第1节 范畴

1-1 对象和类

数学中常遇到一些数学对象以及它们之间的一些映射。这些映射会满足一些基础的性质，例如可定义良好的复合运算，存在恒等映射等等
第一个例子是集合与映射。由朴素集合论，所有集合的集合不是集合。但是我们可以定义所有集合构成的类

类(class)

类(class) 定义为满足某个属性的数学对象的全体
设 $\mathbf{C}$ 为一个类，如果 a 在 $\mathbf{C}$ 中，记作 $a \in \mathbf{C}$

类的公理系统一般考虑NBG公理，全称是冯·诺依曼-伯奈斯-哥德尔公理系统（Von Neumann–Bernays–Gödel set theory），囊括了ZFC, 但增加了真类（不是集合的类称 **真类**（英语：proper class））。但因为在范畴论在实践当中, 层级结构很容易被超越，所以更好的办法是不采取真类的概念，而使用另一种集合论，叫作TG集合论，全称是Tarski-Grothendieck公理，简单来说多了一条Grothendieck宇宙公理，因为Grothendieck宇宙存在性等价于强不可达基数的存在性（证明在SGA的其中一卷, 是法语的），所以可以理解为 ZFC + 存在强不可达基数(Strongly Inaccessible Cardinal)

ZFC中规定：不能把类当作元素，即不能说一个类属于另一个类。类只是语法缩写

$\mathbf{Set}$

$\mathbf{Set}$：由所有集合构成的类
A 是一个集合记作 $A \in \mathbf{Set}$

$\mathbf{Set}(A, B)$

$\forall A, B \in \mathbf{Set}, \mathbf{Set}(A, B)$ （也可写作 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$） 表示由所有从 A 到 B 的映射构成的集合

$\mathbf{Set}(A, B)$良定义

$\mathbf{Set}(A, B)$是一个集合

集合论证过

我们有映射的复合运算。实际上，对于任意的 $A, B, C \in \mathbf{Set}$ ，我们都有良定义的复合运算将任意的 $g \in \mathbf{Set}(B, C)$ 和 $f \in \mathbf{Set}(A, B)$ 映射到确定的复合运算 $g \circ f \in \mathbf{Set}(A, C)$

$\circ_{Set}$(简写$\circ$)

$$\forall A, B, C \in \mathbf{Set}, \ \circ : \mathbf{Set}(B, C) \times \mathbf{Set}(A, B) \to \mathbf{Set}(A, C)$$

性质

- （结合律）$\forall h \in \mathbf{Set}(C, D), \forall g \in \mathbf{Set}(B, C), \forall f \in \mathbf{Set}(A, B), \forall h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

- （单位元：恒等映射）$\forall A$，$\exists id_A \in \mathbf{Set}(A,A)$，$\forall B \in \mathbf{Set}$,
  (a) $\forall f \in \mathbf{Set}(A,B), f \circ id_A = f$
  (b) $\forall g \in \mathbf{Set}(B,A), id_A \circ g = g$

第二个例子是群。

$\mathbf{Grp}$

$\mathbf{Grp}$ 是由所有的群构成的类

$\mathbf{Grp}(A,B)$

$\forall A,B \in \mathbf{Grp}, \mathbf{Grp}(A,B)$表示所有从 A 到 B 的群同态所构成的集合

$\circ_{Grp}$(简写$\circ$)

$\forall g \in \mathbf{Grp}(B,C), \forall f \in \mathbf{Grp}(A,B), g \circ f$ 定义为映射的复合运算。

$\circ_{Grp}$良定义

$\circ$运算后还是群同态

群论证过群同态的复合还是群同态

我们显然有结合律，这是因为映射的复合运算有结合律。
此外注意到恒等映射是群同态，所以 $id_A \in \mathbf{Grp}(A,A)$ ，满足单位态射应该有的性质

第三个例子是拓扑空间

$\mathbf{Top}$

$\mathbf{Top}$ 是由所有的拓扑空间构成的类

$\mathbf{Top}(A,B)$

$\forall A,B \in \mathbf{Top}, \mathbf{Top}(A,B)$ 表示所有从 A 到 B 的连续映射构成的集合。

$\circ_{Top}$(简写$\circ$)

$\forall g \in \mathbf{Top}(B,C), \forall f \in \mathbf{Top}(A,B), g \circ f$定义为映射的复合运算

> $\circ_{Top}$良定义
>
> $\circ$运算后还是连续映射

拓扑证过连续映射的复合还是连续映射

我们显然有结合律，这是因为映射的复合运算有结合律。
此外注意到恒等映射是连续映射，所以 $id_A \in \mathbf{Top}(A,A)$ ，满足单位态射应该有的性质。

事实上这三个例子分别代表了三个范畴。范畴在数学中非常的普遍，是对于抽象结构的进一步抽象。

1-2 范畴

> **范畴**
>
> 称 $\mathbf{C} = (\mathrm{ob}(\mathbf{C}), \hom(\mathbf{C}))$ 是一个范畴若满足
>
> 1. （对象） $\mathrm{ob}(\mathbf{C})$ 是一个类（称$\mathbf{C}$中的对象）
> 2. （态射）对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ ，我们都定义了 $\mathbf{C}(A,B) \subseteq \hom(\mathbf{C})$（$\mathbf{C}(A,B)$ 中的元素称为从 A 到 B 的态射）
> 3. （复合运算）对于任意的 $g \in \mathbf{C}(B,C)$ 和 $f \in \mathbf{C}(A,B)$ ，我们都定义了它们的复合态射 $g \circ f \in \mathbf{C}(A,C)$
> 4. （结合律）对于任意的 $h \in \mathbf{C}(C,D), g \in \mathbf{C}(B,C), f \in \mathbf{C}(A,B)$ ，我们有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
> 5. （单位态射）对于任意的 A ，存在 $id_A \in \mathbf{C}(A,A)$ ，
>   (a).对任意 $B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A,B)$ ，我们都有 $f \circ id_A = f$
>   (b）对任意 $g \in \mathbf{C}(B,A)$ ，我们都有 $id_A \circ g = g$
>   在不引起歧义的情况下，我们可以用全体对象的类 $\mathrm{ob}(\mathbf{C})$ 来表示整个范畴 $\mathbf{C}$

态射的原型就是集合之间的映射，因为一个集合其实就是一个没有任何特殊结构的数学结构，所以映射可以看成保持集合的结构的同态(但因为集合啥结构有没有，所以映射啥也没保持)

显然，前一节中的铺垫告诉我们 $\mathbf{Set}$、$\mathbf{Grp}$、$\mathbf{Top}$ 是三个范畴

> 命题
>
> 1. 所有的集合和它们之间的映射构成了集合范畴 $\mathbf{Set}$
> 2. 所有的群和它们之间的群同态构成了群范畴 $\mathbf{Grp}$
> 3. 所有的拓扑空间和它们之间的连续映射构成了拓扑空间范畴 $\mathbf{Top}$
> 4. 所有的微分流形和它们之间的光滑映射构成了微分流形范畴
> 5. 所有的环和它们之间的环同态构成了环范畴

如何去理解范畴呢？我们可以认为，我们研究范畴，就是研究一些对象和一些满足性质的箭头。这些对象未必是集合，这些箭头也未必是映射。正如其他公理定义一样，只要满足这些条件，就会构成一个范畴

我们下一节中会看到，在范畴之间也有一个合适的箭头，它们被称为函子。如果我们把范畴看成对象，把函子看成是态射，那么所有的范畴也会构成一个类似于范畴的结构，但是这个结构不再是范畴

再举一些例子

> 命题

给定一个域 k ，则所有 k 上的向量空间和它们之间的线性映射，构成了 k 上的向量空间范畴，记作 $\mathbf{Vect}_k$

向量空间之间线性映射的复合运算是良定义的、结合的，且存在单位态射（恒等映射）

也有一些比较好玩的范畴，比如偏序集 $(P,\leq)$ 中的元素作为对象，元素间的关系 $\leq$ 作为态射，这样也能构成一个范畴，只不过这个范畴中的态射非常少，两个对象间最多只有一个态射
正如双射、群同构、同胚映射的定义，我们可以在任意一个范畴中给出同构的定义。

范畴中对象的同构

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，我们称 $A,B\in\mathbf{C}$ 是同构的（两个对象）当且仅当存在两个态射 $f\in\mathbf{C}(A,B)$ $g\in\mathbf{C}(B,A)$ 使得 $f\circ g=id_B$ 且 $g\circ f=id_A$ 。此时，我们记 $g=f^{-1}$ ，称为 f 的一个逆态射，而 f 被称为 A 与 B 的一个同构

引理

1. 在集合范畴中，两个集合是同构的当且仅当存在一个它们之间的双射。换言之，当且仅当它们是等势的
2. 在群范畴中，两个群是同构的当且仅当存在一个它们之间的群同构
3. 在拓扑空间范畴中，两个拓扑空间是同构的当且仅当存在一个它们之间的同胚映射

命题 逆态射的唯一性

对于任意的 $f\in\mathbf{C}(A,B)$ ， f^{-1} 若存在则唯一

设 g,h 都是 $f\in\mathbf{C}(A,B)$ 的逆态射，则

$$g=g\circ id_B=g\circ(f\circ h)=(g\circ f)\circ h=id_A\circ h=h$$

此即得证

注

这里的证明和幺半群的逆元若存在则唯一的证明是完全一样的

引理

令$\mathbf{C}$是一个范畴，则同构关系是一个等价关系

令$A,B,C\in\mathbf{C}$是三个对象

1. （自反性） id_A 的逆还是 id_A ，所以它是一个 A 上的自同构
2. （对称性）若 $f\in\mathbf{C}(A,B)$ 是个从 A 到 B 的同构，则显然 $f^{-1}\in\mathbf{C}(B,A)$ 是个从 B 到 A 的同构。
3. （传递性）若 $g\in\mathbf{C}(B,C)$ 和 $f\in\mathbf{C}(A,B)$ 是两个同构，则显然 $g\circ f\in\mathbf{C}(A,C)$ 是个从 A 到 C 的同构。综上所述，我们就证明了同构关系是一个等价关系。事实上，只有一个集合作为对象的范畴和幺半群是一样的

> 引理
>
> 只有一个对象且全部态射构成一个集合的范畴和幺半群是一一对应的

我们将这个对象到自身的全部态射看作一个集合，将元素的乘法定义为这些态射的复合。我们的结合律和单位元的条件恰好满足了幺半群的性质。此即得证

> 引理
>
> 只有一个对象、全部态射构成一个集合且每个态射都是同构的范畴和群是一一对应的

类似地，我们将这个对象上全部的态射（同构）看作一个集合，将元素的乘法定义为这些态射的复合。结合律和单位元依然成立。根据假设，每一个态射都是同构，所以每一个元素都有可逆元。此即得证

第2节 函子

2-1 函子

关于函子的讨论起源于代数拓扑，因为在代数拓扑中才出现了第一个真正意义上非平凡的函子。我们先举一个代数拓扑中的例子（此处不需要会代数拓扑，我们只看函子满足的性质）

考虑带基点的拓扑空间范畴 $\mathbf{Top}_\bullet$
这个范畴中的对象是 (X, x_0)，其中 X 是一个拓扑空间，x_0 是 X 上的一个基点。从 (X, x_0) 到 (Y, y_0) 上的态射指的是一个连续映射 $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$，使得 $f(x_0) = y_0$。不难检验这的确是个范畴
对于每一个 $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_\bullet$，我们可以定义出基本群 $\pi_1(X, x_0)$（怎么定义不知道不影响，继续看）
此外，对任意 $f \in \mathbf{Top}_\bullet((X, x_0), (Y, y_0))$ 我们可以定义由 f 引出的（基本群之间的）群同态 $\pi_1(f) = f_* \in \mathbf{Grp}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0))$

假设 $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$，$g \in \mathbf{Top}_\bullet((Y, y_0), (Z, z_0))$，$f \in \mathbf{Top}_\bullet((X, x_0), (Y, y_0))$，$\pi_1$ 满足：

1. （基本群之间的群同态把恒等连续映射映到恒等群同态）$\pi_1(id_{(X, x_0)}) = id_{\pi_1(X, x_0)}$
2. （基本群之间的群同态把复合运算映到复合运算）$\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$

换言之，π_1 把每一个带有基点的拓扑空间映到了一个群（基本群），并把每一个保留基点的连续映射映到对应群（基本群）的一个群同态

π_1 是一个从范畴到范畴的变换，我们称满足上面性质的范畴间的变换为一个函子。π_1 便是一个从带有基点的拓扑空间范畴到群范畴的一个函子

函子的性质也是非常好的。代数拓扑实际上就是研究从一个和拓扑相关的范畴到一个和代数相关的范畴上函子的一个学科

> **函子(functor)**
>
> 令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，我们称 F 是一个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的 **函子(functor)** 当且仅当
>
> 1. （函子把对象映到对象）$\forall A \in \mathbf{C}$，我们定义了 $F(A) \in \mathbf{D}$
> 2. （函子把态射映到态射）$\forall A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们定义了 $F(f) \in \mathbf{D}(F(A), F(B))$
> 3. （函子把单位态射映到单位态射）$\forall A \in \mathbf{C}$，我们有 $F(id_A) = id_{F(A)}$
> 4. （函子把复合态射映到复合态射）$\forall A, B, C \in \mathbf{C}$，$g \in \mathbf{C}(B, C)$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们有 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

显然，基本群函子是个从带有基点的拓扑空间范畴到群范畴的一个函子。下面，我们再看两个例子。第一个例子是遗忘函子

遗忘函子(forgetful function)

称 G 为 从群范畴 Grp 到集合范畴 Set 的 **遗忘函子(forgetful function)** 若其满足

- 对任意群 $(A,\cdot)$ ，定义 $G((A,\cdot))$ 为集合 A
- 对任意群同态 $f \in \mathbf{Grp}(G,G')$ ， $G(f)$ 为这个映射 f

换言之， 遗忘函子把群映到集合，把群同态映到映射，遗忘了群的结构

> 命题
>
> 从群范畴到集合范畴的遗忘函子是个函子

显然这个函子会把恒等群同态映到恒等映射，并且将同态的复合映到映射的复合

接着，我们来看自由函子的例子

自由函子

称 F 为从集合范畴 $\mathbf{Set}$ 到群范畴 $\mathbf{Grp}$ 的自由函子若满足

- 对任意集合 S，定义 $F(S)$ 为由 S 生成的自由群
- 对任意映射 $f \in \mathbf{Set}(S,T)$，我们定义 $F(f)$ 把 S 中的每个单词按 f 的规则映射为 T 中的一个单词

> 命题
>
> 从集合范畴到群范畴的自由函子是个函子

A 上的恒等映射保持 A 上的每个元素，因此 F 把恒等映射映到恒等群同态。若 $g \in \mathbf{Set}(B,C)$ $f \in \mathbf{Set}(A,B)$ 则 $F(g \circ f)$ 和 $F(g) \circ F(f)$ 都将 A 上的单词逐个先替换为 B 上的单词，再替换为 C 上的单词

未来我们会知道，自由函子是遗忘函子的左伴随函子

> 引理 群作用的等价定义
>
> 令 G 是一个群，我们可以将 G 视作一个只有一个对象的范畴。 G 在一个集合上的一个群作用等价于一个从 G 到Set的函子

F 是一个从 G 到Set的函子当且仅当

1. 我们指定 $F(G)$ 是某一个集合，称为集合 S
2. 范畴 G 的每一个态射，即群 G 的每一个元素，都要被映到一个从 S 到 S 上的映射
3. F 将范畴 G 的单位态射，即群 G 的恒等元，映到 S 上的恒等映射
4. 对任意 $a,b \in G$ ，我们有 $F(ab) = F(a) \circ F(b)$ 。换言之，进一步地，对任意 $x \in S$ ，我们有 $(ab)(s) = a(b(s))$ 显然，这和群作用的定义是等价的

我们再证明两个小结论

> **引理 函子保持同构**
>
> 若 F 是一个从C到 $\mathbf{D}$ 的函子，则 F 把C中的同构映射到 $\mathbf{D}$ 中的同构

设 $A, B \in \mathbf{C}$ ，且 f 是一个从 A 到 B 的同构。我们只须证明 $F(f)$ 是一个从 $F(A)$ 到 $F(B)$ 的同构
注意到 $f^{-1} \circ f = id_A$ ，且 $f \circ f^{-1} = id_B$ 。因此， $F\left(f^{-1}\right) \circ F(f) = F\left(id_A\right) = id_{F(A)}$ ，且 $F(f) \circ F\left(f^{-1}\right) = F(id_B) = id_{F(B)}$ 。根据同构的定义， $F(f)$ 是一个从 $F(A)$ 到 $F(B)$ 的同构

举个例子，若 $f: X \to Y$ 是个同胚，且 $f(x_0) = y_0$ ，则 X 在 x_0 点的基本群和 Y 在 y_0 的基本群同构。事实上，未来我们会知道，只要这两个空间同伦等价，它们的基本群就会同构

还可以定义函子的复合运算

> **函子的复合**
>
> 若 G 是个从 $\mathbf{D}$ 到 $\mathbf{E}$ 的函子，且 F 是个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子。对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$ ，我们定义1. $(G \circ F)(A) = G(F(A))$ 2. $(G \circ F)(f) = G(F(f))$

> **引理**
>
> 若 G 是个从 $\mathbf{D}$ 到 $\mathbf{E}$ 的函子，且 F 是个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子，则 $G \circ F$ 是个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{E}$ 的函子

令 $A, B, C \in \mathbf{C}$ ， $g \in \mathbf{C}(B, C)$ ， $f \in \mathbf{C}(A, B)$

1. $(G \circ F)(id_A) = G(id_{F(A)}) = id_{G(F(A))} id_{(G \circ F)(A)}$
2. $(G \circ F)(g \circ f) = G(F(g \circ f)) = G(F(g) \circ F(f))$
   $= G(F(g)) \circ G(F(f)) = (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f) \circ G(F(g))$

显然，这就告诉我们 $G \circ F$ 是个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{E}$ 的函子

有时，我们会遇到反变函子。它和函子的唯一区别在最后一条，即 $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ 。实际上，比起这种定义方法，我们采用另一种方法
我们先定义对象完全相同，但是态射方向全部相反的范畴，称为对偶范畴

> **对偶范畴**
>
> 令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，则 $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 的对象是 $\mathbf{C}$ 中的对象，态射方向与 $\mathbf{C}$ 中的方向相反。我们称 $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 为 $\mathbf{C}$ 的对偶范畴

> **命题**
>
> $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 是一个范畴

不难证明

反变函子

令 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是两个范畴，则 F 是一个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的反变函子当且仅当它是一个从 $\mathbf{C}^{\text{op}}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子

第3节 自然变换

第3节 自然变换

如果说函子是从一个范畴到另一个范畴的“映射”，那么自然变换就是从一个函子到另一个函子的“映射”。当然，它们都需要满足一些额外的条件

自然变换

令 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是两个范畴， F,G 都是从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子，则 η 被称为一个从 F 到 G 的自然变换，当且仅当

- 对任意 $A\in\mathbf{C}$ ，我们都定义了 $\eta(A)\in\mathbf{D}(F(A),G(A))$
- 对任意 $A,B\in\mathbf{C}$ 和 $f\in\mathbf{C}(A,B)$ ，我们有 $\eta(B)\circ F(f)=G(f)\circ\eta(A)$ 0

我们来看一个例子。先给出几个定义

交换环范畴

令 $\mathbf{C}$ Ring表示交换环范畴。 $\mathbf{C}$ Ring中的对象是交换环，态射是交换环之间的环同态。

命题

$\mathbf{C}$ Ring 是范畴

显然单位态射是恒等环同态，环同态的复合还是环同态

从CRing到Grp的函子 GL_n

给定 $n\in\mathbb{N}_1$ ，我们下面定义从CRing到Grp的函子 GL_n 。对任意交换环 R ，我们定义 $GL_n(R)$ 为 R 上全体 n 阶可逆 $n*n$ 矩阵在乘法下构成的群。对任意交换环的同态 $f:R\to R'$ $GL_n(f)$ 将 $GL_n(R)$ 中的每一个 R 中元素都按 f 的规则替换为 R' 中的元素。

命题

$GL_n(f)$ 是良定义的

需要证明 $GL_n(f)$ 是良定义的，即对任意 $A\in GL_n(R)$ ， $GL_n(f)(A)\in GL_n(R')$ 。我们只须注意到det是关于矩阵各项的一个多项式，且环同态保持乘法和加法，就得知了 $\det(GL_n(f)(A))=f(\det(A))$ ，其中 $\det(A)$ 是 R 中的一个单位，因此 $f(\det(A))$ 是 R' 中的一个单位。这就证明了 $GL_n(f)$ 是良定义的

> 命题
>
> 给定 $n \in \mathbb{N}$，则 GL_n 是一个从CRing到Grp的函子

令 n 是一个正整数。令 $A, B, C \in \mathbf{CRing}$， $g \in \mathbf{CRing}(B, C)$， $f \in \mathbf{CRing}(A, B)$ 0

1. $GL_n(id_A) \in \mathbf{Grp}(GL_n(A), GL_n(A))$ 保持了每一个 A 上的 $n * n$ 可逆矩阵不变，因此是恒等群同态，即 $GL_n(id_A) = id_{GL_n(A)}$ 0
2. $GL_n(g \circ f)$ 将每一个 A 上的 $n * n$ 可逆矩阵中的每一项先根据 f 的规则替换为 B 的元素，再根据 g 的规则替换为 C 中的元素，即 $GL_n(g \circ f) = GL_n(g) \circ GL_n(f)$ 0

> $*()$
>
> 下面我们定义从CRing到Grp的另一个函子 * 。对任意交换环 $(R, +, \cdot)$ ，我们定义 $*(R) = R^\times$ 为所有单位所构成的乘法群。对任意环同态 $f : R \to R'$ ，我们将 $*(f) : R^\times \to (R')^\times$ 定义为 $f|_{R^\times}$ 0

需要证明 $*()$ 是良定义的，即对任意 R 的单位（乘法可逆元素） a ， $f(a)$ 是 S 的单位。根据去半群的理论，这是显然的

> 命题
>
> $*()$ 是个从CRing到Grp的函子。

令 $A, B, C \in \mathbf{CRing}$， $g \in \mathbf{CRing}(B, C)$， $f \in \mathbf{CRing}(A, B)$ 0

1. $*(id_A) = (id_A)|_{A^\times} = id_{A^\times}$
2. $*(g \circ f) = (g \circ f)|_{A\times} = g \circ f|_{A\times} = g|_{B^\times} \circ f|_{A^\times} = *(g) \circ *(f) \circ f|_{A^\times}$

> $*det_R$
>
> 给定 $n \in \mathbb{N}$ 和 $R \in \mathbf{CRing}$，我们按上的方式定义 $\det_R : GL_n(R) \to R^\times$ 0

> 注
>
> 所谓 $\mathbb{R}$ 上的方式，可以有多重等价的定义方式，最简单的方式可能是用余子式来递归地定义。注意，和 $\mathbb{R}$ 上一样，det是个从 $GL_n(R)$ 到 $R^\times$ 的群同态

> 命题

给定 $n \in \mathbb{N}$ ，则 $\det$ 是一个从 GL_n 到 * 上的自然变换

令 $R, R' \in \mathbf{CRing}$ ， $f \in \mathbf{CRing}(R, R')$ ，我们只须证明 $\det_{R'} \circ GL_n(f) = *(f) \circ \det(R)$ 0
令 $A \in GL_n(R)$ 。注意到 $(\det_{R'} \circ GL_n(f))(A) = \det_{R'}(GL_n(f)(A)) = f(\det_R(A)) = (*(f))(\det_R(A)) = (*(f) \circ \det_R(A))$ $\det_R(A)$ 0
这就证明了det是一个从 GL_n 到 * 上的自然变换

下面证自然变换的一些性质。为了方便，我们将定义融合在命题中

> **命题 自然变换的第一种复合**
>
> 若C,D是两个范畴， F, G, H 是三个从C到 $\mathbf{D}$ 的函子， η 是个从 F 到 G 的自然变换， η' 是个从 G 到 H 的自然变换，则 $\eta' \circ \eta$ 是个从 F 到 H 的自然变换。其中，对任意 $A \in \mathbf{C}$ ，我们定义 $(\eta' \circ \eta)(A) = \eta'(A) \circ \eta(A) \in \mathbf{D}(F(A), H(A))$ 0

令 $A, B \in \mathbf{C}$ ， $f \in \mathbf{C}(A, B)$ ，我们只须证明 $(\eta' \circ \eta)(B) \circ F(f) = H(f) \circ (\eta' \circ \eta)(A)$ 利用 η 和 η' 的自然性，我们有

$$\begin{aligned}(\eta' \circ \eta)(B) \circ F(f) &= \eta'(B) \circ \eta(F) \circ F(f) \\ &= \eta'(B) \circ G(f) \circ \eta(A) \\ &= H(f) \circ \eta'(A) \circ \eta(A) \\ &= H(f) \circ (\eta' \circ \eta)(A)\end{aligned}$$

这就证明了 $\eta' \circ \eta$ 是个从 F 到 H 的自然变换

> **命题 自然变换的第二种复合**
>
> 若C,D,E是三个范畴， F, F' 是两个从C到 $\mathbf{D}$ 的函子， G, G' 是两个从 $\mathbf{D}$ 到 $\mathbf{E}$ 的函子， η 是个从 F 到 F' 的自然变换， η' 是个从 G 到 G' 的自然变换，则 $\eta' * \eta$ 是个从 $G \circ F$ 到 $G' \circ F'$ 的自然变换。其中。对任意 $A \in \mathbf{C}$ ，我们定义 $(\eta' * \eta)(A) = \eta'_{F'(A)} \circ G(\eta_A)$ 0

令 $A, B \in \mathbf{C}$ ，而 $f \in \mathbf{C}(A, B)$ ，只须证 $(\eta' * \eta)(B) \circ (G \circ F)(f) = (G' \circ F')(f) \circ (\eta' * \eta)(A)$ 。而这是因为

$$\begin{aligned}(\eta' * \eta)(B) \circ (G \circ F)(f) &= \eta'_{F'(B)} \circ G(\eta_B) \circ G(F(f)) \\ &= G'(\eta_B) \circ \eta'_{F'(B)} \circ G(F(f)) \\ &= G'(\eta_B) \circ G'(F(f)) \circ \eta'_{F'(A)} \\ &= G'(\eta_B \circ F(f)) \circ \eta'_{F'(A)} \\ &= G'(F'(f) \circ \eta_A) \circ \eta'_{F'(A)} \\ &= (G' \circ F')(f) \circ G'(\eta_A) \circ \eta'_{F'(A)} \\ &= (G' \circ F')(f) \circ \eta'_{F'(A)} \circ G(\eta_A) \\ &= (G' \circ F')(f) \circ (\eta'_{F'(A)}) \circ G(\eta_A) \\ &= (G' \circ F')(f) \circ (\eta'_{F'(A)}) \circ G(A)\end{aligned}$$

> **注**
>
> 等价地，我们可以定义 $(\eta' * \eta)(A) = \eta'_{F'(A)} \circ G(\eta_A) = G'(\eta_A) \circ \eta'_{F'(A)} \circ$

事实上，我们可以证明任意两个范畴间的所有函子与函子的自然变换能构成一个范畴

> **范畴** $[C, D]$

令C,D是一个范畴，我们下面定义范畴 $[C,D]$。$[C,D]$ 中的对象指的是从C到D的函子。对于任意 $F,G\in[\mathbf{C},\mathbf{D}]$，从 F 到 G 的总射指的是从 F 到 G 的自然变换

命题

若C,D是一个范畴，则 $[C,D]$ 是个范畴

已经定义过自然变换的复合运算。结合律是显然的。我们只须找到单位态射（恒等自然变换）
令 $F\in[\mathbf{C},\mathbf{D}]$，我们令 $id_F\in[\mathbf{C},\mathbf{D}](F,F)$ 表示单位态射，对任意 $A\in\mathbf{C}$，定义为 $id_F(A)=id_{F(A)}$。因为 $id_{F(A)}$ 是个从 $F(A)$ 到 $F(A)$ 的态射，所以 id_F 是良定义的
接着，令 $G\in[\mathbf{C},\mathbf{D}]$，$\eta\in[\mathbf{C},\mathbf{D}](F,G)$，$\eta'\in[\mathbf{C},\mathbf{D}](G,F)$。我们只须证明 $\eta\circ id_F=\eta$ 以及 $id_F\circ\eta'=\eta'$
令 $A\in\mathbf{C}$，我们只须注意到 $(\eta\circ id_F)(A)=\eta(A)\circ id_{F(A)}=\eta(A)$ 以及 $(id_F\circ\eta'(A))=id_{F(A)}\circ\eta'(A)$，就证明了这个命题

在一个范畴中，我们说两个对象同构当且仅当存在一个它们之间的同构。类似地，我们可以讨论两个函子是否同构

自然同构

令C,D是两个范畴，F,G 是两个从C到 $\mathbf{D}$ 上的函子。我们称 F 和 G（作为函子）是同构的，当且仅当它们作为 $[\mathbf{C},\mathbf{D}]$ 上的对象是同构的；等价地，当且仅当存在自然变换 $\eta\in[\mathbf{C},\mathbf{D}](F,G)$ 与 $\eta'\in[\mathbf{C},\mathbf{D}](G,F)$ 使得 $\eta\circ\eta'=id_F$ 且 $\eta'\circ\eta=id_G$。在这样的条件下，我们称 η 是一个从 F 到 G 的自然同构

引理 自然同构的判别法则

令C,D是两个范畴，F,G 是两个从C到 $\mathbf{D}$ 上的函子，则 η 是一个从 F 到 G 的自然同构当且仅当 η 是一个从 F 到 G 的自然变换，并且对任意 $A\in\mathbf{C}$，$\eta_A\in\mathbf{D}(F(A),G(A))$ 都是一个同构

先证充分性。假设 η 是一个从 F 到 G 的自然同构，则我们取 $\eta'\in\in[\mathbf{C},\mathbf{D}](G,F)$，使得 $\eta\circ\eta'=id_F$ 且 $\eta'\circ\eta=id_G$。令 $A\in\mathbf{C}$，我们只须证明 η_A 是一个同构。注意到 $(\eta\circ\eta')(A)=\eta_A\circ\eta'_A=id_{F(A)}$。同理，$(\eta'\circ\eta)(A)=\eta'_A\circ\eta_A=id_{G(A)}$。因此，$\eta_A$ 是一个从 $F(A)$ 到 $G(A)$ 的同构
再证必要性。假设 η 是一个从 F 到 G 的自然变换，且对任意 $A\in\mathbf{C}$，η_A 都是一个同构。我们只须对任意 $A\in\mathbf{C}$，令 $\eta'_A=(\eta_A)^{-1}$。这显然是良定义的。同样显然的是 $\eta\circ\eta'=id_F$ 且 $\eta'\circ\eta=id_G$

进一步地，我们可以定义范畴的同构与范畴的等价

范畴的同构

令C,D是两个范畴，我们称它们是同构的当且仅当存在 $F\in[\mathbf{C},\mathbf{D}]$，$G\in[\mathbf{D},\mathbf{C}]$，使得 $G\circ F=id_C\ F\circ G=id_{\mathbf{D}}$

范畴的等价

令C,D是两个范畴，我们称它们是等价的当且仅当存在 $F\in[\mathbf{C},\mathbf{D}]$，$G\in[\mathbf{D},\mathbf{C}]$，使得 $G\circ F\simeq id_C\ F\circ G\simeq id_{\mathbf{D}}$

我们可以给出两个判别法则。为此，我们引入几个定义

函子的性质

令C,D是两个范畴， F 是一个从C到 $\mathbf{D}$ 的函子。我们称 F 是：

1. 忠实的，若对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ ， $f \mapsto F(f)$ 是单的
2. 全的，若对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ ， $f \mapsto F(f)$ 是满的
3. 单的，若对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ ，我们有 $F(A) = F(B) \Rightarrow A = B$
4. 满的，若对任意 $D \in \mathbf{D}$ ，我们可以找到一个 $C \in \mathbf{C}$ ，使得 $F(C) = D$
5. 本质满的，若对任意 $D \in \mathbf{D}$ ，我们可以找到一个 $C \in \mathbf{C}$ ，使得 $F(C) \simeq D$

> 命题 范畴同构的判别法则
>
> $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，则它们是同构的当且仅当存在一个从C到 $\mathbf{D}$ 的函子 F ，使得 F 是忠实的、全的、单的和满的

先证充分性。假设 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是个同构，则存在 $G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$ ，使得 $G \circ F = id_{\mathbf{C}}$ 且 $F \circ G = id_{\mathbf{D}}$ 。从对象的角度看，显然 F 既是单的，也是满的。从态射的角度看，注意到 $G \circ F = id_{\mathbf{C}}$ 和 $F \circ G = id_{\mathbf{D}}$ 都是单位态射，不仅保持对象不动，也保持态射不动。因此 F 也既是忠实的，也是全的
再证必要性。假设 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是忠实的、全的、单的和满的，则我们可以先找到一个 $G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$ ，将 $\mathbf{D}$ 中的对象是映到 $\mathbf{C}$ 中的，再对任意 $C, D \in \mathbf{D}$ ，将 $\mathbf{D}$ 中从 C 到 D 的态射映到 $\mathbf{C}$ 中从 $G(C)$ 到 $G(D)$ 的态射

> 命题 范畴等价的判别法则
>
> $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，则它们是等价的当且仅当存在一个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子 F ，使得 F 是忠实的、全的和本质满的

先证充分性。假设 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ ， $G \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ ， $\eta \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}](G \circ F, id_{\mathbf{C}})$ 是个自然同构， $\eta' \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}](F \circ G, id_{\mathbf{D}})$ 是个自然同构
令 $D \in \mathbf{D}$ ，则 η'_D 是一个从 $(F \circ G)(D)$ 到 D 的同构。这就证明了 F 是本质满的。进一步地，对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}[A, B]$ $\eta_B \circ (G \circ F)(f) = f \circ \eta_A$ ，因此 $(G \circ F)(f) = \eta_B^{-1} \circ f \circ \eta_A$ 。类似地，对任意 $C, D \in \mathbf{D}$ 和 $f \in \mathbf{D}[C, D]$ 我们有 $(F \circ G)(f) = \eta_D^{-1} \circ f \circ \eta_A$ 。这就证明了 F 是忠实的和全的
再证必要性。假设 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是忠实的、全的和本质满的。我们下面定义 $G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$ 。对任意 $D \in \mathbf{D}$ ，根据本质满性，我们可以找到一个 $C \in \mathbf{C}$ ，使得 $F(C)$ 同构于 D 。我们令 $G(D) = C$ 。因为 $F(C)$ 同构于 D ，所以 $F(C)$ 中的态射和 D 的态射一一对应。再令 $D' \in \mathbf{D}$ ，我们可以找到 $C' \in \mathbf{C}$ ，使得 $F(C')$ 同构于 D' 。由于 F 是忠实的和全的，我们可以将从 D 到 D' 的态射定义得与从 C 到 C' 态射一一对应。这样，根据定义，我们很快就发现 $G \circ F \simeq id_{\mathbf{C}}$ ，并且 $F \circ G \simeq id_{\mathbf{D}}$
