## 2.1 小范畴和局部小范畴

**小范畴**

我们称C是一个小范畴，若 $\mathrm{ob}(C)$ 和 $\mathrm{hom}(C)$ 是两个集合

**局部小范畴**

我们称C是一个局部小范畴，若对于任意 $A, B \in \mathbf{C}$ ， $\mathbf{C}(A, B)$ 都是一个集合

常见的Grp，Top都不是小范畴，但是是局部小范畴在本章中，我们感兴趣的范畴都是局部小的

## 2.2 Hom函子

**Hom函子**

令C是一个局部小范畴， $A \in \mathbf{C}$ ，我们下面定义Hom函子 $h_A \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$：对任意 $X \in \mathbf{C}$ ， $h_A(X) = \mathbf{C}[A, X]$ 。若 $X, Y \in \mathbf{C}$ ， $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ ，我们下面定义 $h_A(f) \in \mathbf{Set}(h_A(X), h_A(Y)) = \mathbf{Set}(\mathbf{C}[A, X], \mathbf{C}[A, Y])$ 若 $g \in \mathbf{C}[A, X]$ ，则 $h_A(f)(g)$ 被定义为 $f \circ g$ 0

**PROP**

令C是一个局部小范畴， $A \in \mathbf{C}$ ，则Hom函子 $h_A \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$

令 $X, Y, Z \in \mathbf{C}$ ， $g \in \mathbf{C}[Y, Z]$ ， $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ ， $h \in \mathbf{C}[A, X]$ 0

1. 因为 $h_A(id_X)(f) = id_X \circ f = f$ ，所以 $h_A(id_X) = id_{\mathbf{C}[A,X]} = id_{h_A(X)}$
2. 因为 $h_A(g \circ f)(h) = g \circ f \circ h = h_A(g)(f \circ h) = (h_A(g) \circ h_A(f))(h)$ ，所以 $h_A(g \circ f) = h_A(g) \circ h_A(f)$
   综上所述，我们就证明了 $h_A$ 是一个从C到Set的函子

---

那么 $h$ 是一个什么对象呢？我们可以认为 $h \in [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]]$ 。换言之， $h$ 是一个从C到 $[C, Set]$ 的反变函子

**函子 $h$，$h(f)$**

我们下面定义函子 $h \in [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]]$ 。对任意 $A \in \mathbf{C}$ ，我们定义 $h(A) = h_A$ 。对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$ ，我们下面定义 $h(f) \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}](h_B, h_A)$ 。对任意 $C \in \mathbf{C}$ ，我们下面定义 $h(f) \in \mathbf{Set}(h_B(C), h_A(C)) = \mathbf{Set}(\mathbf{C}(B, C), \mathbf{C}(A, C))$ 。对任意 $g \in \mathbf{C}(B, C)$ ，我们定义 $h(f)(g) = g \circ f$

**PROP**

令C是一个局部小范畴，则 $h \in [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]]$

令 $X, Y, Z, W \in \mathbf{C}$ ， $g \in \mathbf{C}[Y, Z]$ ， $f \in \mathbf{C}[X, Y]$ ， $k \in \mathbf{C}[Z, W]$

1. 因为 $h(id_X)(f) = f \circ id_X = f$ ，所以 $h(id_X) = id_{hX}$
2. 因为 $h(g \circ f)(k) = k \circ g \circ f = h(f)(k \circ g) = (h(f) \circ h(g))(k)$ ，所以 $h(g \circ f) = h(g) \circ h(f)$ 0综上所述，我们就证明了 $h$ 是一个从C到 $[C, Set]$ 的反变函子

---

## 2.3 Yoneda 引理

> **Yoneda 引理**
>
> 令C是一个局部小的范畴。对任意 $A \in \mathbb{C}$ 和 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$ ，我们有
>
> $$[h_A, F] \simeq F(A)$$

这里的同构有两层含义：它不仅对于 $A$ 是一个自然同构，而且对于 $F$ 也是一个自然同构
我们首先定义。对任意 $\eta \in [h_A, F]$ ，我们定义 $\hat{\eta} = \eta_A(id_A)$
接下来，我们来定义。对任意 $x \in F(A)$ ，我们下面定义 $\overline{x} \in [h_A, F]$ 。对任意 $B \in \mathbf{C}$ ，我们下面定义 $\overline{x}(B) \in \mathbf{Set}(h_A(B), F(B)) = \mathbf{Set}(\mathbf{C}(A, B), F(B))$ 。
对任意 $f \in \mathbf{C}(A, B)$ ，我们定义 $\overline{x}_B(f) = F(f)(x)$ 0
现在，我们分别来证明 $\hat{\cdot} \circ \hat{\cdot} = id_{[h_A, F]}$ ，以及 $\hat{\cdot} \circ \hat{\cdot} = id_{F(A)}$

1. 令 $\eta \in [h_A, F]$ ， $B \in \mathbf{C}$ ， $f \in \mathbf{C}(A, B)$ 。我们有 $\cdot(\hat{\eta})_B(f) = F(f)(\hat{\eta}) = F(f)(\eta_A(id_A)) = (F(f) \circ \eta_A)(id_A) = (\eta_B \circ h_A(f))(id_A) = \eta_B(f \circ id_A) = \eta_B(f)$ 。这就证明了 $\hat{\cdot} \circ \hat{\cdot} = id_{[h_A, F]}$ 0
2. 令 $x \in F(A)$ 。我们有 $\hat{\cdot}(\overline{x}) = \overline{x}_A(id_A) = F(id_A)(x) = id_{F(A)}(x) = x$ 。这就证明了 $\hat{\cdot} \circ \hat{\cdot} = id_{F(A)}$
最后，我们分别来证明这个同构对于 $A$ 和 $F$ 来说都是一个自然同构。
3. 取定 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$ 。令 $A, B \in \mathbf{C}$ ， $f \in \mathbf{C}(A, B)$ 。对 $\eta \in [h_A, F]$ ，我们下面定义 $[h, F](f)(\eta) \in [h_B, F]$ 。之前，我们已经定义了 $h(f) \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}](h_B, h_A)$ ，所以我们当然定义 $[h, F](f)(\eta) = \eta \circ h(f)$ 。现在，我们只须证明 $\hat{\cdot}_B \circ [h, F](f) = F(f) \circ \hat{\cdot}_A$ 。令 $\eta \in [h_A, F]$ 。一方面，$\hat{\cdot}_B \circ [h, F](f)) = \hat{\cdot}_B)([h, F])(f)(\eta)) = \hat{\cdot}_B)(\eta \circ h(f)) = (\eta \circ h(f))_B(id_B) = (\eta_B \circ h(f))_B(id_B) = \eta_B(id_B \circ f) = \eta_B(f)$ 。另一方面，$(F(f) \circ \hat{\cdot}_A)(\eta) = F(f)(\hat{\cdot}_A(\eta)) = F(f)(\eta_A(id_A)) = (F(f) \circ \eta_A(id_A) = (\eta_B \circ h_A(f))(id_A) = \eta_B(h_A(f)(id_A)) = \eta_B(id_A \circ f) = \eta_B(f)$ 。因此，这个同构对于 $A$ 来说是个自然同构。
4. 取定 $A \in \mathbf{C}$ 。令 $F, G \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$ ， $\xi \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}](F, G)$ 。对 $\eta \in [h_A, F]$ ，我们定义 $[h_A, \cdot](\xi)(\eta) = \xi \circ \eta$ 。现在，我们只须证明 $\hat{\cdot}_G \circ [h_A, \cdot](\xi) = \xi_A \circ \hat{\cdot}_F$ 。令 $\eta \in [h_A, F]$ 。一方面， $\hat{\cdot}_G \circ [h_A, \cdot](\xi))(\eta) = \hat{\cdot}_G)([h_A, \cdot](\xi)(\eta)) = \hat{\cdot}_G)(\xi \circ \eta) = (\xi \circ \eta)_A(id_A) = (\xi_A \circ \eta_A)(id_A)$ 另一方面， $(\xi_A \circ \hat{\cdot}_F)(\eta) = (\xi_A \circ \eta_A)(id_A)$ 因此，这个同构对于 $F$ 来说也是个自然同构。综上所述，我们就证明了Yoneda引理

---

> **注**
>
> Yoneda引理的证明实际上是非常繁琐的。原则上，我们可以将这个引理拆成几个小引理来证，可是这样会牺牲命题的一致性，所以我们没有这么做。实际上，这里的证明也并没有任何出人意料的地方，所有的构造都是可以轻易地想到的。因此，我们可以总结称Yoneda引理是不难证的

当然，我们也有反变形式的Yoneda引理
首先，我们可以类似地定义反变Hom函子 $h^A$ 。这是个从C到Set上的反变函子。此时， $A \mapsto h^A$ 却是一个从C到 $[\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ 上的函子

> **PROP**
>
> 令C是一个局部小的范畴。对任意 $A \in \mathbf{C}$ 和 $G \in [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ ，我们有
>
> $$\left[h^A, G\right] \simeq G(A)$$
>
> 这里的同构有两层含义：它不仅对于 $A$ 是一个自然同构，而且对于 $G$ 也是一个自然同构

无需证明，因为该命题和 Yoneda 引理是完全对称的