满足条件的 $T^{\#}$ 是唯一的

要证明 9.79 (a)，我们不能只简单地定义 $\hat{\Gamma}(\nu \ w) = \Gamma(\nu, w)$ 对所有 $\nu \in V$ 和 $w \in W$ 成立（然后将 $\hat{\Gamma}$ “线性地”推广至整个 $V \ W$ 上），因为 $V \ W$ 的元素并不能唯一地表示成形如$\nu \ w$ 的元素的有限和．我们的证明用了 V 的基和W 的基以避免这个问题

虽然我们在9.79 (a) 的证明中对 $\hat{\Gamma}$ 的构造依赖于 V 和 W 的基，但是 $\hat{\Gamma}(\nu \ w) = \Gamma(\nu, w)$ 对所有 $\nu \in V$ 和 $w \in W$ 成立，这又表明 $\hat{\Gamma}$ 不依赖于 V 和W 的基的选取

内积空间的张量积

下面的结果包含三种内积： $V \ W$ 上的， V 上的， W 上的
都用相同的符号$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 来表示

9.80 两内积空间所成张量积上的内积

V 和 W 是内积空间．那么， $V \ W$ 上存在唯一一种内积使得

$$\nu \ w, u \ x = \nu, u \, w, x$$

对所有 $\nu, u \in V$ 和 $w, x \in W$ 成立

证

设 $e_1, \ldots, e_m$ 是 V 的规范正交基， $f_1, \ldots, f_n$ 是 W 的规范正交基．在 $V \ W$ 上定义一内积为

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{j,k} e_j \ f_k, \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{j,k} e_j \ f_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{j,k}\overline{c_{j,k}}.$$

验证式 (9.81) 定义了 $V \ W$ 上的一内积是很简单的【利用9.74 (b)】，这就留给读者了

设 $\nu, u \in V$ ， $w, x \in W$ ．令 $\nu_1, \ldots, \nu_m \in \mathbf{F}$ 使得 $\nu = \nu_1 e_1 + \cdots + \nu_m e_m$ ，而 u 、 w 和 x 的表达式以此类推．那么

$$
\begin{aligned}
v \ w, u \ x &= \sum_{j=1}^{m} v_{jj} \ \sum_{k=1}^{n} w_k f_k, \sum_{j=1}^{m} u_{jj} \ \sum_{k=1}^{n} x_k f_k \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} v_j w_k e_j \ f_k, \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} u_j x_k e_j \ f_k \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} v_j \overline{u_j} w_k \overline{x_k} \\
&= \sum_{j=1}^{m} v_j \overline{u_j} (\sum_{k=1}^{n} w_k \overline{x_k}) \\
&= v, u \langle w, x,
\end{aligned}
$$

因为 $V\ W$ 的每个元素都可以写成形如 $\nu\ \boldsymbol{w}$ 的元素的线性组合【根据 9.74 (b)】，所以$V\ W$ 上只有一种内积使得 $\nu\ w, u\ x = \nu, u w, x$ 对所有 $\nu, u \in V$ 和 $w, x \in W$ 成立

下面定义 $V\ W$ 上一自然的内积，而 9.80 已经证明了这一定义的合理性．如果不加证明的话，我们就不能简单地定义 $\langle \nu\ \nu, u\ x\rangle$ 为 $\nu, u w, x$ （然后分别用各位置的可加性将定义推广至 $V\ W$ 上），因为 $V\ W$ 的元素并不能唯一地表示为形如 $\nu\ \nu$ 的元素的有限和

9.82 两内积空间所成张量积上的内积

V 和W 是内积空间． $V\ W$ 上的内积是唯一使得

$$\nu\ w, u\ x = \nu, u w, x$$

对所有 $\nu, u \in V$ 和 $w, x \in W$ 成立的，从 $(V\ W) \times (V\ W)$ 到 $\mathbf{F}$ 的函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle$

在上式中取 $u = \nu$ 和 $x = w$ ，再开平方根，可得

$$\|\nu\ w\| = \|\nu\|\ \|w\|$$

对所有 $\nu \in V$ 和所有 $w \in W$ 成立
在 9.80 的证明中，内积的构造依赖于 V 的规范正交基 $e_1, \ldots, e_m$ 和 W 的规范正交基$f_1, \ldots, f_n$ ．式 (9.81) 意味着， $\{e_j\ f_k\}_{j=1,\ldots,mk=1,\ldots,n}$ 是 $V\ W$ 的双下标规范正交组，从而是$V\ W$ 的规范正交基【根据9.74 (b)】
接下来这条结果之所以重要，是因为其中所用的规范正交基，可以不同于 9.80 中定义内积所用的规范正交基．虽然在 9.80 的证明和下面这一结果中这些基的记号是一样的，但是要将它们视为两组不同的规范正交基

9.83 $V\ W$的规范正交基

设 V 和W 是内积空间，且 $e_1, \ldots, e_m$ 是 V 的一个规范正交基， $f_1, \ldots, f_m$ 是 W 的一个规范正交基．那么

$$\{e_j\ f_k\}_{j=1,\ldots,mk=1,\ldots,n}$$

是 $V\ W$ 的一个规范正交基

证

我们已经知道， $\{e_j\ f_k\}_{j=1,\ldots,mk=1,\ldots,n}$ 是 $V\ W$ 的基【根据9.74 (b)】．所以我们只需要验证规范正交性．为此，设 $j, M \in \{1, \ldots, m\}$ 和 $k, N \in \{1, \ldots, n\}$ ．那么

$$e_j\ f_k, e_M\ f_N = e_j, e_M f_k, f_N = \begin{cases} \\ 0 \end{cases}$$

因此，双下标组 $\{e_j\ f_k\}_{j=1,\ldots,mk=1,\ldots,n}$ 确实是 $V\ W$ □的一个规范正交基

关于 $V\ W$ 上的内积结构如何与 V 和 W 上的算子相互作用的一例，见习题11

多个向量空间的张量积

两个有限维向量空间所成张量积的性质，我们已经讨论过了．现在我们将注意力转向，多个有限维向量空间所成的张量积．这一推广不需要什么新观点，只需要一些稍微更复杂的记号．读者如果能很好地理解两个向量空间的张量积，就应该能进一步理解多于两个向量空间的张量积
因此这一小节不给证明．所提供的定义和结果表述，应该足以让读者用已学过的关于两向量空间所成张量积的知识填充其中的细节
首先是以下的记号假设

9.84 $V_1, \ldots, V_m$

本小节剩余部分中， m 表示大于1 的整数，而 $V_1, \ldots, V_m$ 都表示有限维向量空间

我们将要定义 m 重线性泛函，这一概念推广了双线性泛函（见9.68）．回顾一下，“泛函”一词指的是映射到标量域 $\mathbf{F}$ ，以及，“ $\neg_m$ 重线性型”这一术语用于特殊情形 $V_1 = \cdots = V_m$ （见9.25）． $(V_1, \ldots, V_m)$ 这一记号推广了我们原先的 (V, W)

9.85 m 重线性泛函

$V_1 \times \cdots \times V_m$ 上的 m 重线性泛函是满足如下性质的函数 $\beta : V_1 \times \cdots \times V_m \mathbf{F}$ ： 取 $\beta(\cdot, \ldots, \cdot)$ 中任一位置并将该位置之外的向量固定，则 β 都将成为该位置上的线性泛函，$V_1 \times \cdots \times V_m$ 上的 m 重线性泛函构成的向量空间，记为 $(V_1, \ldots, V_m)$

9.86 m 重线性泛函

对每个 $k \in \{1, \ldots\ldots, m\}$ ， 设 $\varphi_k \in V_k'$ ． 定义 $\beta : V_1 \times \cdots \times V_m \mathbf{F}$ 为

$$\beta(\nu_1, \ldots, \nu_m) = \varphi_1(\nu_1) \times \cdots \times \varphi_m(\nu_m)$$

那么 β 是 $V_1 \times \cdots \times V_m$ 上的 m 重线性泛函

接下来这条结果，可以仿照9.70 的证明方法来证

9.87 m 重线性泛函所成向量空间的维数

$$\dim (V_1, \ldots, V_m) = (\dim V_1) \times \cdots \times (\dim V_m)$$

现在我们可以定义，多个向量空间的张量积，以及这些向量空间的元素的张量积．以下定义和我们先前在 $m = 2$ 情形下所做的定义（9.71）完全类似

9.88 张量积

张量积 $V_1 \ \cdots \ V_m$ 定义为 $(V_1', \ldots, V_m')$
对于 $\nu_1 \in V_1, \ldots, \nu_m \in V_m$ ， 张量积 $\nu_1 \ \cdots \ \nu_m$ 是 $V_1 \ \cdots \ V_m$ 的元素，定义为

$$\left(\nu_1 \ \cdots \ \nu_m\right)\left(\varphi_1, \because, \varphi_m\right) = \varphi_1\left(\nu_1\right) \cdots \varphi_m\left(\nu_m\right)$$

对所有 $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in V_1' \times \cdots \times V_m'$

接下来这条结果的证明，可以参照 $m = 2$ 情形下的类似结果的证明方式（见9.72）

9.89 张量积的维数

$$\dim(V_1 \ \cdots \ V_m) = (\dim V_1) \cdots (\dim V_m)$$

9.90 $V_1 \ \cdots \ V_m$的基

设 $\dim V_k = n_k$ 且 $e_1^k, \ldots, e_{n_k}^k$ 是 V_k 的基（ $k = 1, \ldots, m$ ）．那么

$$\left\{e_{j_1}^1 \ \cdots \ e_{j_m}^m\right\}_{j_1=1,\ldots,n_1 \cdots j_m=1,\ldots,n_m}$$

是 $V_1 \ \cdots \ V_m$ 的基

设 $m = 2$ ， $e_1^1, \ldots, e_{n_1}^1$ 是 V_1 的基， $e_1^2, \ldots, e_{n_2}^2$ 是 V_2 的基．那么， $V_1 \ V_2$ 的元素，关于以上结果中的基 e1 j1 ⊗ e2 j2 j1=1,..., $\left\{e_{j_1}^1 \ e_{j_2}^2\right\}_{j_1=1,\ldots,n_1 j_2=1,\ldots,n_2}$ 的系数，可以用 $n_1 \times n_2$ 矩阵表示，其中第 j_1 行第 j_2 列的元素是 $e_{j_1}^1 \ e_{j_2}^2$ 的系数．因此，为了表示 $V_1 \ V_2$ 的元素，我们需要一个矩阵——由两个下标规定的数组
如果 $m > 2$ ，那么以上结果就表明我们需要一个由 ∇m 个下标规定的数组，来表示 $V_1 \ \cdots \ V_m$ 的一个任意元素．所以，当我们处理的对象由包含多个下标

的数组指定时，可能就会出现张量积
接下来这条定义推广了双线性映射的概念（见 9.77）．和双线性映射一样，其目标空间也是任意向量空间

9.91 m 重线性映射

从 $V_1\times\cdots\times V_m$ 到向量空间 U 的 m 重线性映射是满足如下性质的函数 $\Gamma: V_1\times\cdots\times V_m\to U$： 固定 $\Gamma(\cdot,\ldots,\cdot)$ 中任一位置以外的向量，都能得到该位置上的线性映射

接下来这条结果，可以参照9.79 的证明方式来证

9.92 化 m 重线性映射为线性映射

U 是向量空间
(a) $\Gamma: V_1\times\cdot\cdot\times V_m\to U$ 是 m 重线性映射，那么存在唯一线性映射 $\hat{\Gamma}: V_1\ \cdots\ V_m\ U$使

$$\hat{\Gamma}(\nu_1\ \cdots\ \nu_m)=\Gamma(\nu_1,\cdot\cdot\cdot,\nu_m)$$

对所有 $(\nu_1,\ldots,\nu_m)\in V_1\times\cdots\times V_m$
(b) 反之，设 $T: V_1\ \cdots\ V_m U$ 是线性映射，那么存在唯一的 m 重线性映射 $T^{\#}$:$V_1\times\cdots\times V_m U$ 使得

$$T^{\#}(\nu_1,\ldots,\nu_m)=(\nu_1\ \cdots\ \nu_m)$$

对所有 $(\nu_1,\ldots,\nu_m)\in V_1\times\cdots\times V_m$

多个内积空间的张量积，见习题第12、13 题