1A $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$

复数集

1.1 复数集

$a, b \in \mathbf{R}$，有序对 (a, b)称复数，记作 $a + bi$
复数集

$$\mathbf{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbf{R}\}$$

$\mathbf{C}$加法和乘法定义为

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathbf{i}$$

其中 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$
若 $a \in \mathbf{R}$，那么我们将 $a + 0i$ 等同于实数 a，由此 $\mathbf{R}$ 视为$\mathbf{C}$的子集
$0 + bi$ 简写为 bi
$0 + 1i$ 简写为 i

1.2 复数的算术性质

可交换性 $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{C}$，$\alpha + \beta = \beta + \alpha \wedge \alpha\beta = \beta\alpha$
可结合性 $\forall \alpha, \beta, \lambda \in \mathbf{C}$，$(\alpha + \beta) + \lambda = \alpha + (\beta + \lambda) \wedge (\alpha\beta)\lambda = \alpha(\beta\lambda)$
单位元 $\forall \lambda \in \mathbf{C}$，$\lambda + 0 = \lambda \wedge \lambda 1 = \lambda$
加法逆元 $\forall \alpha \in \mathbf{C}$，$\exists! \beta \in \mathbf{C}\ \alpha + \beta = 0$
乘法逆元 $\forall \alpha \in \mathbf{C}$ 且 $\alpha \neq 0$，$\exists! \beta \in \mathbf{C}\ \alpha\beta = 1$
分配性 $\forall \lambda, \alpha, \beta \in \mathbf{C}$，$\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$

1.3 复数乘法的可交换性证明

$a, b, c, d \in \mathbf{R}$. 由定义

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta\alpha &= (c + d\mathrm{i})(a + b\mathrm{i}) \\ &= (ca - db) + (cb + da)\mathrm{i}\end{aligned}$$

结合实数的可交换性得 $\alpha\beta = \beta\alpha$

1.4 复数的算术运算

$$\begin{aligned}(2 + 3\mathrm{i})(4 + 5\mathrm{i}) &= 2 \cdot (4 + 5\mathrm{i}) + (3\mathrm{i})(4 + 5\mathrm{i}) \\ &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5\mathrm{i} + 3\mathrm{i} \cdot 4 + (3\mathrm{i})(5) \\ &= 8 + 10\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 15 \\ &= -7 + 22\mathrm{i}\end{aligned}$$

1.5 α，减法，$1/\alpha$，除法

$\alpha, \beta \in \mathbf{C}$
$-\alpha$ 表示 α 的加法逆元
$\mathbf{C}$ 上减法定义为

$$\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$$

下设 $\alpha \neq 0$
$1/\alpha$ 表示 α 的乘法逆元
$\mathbf{C}$ 上除法定义为

$$\beta/\alpha = \beta(1/\alpha)$$

1.6 $\mathbf{F}$

全高等代数中$\mathbf{F}$ 代表$\mathbf{R}$ 或$\mathbf{C}$
称 $\mathbf{F}$ 中的元素为标量
对于 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{F}$ 以及正整数 m，定义 α^m 表示 α 自乘 m 次

$$\alpha^m = \underbrace{\alpha \cdots \alpha}_{m\text{个}\alpha}$$

组

1.7 组

$n \in \mathbf{N}$，一长为 n 的组是 n 元有序对（n 元组），记作

$$(z_1, \ldots, z_n)$$

组相等当且仅当长度，顺序，元素均相同
称 $(x_1, x_2, \ldots)$ 无限长，但不是组
将长度0的组看成组

1.8 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$

全体有序实数二元组构成的集合

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$$

全体有序实数三元组构成的集合

$$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

1.9 组 VS 集合

组 (3, 5) 和 (5, 3) 是不相等的，集合 {3, 5} 和 {5, 3} 是相等的
组 (4, 4) 和 (4, 4, 4) 是不相等的（长度不等），集合 {4, 4} 和 {4, 4, 4} 都等于集合 {4}

1.10 本章剩余内容中，n 取某一固定正整数

1.11 $\mathbf{F}^n$，坐标

$\mathbf{F}^n$ 是全体具有 n 个 $\mathbf{F}$ 中元素的组构成的集合
称 x_k 是 $(x_1, \ldots, x_n)$ 的第 k 个坐标

若$\mathbf{F} = \mathbf{R}$ 且 n 等于2或3，那 $\mathbf{F}^n$ 的上述定义就等价于前面 $\mathbf{R}^2$ 和 $\mathbf{R}^3$ 的定义

1.12 $\mathbf{C}^4$

全体由四个复数组成的组所构成的集合

$$\mathbf{C}^4 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) : z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}\}$$

1.13 $\mathbf{F}^n$中的加法

$\mathbf{F}^n$ 中加法定义为

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

接下来用 $\mathbf{F}^n$ 中的 x、y 即 $(x_1, \ldots, x_n)$ 、$(y_1, \ldots, y_n)$

1.14 $\mathbf{F}^n$中加法的可交换性

$\forall x, y \in \mathbf{F}^n$， $x + y = y + x$

证

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \\ &= (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) \\ &= y + x \end{aligned}$$

其中第2，4个等号成立是 $\mathbf{F}^n$ 中加法定义
第3个等号成立由 $\mathbf{F}$ 中加法的可交换性

1.15 0

$$0 = (0, \ldots, 0)$$

1.16 根据上下文确定使用的是哪种0（组或数，后面还有其他种类）

1.17 $\mathbf{F}^n$中的加法逆元

$x \in \mathbf{F}^n$ 的加法逆元记作$-x \in \mathbf{F}^n$

即$-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$

1.18 $\mathbf{F}^n$中的标量乘法

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$ 与 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{F}^n$ 的标量积

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

1B 向量空间

向量空间

1.19 一般集合的加法与标量乘法

集合 V 上的加法是一函数，将每对 $u,\nu \in V$ 映到 $u+\nu \in V$
集合 V 上的标量乘法是一函数，将每 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F}$，$\nu \in V$ 映到$\lambda\nu \in V$

1.20 向量空间

一$\mathbf{F}$-向量空间是一集合 V，其上的加法和标量乘法满足
可交换性 $\forall u,\nu \in V$， $u+\nu=\nu+u$
可结合性 $\forall u,\nu,w \in V$，$a,b \in \mathbf{F}$， $(u+\nu)+w=u+(\nu+w) \wedge (ab)\nu=a(b\nu)$
加法单位元 $\forall \nu \in V$， $\exists 0 \in V\ \nu+0=\nu$
加法逆元 $\forall \nu \in V$， $\exists w \in V\ \nu+w=0$
乘法恒等元 $\forall \nu \in V$， $1\nu=\nu$
分配性 $\forall u,\nu \in V$，$a,b \in \mathbf{F}$， $a(u+\nu)=au+a\nu \wedge (a+b)\nu=a\nu+b\nu$

1.21 向量

向量空间的元素称向量

向量空间上的标量乘法依赖于$\mathbf{F}$的选取
不能仅说 V 是向量空间，要说 V 是 $\mathbf{F}$-向量空间
如 $\mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}$-向量空间， $\mathbf{C}^n$ 是$\mathbf{C}$-向量空间

1.22 实向量空间，复向量空间

$\mathbf{R}$-向量空间称实向量空间
$\mathbf{C}$-向量空间称复向量空间

$\mathbf{F}^\infty$

$\mathbf{F}^\infty$ 定义为全体由 $\mathbf{F}$ 中元素组成的序列所构成的集合
$\mathbf{F}^\infty$ 上的加法和标量乘法定义为

$$(x_1,x_2,\ldots)+(y_1,y_2,\ldots)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots)$$

$$\lambda(x_1,x_2,\ldots)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots)$$

1.23 定理

$\mathbf{F}^\infty$ 是 $\mathbf{F}$-向量空间

1.24 $\mathbf{F}^S$

S 是集合，$\mathbf{F}^S=\{f:f:S\to\mathbf{F}\}$
$f,g \in \mathbf{F}^S$， 和 $f+g \in \mathbf{F}^S$ 定义为

$$\forall x \in S \quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{F} \wedge f \in \mathbf{F}^S$， 标量积 $\boldsymbol{\lambda f} \in \mathbf{F}^S$ 定义为

$$\forall x \in S \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

1.25 $\mathbf{F}^S$ 是向量空间

若 S是非空集， $\mathbf{F}^S$ （带有定义如上的加法和标量乘法）是 $\mathbf{F}$ 上的向量空间

$\mathbf{F}^S$ 的加法单位元定义为

$$\forall x \in S \quad 0(x) = 0$$

$f \in \mathbf{F}^S$的加法逆元$-f : S \to \mathbf{F}$定义为

$$\forall x \in S \quad (-f)x = -f(x)$$

向量空间 $\mathbf{F}^n$ 是向量空间 $\mathbf{F}^S$ 的一个特例，因为每个 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{F}^n$ 都可被视作一从集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 到 $\mathbf{F}$ 的函数 x
换句话说可将 $\mathbf{F}^n$ 看成 $\mathbf{F}^{\{1,2,\ldots,n\}}$
类似可将 $\mathbf{F}^\infty$ 看成 $\mathbf{F}^{\{1,2,\ldots\}}$

1.26 加法单位元唯一

向量空间加法单位元唯一

证

设 0 和 $0'$ 是同一个向量空间 V 的加法单位元

$$0' = 0' + 0 = 0 + 0' = 0$$

其中第1个等号因0是加法单位元，第2个等号因可交换性，第3个等号因$0'$是加法单位元

1.27 加法逆元唯一

向量空间里每个元素加法逆元唯一

证

设 w 和 w' 都是$\nu \in V$的加法逆元

$$w = w + 0 = w + (\nu + w') = (w + \nu) + w' = 0 + w' = w'$$

1.28 -υ，减法

$\nu, w \in V$， $-\nu$ 表示 ν 的加法逆元
$w - \nu$ 定义为 $w + (-\nu)$

1.29 本书的剩余部分中， V 表示$\mathbf{F}$上的向量空间

1.30 向量与数0相乘

$\forall \nu \in V$， $0\nu = 0$

涉及 V 的加法和标量乘法，向量空间的定义中只有分配性将加法和标量乘法关联起来，因此证明中必须使用分配性

证

$$0\nu = (0+0)\nu = 0\nu + 0\nu$$

两边加 $-(0\nu)$得 $0 = 0\nu$

1.31 数与向量0 相乘

$\forall a \in \mathbf{F}$， $a0 = 0$

证

$$a0 = a(0+0) = a0 + a0$$

两边加 $-(a0)$得 $0 = a0$

1.32 向量与数 1 相乘

$\forall \nu \in V$， $(-1)\nu = -\nu$

证

$$\nu + (-1)\nu = 1\nu + (-1)\nu = (1+(-1))\nu = 0\nu = 0$$

1C 子空间

子空间

1.33 子空间（线性子空间）

称V的子集U为V的子空间若其

- 与V加法单位元、加法和标量乘法相同
- 是向量空间

1.34 子空间的条件

U 是 V 的子空间 $\Longleftrightarrow$

- （加法单位元） $0 \in U$
- （对加法封闭） $u, w \in U \Rightarrow u + w \in U$

- （对标量乘法封闭） $a \in \mathbf{F}, u \in U \Rightarrow au \in U$

证

$\Rightarrow$) 设U 是 V 的子空间，由向量空间定义，U 满足上述三个条件
$\Leftarrow$) 设U满足上述三个条件
由第1个条件 V 的加法单位元在 U 中
第2，3个条件保证了V上的加法，标量乘法在U上良定义（封闭，有意义）
若$u \in U$，由第3个条件$-u$（由1.32 其等于 $(-1)u$）也在 U 中，故 U 中的每个元素均有 U 中的加法逆
其余部分（如可结合性和可交换性）（在更大的空间 V 中成立，故自然）在 U 中成立
故U是向量空间，进而是V的子空间

注

第1个条件可用 U 非空代替（因为取 $u \in U$ 并将其乘0意味着 $0 \in U$，这得出一个方向，而线性空间非空，否则不存在加法逆（因为逆元要用单位元定义））（若确实是子空间，通常证U非空的最快方法就是证$0 \in U$）

1.35 子空间

(a) $b \in \mathbf{F} \iff b = 0$ 时$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\}$是 $\mathbf{F}^4$ 的子空间
(b) [0, 1]上的全体连续实值函数集是 $\mathbf{R}^{[0,1]}$ 的子空间
(c) $\mathbf{R}$ 上的全体可微实值函数集是 $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ 的子空间
(d) [0, 3]上使得 $f'(2) = b$ 的全体可微实值函数集是$\mathbf{R}^{[0,3]}$ 的子空间 $\iff b = 0$
(e) 极限为0的复数列集是 $\mathbf{C}^{\infty}$ 的子空间
(f) $\{0\}$ 是 V 的最小子空间， V 是 V 最大子空间，$\emptyset$不是 V 的子空间因向量空间必须有加法单位元（否则无法定义加法逆元）

$\mathbf{R}$ 所有子空间： $\{0\}$， $\mathbf{R}$
$\mathbf{R}^2$ 所有子空间： $\{0\}$， $\mathbf{R}^2$ 中过原点的直线， $\mathbf{R}^2$
$\mathbf{R}^3$ 所有子空间： $\{0\}$， $\mathbf{R}^3$ 中过原点的直线， $\mathbf{R}^3$ 中过原点的平面， $\mathbf{R}^3$
证这些是子空间很容易，难的是证仅有这些子空间。下章引进更多工具后会容易些。

子空间的和

子空间的并往往不是子空间，故通常讨论和而非并

1.36 子空间的和

V的子空间$V_1, \ldots, V_m$的和

$$V_1 + \cdots + V_m = \{\nu_1 + \cdots + \nu_m : \nu_1 \in V_1, \ldots, \nu_m \in V_m\}$$

1.37 $\mathbf{F}^3$ 的子空间之和

$U = \{(x, 0, 0) \in \mathbf{F}^3 : x \in \mathbf{F}\}$
$W = \{(0, y, 0) \in \mathbf{F}^3 : y \in \mathbf{F}\}$
可验证$U + W = \{(x, y, 0) \in \mathbf{F}^3 : x, y \in \mathbf{F}\}$是子空间

1.38 $\mathbf{F}^4$ 的子空间之和

设
$U = \{(x, x, y, y) \in \mathbf{F}^4 : x, y \in \mathbf{F}\}$

$W=\{(x,x,x,y)\in\mathbf{F}^4: x,y\in\mathbf{F}\}$
为求 $U+W$ ，考虑 U 中的一个元素 (a,a,b,b) 和 W 中的一个元素 (c,c,c,d) ，其中 $a,b,c,d\in\mathbf{F}$，有

$$(a,a,b,b)+(c,c,c,d)=(a+c,a+c,b+c,b+d)$$

这表明 $U+W$ 中每个元素的前两个坐标都相等，因此

$$U+W\subseteq\{(x,x,y,z)\in\mathbf{F}^4: x,y,z\in\mathbf{F}\} \tag{1.39}$$

猜测这两个集合不仅包含，还相等。
为证反方向包含，设 $x,y,z\in\mathbf{F}$ ，则

$$(x,x,y,z)=(x,x,y,y)+(0,0,0,z-y)$$

（第一个向量在 U 中，第二个向量在 W 中）故$(x,x,y,z)\in U+W$
故

$$U+W=\{(x,x,y,z)\in\mathbf{F}^4: x,y,z\in\mathbf{F}\}$$

接下来的结果表明子空间的和还是子空间，也是包含了其中所有求和项的最小子空间（即任一子空间若包含所有求和项，也就包含这些求和项之和）

1.40 子空间的和是包含这些子空间的最小子空间

设 $V_1,\dots,V_m$ 是 V 的子空间，则 $V_1+\cdots+V_m$ 是最小的包含 $V_1,\dots,V_m$ 的子空间

证

$V_1+\cdots+V_m$

- $0\in$
- 对于加法和标量乘法封闭
  由1.34子空间得证
  $\supseteq$)
  由其余取0的特殊情况
  $\subseteq$)
  由子空间必须包含其中有限个元素的和
  最小得证

直和

$V_1,\dots,V_m$ 是 V 的子空间
$V_1+\cdots+V_m$ 的元素都可以写成$v_1+\cdots+v_m$， $v_k\in V_k$
讨论每个元素可否唯一表示成此形式

1.41 直和

$V_1,\dots,V_m$ 是 V 的子空间，若$V_1+\cdots+V_m$ 中的每个元素都能用 $v_1+\cdots+v_m$ （ $v_k\in V_k$ ）唯一表出，则称 $V_1+\cdots+V_m$ 为直和，此时用 $V_1\oplus\cdots\oplus V_m$ 表示 $V_1+\cdots+V_m$

1.42 直和

$U=\{(x,y,0)\in\mathbf{F}^3: x,y\in\mathbf{F}\}$
$W=\{(0,0,z)\in\mathbf{F}^3: z\in\mathbf{F}\}$
是$\mathbf{F}^3$的子空间
则 $\mathbf{F}^3=U\oplus W$

1.43 直和

设V_k 是 F^n 中除第 k 个坐标外，其余坐标均为 0 的所有向量构成的子空间
（如 $V_2=\{(0,x,0,\ldots,0)\in\mathbf{F}^n : x\in\mathbf{F}\}$）
则 $\mathbf{F}^n=V_1\oplus\cdots\oplus V_n$

1.44 不是直和的和

$V_1=\{(x,y,0)\in\mathbf{F}^3 : x,y\in\mathbf{F}\}$
$V_2=\{(0,0,z)\in\mathbf{F}^3 : z\in\mathbf{F}\}$
$V_3=\{(0,y,y)\in\mathbf{F}^3 : y\in\mathbf{F}\}$
则 $\mathbf{F}^3=V_1+V_2+V_3$，因为每个向量 $(x,y,z)\in\mathbf{F}^3$ 都可以写成

$$(x,y,z)=(x,y,0)+(0,0,z)+(0,0,0)$$

(右式的第一个向量在 V_1 中，第二个向量在 V_2 中，第三个向量在 V_3 中)
然而$\mathbf{F}^3$ 不等于 V_1,V_2,V_3 的直和，因为将$(0,0,0)$ 写成 $\nu_1+\nu_2+\nu_3$ （$\nu_k\in V_k$ ）方法不止一种：

$$(0,0,0)=(0,1,0)+(0,0,1)+(0,-1,-1)$$
$$(0,0,0)=(0,0,0)+(0,0,0)+(0,0,0)$$

(右式的第一个向量在 V_1 中，第二个向量在 V_2 中，第三个向量在 V_3 中)
故$V_1+V_2+V_3$ 不是直和

1.45 直和的条件

$V_1,\ldots,V_m$ 是 V 的子空间
$V_1+\cdots+V_m$ 是直和 $\iff\quad(0=\nu_1+\cdots+\nu_m\,(\nu_k\in V_k)\iff\nu_k=0)$

证（? ）

$\Rightarrow)$
设LHS，由定义得RHS
$\Leftarrow)$
设RHS，令 $\nu\in V_1+\cdots+V_m$，由定义$\exists\nu_1\in V_1,\ldots,\nu_m\in V_m$，$\nu=\nu_1+\cdots+\nu_m$
若另有$u_1\in V_1,\ldots,u_m\in V_m$，$\nu=u_1+\cdots+u_m$，作差

$$0=(\nu_1-u_1)+\cdots+(\nu_m-u_m)$$

因为 $\nu_1-u_1\in V_1,\ldots,\nu_m-u_m\in V_m$
故每个 ν_k-u_k 都等于0
进而 $\nu_1=u_1,\ldots,\nu_m=u_m$，唯一性得证，故LHS

接下来的结果给出了检验直和的一简单条件

1.46 两个子空间的直和

U 和W 是 V 的子空间
$U+W$ 是直和 $\iff$ $U\cap W=\{0\}$

证

$\Rightarrow)$
设$U+W$ 是直和，若$\nu\in U\cap W$，则$0=\nu+(-\nu)$ （其中 $\nu\in U$ 且 $-\nu\in W$ ）因为0要被U中向量与W中向量的和唯一表示，所以我们得到 $\nu=0$

由此 $U \cap W = \{0\}$
$\Leftarrow$)
设 $U \cap W = \{0\}$，设 $u \in U, w \in W$ 且$0 = u + w$，则$u = -w \in W$
故$u \in U \cap W$，故$u = 0$，故$w = -u = 0$，由1.45得直和

上面的结果只适用于两个子空间的情况。
当考虑有两个以上子空间的直和的问题时，仅检验交为$\{0\}$是不够的
反例见1.44： $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3 = \{0\}$
子空间的和类似于子集的并集，子空间的直和类似于子集的无交并。向量空间的两个子空间不可能不相交（都含0）。所以“不相交”换成“交为 $\{0\}$”