4.1 介绍

在范畴论中，或许最重要的一个概念就是极限。这个词出自逆极限（inverse limit），但实际含义和我们在分析学中熟悉的极限的区别很大。为了让大家更好地理解这一概念，我们先举几种常见的极限
正如我们在前面说过的，极限是泛态射的推广。和泛态射一样，极限可以不存在，但是一旦存在就唯一
我们在抽象代数、点集拓扑学和代数拓扑学中都学习了很多极限的实例，只是没有用范畴论的语言将它们统一起来。在这一章中，我们将越来越深入地介绍范畴论中极限的概念

4.2 积

在某些范畴C中，我们可以定义两个对象 A, B 的积，记作 $A \times B$ 。积不是孤立存在的，我们会对应地有两个“投影映射” $\pi_1 \in \mathbf{C}(A \times B, A)$ ，$\pi_2 \in \mathbf{C}(A \times B, B)$ ，并且满足某些泛性质
下面，我们给出对象的积的定义

对象的积

令C是一个范畴， $A, B \in \mathbf{C}, A$ 和 B 的乘积指的是一个对象 $A \times B$ ，使得我们能找到两个映射 $\pi_1 \in \mathbf{C}(A \times B, A)$ $\pi_2 \in \mathbf{C}(A \times B, B)$ ，使得对任意 $C \in \mathbf{C}$ $f_1 \in \mathbf{C}(C, A)$ 和 $f_2 \in \mathbf{C}(C, B)$ ，都能找到唯一的 $f \in \mathbf{C}(C, A \times B)$ 使得 $f_1 = \pi_1 \circ f$ ， $f_2 = \pi_2 \circ f$

和泛态射一样，我们可以证明两个对象的积若存在则唯一，并且在唯一的同构下唯一

> 命题
>
> 令C是一个范畴， $A, B \in \mathbf{C}$ ，若 $A \times B$ 存在，则在唯一的同构下唯一

证明和泛态射的唯一性是完全一致的，只不过这里我们有两个复合的条件，而不是一个

下面举几个例子

> 引理
>
> 在集合范畴中，两个集合的积是它们的笛卡尔乘积

令 $A, B, C \in \mathbf{Set}$ $f_1 \in \mathbf{Set}(C, A)$ $f_2 \in \mathbf{Set}(C, B)$ 。显然，唯一的使得 $f_1 = \pi_1 \circ f$ $f_2 = \pi_2 \circ f$ 的 $f \in \mathbf{Set}(C, A \times B)$ 是 $f = (f_1, f_2)$ 。换言之，对任意 $x \in C$ ，我们定义 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ 。此即得证

> 引理
>
> 在群范畴中，两个群的积是它们的直积

令 $A, B, C \in \mathbf{Grp}$ $f_1 \in \mathbf{Grp}(C, A)$ ， $f_2 \in \mathbf{Grp}(C, B)$ 。显然，唯一的使得 $f_1 = \pi_1 \circ f$ ， $f_2 = \pi_2 \circ f$ 的 $f \in \mathbf{Grp}(C, A \times B)$ 也是 $f = (f_1, f_2)$ 。换言之，对任意 $x \in C$ ，我们定义 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

> 引理
>
> 在拓扑空间范畴中，两个拓扑空间的积是它们的积空间

令 $A, B, C \in \mathbf{Top}$ $f_1 \in \mathbf{Top}(C, A)$ ， $f_2 \in \mathbf{Top}(C, B)$ 。显然，唯一的使得 $f_1 = \pi_1 \circ f$ ， $f_2 = \pi_2 \circ f$ 的 $f \in \mathbf{Top}(C, A \times B)$ 还是 $f = (f_1, f_2)$ 。换言之，对任意 $x \in C$ ，我们定义 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

> 引理
>
> 在域 k 上的向量空间范畴中，两个向量空间的积是它们的直积

令 $A, B, C \in \mathbf{Vect}_k$ ， $f_1 \in \mathbf{Vect}_k(C, A)$ ， $f_2 \in \mathbf{Vect}_k(C, B)$ 。显然，唯一的使得 $f_1 = \pi_1 \circ f$ ， $f_2 = \pi_2 \circ f$ 的 $f \in \mathbf{Vect}_k(C, A \times B)$ 依然是 $f = (f_1, f_2)$ 。换言之，对任意 $x \in C$ ，我们定义 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$

通过上面几个引理，我们对两个对象的积的了解就足够了。很明显，常见的范畴上积的结构都是类似的
事实上，我们可以轻易地定义任意多个对象的积。同样地，任意多个对象的积可以不存在，但是若存在则在唯一的同构下唯一

> （任意）积
>
> 令C是一个范畴， I 是一个非空指标集，对任意 $i \in I$ 都有 $A_i \in \mathbf{C}$ ，则 $\{A_i\}_{i\in I}$ 的乘积指的是一个对象 $\prod_{i\in I} A_i$ ，使得我们能对每一个 $i \in I$ ，找到映射 $\pi_i \in \mathbf{C}\left(\prod_{i\in I} A_i, A\right)$ ，使得对任意 $C \in \mathbf{C}$ 和 $\{f_i \in \mathbf{C}(C, A_i)\}_{i\in I}$ 都能找到唯一的 $f \in \mathbf{C}\left(C, \prod_{i\in I}\right)$ ，使得对任意 $i \in I$ ，都有 $f_i = \pi_i \circ f$

在以上的几个例子中，积都可以推广到任意积，分别是集合的任意笛卡尔乘积，群的任意乘积，拓扑空间的任意积空间，向量空间的任意直积。囿于篇幅，我们不再赘述了
在这里，任意指代的是 I 是任意的指标集

4.3 余积

对偶地，我们可定义余积

> 余积
>
> C是一个范畴， $A, B \in \mathbf{C}$ ， A 和 B 的余积指的是一个对象 $A\ B$ ，使得我们能找到两个映射 $i_1 \in \mathbf{C}(A, A\ B)$ ， $i_2 \in \mathbf{C}(B, A\ B)$ ，使得对任意 $C \in \mathbf{C}$ $f_1 \in \mathbf{C}(A, C)$ 和 $f_2 \in \mathbf{C}(B, C)$ ，都能找到唯一的 $f \in \mathbf{C}(A\ B, C)$ ，使得 $f_1 = f \circ i_1$ ， $f_2 = f \circ i_2$

> （任意）余积
>
> 令C是一个范畴， I 是一个非空指标集，对任意 $j \in I$ 都有 $A_j \in \mathbf{C}$ ，则 $\{A_j\}_{j\in I}$ 的余积指的是一个对象 $\coprod_{j\in I} A_j$ ，使得我们能对每一个 $j \in I$ ，找到映射 $i_j \in \mathbf{C}\left(A_j, \coprod_{j\in I} A_j\right)$ ，使得对任意 $C \in \mathbf{C}$ 和 $\{f_j \in \mathbf{C}(A_j, C)\}_{j\in I}$ ，都能找到唯一的 $f \in \mathbf{C}\left(\coprod_{j\in I} A_j, C\right)$ ，使得对任意 $j \in I$ ，都有 $f_j = f \circ i_j$

和泛态射一样，我们可以证明两个对象的积若存在则唯一，并且在唯一的同构下唯一

命题

C是一个范畴， $A,B \in \mathbf{C}$ ，若 $A\ B$ 存在，则在唯一的同构下唯一

证明是同理的

同样看几个例子
为了照顾不了解一般的无交并这个概念的同学，我们在这里给出定义

一般集合的无交并

令 A,B 是两个集合，我们定义它们的无交并为 $A\ B = \{(a,1) : a \in A\} \cup \{(b,2) : b \in B\}$

一般来说，集合是会有交集的，我们通过引入第二个坐标来迫使它们无交，给出无交并的定义。很显然，两个有限集合的无交并的大小就是它们的大小的和，即便它们可能有交，甚至可能完全相等
接下来，我们定义任意无交并

集合的（任意）无交并

令 I 是一个非空指标集， $\{A_i\}_{i\in I}$ 是一族集合，我们定义它们的无交并为

$${}_{i\in I} A_i = {}_{i\in I}\{(a_i,i) : a_i \in A_i\}$$

同样地，即便 A_i 之间可能两两有交集，我们还是可以定义通过第二个坐标迫使它们无交，给出任意无交并的定义。同样地，有限多个有限集合的无交并的大小是它们的大小的和
我们可以把每一个 A_j 都嵌入到 ${}_{j\in I} A_j$ 中，即对任意 $j \in I$ ，都存在一个 $i_j : A_j \to {}_{j\in I} A_j$ ，定义为

$$i_j(x) = (x,j)$$

这显然是一个单射，因此在集合范畴中，这样的 i_j 是个单射
实际上，不难发现，集合范畴中的余积就是无交并。同样，为了方便，我们只证明两个对象的余积

引理

在集合范畴中，两个集合的余积是它们的无交并

令 $A,B,C \in$ e $f_1 \in$ e(A,C) $f_2 \in$ e(B,C) 。显然，唯一的使得 $f_1 = f \circ i_1$ $f_2 = f \circ i_2$ 的 $f \in$ e$(A\ B,C)$ 是

$$f(a,1) = f_1(a)$$
$$f(b,2) = f_2(b)$$

引理

在群范畴中，两个群的余积是它们的自由积

注

现在，我们复习一下自由积的定义。两个群 A, B 的自由积 $A * B$ 是由所有的（形式）单词 $s_1 \dots s_n$ 的等价类所构成的，其中 $s_1, \dots, s_n \in A \cup B$ 。我们可以将 A 或 B 中的单位元省略，也可以将连续的 A 中元素或 B 中元素合并。这两个操作给出了单词的等价类。事实上，这就迫使我们，即便 A 和 B 完全相等，我们也不能约掉连续的 A 中元素和 B 中元素。换言之，我们实际上给 A 和 B 中的元素贴上了标签，即每个元素是属于 A 还是属于 B 。在一定程度上，这和集合的无交并的思路是一致的，这是群的自由积的定义中最重要的细节

注

在 A 和 B 的自由积 $A * B$ 中，我们用显然的方法定义两个嵌入 $i_1 \in \mathbf{Grp}(A, A * B)$ ， $i_2 \in \mathbf{Grp}(B, A * B)$ ，即将 A 或 B 中的元素，看成只有一个字母的单词。它们显然都是群同态

令 $A, B, C \in \mathbf{Grp}$ $f_1 \in \mathbf{Grp}(A, C)$ ， $f_2 \in \mathbf{Grp}(B, C)$ 。显然，唯一的使得 $f_1 = f \circ i_1$ $f_2 = f \circ i_2$ 的 $f \in \mathbf{Grp}(A * B, C)$ 是将 A 中的每个字母按 f_1 的规则映到 C 中，将 B 中的每个字母按 f_2 的规则映到 C 中。此即得证

引理

在拓扑空间范畴中，两个拓扑空间的余积是它们的无交并空间

令 $A, B, C \in \mathbf{Top}$ $f_1 \in \mathbf{Top}(A, C)$ ， $f_2 \in \mathbf{Top}(B, C)$ 。显然，唯一的使得 $f_1 = f \circ i_1$ $f_2 = f \circ i_2$ 的 $f \in \mathbf{Top}(A\ B, C)$ 是

$$f(a, 1) = f_1(a)$$
$$f(b, 2) = f_2(b)$$

引理

在域 k 上的向量空间范畴中，两个向量空间的余积是它们的直和

注

向量空间的直和记作 $\oplus$ 。在有限个向量空间的情况下，直和和直积是等价的。但是在无限的情况下，二者就不等价了。向量空间的直积中的向量可以是任意笛卡尔乘积中的元素，但是对直积中的向量，我们要求除了有限个个位置以外都是0。为了强调直和的概念，即便在有限的情况下，我们也用 $\oplus$ 的记号，而不用 的记号，即便在有限的情况下二者是等价的。正是因为向量空间的缘故，我们有时也用 $\oplus$ 来作为余积的符号

注

在 A 和 B 的直和中，我们用显然的方法定义两个嵌入 $i_1 \in \mathrm{ect}_k(A, A \oplus B)$ $i_2 \in \mathrm{ect}_k(B, A \oplus B)$ ，定义为 $i_1(a) = (a, 0)$ ， $i_2(b) = (0, b)$ 0

令 $A, B, C \in \mathrm{ect}_k$ ， $f_1 \in \mathrm{ect}_k(A, C)$ ， $f_2 \in \mathrm{ect}_k(B, C)$ 。显然，唯一的使得 $f_1 = f \circ i_1$ ， $f_2 = f \circ i_2$ 的 $f \in \mathrm{ect}_k(A \oplus B, C)$ 是

$$f(a, b) = f_1(a) + f_2(b)$$

4.4 终对象

下面，我们定义一个范畴的终对象。同样，终对象可以不存在，但是一旦存在就在唯一的同构下唯一

终对象

令C是一个范畴， $A \in \mathbb{C}$ 。我们称 A 是一个终对象，若对任意 $B \in \mathbb{C}$ ，都存在唯一的 $h \in \mathbf{C}(B, A)$

终对象的定义比积和余积简单很多，事实上，我们马上会发现，在一定程度上，终对象是最简单的非平凡的极限的例子

命题

令C是一个范畴，若终对象存在，则在唯一的同构下唯一

证明是同理的

下面看一些例子

引理

在集合范畴中，终对象是单点集

不妨令 $A = \{1\}$ 。对任意 $B \in \mathbf{Set}$ ，要定义 $f \in \mathbf{Set}(B, A) = \mathbf{Set}(B, \{1\})$ ，我们只要对任意 $b \in B$ ，定义出 $f(b) \in \{1\}$ ，我们显然有且只有一种选择，那就是常值映射 $f \quad 1$ 。这显然是个映射，此即得证

引理

在群范畴中，终对象是平凡群

不妨令 $A = \{e\}$ 。对任意 $B \in \mathbf{Grp}$ ，要定义 $f \in \mathbf{Grp}(B, A) = \mathbf{Grp}(B, \{e\})$ ，我们只要对任意 $b \in B$ ，定义出 $f(b) \in \{e\}$ ，我们显然有且只有一种选择，那就是平凡映射 $f \quad e$ 。这显然是个群同态

引理

在拓扑空间范畴中，终对象是单点空间

不妨令 $A = \{a\}$ ，拓扑是显然且唯一的。对任意 $B \in \mathbf{Top}$ ，要定义 $f \in \mathbf{Top}(B, A) = \mathbf{Top}(B, \{a\})$ ，我们只要对任意 $b \in B$ ，定义出 $f(b) \in \{a\}$ ，我们显然有且只有一种选择，那就是平凡映射 $f \quad a$ 。这显然是个连续映射

> 引理
>
> 在域 k 上的向量空间范畴中，终对象是零空间

不妨令 $A=\{0\}$ 。对任意 $B\in\mathbf{Vect}_k$ ，要定义 $f\in\mathbf{Vect}_k(B,A)=\mathbf{Vect}_k(B,\{0\})$ ，我们只要对任意 $b\in B$ ，定义出 $f(b)\in\{0\}$ ，我们显然有且只有一种选择，那就是平凡映射 $f\ \ 0$ 。这显然是个线性映射

4.5 始对象

始对象是终对象的对偶概念

> **始对象**
>
> 令C是一个范畴， $A\in\mathbb{C}$ 。我们称 A 是一个始对象，若对任意 $B\in\mathbb{C}$ ，都存在唯一的 $h\in\mathbf{C}(A,B)$ 0

看一些例子

> 引理
>
> 在集合范畴中，始对象是空集

不妨令 $A=0$ 。对任意 $B\in\mathbf{Set}$ ，要定义 $f\in\mathbf{Set}(A,B)$ ，我们只要对任意 $a\in A$ ，定义出 $f(a)\in B$ ，然而 B 是空集，所以唯一的映射就是空映射。空映射也是映射

> 引理
>
> 在群范畴中，始对象是平凡群

不妨令 $A=\{e\}$ 。对任意 $B\in\mathbf{Grp}$ ，要定义 $f\in\mathbf{Grp}(A,B)$ ，我们只要对任意 $a\in A=\{e\}$ ，定义出 $f(a)\in B$ 。由于群同态是保持单位元的，所以唯一的群同态是 $f(e)=e'$ 。这显然是个群同态

> 引理
>
> 在群范畴中，始对象是平凡群

不妨令 $A=\{e\}$ 。对任意 $B\in\mathbf{Grp}$ ，要定义 $f\in\mathbf{Grp}(A,B)$ ，我们只要对任意 $a\in A=\{e\}$ ，定义出 $f(a)\in B$ 。由于群同态是保持单位元的，所以唯一的群同态是 $f(e)=e'$ 。这显然是个群同态

引理

在拓扑空间范畴中，始对象是空拓扑空间

证明和集合范畴中的证明是一样的

引理

在域 k 上的向量空间范畴中，始对象是零空间

不妨令 $A=\{0\}$ 。对任意 $B\in\mathbf{Vect}_k$ ，要定义 $f\in\mathbf{Vect}_k(A,B)$ ，我们只要对任意 $a\in A=\{0\}$ ，定义出 $f(a)\in B$ 。由于线性映射是保持加法单位元的，所以唯一的线性映射是 $f(0)=0$ 。这显然是个线性映射

4.6 拉回

注

对于学习过微分流形的同学，我们要指出，范畴论中的拉回与微分流形中的拉回是不同的。下一节中，我们会讲的范畴论中的推出与微分流形中的推出也是不同的

现在，我们给出拉回的定义

拉回（纤维积）

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴， $A,B,C\in C$ ， $f\in\mathbf{C}(A,C)$ ， $g\in\mathbf{C}(B,C)$ ，则 f 与 g 的一个拉回是由 P,p_1,p_2 构成的，其中 $P\in\mathbf{C}$ ， $p_1\in\mathbf{C}(P,A)$ ， $p_2=\mathbf{C}(P,B)$ ，并且满足以下的性质：

1. $f\circ p_1=g\circ p_2$
2. 若 $Q\in\mathbf{C}$ ， $q_1\in\mathbf{C}(Q,A)$ ， $q_2\in\mathbf{C}(Q,B)$ ，且 $f\circ q_1=g\circ q_2$ ，则存在唯一的 $u\in\mathbf{C}(Q,P)$ ，使得 $q_1=p_1\circ u$ ， $q_2=p_2\circ u$
   此时，我们记 $P=A\times_C B$
   拉回的一个别称是纤维积

命题

拉回若存在，则在唯一的同构下唯一

证明留给读者

我们来看集合范畴的例子。群范畴、向量空间范畴等等都是类似的

> 命题
>
> 令 $A, B, C \in \mathbf{Set}$， $f \in \mathbf{C}(A, C)$， $g \in \mathbf{C}(B, C)$ 。令
>
> $$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times_B : f(a) = g(b)\}$$
>
> 我们下面定义 $p_1 \in \mathbf{Set}(A \times_C B, A)$ 和 $p_2 \in \mathbf{Set}(A \times_C B, B)$
>
> $$\begin{aligned} p_1(a, b) &= a \\ p_2(a, b) &= b \end{aligned}$$
>
> 则 $A \times_C B, p_1, p_2$ 给出了 f 与 g 的一个拉回

1. 令 $(a, b) \in A \times_C B$， 则 $f(p_1(a, b)) = f(a) = g(b) = g(p_2(a, b))$ 。因此 $f \circ p_1 = g \circ p_2$
2. 假设 $Q \in \mathbf{C}$， $q_1 \in \mathbf{Set}(Q, A)$， $q_2 \in \mathbf{Set}(Q, B)$，且 $f \circ q_1 = g \circ q_2$ 。下面，我们定义 $u \in \mathbf{Set}(Q, A \times_C B)$

   $$u(x) = (q_1(x), q_2(x))$$

   显然，由 $f \circ q_1 = g \circ q_2$ 可知， u 是良定义的
   我们只须证明 $q_1 = p_1 \circ u$， $q_2 = p_2 \circ u$， 而这是因为

   $$\begin{aligned} p_1(u(x)) = p_1(q_1(x), q_2(x)) = q_1(x) \\ p_2(u(x)) = p_2(q_1(x), q_2(x)) = q_2(x) \end{aligned}$$

> 注
>
> 特别地，我们可以利用之前学习过的无交并的概念，来进一步认识集合的纤维积。在这个引理的条件下，我们有
>
> $$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\} = \{(a, b) \in A \times B : a \in f^{-1}(g(b))\} = {}_{b \in B} f^{-1}(g(b))$$
>
> 同理，我们有
>
> $$A \times_C B = {}_{b \in B} f^{-1}(g(b)) = {}_{a \in A} g^{-1}(f(a))$$

我们还有一个有趣的例子，那就是将原像理解为一种拉回

> 引理
>
> 令 $X, Y \in \mathbf{Set}$， $f \in \mathbf{Set}(X, Y)$， $B \subset Y$，则 $f^{-1}(B)$ 是 f 和嵌入映射 $i \in \mathbf{Set}(B, Y)$ 的一个拉回

注意到

$$\{(a, b) \in A \times B : f(a) = i(b) = b\} = \{(a, b) \in A \times B : a = f^{-1}(b)\}$$

而后者与 $f^{-1}(B)$ 存在显然的一一对应，此即得证

4.7 推出

对偶地，我们给出推出的定义

> 推出（纤维余积）

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴， $A,B,C \in \mathbf{C}$ ， $f \in \mathbf{C}(C,A)$ ， $g \in \mathbf{C}(C,B)$ ，则 f 与 g 的一个拉回是由 P,i_1,i_2 构成的，其中 $P \in \mathbf{C}$ ， $i_1 \in \mathbf{C}(A,P)$ ， $i_2 = \mathbf{C}(B,P)$ ，并且满足以下的性质：

1. $i_1 \circ f = i_2 \circ g$
2. 若 $Q \in \mathbf{C}$ $j_1 \in \mathbf{C}(A,Q)$ ， $j_2 \in \mathbf{C}(B,Q)$ ，且 $j_1 \circ f = j_2 \circ g$ ，则存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(Q,P)$ ，使得 $j_1 = u \circ i_1$ $j_2 = u \circ i_2$
   此时，我们记 $P = A {}_C B$

命题

拉回若存在，则在唯一的同构下唯一

证明留给读者

我们来看集合范畴的例子。群范畴、向量空间范畴等等都是类似的

引理

令 $A,B,C \in \mathbf{Set}$ ， $f \in \mathbf{C}(C,A)$ ， $g \in \mathbf{C}(C,B)$ 。令

$$A {}_C B = A \ B/$$

其中 是由 $\{(f(c),g(c)) \in A \times B : c \in C\}$ 生成的等价关系
我们下面定义 $i_1 \in \mathbf{Set}(A, A {}_C B)$ 和 $i_2 \in \mathbf{Set}(B, A {}_C B)$

$$i_1(a) = [a]$$
$$i_2(b) = [b]$$

则 $A {}_C B, i_1, i_2$ 给出了 f 与 g 的一个推出

1. 令 $c \in C$ ，注意到 $i_1(f(a)) = [f(a)] = [g(a)] = i_2(g(a))$ ，因此 $i_1 \circ f = i_2 \circ g$
2. 假设 $Q \in \mathbf{Set}$ ， $j_1 \in \mathbf{C}(X,Q)$ ， $j_2 \in \mathbf{C}(Y,Q)$ ，且 $j_1 \circ f = j_2 \circ g$ 。下面，我们定义 $u \in \mathbf{Set}(X {}_Z Y, Q)$

$$u([a]) = \begin{cases} j_1(a), & \frac{\#}{\#} a \in X \\ j_2(a), & \frac{\#}{\#} a \in Y \end{cases}$$

   现在，我们证明 u 是良定义的。假设 $a \ b$ 。根据 的定义（它是由所有 $f(c) \ g(c)$ （其中 $c \in C$ ）生成的等价关系），我们只须考虑 $a = f(c)$ 和 $b = g(c)$ （其中 $c \in C$ ）的情况，我们只须证明 $j_1(a) = j_2(b)$ ，而这是因为 $j_1 \circ f = j_2 \circ g$ ，这就证明了 u 是良定义的。
   现在，只须证 $j_1 = u \circ i_1$ ， $j_2 = u \circ i_2$ ，而这是因为

$$u(i_1(a)) = u([a]) = j_1(a)$$
$$u(i_2(a)) = u([a]) = j_2(a)$$

4.8 等化子

等化子和余等化子是我们引出极限和余极限前最后的两个例子

等化子

令C是一个范畴， $A,B \in \mathbf{C}$ ， $f,g \in \mathbf{C}(A,B)$ ，则 f 与 g 的一个 **等化子** 是由 E,e 构成的，其中 $E \in \mathbf{C}$ $e \in \mathbf{C}(E,A)$ ，满足

1. $f \circ e = g \circ e$
2. 若 $F \in \mathbf{C}$ ， $h \in \mathbf{C}(F, A)$ ，且 $f \circ h = g \circ h$ ，则存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(F, E)$ ，使得 $h = e \circ u$ 。此时，我们记 $E = Eq(f, g)$ 0

命题

等化子若存在则在唯一的同构下唯一

证明留给读者

我们来看集合范畴的例子

引理

令 $A, B \in \mathbf{Set}$ ， $f, g \in \mathbf{Set}(A, B)$ 。令 $E = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$ ，令 $i \in \mathbf{Set}(E, A)$ 是嵌入映射，则 E, i 给出了 f 与 g 的一个等化子，即 $E = Eq(f, g)$ 0

1. 令 $a \in E$ ，则 $f(i(a)) = f(a) = g(a) = g(i(a))$ ，因此 $f \circ i = g \circ i$
2. 假设 $F \in \mathbf{Set}$ ， $h \in \mathbf{Set}(F, A)$ ，且 $f \circ h = g \circ h$ 。下面，我们定义 $u \in \mathbf{Set}(F, E)$
$$u(x) = h(x)$$
只须证对任意 $x \in F$ ， $u(x) \in E$ ，而这是因为
$$f(u(x)) = f(h(x)) = g(h(x)) = g(u(x))$$

下面，我们做一个练习：一个有积和拉回的范畴一定有等化子

命题 等化子存在的一个充分条件

令C是一个有积和拉回的范畴， $A, B \in \mathbf{C}$ ， $f, g \in \mathbf{C}(A, B)$ ，则存在 f 与 g 的一个等化子

考虑 B 的自乘（积） $B \times B$ ，由两份 $id = id_B \in \mathbf{C}(B, B)$ ，我们可以得到一个 $(id, id) \in \mathbf{C}(B, B \times B)$ 。类似地，由 $f, g \in \mathbf{C}(A, B)$ ，我们可以得到一个 $(f, g) \in \mathbf{C}(A, B \times B)$ 。现在，令 (P, p_1, p_2) 是 (f, g) 与 (id, id) 的一个拉回
只须证 P, P_1 是 f 与 g 的一个等化子

1. 根据拉回的第一条性质，我们有 $(f \circ p_1, g \circ p_1) = (f, g) \circ p_1 = (id, id) \circ p_2 = (p_2, p_2)$ 。特别地， $f \circ p_1 = g \circ p_1$
2. 假设 $Q \in \mathbf{C}, q_1 \in \mathbf{C}(Q, A)$ ，使得 $f \circ q_1 = g \circ q_1$ 。我们令 $q_2 = f \circ q_1 = g \circ q_1$ ，因此显然有 $(f, g) \circ q_1 = (id, id) \circ q_2$ 。利用拉回的第二条性质，我们可以找到一个 $u \in \mathbf{C}(Q, P)$ ，使得 $q_1 = p_1 \circ u$

事实上，对于任意一族 $f_i \in \mathbf{C}(A, B)$ $(i \in I)$ ，我们都可以定义（任意）等化子。

（任意）等化子

令C是一个范畴， I 是一个非空指标集， $A, B \in \mathbf{C}$ ， $f_i \in \mathbf{C}(A, B)$ ，则 $\{f_i\}_{i \in I}$ 的一个等化子是由 E, e 构成的，其中 $E \in \mathbf{C}$ ， $e \in \mathbf{C}(E, A)$ ，并且满足以下的性质：

1. 对任意 $i,j \in I$ ，我们有 $f_i \circ e = f_j \circ e$
2. 若 $F \in \mathbf{C}$ ， $h \in \mathbf{C}(F,A)$ ，且对任意 $i,j \in I$ 都有 $f_i \circ h = f_j \circ h$ ，则存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(F,E)$ ，使得 $h = e \circ u$。此时，我们记 $E = Eq(\{f_i\}_{i\in I})$ 0

> 命题
>
> （任意）等化子若存在则在唯一的同构下唯一

证明留给读者

4.9 余等化子

余等化子是我们在讲极限前的最后一个例子，它是等化子的对偶。

> 余等化子
>
> 令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴， $A,B \in \mathbf{C}$ ， $f,g \in \mathbf{C}(A,B)$ ，则 f 与 g 的一个 **余等化子** 是由 C,p 构成的，其中 $C \in \mathbf{C}$ $p \in \mathbf{C}(B,C)$ ，并且满足以下的性质：
>
> 1. $p \circ f = p \circ g$ 0
> 2. 若 $D \in \mathbf{C}$ ， $h \in \mathbf{C}(B,D)$ ，且 $h \circ f = h \circ g$ ，则存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(C,D)$ ，使得 $h = u \circ p$ 0
>   此时，我们记 $C = Coeq(f,g)$ 0

> 命题
>
> 余等化子若存在则在唯一的同构下唯一

证明留给读者

我们来看集合范畴的例子

> 引理
>
> 令 $A,B \in \mathbf{Set}$ ， $f,g \in \mathbf{Set}(A,B)$ 。令 $C = B/$ ，其中 是由 $f(a)$ $g(a)$ （其中 $a \in A$ ）生成的等价关系。令 $p \in \mathbf{Set}(B,C)$ 是投影映射，则 C,p 给出了 f 与 g 的一个余等化子，即 $C = Coq(f,g)$ 0

1. 令 $a \in A$ ，则 $f(a)$ $g(a)$ ，所以 $p(f(a)) = [f(a)] = [g(a)] = p(g(a))$ 。因此， $p \circ f = p \circ g$ 0
2. 假设 $D \in \mathbf{C}$ ， $h \in \mathbf{C}(B,D)$ 。令 $b \in B$ ，我们定义 $u([b]) = h(b)$ ，这就使得 $h = u \circ p$ 。现在，我们只须证明 u 是良定义的。根据 的定义，不失一般性，我们只须证明，若 $b = f(a)$ ， $b' = g(a)$ ，则 b b' ，而这是因为 $p \circ f = p \circ g$ 0

对于余等化子，我们类似地有以下的性质

命题 余等化子存在的一个充分条件

令 $\mathbf{C}$ 是一个有余积和推出的范畴， $A,B\in\mathbf{C}$ ， $f,g\in\mathbf{C}(A,B)$ ，则存在 f 与 g 的一个余等化子。

根据对偶性，这是显然的

对偶地，对于任意一族 $f_i\in\mathbf{C}(A,B)\ (i\in I)$ ，我们都可以定义（任意）余等化子

（任意）余等化子

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴， I 是一个非空指标集， $A,B\in\mathbf{C}$ ， $f_i\in\mathbf{C}(A,B)$ ，则 $\{f_i\}_{i\in I}$ 的一个 **余等化子** 是由 C,p 构成的，其中 $C\in\mathbf{C}$ ， $p\in\mathbf{C}(B,C)$ ，并且满足以下的性质：

1. 对任意 $i,j\in I$ ，我们有 $p\circ f_i=p\circ f_j$
2. 若 $D\in\mathbf{C}$ ， $h\in\mathbf{C}(B,D)$ ，且对任意 $i,j\in I$ 都有 $h\circ f_i=h\circ f_j$ ，则存在唯一的 $u\in\mathbf{C}(C,D)$ ，使得 $h=u\circ p$ 0
   此时，我们记 $E=Coq(\{f_i\}_{i\in I})$ 0

命题

（任意）余等化子若存在则在唯一的同构下唯一

4.10 极限

在范畴论中，极限又称逆向极限、投射极限。我们先给出 型图的定义

J型图

令C，J是两个范畴。C中的一个 型图指的是一个函子 $F\in[,\mathbf{C}]$

对于C中任意的 型图，我们都可以定义极限。首先，我们定义锥。

锥

令C，J是两个范畴， F 是C中的一个 型图，则 F 的一个锥指的是 $N,\{\psi_A\}_{A\in}$ ，其中 $N\in\mathbf{C}$ $\psi_A\in\mathbf{C}(N,F(A))\ (A\in)$ ，使得对任意 $A,B\in$ 和 $f\in(A,B)$ ，我们有 $\psi_B=F(f)\circ\psi_A$

现在定义极限

极限

令C，J是两个范畴， F 是C中的一个 型图，则 F 的一个极限指的是 $L,\{\phi_A\}_{A\in}$ ，其中 $L\in\mathbf{C}$ $\phi_A\in\mathbf{C}(N,F(A))\ (A\in)$ ，使得下列性质成立

1. $L,\{\phi_A\}_{A\in}$ 是 F 的一个锥。换言之，对任意 $A,B\in$ 和 $f\in(A,B)$ ，我们有 $\phi_B=F(f)\circ\phi_A$
2. 对 F 的任意一个锥 $N,\{\psi_A\}_{A\in}$ ，都存在唯一的 $u\in\mathbf{C}(N,L)$ ，使得对任意 $A\in$ ，我们有 $\psi_A=\phi_A\circ u$

下面，我们举一些极限的例子

> 引理
>
> 积、终对象、拉回、等化子都是某些简单的 型图的极限。

由定义，这是显然的

> **极限的泛性质**
>
> 令C，J是两个范畴， F 是C中的一个 型图，若 F 的极限存在，则在唯一的同构下唯一。

设 $L,\{\phi_A\}_{A\in}$ $L',\{\phi'_A\}_{A\in}$ 是 F 的两个极限，则利用极限的定义，我们可以分别对应地找到唯一的 $u\in\mathbf{C}(L',L)$ 和唯一的 $u'\in\mathbf{C}(L,L')$ ，使得对任意 $A,B\in$ 和 $f\in(A,B)$ ，我们有 $\phi'_A=\phi_A\circ u$ ， $\phi_A=\phi'_A\circ u'$ 这就得到了 u 的唯一性
因此，对任意的 $f\in(A,B)$ ，我们有 $\phi_A=\phi_A\circ(u\circ u')$ ， $\phi'_A=\phi'_A\circ(u'\circ u)$
显然，对任意的 $f\in(A,B)$ ，我们也有 $\phi_A=\phi_A\circ id_A$ ， $\phi'_A=\phi'_A\circ id'_A$
利用唯一性，我们知道 $u\circ u'=id_A$ $u'\circ u=id_{A'}$ 。这就证明了 u 是一个同构。结合刚才我们证过的结论， u 是满足该条件的唯一同构。此即得证

事实上，只要范畴C中所有的（任意）积和等化子都存在，那么所有的极限都存在。这被称为极限存在定理

> **极限存在定理**
>
> 假设C是一个范畴，使得所有的（任意）积和等化子都存在。令 是一个范畴， F 是C中的一个 型图，则 F 的极限存在。

令

$$
\begin{aligned}
X&=\prod_{A\in}F(A)\\
Y&=\prod_{f\in\hom()}F(\operatorname{cod}(f))
\end{aligned}
$$

其中 $cod(f)$ 指的是 f 的陪域。此外， $dom(f)$ 指的是 f 的定义域
下面我们定义 $h,k\in\mathbf{C}(X,Y)$ 。令

$$h=\left(F(f)\circ\pi_{\operatorname{dom}(f)}\right)_{f\in\hom()}$$

$$k=\left(\pi_{\operatorname{cod}(f)}\right)_{f\in\hom()}$$

现在，令 L,e 是 h,k 的一个等化子。我们只须证明 $L,\{e_A\}_{A\in}$ 是 F 的一个极限。

1. 令 $f\in\mathbf{C}(A,B)$ ，我们只须证明 $F(f)\circ\phi_A=\phi_B$ 。因为 $h\circ e=k\circ e$ ，所以对 $f\in\mathbf{C}(A,B)$ ，我们有 $F(f)\circ\pi_{\operatorname{dom}(f)}\circ e=\pi_{\operatorname{cod}(f)}\circ e$ 。换言之， $F(f)\circ e_A=e_B$ 。这就证明了 $L,\{e_A\}_{A\in}$ 是 F 的一个锥
2. 假设 $N,\{\psi_A\}_{A\in}$ 是 F 的另一个锥，即对任意 $A,B\in\mathbf{C}$ 和 $f\in\mathbf{C}(A,B)$ ，都有 $F(f)\circ\psi_A=\psi_B$ ，则我们定义 $\psi\in\mathbf{C}\left(N,\prod_{A\in}F(A)\right)$ 为 $\psi=(\psi_A)_{A\in}$ 。换言之， $h\circ\psi=k\circ\psi$ 。利用等化子的第二个条件，我们知道存在一个态射 $u\in\mathbf{C}(N,L)$ ，使得 $\psi=e\circ u$ 。等价地，对于任意的 $A,B\in\mathbf{C}$ 和 $f\in\mathbf{C}(A,B)$ ，我们有 $\psi_A=e_A\circ u$

4.11 余极限

在范畴论中，余极限又称正向极限，归纳极限。对于 $\mathbf{C}$ 中任意的 型图，我们都可以定义余极限。首先，我们定义余锥

余锥

令 $\mathbf{C}$, 是两个范畴， F 是 $\mathbf{C}$ 中的一个 型图，则 F 的一个 **余锥** 指的是 $N, \{\psi_A\}_{A\in}$ ，其中 $N \in \mathbf{C}$ ， $\psi_A \in \mathbf{C}(F(A), N)\,(A \in)$ ，使得对任意 $A, B \in$ 和 $f \in (A, B)$ ，我们有 $\psi_B = \psi_A \circ F(f)$

现在，我们来定义余极限

余极限

令 $\mathbf{C}$, 是两个范畴， F 是 $\mathbf{C}$ 中的一个 型图，则 F 的一个 **余极限** 指的是 $L, \{\phi_A\}_{A\in}$ ，其中 $L \in \mathbf{C}$ ， $\phi_A \in \mathbf{C}(F(A), N)\,(A \in)$ ，使得下列性质成立

1. $L, \{\phi_A\}_{A\in}$ 是 F 的一个余锥。换言之，对任意 $A, B \in$ 和 $f \in (A, B)$ ，我们有 $\phi_B = \phi_A \circ F(f)$ 。
2. 对 F 的任意一个余锥 $N, \{\psi_A\}_{A\in}$ ，都存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(L, N)$ ，使得对任意 $A \in$ ，我们有 $\psi_A = u \circ \phi_A$

下面，我们举一些余极限的例子

引理

余积、始对象、推出、余等化子都是某些简单的 型图的余极限

由定义，这是显然的

命题 余极限存在定理

C是一个范畴，使得所有的（任意）余积和余等化子都存在。令J是一个范畴， F 是C中的一个J型图，则 F 的余极限存在

由对偶性，这是显然的
