第11节 连通空间

11-1 引入

微积分中，关于连续函数有下面三个基本定理，它们是其他定理的基础：
介值定理．若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续， r 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一个实数，则存在一个元素 $c\in[a,b]$ ，使得 $f(c)=r$
极大值定理. 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，则存在一个元素 $c\in[a,b]$ ，使得对任何 $x\in[a,b]$ 都有 $f(x)\leqslant f(c)$
一致连续性定理．若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，则对给定的 $\varepsilon>0$ ，存在 $\delta>0$ ，使得对 $[a,b]$ 中满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 的任何一对元素 x_1 和 x_2 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$
这些定理有许多应用。比如，介值定理可用于构造像 $\sqrt[3]{x}$ 和 $\arcsin x$ 这样的反函数。极大值定理可用于证明微分中值定理，并且据此证明微积分中的两个微积分基本定理。而一致连续性定理的许多应用之一便是证明每一个连续函数都是可积的
以往我们是从连续函数的角度来看待这三个定理。其实，也可以将其视为实数闭区间 $[a,b]$ 上的定理。它们不仅依赖于 f 的连续性，而且也依赖于拓扑空间 $[a,b]$ 的若干性质
介值定理所依赖的是空间 $[a,b]$ 的所谓连通性，另外两个定理所依赖的则是空间 $[a,b]$ 的所谓紧致性。本章我们将对任意拓扑空间定义这两种性质，并且证明这三个定理的适当的推广形式
以上三个定理在微积分的理论中有着重要的作用，与此相仿，连通性与紧致性在高等分析、几何学、拓扑学中，甚至在几乎任何一门与拓扑空间概念有关的学科中，都有着重要的作用

11-2 连通空间

拓扑空间中连通性的定义是易于理解的。如果空间能够拆成两个“团”——两个无交的开集，我们就说空间是可以“分割”的。否则，便称它是连通的。这样一个简单的想法引发了后续的相关讨论。

> [!quote] 分割(separation)，连通的(connected)
> X 是一拓扑空间，X 的一个**分割(separation)**，是指 X 的一对无交的非空开子集 U 和 V ，它们的并等于 X ．如果 X 的分割不存在，则称空间 X 是**连通的(connected)**

连通性显然是一个拓扑性质，因为它的定义仅涉及 X 的开集族．换句话说，如果 X 是连通的，那么与 X 同胚的每一空间都是连通的
连通性的定义也可以用以下方式给出：空间 X 是连通的当且仅当 X 中既开又闭的子集只有空集和 X 自身。事实上，若 A 是 X 中一个既开又闭的非空真子集，那么， $U=A$ 和 $V=X-A$ 是 X 中的非空无交开集使得其并等于 X ，从而它们构成了 X 的一个分割。反之，如果 U 和 V 构成 X 的一

个分割，则 U 便是 X 的既开又闭的非空真子集
对于拓扑空间 X 的子空间 Y ，还有另一种定义其连通性的有用方法：

> [!quote] LEM
> Y 是 X 的子空间，则 Y 的一个分割是一对无交的非空集合 A 和 B ，它们的并等于 Y ，并且 A 和 B 中的任何一个都不包含另一个的极限点。如果空间 Y 不存在这样的分割，则空间 Y 是连通的

设 A 和 B 是 Y 的一个分割，则 A 在 Y 中既开又闭。A 在 Y 中的闭包是 $\overline{A}\cap Y$ （按照惯例，这里 $\overline{A}$ 表示 A 在 X 中的闭包）。由于 A 在 Y 中是闭的，所以 $A=\overline{A}\cap Y$ ，因此 $\overline{A}\cap B=\emptyset$ 。由于 $\overline{A}$ 等于 A 与其极限点集的并，所以 B 不包含 A 的极限点。同理，A 也不包含 B 的极限点
反之，设 A 和 B 是 Y 中两个非空无交集合，其并等于 Y ，并且其中任何一个不包含另一个的极限点．于是 $\overline{A}\cap B=\emptyset$， $A\cap\overline{B}=\emptyset$ ．由此可见 $\overline{A}\cap Y=A$ 和 $\overline{B}\cap Y=B$ ，于是 A 和 B 都是 Y 中的闭集，再根据 $A=Y-B$ 和 $B=Y-A$ ，便可见它们也都是 Y 中的开集

> [!quote] EX
> X 是只有两个点的密着拓扑空间．显然，X 的分割不存在，因此 X 是连通的

例2设 Y 是实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间 $[-1,0)\cup(0,1]$ ．由于 $[-1,\ 0)$ 与 $(0,\ 1]$ 都是 Y 中非空的开集(尽管它们不是 $\mathbb{R}$ 中的开集)，因此，它们构成 Y 的一个分割．另外请注意，它们中任何一个集合都不包含另一个集合的极限点．(0是它们的一个公共极限点，但这个点不在子空间 Y 中.)

例3设 X 是实直线 $\mathbb{R}$ 的子空间$[-1,\ 1]$．$[-1,\ 0]$ 和 $(0,\ 1]$ 是两个无交非空集合，但它们不构成 X 的分割，因为第一个集合不是 X 中的开集．另外请注意，第一个集合包含了第二个集合的极限点 0.
事实上，空间 $[-1,\ 1]$ 的分割是不存在的．稍后我们将证明这一点.

例4 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是不连通的。事实上， $\mathbb{Q}$ 的连通子空间只有单点集。因为如果 Y 是 $\mathbb{Q}$ 中包含点 p 和 q 的一个子空间，则在 p 和 q 之间可以选择一个无理数 a ，并且 Y 可以表示为两个开集

$$Y\cap(-\infty,a)\quad 和\quad Y\cap(a,+\infty)$$

的并.

例5 考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 的子集：

$$X=\{x\times y\mid y=0\}\cup\{x\times y\mid x>0和y=1/x\}.$$

X 是不连通的．事实上，上面给出的两个集合就是 X 的一个分割，因为它们中的任何一个都不包含另一个的极限点(参见图23.1).

我们已经给出了几个不连通空间的例子。然而，怎样构造连通空间呢？我们即将证明几个定理，它们给出了一些由已知连通空间构造新的连通空间的方法。在下一节，我们将应用这些定理证明几个特殊空间的连通性，比如 $\mathbb{R}$ 中的区间， $\mathbb{R}^n$ 中的球和方体。首先给出下述引理：

图 23.1

引理23.2 如果集合 C 与 D 构成 X 的一个分割，并且 Y 是 X 的一个连通子空间，那么， Y 或者包含于 C ，或者包含于 D .

证 由于 C 和 D 都是 X 中的开集，从而 $C \cap Y$ 和 $D \cap Y$ 都是 Y 中的开集．这两个集合无交且它们的并等于 Y ．倘若它们中每一个都不是空集，则它们便构成了 Y 的一个分割．因此，它们之中必有一个为空集．于是，或者 Y 包含于 C ，或者 Y 包含于 D

定理23.3 含一个公共点的 X 的连通子空间族的并是连通的。

证 设 $\{A_\alpha\}$ 是空间 X 中连通子空间的一个族。 p 是 $\bigcap A_\alpha$ 的一个点。我们证明空间 $Y=\bigcup A_\alpha$ 是连通的。设 $Y=C\cup D$ 是 Y 的一个分割。那么点 p 将属于 C 或 D 。不妨设 $p\in C$ 。因为 A_α 是连通的，它必然整个地包含于 C 或 D ，而由于它包含 C 中的点 p ，所以 A_α 不可能包含在 D 中。因此对于每一个 α ，有 $A_\alpha \subset C$ ，于是 $\bigcup A_\alpha \subset C$ ，这与 D 非空矛盾。

定理23.4 设 A 是 X 的一个连通子空间．若 $A\subset B\subset \overline{A}$ ，则 B 也是连通的.

换句话说，如果 B 等于连通子空间 A 加上它的部分或全部极限点，那么 B 是连通的.

证 设 A 连通且 $A\subset B\subset \overline{A}$ 。如果 $B=C\cup D$ 是 B 的一个分割，根据引理23.2， A 必定整个地包含于 C 或者包含于 D ，假设 $A\subset C$ 。于是 $\overline{A}\subset\overline{C}$ 。由于 C 与 D 无交，所以 B 与 D 无交，这与 D 是 B 的非空子集矛盾。

定理23.5 连通空间在连续映射下的像是连通的，

证 设 $f: X\rightarrow Y$ 是一个连续映射， X 是连通空间。我们来证明它的像空间 $Z=f(X)$ 是连通的。因为把 f 的值域限制在空间 Z 上而得到的映射也是连续的，所以只要考虑下述连续满映射

$$g: X \longrightarrow Z$$

就行了．假设 $Z=A\bigcup B$ 是由 Z 中两个非空无交开集构成的 X 的一个分割．那么 $g^{-1}(A)$ 与 $g^{-1}(B)$ 也无交，并且其并等于 X ，由于 g 是一个连续映射，所以它们都是 X 中的开集．由于 g 是满映射，所以它们都是非空的．因此 $g^{-1}(A)$ 与 $g^{-1}(B)$ 便构成了 X 的一个分割，这与 X 的连通性矛盾.

定理23.6 有限多个连通空间的笛卡儿积是连通的。

证 首先对两个连通空间 X 与 Y 的积加以证明。这个证明可以说得直观些。在积空间 $X \times Y$ 中选取一个“基点” $a \times b$ 。注意到“水平薄片” $X \times b$ 与 X 同胚，因而是连通的；每一个“竖立薄片” $x \times Y$ 与 Y 同胚，因而也是连通的。于是，每一个“十字型”空间

$$T_x = (X \times b) \cup (x \times Y)$$

是两个具有公共点 $x \times b$ 的连通空间之并，因而也是连通的。见图23.2。现在考虑所有这些十字型空间的并 $\bigcup_{x \in X} T_x$ 。这个并是连通的，因为它是含有公共点 $a \times b$ 的连通空间族的并。由于

这个并等于 $X \times Y$ ，因此空间 $X \times Y$ 连通。

由于(易证) $X_1 \times \cdots \times X_n$ 同胚于 $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$, 所以对于有限多个连通空间的笛卡儿积, 我们可以用归纳法给出证明.

人们自然会问：上述定理是否可以推广到任意多个连通空间的笛卡儿积上？下面的例子告诉我们，这与笛卡儿积上所选择的拓扑有关.

图23.2

例6 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的箱拓扑. $\mathbb{R}^n$ 可以表示成所有有界实数序列的集合 A 与所有无界序列的集合 B 的并. 这两个集合无交, 且每一集合都是箱拓扑中的开集. 这是由于任意选取 $\mathbb{R}^n$ 的一个点 a , 若 a 是一个有界序列, 则

$$U = (a_1 - 1, a_1 + 1) \times (a_2 - 1, a_2 + 1) \times \dots$$

是由有界序列组成的一个开集．而当 a 为无界序列时，则上述 U 是由无界序列组成的一个开集．由此可见，尽管R是连通的(下节我们将给出证明)，但 $\mathbb{R}^\infty$ 关于箱拓扑却不是连通的.

例7 考虑 $\mathbb{R}^n$ 的积拓扑．假设 $\mathbb{R}$ 是连通的，我们来证明 $\mathbb{R}^n$ 是连通的．设 $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ 是由所有序列 $x = (x_1, x_2, \dots)$ 组成的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，其中，当 $i > n$ 时有 $x_i = 0$ ．显然， $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ 同胚于 $\mathbb{R}^n$ ，根据前一个定理可见，它是连通的．由于每一个 $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ 都包含点 $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$ ，所以所有这些 $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ 的并 $\mathbb{R}^n$ 是连通的．我们来证明 $\mathbb{R}^n$ 的闭包等于 $\mathbb{R}^n$ ，由此推出 $\mathbb{R}^n$ 也是连通的.

设 $a = (a_1, a_2, \cdots)$ 是 $\mathbb{R}^\infty$ 的一个点, $U = \Pi U_i$ 为积拓扑中含有点 a 的一个基元素. 我们证明 U 与 $\mathbb{R}^\infty$ 有交. 选取一个整数 N , 使得当 $i > N$ 时有 $U_i = \mathbb{R}$. 则 $\mathbb{R}^\infty$ 的点

$$\boldsymbol{x} = (a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$$

属于 U ，这是由于对于所有的 i 有 $a_i \in U_i$ ，并且对于所有的 $i > N$ 有 $0 \in U_i$

上述讨论的推广说明在积拓扑下任意多个连通空间的笛卡儿积是连通的。由于我们不需要这个结果，其证明留作习题。

练习

1. 设 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 是 X 的两个拓扑．若 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$，试问关于两种拓扑的连通性之间有什么联系?
2. 设 $\{A_n\}$ 是 X 的连通子空间的一个序列，并且对于所有的 n 有 $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$。证明 $\bigcup A_n$ 是连通的。
3. 设 $\{A_\alpha\}$ 是 X 的连通子空间的一个族。A 是 X 的一个连通子空间。证明：若对于每一个 α 有 $A \cap A_\alpha \neq \emptyset$，则 $A \cup (\bigcup A_\alpha)$ 是连通的。
4. 证明：若 X 为无限集，则 X 关于有限补拓扑是连通的。
5. 若一个空间的连通子空间只有单点集，则这个空间称为完全不连通(totally disconnected)空间．证明：若 X 具有离散拓扑，则 X 是完全不连通的．其逆成立吗?
6. 设 $A \subset X$. 证明: 若 C 是 X 的一个连通子空间, 并且 C 与 A 和 $X-A$ 都有交, 则 C 与 $\operatorname{Bd} A$ 也有交.
7. 空间 $\mathbb{R}_\ell$ 连通吗? 验证你的结论.
8. 判定 $\mathbb{R}^\omega$ 关于一致拓扑是否连通
9. 设 A 是 X 的一个真子集，B 是 Y 的一个真子集．若 X 和 Y 都是连通的，证明

$$(X \times Y)-(A \times B)$$

是连通的.

10. 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in J}$ 是连通空间的一个加标族，X 是积空间

$$X=\prod_{a \in J} X_a .$$

设 $a=(a_\alpha)$ 是 X 的一个给定的点.

(a) 对于 J 的任何一个有限子集 K，以 X_K 表示由所有那些点 $x=(x_\alpha)$ 的集合，其中当 $\alpha \notin K$ 时有 $x_\alpha=a_\alpha$。证明 X_K 是连通的。
(b) 所有空间 X_K 的并 Y 是连通的.
(c)证明：X 等于 Y 的闭包．从而 X 是连通的.

11. 设 $p: X \rightarrow Y$ 是一个商映射。证明：若每一个 $p^{-1}(\{y\})$ 是连通的，并且 Y 也是连通的，则 X 是连通的。
12. 设 $Y \subset X$, X 和 Y 都是连通的。证明：若 A 和 B 构成 $X-Y$ 的一个分割，则 $Y \cup A$ 和 $Y \cup B$ 都是连通的。

第12节 IR上的连通空间

12-1 道路连通

$\mathbb{R}$ 中的区间的连通性引出了一个判定空间 X 连通的特别有用的准则，即 X 中的任何一对点都能用 X 中的一条道路连接

> [!] 道路（path），道路连通（path connected）
> 设 x 与 y 为空间 X 的两点，X 中从 x 到 y 的一条 **道路（path）** 是指从实直线的某一个闭区间 $[a,b]$ 到 X 的一个连续映射 $f:[a,b]\rightarrow X$ ，使得 $f(a)=x$ 和 $f(b)=y$ 。如果空间 X 中每一对点都能用 X 中的一条道路连接，则称 X 是**道路连通的（path connected）**

容易看出，道路连通空间 X 必然连通。设 $X=A\cup B$ 是 X 的一个分割。令 $f:[a,b]\rightarrow X$ 为 X 中任何一条道路。而集合 $f([a,b])$ 是连通集的连续像，所以它是连通的。于是它必定完全包含于 A 或者包含于 B 中。因此， X 中便不存在连接 A 中的点与 B 中的点的道路，这与 X 是道路连通的假设相矛盾
上述命题的逆命题并不成立，一个连通空间未必是道路连通的
$\mathbb{R}^n$ 中的单位球(unit ball) B^n 定义为

$$B^n=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|\leqslant 1\},$$

其中

$$\|x\|=\|(x_1,\ldots,x_n)\|=\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{1/2}.$$

单位球是道路连通的．事实上，任意给定 B^n 中两点 x 与 y ，由

$$f(t)=(1-t)x+ty$$

定义的直线道路 $f:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}^n$ 完全含在 B^n 中。因为若 x 与 y 在 B^n 中并且 t 在 $[0,1]$ 中，那么

$$\|f(t)\|\leqslant(1-t)\|x\|+t\|y\|\leqslant 1.$$

类似地，可以证明 $\mathbb{R}^n$ 中每一个开球 $B_d(x,\varepsilon)$ 和每一个闭球 $\bar{B}_d(x,\varepsilon)$ 都是道路连通的.

例4 穿孔欧氏空间(punctured Euclidean space)定义为空间 $\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\}$ ，其中 $\mathbf{0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的原点。对于 $n>1$ ，它是道路连通的：任意给定异于 $\mathbf{0}$ 的两点 x 与 y ，如果它们的连线不通过原点，就用直线道

路连接 x 与 y 。否则，我们可选取一点 z 不在 x 与 y 连线上，连一条从 x 到 z ，再从 z 到 y 的折线道路。

例5 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面(unit sphere) S^{n-1} 定义为

$$S^{n-1}=\{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\|=1\}.$$

当 $n>1$ 时它是道路连通的．因为用 $g(x)=x/\|x\|$ 所定义的映射 g： $\mathbb{R}^n-\{\mathbf{0}\} \rightarrow S^{n-1}$ 是连续满射．易见，一个道路连通空间的连续像是道路连通的.

我们来看两个连通空间未必是道路连通的例子。

> [!quote] EX
> 有序矩形 I_o^2 是连通的，但不是道路连通的

因为 I_o^2 是一个线性连续统，所以它是连通的．设 $p=0 \times 0$， $q=1 \times 1$ ，如果存在一个连接 p 和 q 的道路 $f:[a, b] \rightarrow I_o^2$ ，必定导致矛盾．根据介值定理，像集 $f([a, b])$ 必定包含 I_o^2 的每一个点 $x \times y$ ，因此，对于每一个点 $x \in I$ ，集合

$$U_x=f^{-1}(x \times(0,1))$$

是 $[a, b]$ 中一个非空子集。并且根据连续性，它是 $[a, b]$ 中的一个开集。参见图24.4。对于每一个 $x \in I$ ，在 U_x 中选取一个有理数 q_x 。因为这些集合 U_x 无交，映射 $x \rightarrow q_x$ 是一个从 I 到 $\mathbb{Q}$ 中的单射。这与区间 I 不可数矛盾（后面我们将证明 I 是不可数的）。

图24.4

> [!quote] EX
> $$S=\{x \times \sin (1 / x) \mid 0<x \leqslant 1\}$$
>
> 因为 S 是连通集 $(0,1]$ 的连续像，所以 S 是连通的．因此它在 $\mathbb{R}^2$ 中的闭包 $\bar{S}$ 也是连通的．集合 $\bar{S}$ 是拓扑学上的一个经典例子，称为拓扑学家的正弦曲线(topologist's sine curve).如图24.5所示.它是 S 与一个垂直区间 $0 \times[-1,1]$ 之并．我们来证明 $\bar{S}$ 不是道路连通的

图24.5

假设 $f:[a, c] \rightarrow \overline{S}$ 是一个连接原点与 S 中一点的道路。则所有满足 $f(t) \in 0 \times[-1,1]$ 的 t 构成一个闭集，从而有最大元 b 。那么 $f:[b, c] \rightarrow \overline{S}$ 是一个将 b 映到 $0 \times[-1,1]$ 中，将 $[b, c]$ 中所有异于 b 的点映到 S 中的道路。

为讨论方便，以$[0，1]$代替 $[b,c]$，并且记 $f(t)=(x(t),y(t))$，则 $x(0)=0$，且当 $t>0$ 时，$x(t)>0$， $y(t)=\sin(\frac{1}{x(t)})$，我们来证明存在点的一个序列 $t_n\to 0$ 使得 $y(t_n)=(-1)^n$.由于序列 $y(t_n)$ 不收敛，从而与 f 的连续性矛盾.

我们可按照以下方式选取 t_n： 对于给定的 n，选取满足 $0<u<x(\frac{1}{n})$ 的 u 使得 $\sin(\frac{1}{u})=(-1)^n$。那么由介值定理知，存在满足 $0<t_n<1/n$ 的 t_n 使得 $x(t_n)=u$

12-2 线性连续统

上节的定理给出了用已知的连通空间来构造新的连通空间的方法。那么，从哪里开始去寻找一些连通空间呢？其中最理想的莫过于实直线了。我们将证明 $\mathbb{R}$ 是连通的，以及 $\mathbb{R}$ 中的每一个区间和射线都是连通的
一个应用就是适当地推广微积分中的介值定理。另一个应用就是证明欧氏空间中诸如球和球面那些熟知的空间的连通性。这个证明涉及我们将要讨论的道路连通性这样一个新的概念。
$\mathbb{R}$ 中的区间和射线的连通性大家可能从数学分析中早已很熟悉了。这里，我们在更广泛的意义下给出证明，并指明这件事与 $\mathbb{R}$ 的代数性质无关，而仅与它的序的性质有关。为了明确起见，我们将对任意与 $\mathbb{R}$ 有同样的序性质的那些全序集证明这个定理。这种集合称为线性连续统。

> [!] 线性连续统（linear continuum）
> 若 L 是多于一个元素的全序集，并且满足条件：
> (1) L 有上确界性质
> (2) 若 $x<y$，则存在 z 使得 $x<z<y$
> 则称 L 是一个**线性连续统（linear continuum）**

> [!quote] THM
> L 是一个赋予序拓扑的线性连续统，则 L 是连通的，并且 L 的每一个区间和每一条射线也都是连通的

曾给出过以下定义：称 L 的一个子空间 Y 是凸的，是指对于满足 $a<b$ 的 Y 中的任何一个点对 a 和 b， L 中的点组成的区间 $[a,b]$ 包含于 Y。以下我们证明：若 Y 是 L 的一个凸子集，则 Y 是连通的
设 Y 是两个非空无交集合 A 和 B 之并，其中 A 和 B 都是 Y 的开集, 取 $a\in A$ 和 $b\in B$，并且为讨论方便，假设 $a<b$． 于是 L 中的区间 $[a,b]$ 包含于 Y． 于是， $[a,b]$ 可以表示成无交集合

$$A_0=A\cap[a,b]\quad 和 \quad B_0=B\cap[a,b]$$

之并，并且每一集合就子空间的序拓扑而言都是 $[a,b]$ 的开集．由 $a\in A_0$ 及 $b\in B_0$ 知它们都是非空的．因此 A_0 和 B_0 是 $[a,b]$ 的一个分割
令 $c=\sup A_0$，以下证明 c 既不属于 A_0 也不属于 B_0，这与 $[a,b]$ 等于 A_0 与 B_0 的并矛盾

情形1．假定 $c \in B_0$ ，则 $c \neq a$ ，于是或者 $c = b$ ，或者 $a < c < b$ ．无论哪种情况，由于 B_0 是 $[a, b]$ 中的开集，总存在一个形如 $(d, c]$ 的区间包含于 B_0 。若 $c = b$ ，立刻得出矛盾，因为这时 d 是 A_0 的一个小于 c 的上界。如果 $c < b$ ，我们有 $(c, b]$ 与 A_0 无交(由于 c 是 A_0 的一个上界)。于是

$$(d, b] = (d, c] \cup (c, b]$$

与 A_0 无交．由此可见 d 仍然是 A_0 的一个小于 c 的上界，与假设矛盾

情形2．假定 $c \in A_0$ ，则 $c \neq b$ ，于是或者 $c = a$ ，或者 $a < c < b$ ，因为 A_0 在 $[a, b]$ 中是开的，一定存在某一个形如 $[c, e)$ 的区间包含在 A_0 中．参见图24.2．根据线性连续统 L 的序性质(2)，可在 L 中选取一点 z ，使得 $c < z < e$ ．于是 $z \in A_0$ ，这与 c 是 A_0 的一个上界矛盾

> [!quote] COR
> $\mathbb{R}$ 连通，且 $\mathbb{R}$ 中的每一个区间和射线也都是连通的

12-3 拓扑学中的介值定理

作为应用，我们证明微积分中的介值定理的一个适当的推广形式.

> [!quote] THM 介值定理(intermediate value theorem)
> $f : X \to Y$ 是从连通空间 X 到具有序拓扑的全序集 Y 的一个连续映射。若 a 和 b 是 X 的两个点并且 r 是 Y 中介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一个点，则 X 中存在一个点 c 使得 $f(c) = r$

假定定理所设条件成立. 那么

$$A = f(X) \cap (-\infty, r) \quad \text{和} \quad B = f(X) \cap (r, +\infty)$$

是无交的，由于 A 和 B 中一个包含 $f(a)$ ，另一个包含 $f(b)$ ，所以它们都是非空的。由于它们是 Y 的开射线与 $f(X)$ 的交，所以都是 $f(X)$ 的开集。若 X 中不存在使得 $f(c) = r$ 的点 c ，那么 $f(X)$ 就等于是集合 A 与 B 的并。于是 A 和 B 便组成 $f(X)$ 的一个分割，这与连通空间的连续像是连通的这一事实相矛盾

> [!warning] RMK
> 作为特殊情形，若取 X 为 $\mathbb{R}$ 中的闭区间并且取 Y 为 $\mathbb{R}$ ，便可得到微积分中的介值定理

> [!quote] EX
> 一个异于 $\mathbb{R}$ 的线性连续统的例子是有序矩形。我们只验证上确界性质（线性连续统定义中的第二个要求是显然的）。设 A 为 $I \times I$ 的一个子集。设 $\pi_1 : I \times I \to I$ 是向第一个坐标空间的投射，并令 $b = \sup \pi_1(A)$ 。若 $b \in \pi_1(A)$ ，则 A 与 $I \times I$ 的子集 $b \times I$ 相交，因为 $b \times I$ 具有 I 的序型， $A \cap (b \times I)$ 有上确界 $b \times c$，它也是 A 的上确界。
>
> 如果 $b \notin \pi_1(A)$，则$b \times 0$ 是 A 的上确界．而满足 $b' < b$ 的形如 $b' \times c$ 的元素都不可能是 A 的上界，因为此时 b' 将是 $\pi_1(A)$ 的一个上界

> [!quote] EX
> 如果 X 是一个良序集，留给读者自行验证 $X \times [0,1)$ 关于字典序是一个线性连续统。这个集合可以看成是在 X 的每一个元素和它的紧接后元之间“填充”一个具有 $(0，1)$ 序型的集合而构成的

第13节 分支与局部连通性

13-1 分支

对于任意给定的空间 X ，有一种自然的方法将它分成一些连通的（或道路连通的）块。现在我们处理这个问题

> [!quote] PROP
> 空间 X 中存在等价关系：若 X 中存在包含 x 与 y 的连通子空间，则规定 $x \sim y$

对称性与自反性是显然的
传递性的推导如下：设 A 是包含 x 和 y 的一个连通子空间，并且 B 是包含 y 和 z 的一个连通子空间，因为 A 和 B 有公共点 y ，所以 $A \cup B$ 是包含 x 和 z 的连通子空间

> [!] 分支/连通分支 (component)
> 每一等价类称 X 的一**分支/连通分支 (component)**

> [!quote] THM
> X 的所有分支是 X 中这样一些两两无交的连通子空间，它们的并等于 X ，并且 X 中的每一个非空的连通子空间仅与一个分支相交

作为等价类的全体， X 的所有分支是两两无交的，并且其并等于 X 。 X 的每一个连通子空间 A 仅与一个分支相交。事实上，若 A 与 X 的分支 C_1 和 C_2 都相交，设分别有交点 x_1 和 x_2 ，那么根据定义有 $x_1 \sim x_2$ ，而这是不可能的，除非 $C_1 = C_2$
为了证明分支 C 是连通的，在 C 中取一点 x_0 。对于 C 的每一个点 x 我们有 $x_0 \sim x$ ，从而存在一个包含 x_0 和 x 的连通子空间 A_x 。根据刚刚证明的结果可见， $A_x \subset C$ 。因此，$C = \bigcup_{x \in C} A_x$
因为这些子空间 A_x 都是连通的并且有一个公共点 x_0 ，所以它们的并是连通的

> [!] 道路连通分支（path component）
> 在空间 X 上规定另外一种等价关系如下：。每一等价类称为 X 的一个**道路连通分支（path component）**

> [!quote] PROP
> 空间 X 中存在等价关系：若 X 中存在一个从 x 到 y 的道路，我们规定 $x \sim y$

首先注意，如果存在一个以闭区间 $[a, b]$ 为定义域的从 x 到 y 的道路 $f : [a, b] \to X$ ，则也存在一个以闭区间 $[c, d]$ 为定义域的从 x 到 y 的道路 g （因为 $\mathbb{R}$ 中任何两个闭区间 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 都是同胚的）
==（自反性）==对于 X 中每一个 x ， $x \sim x$ 可由常值道路 $f : [a, b] \to X$ 直接得到，其中，对于所有的 t 有 $f(t) = x$ 。
==（对称性）==若 $f : [0, 1] \to X$ 是从 x 到 y 的一条道路，那么由 $g(t) = f(1 - t)$ 定义的“逆道路” $g : [0, 1] \to X$ 就是从 y 到 x 的一条道路。
==（传递性）==设从 x 到 y 的一条道路为 $f : [0, 1] \to X$ ，从 y 到 z 的一条道路为 $g : [1, 2] \to X$ ，我们“黏结 f 和 g ”而得到一个从 x 到 z 的道路 $h : [0, 2] \to X$ ，由定理 18.3“黏结引理”可知，道路 h 是连续的

与前面一个定理的证明相仿，我们有以下定理：

> [!quote] THM
> X 的所有道路分支是 X 中这样一些两两无交的道路连通子空间，它们的并等于 X ，并且 X 中每一个非空道路连通子空间仅与一个道路分支相交

注意，由于 X 的连通子空间的闭包是连通的，所以空间 X 的每一个分支是 X 中的闭集。如果 X 只有有限多个分支，那么每一个分支也是 X 中的开集，这是由于每一个分支的补是有限个闭集的并．但是，一般情况下， X 的分支未必是 X 的开集.

X 的道路连通分支则不具备上述这些好的性质，它们未必是 X 中的开集，也未必是 X 中的闭集．考虑以下例子

例1 如果 $\mathbb{Q}$ 是所有有理数组成的 $\mathbb{R}$ 的子空间，则 $\mathbb{Q}$ 的每一分支为单点集． $\mathbb{Q}$ 的每一分支都不是 $\mathbb{Q}$ 的开集
例2 前一节中给出的“拓扑学家的正弦曲线” $\overline{S}$ 是具有一个分支(因为它是连通的)和两个道路分支的空间．其中，一个道路分支为 S ，另一个道路分支为垂直区间 $V=0\times[-1,1]$ 注意到 S 为 $\overline{S}$ 的非闭的开集，而 V 为 $\overline{S}$ 的非开的闭集
如果从 $\overline{S}$ 中去掉 V 中所有第二坐标为有理数的点，则所得到的空间仅有一个分支但有不可数个道路分支

13-2 局部连通性

对一个空间来说，连通性是一个有用的性质。但是，在某些场合下，空间局部地满足连通性条件则更为重要。粗略地说，局部连通性就是每一个点处都有一个“任意小”的连通邻域。精确定义如下：

> [!] 在 x 处局部连通的(locally connected at x)，局部连通的(locally connected)，在 x 处局部道路连通的(locally path connected at x)，局部道路连通的(locally path connected)
> 空间 X 称为**在 x 处局部连通的(locally connected at x)**，如果对于 x 的每一个邻域 U ，存在 x 的一个连通邻域 V 包含于 U 。若 X 在它的每一个点处都是局部连通的，则简称 X 是**局部连通的(locally connected)**。类似地，空间 X 称为**在 x 处局部道路连通的(locally path connected at x)**，如果对于 x 的每一个邻域 U ，都存在 x 的一个道路连通邻域 V 包含于 U 。若 X 在它的每一点处都是局部道路连通的，则称 X 是**局部道路连通的(locally path connected)**

例3 实直线中的每一个区间和每一条射线都是连通且局部连通的． $\mathbb{R}$ 的子空间 $[-1,0)\cup(0,1]$ 是不连通的，但它是局部连通的．拓扑学家的正弦曲线是连通的但不是局部连通的.有理数集 $\mathbb{Q}$ 既不连通也不局部连通.

定理25.3 空间 X 是局部连通的当且仅当 X 中的任何一个开集 U 的每一个分支在 X 中都是开的.

证 假设 X 是局部连通的， U 是 X 中的一个开集， C 是 U 的一个分支。如果 x 是 C 的点，我们可以选取 x 的一个连通邻域 V 使得 $V\subset U$ 。因为 V 是连通的，它就必然包含在 U 的分支 C 中。因此， C 在 X 中是开的。

反之，若 X 中开集的分支在 X 中是开的．给定 X 的一个点 x 以及 x 的一个邻域 U ，令 C 是 U 中包含 x 的分支．因为 C 是连通的，并且根据假设它在 X 中是开的，所以 X 在 x 处局部连通.

可以类似地证明以下定理：

定理25.4 空间 X 是局部道路连通的当且仅当 X 中的任何一个开集 U 的每一个道路分支在 X 中都是开的。

以下定理给出了道路分支与分支之间的关系：

定理25.5 若 X 是一个拓扑空间，则 X 的每一个道路分支必定包含在 X 的一个分支之中．若 X 是局部道路连通的，则 X 的分支和道路分支相同.

证设 C 是 X 的一个分支， x 是 C 的一个点， P 是 X 的包含 x 的那个道路分支．因为 P

是连通的，所以 $P \subset C$ 。如果 X 是局部道路连通的，我们要证明 $P = C$ 。假设 $P \subsetneq C$ 。令 Q 表示 X 中所有不同于 P 并且都与 C 相交的那些道路分支的并，其中每一个必定都要包含于 C ，于是

$$C = P \cup Q.$$

因为 X 是局部道路连通的，所以 X 的每一个道路分支在 X 中都是开的．因此， P （它是一个道路分支）和 Q （它是道路分支的并）在 X 中都是开的，它们构成 C 的一个分割．这与 C 的连通性矛盾.

练习

1. $\mathbb{R}_t$ 的分支和道路分支是什么？有哪些连续映射 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_t$?
2. (a) $\mathbb{R}^\infty$ （关于积拓扑）的分支和道路分支是什么?

(b)考虑具有一致拓扑的 $\mathbb{R}^n$ ，证明： x 和 y 属于 $\mathbb{R}^n$ 的同一个分支当且仅当序列

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots)$$

是有界的．[提示：只要考虑 $y = 0$ 的情形.]

(c)赋予 $\mathbb{R}^\infty$ 箱拓扑．证明： x 和 y 属于 $\mathbb{R}^\infty$ 的同一分支当且仅当序列 $x - y$ “终于零”．[提示：若 $x - y$ 不终于零，证明存在 $\mathbb{R}^\infty$ 的自同胚 h ，使得 $h(x)$ 有界而 $h(y)$ 无界.]

3. 证明有序矩形是局部连通但不是局部道路连通的。这个空间的道路分支是什么?
4. 设 X 是局部道路连通的。证明 X 的每一个连通开集是道路连通的。
5. 设 X 表示 $\mathbb{R}^2$ 中的区间 $[0, 1] \times 0$ 上的所有有理点。 T 表示连接点 $p = 0 \times 1$ 与 X 中点的所有线段的并。

(a)证明 T 是道路连通的，并且仅在点 p 处是局部连通的.
(b)求 $\mathbb{R}^2$ 的一个子空间，使得它是道路连通的，并且在它的任何点处都不是局部连通的.

6. 若对于 $x \in X$ 的每一个邻域 U ，存在 X 的一个连通子空间包含于 U ，并且这个连通子空间包含着 x 的某一个邻域，则称空间 X 在 x 处弱局部连通（weakly locally connected at x ）。证明，若 X 在它的每一点处都是弱局部连通的，则 X 是局部连通的。[提示：证明开集的分支是开的。]
7. 考虑画在图25.1中的那个“无穷扫帚” X 。证明： X 在点 p 不是局部连通的，但在点 p 是弱局部连通的。[提示： p 的任何连通邻域必定包含着所有点 a_i 。]

图25.1

8. 设 $p : X \to Y$ 是一个商映射。证明：若 X 局部连通，则 Y 局部连通。[提示：若 C 为 Y 的开集 U 的一个分支，证明： $p^{-1}(C)$ 为 $p^{-1}(U)$ 的所有分支的并。]
9. 设 G 是一个拓扑群， C 是 G 的含有单位元 e 的那个分支。证明 C 是 G 的一个正规子群。

[提示：若 $x \in G$ ，则 xC 是 G 含有 x 的那个分支.]

10. 设 X 是一个空间．若不存在 X 的由无交开集 A 和 B 所组成的分割 $X = A \cup B$ 使得 $x \in A$ 和 $y \in B$ ，我们就规定 $x \sim y$.

(a) 证明这是一个等价关系。其等价类我们称为 X 的拟分支（quasicomponents）。

(b) 证明 X 的每一个分支包含在 X 的一个拟分支之中。若 X 是局部连通的，则 X 的分支与拟分支相同。

(c) 令 K 表示集合 $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, $-K$ 表示集合 $\{-1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$. 试确定 $\mathbb{R}^2$ 的下列子空间的分支、道路分支以及拟分支:

$$
\begin{aligned}
&A = (K \times [0,1]) \cup \{0 \times 0\} \cup \{0 \times 1\}. \\
&B = A \cup ([0,1] \times \{0\}). \\
&C = (K \times [0,1]) \cup (-K \times [-1,0]) \cup ([0,1] \times -K) \cup ([-1,0] \times K).
\end{aligned}
$$

第14节 紧空间

14-1 紧致空间

紧致性远不及连通性那样自然。在拓扑学的最初阶段，人们就已经注意到实直线上闭区间 $[a,b]$ 具有一种特性，它对于证明极大值定理和一致连续性定理等结论起着至关重要的作用。但对于在任意拓扑空间中如何表述这个特性，人们长期不得而知。起初，人们以为 $[a,b]$ 的这一特性所指的是 $[a,b]$ 中任何一个无穷子集都有极限点，并且将其尊称为紧致性。后来，数学家们才意识到这种提法并未触及问题的本

质，而藉助空间的开覆盖所给出的一个较强的提法更为恰切。后面这种提法就是我们现在所讲的紧致性。它不像前者那样自然或直观，在展示其效用之前我们需要先来熟悉它

> [!NOTE] 开覆盖(open covering)
> $\mathcal{A}$ 是空间 X 的一个子集族，如果 $\mathcal{A}$ 的成员之并等于 X，则称 $\mathcal{A}$ 覆盖 X，或称 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个覆盖(covering)。如果 $\mathcal{A}$ 的每一成员都是 X 的开子集，则称它为 X 的一个**开覆盖(open covering)**

> [!NOTE] 紧致 (compact)
> 称空间 X 是 **紧致 (compact)** 的，若X 的任何一个开覆盖 $\mathcal{A}$ 包含着一个覆盖 X 的有限子族

例1 实直线 $\mathbb{R}$ 不是紧致的，因为由开区间

$$\mathcal{A}=\{(n,n+2)\mid n\in\mathbb{Z}\}$$

所组成的 $\mathbb{R}$ 的覆盖并不包含覆盖 $\mathbb{R}$ 的任何有限子族

例2 R的子空间

$$X=\{0\}\cup\{1/n\mid n\in\mathbf{Z}_+\}$$

是紧致的．任意给定 X 的一个开覆盖 $\mathcal{A}$ ， $\mathcal{A}$ 中总有一个成员 U 包含0，那么集合 U 除了有限多个点 $1/n$ 外，包含着 X 的所有其余点．对于 X 中每一个 U 以外的点，选取 $\mathcal{A}$ 中包含它的一个成员．于是 $\mathcal{A}$ 中这些成员连同成员 U 便组成了 $\mathcal{A}$ 的一个覆盖 X 的有限子族.

例3任何一个仅含有限多个点的空间必然是紧致的，因为此时 X 的每一个开覆盖都是有限的.

例4 区间(0，1]不是紧致的．开覆盖

$$\mathcal{A}=\{(1/n,1]\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$$

就不包含覆盖(0，1]的有限子族．同理，区间(0，1)也不是紧致的．另一方面，区间[0，1]是紧致的．或许读者已经在数学分析中熟悉了这一结论；尽管如此，稍后我们还是要对此加以证明.

一般说来，判定一个空间是否是紧致空间并非总是轻而易举的。首先，我们要证明几个关于如何从已知紧致空间出发去构造新的紧致空间的一般性定理。下一节，我们再来证明一些特殊空间的紧致性。这些空间包括实直线上所有的闭区间和 $\mathbb{R}^n$ 中所有的有界闭子集。

我们先来证明关于子空间的一些结论。设 Y 是 X 的一个子空间， $\mathcal{A}$ 是 X 的一个子集族，如果它的成员之并包含着 Y ，则称 $\mathcal{A}$ 覆盖 (cover) Y 。

引理26.1 设 Y 是 X 的一个子空间．那么， Y 是紧致的当且仅当由 X 的开集所组成的 Y 的每一个覆盖都包含着一个覆盖 Y 的有限子族.

证 假设 Y 是紧致的，并且 $\mathcal{A}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ 是由 X 的开集所组成的 Y 的一个覆盖．那么族

$$\{A_\alpha\cap Y\mid \alpha\in J\}$$

是由 Y 中开集所组成的 Y 的一个覆盖，因此有一个有限子族

$$\{A_{a_1}\cap Y,\ldots,A_{a_m}\cap Y\}$$

覆盖 Y ，于是 $\{A_{a_1},\ldots,A_{a_m}\}$ 就是 A 的一个覆盖 Y 的子族.

反之，假定假设条件成立，我们证明 Y 是紧致的。设 $\mathcal{A}'=\{A'_\alpha\}$ 是由 Y 中的开集所构成的 Y 的一个覆盖，对于每一个 α ，选取 X 中的开集 A_α 使得

$$A'_\alpha=A_\alpha\cap Y.$$

从而，族 $\mathcal{A}=\{A_\alpha\}$ 是由 X 中开集构成的 Y 的一个覆盖．根据假设，它有一个有限子族 $\{A_{\alpha_1},\ldots,A_{\alpha_m}\}$ 覆盖 Y ．于是 $\{A'_{\alpha_1}$ ，…， A'_{α_m} 便是 $\mathcal{A}'$ 的一个覆盖 Y 的子族.

定理26.2 紧致空间的每一个闭子集都是紧致的。

证 设 Y 是紧致空间 X 的一个闭子集。任意给定由 X 的开集组成的 Y 的一个覆盖 $\mathcal{A}$，将 $\mathcal{A}$ 添加一个开集 $X-Y$ 便构成 X 的一个开覆盖 $\mathcal{B}$，即

$$\mathcal{B}=\mathcal{A}\cup\{X-Y\}.$$

$\mathcal{B}$ 的一个有限子族便覆盖了 X ，如果这个有限子族含有集合 $X-Y$ ，那么就去掉 $X-Y$ ，如果没有 $X-Y$ ，则不再变动．由此得到的族就是 $\mathcal{A}$ 的覆盖 Y 的一个有限子族.

定理26.3 Hausdorff空间的每一个紧致子空间都是闭的.

证 设 Y 是一个Hausdorff空间 X 的一个紧致子空间。我们来证明 $X-Y$ 是开的，从而 Y 是闭的。

令 x_0 为 $X-Y$ 的一个点．我们证明存在一个 x_0 的与 Y 无交的邻域．对于 Y 中每一个点 y ，分别选取 x_0 和 y 的无交的邻域 U_y 和 V_y （应用Hausdorff条件).于是， X 的开集族 $\{V_y\mid y\in Y\}$ 就是 Y 的一个覆盖．因此，就有族中有限多个成员 V_{y_1} ，…， V_{y_n} 覆盖 Y .开集

$$V=V_{y_1}\cup\cdots\cup V_{y_n}$$

包含 Y ，并且它与由 x_0 的一些相应的邻域取交而构成的开集

$$U=U_{y_1}\cap\cdots\cap U_{y_n}$$

无交．因为，如果 z 是 V 中一点，则对于某一个 i 有 $z\in V_{y_i}$ ，因此 $z\notin U_{y_i}$ ，从而 $z\notin U$ 。参见图26.1.

图 26.1

那么， U 便是 x_0 的一个邻域，与 Y 无交．证明完成.

在前面这个定理的证明中论证的结论将来还会用到，我们在这里重新陈述一次以备引用：

引理26.4 设 Y 是一个Hausdorff空间 X 的一个紧致子空间， x_0 不属于 Y ，则存在 X 中的两个无交的开集 U 和 V ，它们分别包含 x_0 和 Y .

例5 一旦我们证明了 $\mathbb{R}$ 中的区间 $[a, b]$ 是紧致的，根据定理26.2就可推出 $[a, b]$ 中任何闭子空间都是紧致的。另一方面，从定理26.3推出 $\mathbb{R}$ 中区间 $(a, b]$ 和 (a, b) 不可能是紧致的（这是我们已经知道的），因为它们不是Hausdorff空间 $\mathbb{R}$ 中的闭集。

例6 在定理26.3的假设中Hausdorff条件是必要的，比如，考虑实直线上的有限补拓扑．就这个拓扑而言， $\mathbb{R}$ 的真子集中只有有限集才是闭的．读者可以验证：关于有限补拓扑， $\mathbb{R}$ 中每一个子集都是紧致的.

定理26.5 紧致空间的连续像是紧致的，

证 设 $f: X \rightarrow Y$ 连续。 X 是紧致的。 $\mathcal{A}$ 是由 Y 中开集所构成的 $f(X)$ 的一个覆盖。则集族

$$\left\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\right\}$$

是 X 的一个覆盖．因为 f 是连续的，这些集合都是 X 中开集．因此它们中有有限多个，比如说

$$f^{-1}\left(A_1\right), \ldots, f^{-1}\left(A_n\right),$$

便覆盖 X ．于是 A_1 ，...， A_n 覆盖 $f(X)$

这个定理的重要应用之一是验证一个映射是否是同胚

定理26.6 设 $f: X \rightarrow Y$ 是一个连续的一一映射。若 X 是紧致的，并且 Y 是Hausdorff的，则 f 是一个同胚。

证 我们证明在映射 f 下， X 中闭集的像是 Y 中的闭集。由此便得到映射 f^{-1} 的连续性。设 A 为 X 中闭集，那么根据定理26.2得知 A 是紧致的。因此按照刚才证明的那个定理可见

$f(A)$ 是紧致的．因为 Y 是一个Hausdorff空间，根据定理26.3可见 $f(A)$ 在 Y 中是闭的.

定理26.7 有限多个紧致空间的积是紧致的。

证 我们来证明两个紧致空间的积是紧致的。对于任意有限积的情形，只要用归纳法便可得到。

第一步．设给定空间 X 和 Y ，其中 Y 是紧致的．又设 x_0 是 X 的一个点， N 是 $X \times Y$ 中包含“薄片” $x_0 \times Y$ 的一个开集．我们证明以下结论： X 中存在 x_0 的一个邻域 W ，使得 N 包含着集合 $W \times Y$ ．集合 $W \times Y$ 通常称为关于 $x_0 \times Y$ 的一个管子(tube).

首先含在 N 中(关于 $X \times Y$ 的拓扑)的那些基元素 $U \times V$ 覆盖 $x_0 \times Y$. 作为一个同胚于 Y 的空间, $x_0 \times Y$ 是紧致的. 因此我们可用有限多个这样的基元素

$$U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$$

覆盖 $x_0 \times Y$ (假定每一个基元素 $U_i \times V_i$ 都与 $x_0 \times Y$ 相交，如果不然的话，这个基元素就是多余的。我们从这个集的有限族中去掉它之后仍然是 $x_0 \times Y$ 的一个覆盖)。令

$$\boldsymbol{W} = U_1 \cap \cdots \cap U_n.$$

集合 W 是开的，又因为每一个集合 $U_i \times V_i$ 都与 $x_0 \times Y$ 相交，所以 x_0 属于 W .

我们可以断言被选出来覆盖薄片 $x_0 \times Y$ 的这些集合 $U_i \times V_i$ 也覆盖着管子 $W \times Y$ 。设 $x \times y$ 是 $W \times Y$ 的一个点，考虑在薄片 $x_0 \times Y$ 上与这个点具有相同纵坐标的点 $x_0 \times y$ 。对于某一个 i 有 $x_0 \times y$ 属于 $U_i \times V_i$ ，所以 $y \in V_i$ 。而对于每一个 j 有 $x \in U_j$ （因为 $x \in W$ ）。于是有 $x \times y \in U_i \times V_i$ 。

由于所有这些集合 $U_i \times V_i$ 都在 N 中，并且它们覆盖 $W \times Y$ ，于是管子 $W \times Y$ 也包含在 N 中。参见图26.2。

图26.2

第二步．现在我们来完成定理证明．设 X 和 Y 都是紧致空间． $\mathcal{A}$ 是 $X \times Y$ 的一个开覆盖.给定 $x_0 \in X$ ，薄片 $x_0 \times Y$ 是紧致的，因此可以用 $\mathcal{A}$ 中有限多个成员 A_1 ，…， A_m 覆盖它．它们的并 $N = A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_m$ 是包含着 $x_0 \times Y$ 的一个开集．根据第一步，开集 N 包含着包含 $x_0 \times Y$ 的一个管子 $W \times Y$ ，其中 W 是 X 的一个开集．因此 $W \times Y$ 也被 $\mathcal{A}$ 中的有限多个成员 A_1 ，…， A_m 所覆盖.

于是，对于 X 中的每一个 x ，我们可以选择 x 的邻域 W_x ，使得管子 $W_x \times Y$ 能被 $\mathcal{A}$ 中有限多个成员所覆盖．所有这些邻域 W_x 组成 X 的一个开覆盖．因此，根据 X 的紧致性，存在

有限子族

$$\{W_1, \ldots, W_k\}$$

覆盖 X ，这些管子

$$W_1 \times Y, \ldots, W_k \times Y$$

的并便是 $X \times Y$. 由于每一个管子可以被 $\mathcal{A}$ 中有限多个成员覆盖, 所以 $X \times Y$ 也可以被 $\mathcal{A}$ 中有限多个成员覆盖.

上面这个证明中第一步的结论以后还要用到，我们把它重新陈述于此以备引用：

引理26.8[管状引理(tube lemma)] 考虑积空间 $X \times Y$ ，其中 Y 是紧致的。如果 N 是 $X \times Y$ 中包含着薄片 $x_0 \times Y$ 的一个开集，则 N 必包含着关于 $x_0 \times Y$ 的某一个管子 $W \times Y$ ，其中 W 是 x_0 在 X 中的一个邻域

例7 如果 Y 不是紧致的，则管状引理不一定正确．比如，设 Y 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 y 轴，并设

$$N=\{x \times y||x|<1/(y^2+1)\}$$

则 N 是包含集合 $0 \times \mathbb{R}$ 的一个开集，但它不包含关于 $0 \times \mathbb{R}$ 的任何管子。参见图26.3
很自然地，与之相关的一个问题就是：无穷多个紧致空间的积是紧致的吗？我们期望有肯定的回答，事实也的确如此。这个结果是如此重要（也是相当困难的），以至于要用给出证明的人的名字来为其命名，称之为Tychonoff定理
在证明连通空间的笛卡儿积仍然连通时，我们首先对有限积的情形给予证明，并且由此导出一般情形。然而，为了证明紧致空间还是紧致的，却无法根据有限积情形下的结论推出无限积情形下的结论。无限的情形则要求用一种全新的方法，证明是相当困难的。鉴于证明的难度较大，同时也是为了避免干扰本章讨论的主线，我们决定将其推后。然而，如果读者想尽快知道的话，也可以在本节之后立刻去看它的证明(第37节)，这不会对内容的连续性有什么影响

图 26.3
最后，关于空间的紧致性还有一个判别准则，它是用闭集而不是开集来阐述的。乍看起来，这既不自然又不便于使用，而事实上，在许多场合下它是很有用的。我们首先给出一个定义
定义 X 的一个子集族 $\mathcal{C}$ 称为具有有限交性质(finite intersection property)，如果 $\mathcal{C}$ 的任何一个有限子族

$$\{C_1, \ldots, C_n\}$$

的交 $C_1 \cap \cdots \cap C_n$ 是非空的
定理26.9 设 X 是一个拓扑空间．则 X 是紧致的当且仅当 X 中具有有限交性质的每一个闭集族 $\mathcal{C}$ ，它的所有成员的交 $\bigcap_{c \in \mathcal{C}} C$ 是非空的
证 给定 X 的一个子集族 $\mathcal{A}$ ，则

$$\mathcal{C}=\{X-A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

是它们的补所构成的族．于是我们有下列论断：

(1) $\mathcal{A}$ 是开集族当且仅当 $\mathcal{C}$ 是闭集族
(2) 集族 $\mathcal{A}$ 覆盖 X 当且仅当 $\mathcal{C}$ 的所有成员的交 $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$ 是空集
(3) $\mathcal{A}$ 的有限子族 $\{A_1,\ldots,A_n\}$ 覆盖 X 当且仅当 $\mathcal{C}$ 中相应成员 $C_i=X-A_i$ 的交是空集. 论断(1)是显然的，而论断(2)和论断(3)可由 DeMorgan 法则

$$X-\left(\bigcup_{a\in J} A_a\right)=\bigcap_{a\in J}(X-A_a)$$

推出
现在用两个简单的步骤进行证明：先考虑定理的逆否命题，然后取集合的补！
X 是紧致的这句话等于说：“对 X 的任何开子集族 $\mathcal{A}$，如果 $\mathcal{A}$ 覆盖 X，则有 $\mathcal{A}$ 的某一个有限子族覆盖 X。”这个论断又等价于它的逆否命题：“对任意开集族 $\mathcal{A}$，如果 $\mathcal{A}$ 中没有有限的子族覆盖 X，则 $\mathcal{A}$ 不能覆盖 X。”与前面相仿，令 $\mathcal{C}$ 为集族 $\{X-A \mid A\in\mathcal{A}\}$，再应用论断(1)～(3)，我们看到这个论断等价于“对于任意闭集族 $\mathcal{C}$，如果 $\mathcal{C}$ 中任何有限个成员的交非空，则 $\mathcal{C}$ 的所有成员的交非空。”这恰好就是我们定理的条件
当我们有紧致空间 X 闭集的一个套序列(nested sequence) $C_1\supset C_2\supset\cdots\supset C_n\supset C_{n+1}\ldots$ 时，便得到定理的一种特殊情况。容易证明，如果每一个 C_n 是非空的，那么集族 $\mathcal{C}=\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 自然具有有限交性质。于是交

$$\bigcap_{n\in\mathbf{Z}_+} C_n$$

非空
我们在下一节中证明实数集的不可数性，在第5章中证明Tychonoff定理以及在第8章中证明Baire范畴定理的时候，都要用到这个紧致性的闭集判别准则

练习

1. (a) 设 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 是 X 的两个拓扑，并且 $\mathcal{T}'\supset\mathcal{T}$. X 关于其中哪一个拓扑是紧致的可以推出对另一个拓扑 X 是紧致的?
   (b)证明：若 X 关于 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 都是紧致的Hausdorff空间，则或者 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}'$ 相等，或者它们不能比较.
2. (a) 证明：相对于有限补拓扑而言， $\mathbb{R}$ 的任何子集都是紧致的。
   (b)由 $\mathbb{R}$ 的满足 $\mathbb{R}-A$ 是一个可数集或者是整个 $\mathbb{R}$ 的所有子集 A 构成的 $\mathbb{R}$ 的拓扑，相对于这个拓扑 $[0，1]$ 是紧致子空间吗?
3. 证明：紧致子空间的有限并是紧致的。
4. 证明：度量空间的每一个紧致子空间，对于给定的度量而言是有界的并且是闭的。找一个度量空间，在它里面并不是每一个有界闭子集都是紧致的。

5. 设 A 和 B 是一个Hausdorff空间中的两个无交的紧致子空间。证明存在分别包含 A 和 B 的无交的开集 U 和 V 。
6. 证明：若 $f: X \to Y$ 是连续的，其中 X 是紧致的， Y 是 Hausdorff 的，则 f 是闭映射（也就是 f 将闭集映为闭集）.
7. 证明：若 Y 是紧致的，则投射 $\pi_1: X \times Y \to X$ 是闭映射。
8. 定理 设 $f: X \to Y, Y$ 是紧致的 Hausdorff 空间. 则 f 连续当且仅当 f 的图形 (graph)

$$G_f = \{x \times f(x) \mid x \in X\}$$

是 $X \times Y$ 的闭集。[提示：若 G_f 是闭的， V 是 $f(x_0)$ 的一个邻域，则 G_f 与 $X \times (Y - V)$ 的交为闭集。应用习题7的结论。]

9. 下面是管状引理的推广：

定理 设 A 和 B 分别是 X 和 Y 的子集， N 是 $X \times Y$ 中包含 $A \times B$ 的一个开集。若 A 和 B 都是紧致的，则在 X 和 Y 中分别存在开集 U 和 V ，使得

$$A \times B \subset U \times V \subset N.$$

10. (a) 证明以下一致极限定理的部分逆：

定理 设 $f_n: X \to \mathbb{R}$ 是连续函数的一个序列，并且对于每一个 $x \in X$ 有 $f_n(x) \to f(x)$ 。若 f 连续， f_n 单调上升并且 X 是紧致的，则这个收敛是一致收敛。[若对于所有 n 和 x 有 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ ，则称 f_n 是单调上升的。]

(b) 举例说明，如果去掉 X 是紧致的这个条件，或去掉序列是单调的这个条件，则定理不成立。[提示：见第21节习题。]

11. 定理 设 X 是紧致的 Hausdorff 空间， $\mathcal{A}$ 是 X 的闭的连通子集的一个族，并且 $\mathcal{A}$ 在真包含关系之下是全序的，则

$$Y = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$$

是连通的. [提示：若 $C \cup D$ 是 Y 的一个分割，在 X 中找出无交的开集 U 和 V ，它们分别包含 C 和 D ，然后证明

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} (A - (U \cup V))$$

不是空集.]

12. 设 $p: X \to Y$ 是一个闭连续满射，对于每一个 y ， $p^{-1}(\{y\})$ 是一个紧致空间。（这样的映射也称之为完备映射(perfect map).）证明：若 Y 是紧致的，则 X 是紧致的。[提示：若 U 是包含

$p^{-1}(\{y\})$ 的一个开集，那么存在一个 y 的邻域 W ，使得 $p^{-1}(W)$ 被 U 所包含.]

13. 设 G 是一个拓扑群

(a) 设 A 和 B 是 G 的一个子集，如果在 G 中 A 是闭的并且 B 是紧致的，则 $A \cdot B$ 在 G 中是闭的。[提示：若 c 不在 $A \cdot B$ 中，找一个 c 的邻域 W ，使得 $W \cdot B^{-1}$ 与 A 无交。]
(b) 设 H 是 G 的一个子群， $p : G \to G/H$ 是一个商映射。若 H 是紧致的，证明 p 是一个闭映射。
(c) 设 H 是 G 的一个紧致子群。证明：若 G/H 是紧致的，则 G 是紧致的。

第15节 IR上的紧子空间

15-1 IR上的紧子空间

上一节中的某些定理使我们能够从已知的紧致空间来构造新的紧致空间，但是要想得到更多的紧致空间，我们必须先有一些紧致空间。最自然的办法当然还是从实直线开始，我们将证明 $\mathbb{R}$ 中每一个闭区间都是紧致的。其应用包括微积分中的极值定理和一致连续性定理的适当形

式的推广．我们也将对 $\mathbb{R}^n$ 中的所有紧致空间给出一个刻画，也将给出实数集不可数的证明.

为了证明 $\mathbb{R}$ 中每一个闭区间是紧致的，我们仅需要用到实直线的序性质中的一个条件，即上确界性质。只用这一个性质便可以证明这个定理。因此，这个定理不仅适用于实直线，也同样适用于良序集和其他全序集。

定理27.1 设 X 是具有上确界性质的一个全序集．则关于序拓扑， X 中的每一个闭区间都是紧致的.

证 第一步．给定 $a < b$ ，设 $\mathcal{A}$ 是 $[a, b]$ 的一个覆盖，它的成员是 $[a, b]$ 中关于子空间拓扑(与序拓扑相同)的开集．下面证明存在一个 $\mathcal{A}$ 的有限子族覆盖 $[a, b]$ ．首先证明：若 x 是 $[a, b]$ 中异于 b 的点，则在 $[a, b]$ 中存在点 $y > x$ ，使得区间 $[x, y]$ 可由 $\mathcal{A}$ 中最多两个成员覆盖.

若 x 在 X 中有直接后元，则令 y 为这个直接后元。那么 $[x, y]$ 由两个点 x 和 y 所组成，所以它可为 $\mathcal{A}$ 中最多两个成员所覆盖。若 x 在 X 中没有直接后元，则选取 $\mathcal{A}$ 中包含 x 的一个成员 A 。由于 $x \neq b$ 以及 A 是一个开集，所以对于 $[a, b]$ 中的某一个点 c 有 A 包含着形如 $[x, c)$ 的区间。在 (x, c) 中选取一点 y ，则区间 $[x, y]$ 被 $\mathcal{A}$ 中一个成员 A 所覆盖。

第二步．设 C 为 $[a, b]$ 中所有具有以下性质的点 $y > a$ 的集合：区间 $[a, y]$ 能够为 $\mathcal{A}$ 中有限多个成员所覆盖．对于 $x = a$ ，应用第一步的结论可见至少有一个这样的 y 存在，从而 C 是非空的．令 c 是集合 C 的上确界，则 $a < c \leqslant b$

第三步．下面证明 c 属于 C ，也就是证明区间 $[a, c]$ 被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员所覆盖．选取 $\mathcal{A}$ 中包含 c 的一个成员 A ，因为 A 是开的，所以对于 $[a, b]$ 中某一个 d ， A 包含区间 $(d, c]$.若 c 不属于 C ，那

么必然存在 C 中一点 $\boldsymbol{z}$ 包含在区间 (d,c) 中(否则， d 将是 C 上比 c 还要小的上界)，参见图27.1．由于 $\boldsymbol{z}$ 在 C 中，所以区间 $[a,z]$ 能被 $\mathcal{A}$ 中有限多个(比如说 n 个)成员所覆盖．由于 $[z,c]$ 是包含在 $\mathcal{A}$ 的一个成员 A 中，因此 $[a,c]=[a,z]\cup[z,c]$ 被 $\mathcal{A}$ 中 $n+1$ 个成员所覆盖．于是 c 在 C 中，这与假设矛盾.

第四步．最后，证明 $c=b$ ，从而完成定理的证明．假设 $c<b$ ，对于 $x=c$ 应用第一步得到：存在 $[a,b]$ 的一个点 $y>c$ ，使得区间 $[c,y]$ 能被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员所覆盖，参见图27.2．我们在第三步中已经证明了 c 属于 C ，从而 $[a,c]$ 可以被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员所覆盖．因此区间

$$[a,y]=[a,c]\cup[c,y]$$

也能被 $\mathcal{A}$ 中有限个成员所覆盖，这就意味着 y 属于 C ，与 c 是 C 的一个上界矛盾.

图27.1

图27.2

推论27.2 $\mathbb{R}$ 中任何一个闭区间都是紧致的，

现在我们来刻划 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致子空间：

定理27.3 $\mathbb{R}^n$ 中一个子集 A 是紧致的，当且仅当它是闭的并且就欧氏度量 d 或平方度量 ρ 而言是有界的。

证 只要考虑度量 ρ 就可以了，因为不等式

$$\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant\sqrt{n}\rho(x,y)$$

保证了 A 在 ρ 中有界当且仅当它在 d 中有界.

假设 A 是紧致的．根据定理26.3可见它是闭的．考虑开集族

$$\{B_\rho(\mathbf{0},m)\mid m\in\mathbb{Z}_+\},$$

其并为 $\mathbb{R}^n$ ，于是有一个有限子族覆盖 A ，从而，对于某一个 M 有 $A\subset B_\rho(\mathbf{0},M)$ ，于是，对于 A 中任意两点 x 和 y ，我们有 $\rho(x,y)\leqslant 2M$ ，因此， A 对于 ρ 而言是有界的.

反之，假设 A 是闭的并且关于 ρ 是有界的．假设对于 A 中任意一对点 x 和 y 有 $\rho(x,y)\leqslant N$. 选取 A 中点 x_0 ，并且令 $\rho(x_0,\mathbf{0})=b$ ，于是对于 A 中任意 x ，由三角不等式可以推出 $\rho(x,\mathbf{0})\leqslant N+b$. 如果令 $P=N+b$ ，则 A 是紧致方体 $[-P,P]^n$ 的一个子集，又由于 A 是闭集，所以 A 也是紧致的.

学生们常将这个定理记忆为：度量空间中的紧致子空间族就是有界闭集族．这显然荒谬，因为什么样的集合是有界的这与它的度量有关，而什么样的集合是紧致的则只依赖于空间的拓扑.

例1 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面 S^{n-1} 和闭的单位球体 B^n 都是紧致的，因为它们都是有界的闭集．集合

$$A=\{x\times(1/x)\mid 0<x\leqslant 1\}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中是闭的，但它不是紧致的，因为它不是有界的．集合

$$S=\{x\times(\sin(1/x))\mid 0<x\leqslant 1\}$$

在 $\mathbb{R}^2$ 中是有界的，但它不是紧致的，因为它不是闭的。

现在我们证明微积分中极值定理的适当的推广形式.

定理27.4[极值定理(extreme value theorem)] 设 $f:X\rightarrow Y$ 是连续的，其中 Y 是具有序拓扑的全序集。若 X 是紧致的，则在 X 中存在点 c 和 d ，使得对于所有的 $x\in X$ 有 $f(c)\leqslant f(x)\leqslant f(d)$ 。

微积分中的极值定理只是这个定理的一种特殊情形，这只要在定理中取 X 为 $\mathbb{R}$ 的闭区间，取 Y 为 $\mathbb{R}$ 即可.

证 由于 f 连续并且 X 是紧致的，所以集合 $A=f(X)$ 是紧致的．我们证明 A 有一个最大元 M 和一个最小元 m ．因而，由于 m 和 M 属于 A ，必存在 X 中点 c 和 d 使 $m=f(c)$ 和 $M=f(d)$.

若 A 没有最大元，那么集合族

$$\{(-\infty,a)\mid a\in A\}$$

就是 A 的一个开覆盖．由于 A 是紧致的，就有有限的子族

$$\{(-\infty,a_1),\ldots,(-\infty,a_n)\}$$

覆盖 A ：设 a_i 是 $a_1,\ldots,a_n$ 中的最大者，则 a_i 不属于这些集合中的任何一个，这与它们覆盖 A 矛盾.

可以相仿地证明 A 有最小元

现在我们来证明微积分中的一致连续性定理。为此，我们需要引入一个极为有用的概念，即度量空间开覆盖的Lebesgue数。作为准备，先给出以下概念：

定义 设 (X,d) 是一个度量空间。A 是 X 的一个非空子集。对于每一个 $x\in X$ ，x 到 A 的距离(distance from x to A) 定义为

$$d(x,A)=\inf\{d(x,a)\mid a\in A\}.$$

易见，对于固定的 A ，函数 $d(x,A)$ 是关于 x 的连续函数：对于给定的 x 和 y 以及每一个 $a\in A$ ，不等式

$$d(x,A)\leqslant d(x,a)\leqslant d(x,y)+d(y,a)$$

成立．从而，

$$d(x,A)-d(x,y)\leqslant \inf d(y,a)=d(y,A),$$

因此，

$$d(x,A)-d(y,A)\leqslant d(x,y).$$

交换 x 和 y 的位置，以上不等式仍然成立．由此推出 $d(x,A)$ 的连续性.

现在引进Lebesgue数的概念．前面讲过，度量空间中的一个有界子集 A 的直径是指

$$\sup\left\{d\left(a_1,a_2\right)\mid a_1,a_2\in A\right\}.$$

引理27.5[Lebesgue数引理(Lebesgue number lemma)] 设 $\mathcal{A}$ 为度量空间 (X,d) 的一个开覆盖．若 X 是紧致的，则存在 $\delta>0$ 使得 X 的每一个直径小于 δ 的子集包含在 $\mathcal{A}$ 的某一元素之中.

数 δ 称为开覆盖 $\mathcal{A}$ 的一个Lebesgue 数(Lebesgue number).

证 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个开覆盖。若 X 本身是 $\mathcal{A}$ 的一个元素，那么任何一个正数都是 $\mathcal{A}$ 的Lebesgue数。以下假定 X 不是 $\mathcal{A}$ 的元素。

选取 A 的子集的一个有限族 $\{A_1,\ldots,A_n\}$ 覆盖 X ，对于每一个 i ，记 $C_i=X-A_i$ ，通过取 $f(x)$ 为 $d(x,C_i)$ 的平均数，定义一个映射 f ： $X\to\mathbb{R}$ ，即

$$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d(x,C_i).$$

我们证明：对每一个 x ， $f(x)>0$ 。任意给定 $x\in X$ ，取 i 使得 $x\in A_i$ 。再选取 ε 使得 x 的 ε -邻域包含于 A_i 。则 $d(x,C_i)\geqslant\varepsilon$ ，从而 $f(x)\geqslant\varepsilon/n$ 。

因为 f 是连续的，它有极小值 δ 。我们证明 δ 就是所求的Lebesgue数。设 B 为 X 中一个直径小于 δ 的子集，在 B 中取一点 x_0 ，则 B 位于 x_0 的 δ -邻域中。那么

$$\delta\leqslant f\left(x_0\right)\leqslant d\left(x_0,C_m\right).$$

其中 $d(x_0,C_m)$ 是所有 $d(x_0,C_i)$ 中的最大者。那么 x_0 的 δ 邻域被包含在开覆盖 $\mathcal{A}$ 的元素 $A_m=X-C_m$ 之中。

定义 设 f 是从度量空间 (X, d_X) 到度量空间 (Y, d_Y) 的一个函数。若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对于 X 的任何两点 x_0, x_1，有

$$d_X(x_0, x_1) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x_0), f(x_1)) < \varepsilon,$$

则称函数 f 是一致连续的(uniformly continuous).

定理27.6[一致连续性定理(uniform continuity theorem)] 设 $f: X \rightarrow Y$ 是从紧致度量空间 (X, d_X) 到度量空间 (Y, d_Y) 的连续映射。则 f 是一致连续的。

证 任意给定 $\varepsilon > 0$，考虑由半径为 $\varepsilon/2$ 的球 $B(y, \varepsilon/2)$ 所组成的 Y 的一个开覆盖。令 $\mathcal{A}$ 为这些球在 f 下的原像所构成的 X 的那个开覆盖。记 δ 为开覆盖 $\mathcal{A}$ 的一个Lebesgue数。则对于 X 中满足 $d_X(x_1, x_2) < \delta$ 的两点 x_1, x_2，由于这两点组成的集合 $\{x_1, x_2\}$ 的直径小于 δ，其像

集 $\{f(x_1), f(x_2)\}$ 必含在某一个开球 $B(y, \varepsilon/2)$ 之中．从而 $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

最后，我们来证明实数是不可数的。有趣的是，这个证明完全不用代数的方法（既不用十进位小数，也不用二进位小数或者其他什么方法），而仅仅用到 $\mathbb{R}$ 的序性质。

定义 设 X 是一个空间， $x \in X$ 。若单点集 $\{x\}$ 在 X 中是开的，则称 x 为 X 的一个孤立点（isolated point）。

定理27.7 设 X 是一个非空的紧致的Hausdorff空间．若 X 中没有孤立点，则 X 是不可数的.

证 第一步．首先证明：给定 X 的一个非空的开集 U 和一点 $x \in X$，则存在一个包含于 U 的非空开集 V，使得 $x \notin \bar{V}$ 。

我们总可以在 U 中选取一个异于 x 的点 y 。当 x 在 U 中时，由于 x 不是孤立点，可见 y 的存在性。当 x 不在 U 中时，由于 U 非空，也可见 y 的存在性。然后分别选取包含 x 和 y 的无交开集 W_1 和 W_2 。那么集合 $V = U \cap W_2$ 便是我们所需的开集。 V 包含在 U 中，它含有点 y，所以不是空集，并且 V 的闭包不包含 x 。参见图27.3。

第二步．我们证明：任何一个函数 $f: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$， f 都不是满射．由此可见， X 是不可数的.

设 $x_n = f(n)$，对于非空的开集 $U = X$，应用第一步的结论，选取非空开集 $V_1 \subset X$ 使得 $\bar{V}_1$ 不包含 x_1 一般地，对给定的非空开集 V_{n-1}，能够选取非空开集 V_n，使得 $V_n \subset V_{n-1}$ 并且 $\bar{V}_n$ 不包含 x_n，考虑 X 的非空闭集套序列：

图27.3

$$\bar{V}_1 \supset \bar{V}_2 \supset \ldots.$$

因为 X 是紧致的，根据定理26.9，存在点 $x \in \bigcap \bar{V}_n$ 。因为 x 属于 $\bar{V}_n$ 而 x_n 不属于 $\bar{V}_n$ ，所以对于任意 n ，点 x 不等于 x_n 。
推论27.8 $\mathbb{R}$ 中的每一个闭区间都不可数

练习

> [!quote] Q
> X 是一个全序集，并且它的每一个闭区间都是紧致的，证明 X 具有上确界性质

> [!quote] Q
> (X, d) 是度量空间， $\varnothing \neq A \subseteq X$
> (a) 证明 $d(x, A)=0 \iff x \in \overline{A}$
> (b)A 是一个紧致空间，证明对于某 $a \in A$ ，有 $d(x, A)=d(x, a)$
> (c) A 在 X 中的 $\varepsilon-$邻域定义为
> $$U(A, \epsilon)=\{x \mid d(x, A)<\epsilon\}$$
> 证明 $U(A, \varepsilon)$ 等于所有开球 $B_d(a, \varepsilon)$ 之并，其中 $a \in A$
> (d) 设 A 是一个紧致子空间，U 是包含 A 的一个开集. 证明 A 的某 ε -邻域含在 U 中
> (e)当 A 是一个闭集但不紧致时，(d)小题中的结论不成立

> [!quote] Q
> $\mathbb{R}_K$ 表示 $\mathbb{R}$ 赋予 K-拓扑
> (a) 证明 $[0,1]$ 作为 $\mathbb{R}_K$ 的子空间不是紧致的
> (b) 证明 $\mathbb{R}_K$ 是连通的（提示： $(-\infty, 0)$ 和 $(0,+\infty)$ 作为 $\mathbb{R}_K$ 的子空间也继承了其通常拓扑）
> (c) 证明 $\mathbb{R}_K$ 不是道路连通的

> [!quote] Q
> 证明多于一点的连通度量空间是不可数的

> [!quote] Q
> X 是一个紧致的 Hausdorff 空间， $\{A_n\}$ 是 X 的闭集的一个可数族
> 证明若每一个 A_n 在 X 中有空内部，则它们的并 $\bigcup A_n$ 在 X 中有空内部。[提示：仿照定理 27.7 的证明] 这是我们将在第 8 章中讨论的 Baire 范畴定理的一个特殊情形

> [!quote] Q
> A_0 是 $\mathbb{R}$ 中的闭区间 $[0,1]$ ， A_1 是从 A_0 中去掉它的“中间三分之一” $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 而得到的集合， A_2 是从 A_1 中去掉它的两个“中间三分之一” $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ 和 $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ 而得到的集合。一般来说， A_n 定义为

$$A_n = A_{n-1} - \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+3k}{3^n}, \frac{2+3k}{3^n} \right).$$

它们的交

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} A_n$$

称为 **Cantor 集 (Cantor set)**, 它是 $[0,1]$ 的子空间
(a) 证明 C 是完全不连通的
(b) 证明 C 是紧致的
(c) 证明每一个集合 A_n 是有限多个长度为 $1/3^n$ 的无交闭区间的并，然后证明这些区间的端点属于 C
(d)证明 C 中没有孤立点
(e)结论： C 是不可数的

第16节 极限点与紧致性

16-1 极限点与紧致性

在最初提到紧致集合的时候，我们曾经指出紧致性概念还有另外一些常用的提法。本节我们介绍其中的一个。一般说来，它比紧致性弱，但在度量空间上，它们是相同的。

定义 如果空间 X 中任何一个无穷子集都有极限点，则称 X 是极限点紧致的（limit point compact）。

从某种角度讲，这个性质比紧致性显得更为自然和直观。在拓扑学的早期，它被命名为“紧致性”，而开覆盖定义则被称为“双紧致性”。后来，“紧致”这个词让位于开覆盖定义，致使上述性质留待人们赋予新的名称。然而，至今人们尚未就此达成共识。在历史上，曾有人称之为“Frechet 紧致性”，也有人称之为“Bolzano-Weierstrass 性质”。我们提出了“极限点紧致性”这个术语。它似乎较为合理，至少它揭示了这一性质的某些内涵。

定理28.1 紧致性蕴涵着极限点紧致性，但反之不真。

证 设 X 是一个紧致空间．给定 X 的一个子集 A ，我们要证明：若 A 为无限集，则 A 必

有极限点．下面证明它的逆否命题：如果 A 没有极限点，则 A 必为有限集.

假设 A 没有极限点．那么 A 包含它的所有极限点，因而 A 是一个闭集．于是，对于每一个 $a \in A$ ，我们可以选取一个 a 的邻域 U_a ，使得 U_a 与 A 的交仅含单点 a ：紧致空间 X 便被开集 $X - A$ 和这

些开集 U_a 所覆盖，那么其中的有限个开集就构成了 X 的覆盖．由于 $X-A$ 与 A 无交，以及每一个 U_a 仅含有 A 的一个点，因此 A 必为有限集.

例1设 Y 是由两点组成的集合，再赋予 Y 由 Y 本身和空集所构成的拓扑．则空间 $X=\mathbb{Z}_+\times Y$ 是极限点紧致的．这是因为 X 的每一个非空子集都有极限点．由于由所有开集 $U_n=\{n\}\times Y$ 组成的开覆盖没有有限子覆盖，所有 X 不是紧致的.

例2 这是一个特殊的例子。考虑具有序拓扑的极小的不可数良序集 S_Ω 。空间 S_Ω 不是紧致的，因为它不包含最大元；然而，它是极限点紧致的。事实上，若 A 是 S_Ω 的一个无穷子集，可选取 A 的一个可数无限子集 B 。作为一个可数集合， B 在 S_Ω 中有上界 b 。于是 B 是 S_Ω 的区间 $[a_0,b]$ 的一个子集，其中 a_0 是 S_Ω 的最小元。由于 S_Ω 具有上确界性质，所以区间 $[a_0,b]$ 是紧致的。根据前面的定理， B 在 $[a_0,b]$ 中有一个极限点 x 。这个点 x 也是 A 的极限点，因此 S_Ω 是极限点紧致的。

以下我们来证明对于可度量化空间而言两种紧致性没有区别。为此，我们需要引入与紧致性有关的另一概念——列紧性。

定义 设 X 是一个拓扑空间. (x_n) 是 X 中的一个序列, 若

$$n_1<n_2<\cdots<n_i<\ldots$$

是单调增加的正整数序列，则由 $y_i=x_{n_i}$ 所定义的序列称为序列 (x_n) 的一个子序列 (subsequence). 若 X 的每一个序列都有一个收敛的子序列，则称空间 X 是列紧 (sequentially compact) 的.

- 定理 28.2 设 X 为可度量化空间, 则以下条件等价:

(1) X 是紧致的.
(2) X 是极限点紧致的.
(3) X 是列紧的.

证 我们已经证明了 $(1)\implies(2)$. 为了证明 $(2)\implies(3)$, 设 X 是极限点紧致的. 任意给定 X 的一个序列 (x_n) , 考虑集合 $A=\{x_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$. 若 A 是一个有限集, 则存在一个点 x 使得对无穷多个 n 有 $x=x_n$ 成立. 此时, 序列 (x_n) 有一个常值子序列, 这个子序列显然是收敛的. 另一方面, 若 A 是一个无限集, 那么 A 有一个极限点 x . 我们按照以下方式定义 (x_n) 的一个子序列收敛到 x : 首先选取 n_1 使得

$$x_{n_1}\in B(x,1).$$

然后假设正整数 n_{i-1} 已经取定。由于球 $B(x,1/i)$ 与集合 A 的交为无限集，我们可以选取一个 $n_i>n_{i-1}$ ，使得

$$x_{n_i}\in B(x,1/i).$$

那么序列 $x_{n_1},x_{n_2},\cdots$ 收敛到 x .

最后，我们来证明 $(3) \Longrightarrow (1)$ 。这是证明的难点。

首先我们证明：若 X 是列紧的，在 X 上Lebesgue数引理成立.（这个引理曾在紧致性的条件下得到，而此处紧致性是我们将要证明的.)设 $\mathcal{A}$ 为 X 的一个开覆盖．我们假设不存在满足以下条件的 δ： X 的每一直径小于 δ 的子集都包含在 $\mathcal{A}$ 的某一元素之中．然后推出矛盾.

我们的假设蕴涵着：对于任意给定的正整数 n ， X 中存在一个直径小于 $1/n$ 的子集，它不包含于 $\mathcal{A}$ 的任何元素中。将这样的一个集合记为 C_n 。对于每一个 n ，选取一个 $x_n \in C_n$ 。根据我们的假设，序列 (x_n) 有一收敛子序列 (x_{n_i}) ，假定它收敛到点 a 。 a 位于 $\mathcal{A}$ 的某一元素 A 中。由于 A 是一个开集，从而存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(a, \varepsilon) \subset A$ 。只要 i 充分大，便有 $1/n_i<\varepsilon/2$ ，从而集合 C_{n_i} 将被 x_{n_i} 的 $\varepsilon/2$ -邻域所包含。只要 i 充分大，便有 $d(x_{n_i}, a)<\varepsilon/2$ ，从而集合 C_{n_i} 将被 a 的 $\varepsilon/2$ -邻域所包含。然而，这意味着 $C_{n_i} \subset A$ ，与上述假设矛盾。

其次，我们证明：若 X 是列紧的，则对于给定的 $\varepsilon>0$ ，存在由 ε -开球组成的一个有限覆盖 X 。我们再次使用反证法。假定存在一个 $\varepsilon>0$ ，使得 X 不能被有限个 ε -球所覆盖。那么按照以下方式构造 X 中点的一个序列 (x_n) ：任意选取 X 中一点作为 x_1 。注意只须考虑 $B(x_1, \varepsilon)$ 不是全空间 X 的情况，（否则 X 已经被一个 ε -球所覆盖）。任意选取一个 X 的不在 $B(x_1, \varepsilon)$ 的点作为 x_2 。一般地，若 $x_1, \cdots, x_n$ 已经取定，在

$$B\left(x_1, \varepsilon\right) \cup \cdots \cup B\left(x_n, \varepsilon\right)$$

以外任意选取一点作为 x_{n+1} ，根据以上的选取方式易见， $d(x_{n+1}, x_i) \geqslant \varepsilon$ 对于 $i=1, \ldots, n$ 都成立．因此，序列 (x_n) 没有收敛子序列．事实上，每一个 ε 球中最多含有序列中一个点 x_n

最后，我们证明：若 X 列紧，那么 X 是紧致的。设 $\mathcal{A}$ 为 X 的一个开覆盖。由于 X 是列紧的，开覆盖 $\mathcal{A}$ 有一Lebesgue数 δ 。令 $\varepsilon=\delta/3$ 。根据 X 的列紧性，存在由有限多个 ε -开球组成的 X 的一个开覆盖。由于每一个开球的直径不超过 $2\delta/3$ ，因而每一个开球必含在 $\mathcal{A}$ 的某一元素中。对于以上选定的每一个 ε -球，在 $\mathcal{A}$ 中选取一个包含它的元素，这样，我们便得到 $\mathcal{A}$ 的一个有限子族覆盖 X 。

例3 我们曾经用 $\overline{S}_\alpha$ 表述极小不可数良序集 S_α 并上一个点 Ω 。(在序拓扑中， Ω 为 S_α 的极限点，这正是我们以 $\overline{S}_\alpha$ 表示 $S_\alpha \cup\{\Omega\}$ 的原因，参见第10节。）易见空间 $\overline{S}_\alpha$ 不是可度量化的。这是由于 $\overline{S}_\alpha$ 不满足序列引理。事实上， Ω 为 S_α 的极限点。而由于 S_α 的任何一个序列都在 S_α 中有一个上确界，从而 Ω 不是 S_α 中序列的极限。另一方面，容易验证： S_α 满足序列引理。然而， S_α 也不是可度量化的，因为它极限点紧致但非紧致。

练习

1. 赋予 $[0,1]^\omega$ 一致拓扑。在这个空间上给出一个没有极限点的无限集。
2. 证明集合 $[0,1]$ 作为 $\mathbb{R}$, 的子空间不是极限点紧致的.
3. 设 X 是极限点紧致空间.

(a) 若 $f: X \to Y$ 连续, 那么 $f(X)$ 是否是极限点紧致的?
(b) 若 A 是 X 的一个闭子集，那么 A 是否是极限点紧致的?
(c) 若 X 是Hausdorff空间 Z 的一个子空间，那么 X 是否在 Z 中是闭的?

我们于此指出：一般说来，即使在满足Hausdorff条件的假定下，两个极限点紧致空间的积未必是极限点紧致空间．然而，例子的构造是相当复杂的．参见[S-S]，例112.

4. 若 X 的任何一个可数开覆盖都包含着一个有限子族覆盖 X ，则称 X 是可数紧致的（countably compact）。证明：对于 T_1 空间 X ，可数紧致性等价于极限点紧致性。[提示：若集族 (U_n) 没有有限子族覆盖 X ，对于每一个 n ，选取 $x_n \notin U_1 \cup \cdots \cup U_n$]
5. 证明： X 是可数紧致的当且仅当 X 的每一由非空闭集所构成的套序列 $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ 有非空的交。
6. 设 X 是一个度量空间．若对于任意 $x, y \in X$ 有 $f: X \to X$ 满足

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

则称 f 是 X 上的一个等距(isometry). 证明：若 f 是一个等距，并且 X 紧致，则 f 是一一的，从而是一个同胚. [提示：若 $a \notin f(X)$ ，选取 ε 使得 a 的 ε -邻域与 $f(X)$ 无交. 令 $x_1 = a$ ，一般地，记 $x_{n+1} = f(x_n)$. 证明：若 $n \neq m$ ，则 $d(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$.]

7. 设 (X, d) 是一个度量空间，若对于任何 $x, y \in X, x \neq y$ ，有

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

则称 f 为一个收紧映射(shrinking map). 若对于任何 $x, y \in X$, 存在正数 $\alpha < 1$ 使得

$$d(f(x), f(y)) \leqslant \alpha d(x, y),$$

则称 f 为一个压缩映射(contraction map). f 的一个不动点(fixed point)乃是一个满足条件 $f(x) = x$ 的点 x

(a) 证明：如果 f 是一个压缩映射并且 X 是紧致的，则 f 有唯一的一个不动点。[提示：定义 $f^1 = f$ ， $f^{n+1} = f \circ f^n$ ，考虑 $A_n = f^n(X)$ 的交 A .]

(b) 证明更为一般的一个结论：如果 f 是一个收紧映射并且 X 是紧致的，则 f 有唯一不动点。[提示：设 A 如前，对于 $x \in A$ ，选取 x_n 满足 $x = f^{n+1}(x_n)$ 。若 a 是序列 $y_n = f^n(x_n)$ 的某一子序列的极限，证明 $a \in A$ 并且 $f(a) = x$ ，从而推出 $A = f(A)$ 以及 $\operatorname{diam} A = 0$ 。]

(c) 设 $X = [0, 1]$. 证明 $f(x) = x - x^2/2$ 将 X 映入 X , 并且是一个收紧映射而不是压缩映射. [提示: 使用微积分中的中值定理.]

(d)当 X 为完备度量空间(例如 $\mathbb{R}$)时，(a)中的结论成立，见第43节的习题．但是，(b)中结论不成立：考虑由 $f(x) = [x + (x^2 + 1)^{1/2}]/2$ 定义的映射 f ： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ，证明 f 是一个收紧映射，但不是压缩

映射，并且没有不动点

第17节 局部紧致性

17-1 局部紧致性

本节我们研究局部紧致性这个概念，并且证明一个基本定理：任何一个局部紧致的Hausdorff空间可以嵌入到某一个叫做单点紧致化的紧致的Hausdorff空间

> [!] 在 x 处局部紧致的(locally compact at x)，局部紧致的(locally compact)
> X 是**在 x 处局部紧致的(locally compact at x)**，若存在 X 的一个紧致子空间 C 包含着 x 的一个邻域。如果 X 在它的每一点处都是局部紧致的，则称 X 是**局部紧致的(locally compact)**

一个紧致空间自然是局部紧致的.

例1 实直线 $\mathbb{R}$ 是局部紧致的。因为点 x 属于某一个区间 (a,b)，而 (a,b) 又包含在紧致空间 $[a,b]$ 中。读者可以验证， $\mathbb{R}$ 的有理数子空间 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧致的。

例2 空间 $\mathbb{R}^n$ 是局部紧致的。点 x 属于某一个基元素 $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$，而这个基元素又包含在紧致空间 $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ 之中。空间 $\mathbb{R}^n$ 不是局部紧致的。因为它的任何基元素都不被紧致于空间所包含。事实上，若

$$B=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}\times\ldots$$

被某一个紧致子空间所包含，那么它的闭包

$$\bar{B}=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]\times\mathbb{R}\times\ldots$$

就是紧致的，但它并不紧致.

例3 任何一个具有上确界性质的全序集 X 是局部紧致的：任意给定 X 的一个基元素，它一定包含在 X 的一个闭区间中，而闭区间是紧致的.

数学中所讨论的两类属性最好的空间当属可度量化空间和紧致的Hausdorff空间．它们有许多有用的性质，可用于证明定理、建立构架等等．如果所给的空间不是上述两类空间之一，则退而求其次，我们希望它是这两类空间之一的子空间．当然，可度量化空间的子空间还是可度量化的，因而这种方式不能得到任何新空间，然而，紧致的Hausdorff空间的子空间就未必紧致了．于是就有这样一个问题：在什么条件下，一个空间同胚于紧致的Hausdorff空间的一个子空间？这里先给出一个回答．在第5章研究了一般的紧致化问题之后，我们再来讨论这个问题.

定理29.1 设 X 是一个空间．则 X 是一个局部紧致的Hausdorff空间当且仅当存在一个空间 Y 使得以下条件成立：

(1) X 是 Y 的子空间.
(2) 集合 $Y-X$ 是单点集.
(3) Y 是紧致的Hausdorff空间.

若 Y 和 Y' 是满足上述条件的两个空间，则存在从 Y 到 Y' 的一个同胚使得它在 X 上的限制是恒等映射.

证 第一步．我们首先验证唯一性．设 Y 和 Y' 是满足上述条件的两个空间．定义映射 $h: Y \to Y'$ 使得 h 将 $Y-X$ 的那个单点 p 映为 $Y'-X$ 的那个单点 q； h 在 X 上是恒等映射．我们证明：若 U 是 Y 的开集，则 $h(U)$ 是 Y' 的一个开集．那么，对称性便蕴涵着 h 是一个同胚①.

首先，考虑 U 不包含 p 的情形．这时 $h(U)=U$ ．由于 U 是 Y 的一个开集，并且它包含于 X ，从而 U 是 X 的一个开集．由于 X 是 Y' 的一个开集，因此 U 也是 Y' 的一个开集.

其次，考虑 U 包含着 p 的情形．由于 $C=Y-U$ 是 Y 的一个闭集，因此 C 作为 Y 的子空间是紧致的．因为 C 包含于 X ，从而它是 X 的一个紧致子空间．由于 X 是 Y' 的子空间，因此空间 C 也是 Y' 的紧致子空间．由于 Y' 是一个Hausdorff空间，因此 C 是 Y' 的一个闭集，从而 $h(U)= Y'-C$ 是 Y' 的一个开集.

第二步．设 X 是一个局部紧致的Hausdorff空间，我们来构造空间 Y ，第一步的讨论已为我们提供了构造 Y 的思路．为了方便起见，用符号 ∞ 表示不属于 X 的某一个元素，并且把它添加到 X 上构成集合 $Y=X\cup\{\infty\}$ ，构成 Y 的拓扑的 Y 的开集族取为所有下列类型的集合：类型一： X 的开子集 U ，类型二： $Y-C$ ，其中 C 是 X 的一个紧致子空间.

我们需要验证这个族的确是 Y 的一个拓扑。空集是属于类型一的，空间 Y 是属于类型二的。验证两个开集的交是开集可考虑下面三种情况：

$$U_1\cap U_2 \quad \text{是类型一的.}$$

$$(Y-C_1)\cap(Y-C_2)=Y-(C_1\cup C_2) \qquad \text{是类型二的.}$$

$$U_1\cap(Y-C_1)=U_1\cap(X-C_1) \qquad \text{是类型一的.}$$

最后一条是因为 C_1 在 X 中是闭的．同样可以证明开集族的任意并是开的：

$$\bigcup U_\alpha = U \quad \text{是类型一的.}$$

$$\bigcup(Y-C_\beta)=Y-(\bigcap C_\beta)=Y-C \quad \text{是类型二的.}$$

$$\left(\bigcup U_\alpha\right)\bigcup\left(\bigcup(Y-C_\beta)\right)=U\bigcup(Y-C)=Y-(C-U)$$

是类型二的，这是因为 $C-U$ 是 C 的闭子集，因而是紧致的.

以下证明 X 是 Y 的一个子空间．任意给定 Y 的开集，先证明它与 X 的交是 X 的开集．这是因为：若 U 为类型一的集合，则 $U\cap X=U$．若 $Y-C$ 为类型二的集合，则 $(Y-C)\cap X=X-C$，两者都是 X 中的开集．反之， X 中任何开集都是类型一的集合，因而，据定义得知它也是 Y 的开集.

为了证明 Y 是紧致的，设 $\mathcal{A}$ 是 Y 的一个开覆盖．族 $\mathcal{A}$ 一定包含一个类型二的开集，比如说 $Y-C$，这是因为在类型一中没有包含着点 ∞ 的开集．把 $\mathcal{A}$ 中所有那些不同于 $Y-C$ 的集合取出来与 X 作交，它们是由 X 中开集所组成的 C 覆盖．因为 C 是紧致的，所以它们中的有限多个可以覆盖 C，则 $\mathcal{A}$ 中与之相应的成员所构成的有限族连同 $Y-C$ 便覆盖着 Y

为了证明 Y 是Hausdorff的，设 x 和 y 是 Y 的两点．若它们都属于 X，则存在 X 中无交的开集 U 和 V 分别包含它们．否则，不妨设 $x\in X$ 和 $y=\infty$，那么可以在 X 中选择包含 x 的邻域 U 的一个紧致集 C．于是 U 和 $Y-C$ 便是 Y 中分别包含 x 和 ∞ 的两个无交的邻域.

第三步．最后，我们证明充分性．假设满足条件 $(1)\sim(3)$ 的空间 Y 存在．由于 X 是一个Hausdorff空间 Y 的一个子空间，所以 X 是一个Hausdorff空间．任意给定 $x\in X$，我们证明 X 在点 x 处是局部紧致的．在 Y 中分别选取包含 x 和单点 $Y-X$ 的无交开集 U 和 V．那么 $C=Y-V$ 是 Y 的一个闭集，从而是 Y 的紧致子空间．由于 C 包含于 X，它也是 X 的紧致子空间，并且它包含着 x 的一个邻域 U

在上述定理中，如果 X 自身就是一个紧致空间，则构造空间 Y 的意义就不大，因为此时 Y 是 X 加上一个孤立点。但当 X 不紧致时，那么 $Y-X$ 中的那个单点是 X 的一个极限点，从而， $\overline{X}=Y$ 。

定义 若 Y 是一个紧致的 Hausdorff 空间， X 是 Y 的真子空间并且其闭包等于 Y，则 Y 称为 X 的一个紧致化（compactification）。若 $Y-X$ 为单点集，则 Y 称为 X 的单点紧致化（one-point compactification）。

前述结论表明： X 具有单点紧致化 Y 当且仅当 X 为非紧致的局部紧致的 Hausdorff 空间。之所以不将 Y 称为“一个”单点紧致化是由于在同胚的意义下 Y 是唯一的。

例4读者可以验证，实直线 $\mathbb{R}$ 的单点紧致化同胚于圆周．同样， $\mathbb{R}^2$ 的单点紧致化同胚于球面 S^2．如果将 $\mathbb{R}^2$ 看成复数空间C，则 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 称为Riemann球面或扩充复平面.

我们所给出的这个局部紧致性的定义，有些地方还不能令人十分满意。通常说一个空间 X “局部地”满足某一个性质，是指对于每一个 $x\in X$ 都存在一个“任意小”的邻域具有所说的性质。而这个局部紧致的定义并没有涉及到“任意小”的邻域，于是便产生了它到底该不该称为局部紧致性的问题。

下面是局部紧致性的另一种说法，它比较自然地体现了对“局部”的要求，而且当 X 是一个Hausdorff空间时，它等价于我们的定义.

定理29.2 设 X 是一个Hausdorff空间．则 X 在 x 处局部紧致当且仅当对于 x 的任何一个邻域 U ，存在 x 的一个邻域 V ，使得 $\overline{V}$ 紧致并且 $\overline{V} \subset U$

证 显然，这个新的表述蕴涵着局部紧致性。 $C=\overline{V}$ 便是所要求的包含 x 的一个邻域的紧致集。反之，假设 X 是局部紧致的， x 是 X 的一个点， U 是 x 的任何一个邻域。记 Y 为 X 的单点紧致化，集合 C 为 $Y-U$ 。则 C 是 Y 的一个闭子集，从而 C 是 Y 的一个紧致子空间。应用引理26.4，选取分别包含 x 和 C 的无交开集 V 和 W 。于是 V 的闭包 $\overline{V}$ 是 Y 的一个紧致子空间， $\overline{V}$ 与 C 无交，从而 $\overline{V} \subset U$ 。

推论29.3 设 X 是局部紧致的Hausdorff空间， A 是 X 的一个子空间．若 A 是 X 的一个闭集或者一个开集，则 A 是局部紧致的.

证 假设 A 是 X 的一个闭集．对于 $x \in A$ ，令 C 为 X 中的一个紧致子空间，并且包含着 x 在 X 中的一个邻域 U ．那么 $C \cap A$ 是 C 的一个闭集，因而是紧致的，并且它包含着 x 在 A 中的邻域 $U \cap A$ ．(这里还没有用到Hausdorff条件.)

假设 A 是 X 中的一个开集，对于 $x \in A$ ，我们应用上述定理，选取 x 在 X 中的一个邻域 V ，使得 $\overline{V}$ 是紧致的并且 $\overline{V} \subset A$ 。那么 $C=\overline{V}$ 是 A 的一个紧致子空间，它包含着 x 在 A 中的邻域 V 。

推论29.4 空间 X 同胚于一个紧致的Hausdorff空间的开子集当且仅当 X 是一个局部紧致的Hausdorff空间。

证 据定理29.1及推论29.3便可得到结论

练习

1. 证明：有理数集 $\mathbb{Q}$ 不是局部紧致的。
2. 设 $\{X_\alpha\}$ 为非空空间的一个加标族

(a) 证明: 若 ΠX_α 是局部紧致的, 则每一个 X_α 是局部紧致的并且除去有限多个 α 之外, X_α 是紧致的.
(b)应用Tychonoff定理的结论，证明(a)的逆命题

3. 设 X 是一个局部紧致空间． $f: X \rightarrow Y$ 连续是否意味着空间 $f(X)$ 是局部紧致的？ f 是连续开映射时结论如何？验证你的结论.
4. 证明： $[0,1]^\omega$ 关于一致拓扑不是局部紧致的。
5. 如果 $f: X_1 \rightarrow X_2$ 是局部紧致的 Hausdorff 空间之间的一个同胚，证明 f 可扩充为它们的单点紧致化之间的同胚。
6. 证明： $\mathbb{R}$ 的单点紧致化同胚于圆周 S^1

7. 证明： S_α 的单点紧致化同胚于 $\overline{S}_\alpha$
8. 证明： $\mathbb{Z}_+$ 的单点紧致化同胚于 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$.
9. 证明：若 G 是一个局部紧致的拓扑群， H 是它的一个子群，则 G/H 是局部紧致的。
10. 设 X 是一个Hausdorff空间，并且在点 x 处是局部紧致的．证明：对于 x 的任意邻域 U ，存在 x 的一个邻域 V ，使得 $\overline{V}$ 是紧致的，并且 $\overline{V} \subset U$.

*11. 证明以下结论.

(a)引理 设 $p : X \to Y$ 是一个商映射并且 Z 是一个局部紧致的Hausdorff空间，则映射

$$\pi = p \times i_Z : X \times Z \longrightarrow Y \times Z$$

是一个商映射．[提示：若 $\pi^{-1}(A)$ 是包含 $x \times y$ 的一个开集，选取开集 U_1 和 V （其中 $\bar{V}$ 是紧致的)，使得 $x \times y \in U_1 \times V$ 和 $U_1 \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$ ．对于 $U_i \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$ ，应用管状引理，选取包含 $p^{-1}(p(U_i))$ 的一个开集 U_{i+1} ，使得 $U_{i+1} \times \bar{V} \subset \pi^{-1}(A)$ ．令 $U = \bigcup U_i$ 证明 $U \times V$ 是 $x \times y$ 的一个饱和邻域，并且包含在 $\pi^{-1}(A)$ 中.]

在第46节的习题中将给出一个与上述完全不同的证明方法的概要.

(b)定理设 p： $A \to B$ 和 q： $C \to D$ 都是商映射．若 B 和 C 是局部紧致的Hausdorff空间，则 $p \times q$： $A \times C \to B \times D$ 是一个商映射.

附加习题：网

我们已经看到，要区别度量空间中的极限点、连续函数以及紧致空间，只要用序列就“足够”了。但是，对于任意的拓扑空间要做同样的事就需要一种称为网的概念，它是序列概念的推广。在这里我们给出有关的定义，而将证明留作练习。首先回忆一下集合 A 中的一个关系 $\leq$ ，如果满足下列条件，则称为偏序关系：

(1)对于所有 $\alpha, \alpha < \alpha$.
(2) 若 $\alpha < \beta$ 和 $\beta \leq \alpha$ ，则 $\alpha = \beta$.
(3) 若 $\alpha \leq \beta$ 和 $\beta \leq \gamma$ ，则 $\alpha \leq \gamma$.

现在我们给出以下定义：

J 是一个具有偏序 $\leq$ 的集合，若满足下列条件，则称 J 是有向集（directed set)：对于 J 中每一对元素 α 和 β ，存在 J 中的一个元素 γ ，具有性质 $\alpha \leq \gamma$ 和 $\beta \leq \gamma$.

1. 证明下列集合为有向集：

(a) 在关系 $\leqslant$ 下的任何一个全序集.
(b) 集合 S 的所有子集的族，其偏序由包含关系确定（即：若 $A \subset B$ ，则 $A \leq B$ ）.

(c) S 的一个子集族 $\mathcal{A}$ ，它关于有限交是封闭的，其偏序由反包含关系而确定（即，若 $A \supset B$ ，则 $A \leq B$ ）.

(d)空间 X 的所有团子集的族，其偏序由包含关系确定.

2. J 的子集 K 称为在 J 中是共尾的 (cofinal)，若对于每一个 $\alpha \in J$ ，存在 $\beta \in K$ ，使得 $\alpha \leq \beta$ 。证明若 J 是一个有向集，并且 K 在 J 中是共尾的，则 K 是一个有向集。
3. 设 X 是一个拓扑空间， X 中的一个网（net）是从一个有向集 J 到 X 的函数 f 。如果 $\alpha \in J$ ，

我们通常用 x_α 表示 $f(\alpha)$ ，而网 f 本身则用符号 $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ 表示，或者当指标集自明时，简单地记为 (x_α)

称网 (x_α) 收敛(converge)于 X 的点 x (写成 $x_\alpha \to x$), 如果对于 x 的每一个邻域 U , 存在一个 $\alpha \in J$ 使得

$$\alpha \leq \beta \Longrightarrow x_\beta \in U.$$

证明：当 $J = \mathbb{Z}_+$ 时，这些定义就变成了我们所熟悉的那些相应概念.

4. 假设在 X 和 Y 中分别有

$$(x_\alpha)_{\alpha \in J} \longrightarrow x \quad 和 \quad (y_\alpha)_{\alpha \in J} \longrightarrow y.$$

证明在 $X \times Y$ 中有 $(x_\alpha \times y_\alpha) \to x \times y$.

5. 证明：若 X 是Hausdorff的，则 X 中的一个网最多收敛于一点。
6. 定理 设 $A \subset X^1$ ，则 $x \in \overline{A}$ 当且仅当存在 A 中点的一个网收敛于 x .

[提示：为了证明蕴涵关系 $\Rightarrow$ ，取 x 的所有邻域族为指标集，由反包含关系给出偏序.]

7. 定理 设 $f: X \to Y$. 则 f 是连续的当且仅当对于 X 中任何一个收敛于 x 的网 (x_α) , 我们有网 $(f(x_\alpha))$ 收敛于 $f(x)$.
8. 设 $f: J \to X$ 是 X 中的一个网，令 $f(\alpha) = x_\alpha$ 。若 K 是有向集并且 $g: K \to J$ 是一个函数，满足条件：

$$(i) i \leq j \Longrightarrow g(i) \leq g(j),$$
$$\text{(ii)} g(K) 在 J 中 共 尾,$$

则复合函数 $f \circ g: K \to X$ 称为 (x_α) 的一个子网(subnet). 证明：若网 (x_α) 收敛于 x ，则它的任何一个子网也收敛于 x

9. 设 $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ 是 X 中的一个网．称 x 是网 (x_α) 的一个聚点(accumulation point)，如果对于 x 的每一个邻域 U ，满足条件 $x_\alpha \in U$ 的那些 α 的集合在 J 中共尾.

引理 网 (x_α) 以 x 为一个聚点当且仅当有 (x_α) 的某一个子网收敛于 x .

[提示：为了证明蕴涵关系 $\Rightarrow$ ，令 K 是所有偶对 (α, U) 的集合，其中 $\alpha \in J$ ， U 是包含 x_α 的 x 的一个邻域．当 $\alpha \leq \beta$ 和 $V \subset U$ 时，定义 $(\alpha, U) \leq (\beta, V)$ ，证明 K 是有向集并且通过它定义一个子网.]

10. 定理 X 是紧致的当且仅当 X 中的每一个网都有一个收敛子网.

[提示：为了证明蕴涵关系 $\Rightarrow$ ，令 $B_\alpha = \{x_\beta \mid \alpha \leq \beta\}$.然后证明 $\{B_\alpha\}$ 满足有限交条件．为了证明蕴涵关系 $\Leftarrow$ ，令 $\mathcal{A}$ 为满足有限交条件的一个闭集族， $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 中成员的所有有限交的族，并用反包含关系定义偏序.]

11. 推论 设 G 是一个拓扑群, A 和 B 是 G 的两个子集. 若 A 是 G 的一个闭集, 而 B 是紧致的, 则 $A \cdot B$ 在 G 中是闭的.

[提示：假设 G 是可度量化的，利用序列先给出一个证明.]

12. 验证：即使去掉有向集定义中的条件(2)，上面这些习题的结论仍然成立．许多数学家就是在这种更一般的意义下使用“有向集”这个术语的.