Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе №2

по дисциплине
"Интервальный анализ"

Выполнила студентка
группы 5030102/80201 Деркаченко Анна Олеговна

Проверил
доцент, к.ф.-м.н. Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

Список иллюстраций

1. Постановка задачи

Во многих задачах необходимо провести внешнее оценивание множества решений линейных и нелинейных задач в $\mathbb{IR}$.

1.1. Постановка задачи для линейных задач

Пусть дана ИСЛАУ:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = [1, 6] \\ x_1 - [1, 5] \cdot x_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Необходимо:

1) Оценить внешнее множество решений ИСЛАУ с помощью метода Кравчика
2) Определить спектральный радиус матрицы
3) Провести оценку начального бруса решения
4) Проиллюстрировать при итерациях:
   - положение брусов
   - радиусы рабочих брусов
   - расстояние центров брусов до конечной точки алгоритма

1.2. Постановка задачи для нелинейных задач

Пусть дана нелинейная ИСЛАУ:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = [1, 6] \\ \frac{x_1}{x_2} = [1, 5] \end{cases} \tag{2}$$

Необходимо:

1) Оценить внешнее множество решений нелинейной ИСЛАУ с помощью метода Кравчика
2) Проиллюстрировать при итерациях:
   - положение брусов
   - радиусы рабочих брусов
   - расстояние центров брусов до конечной точки алгоритма

2. Теория

Опр: ***внешнее множество решений*** - объединенное множество решений, образованное решениями всех точных систем $F(a, x) = b$:

$$\Xi_{uni}(F, A, B) = \{x \in \mathbb{R}^n | \exists a \in A, \exists b \in B : F(a, x) = b\} \tag{3}$$

Опр: ***метод Кравчика*** - итерационная процедура уточнения двусторонней границы решений системы уравнений, определенной на некотором брусе X, размерностью $n \times n$: $F(x) = 0, x \in X \subset \mathbb{IR}^n$. Метод позволяет проверить существование решения и произвести оценку.

Опр: ***оператор Кравчика*** на X относительно точки $\bar{x}$ - отображение $\mathcal{K}(X, \bar{x}) = \bar{x} - \Lambda \cdot F(\bar{x}) - (I - \Lambda \cdot L)(X - \bar{x})$.

По теореме Шредера, если $\rho(I - \Lambda \cdot L) < 1$, то у отображения существует единственная неподвижная точка, являющаяся решением рассматриваемой системы уравнений.

Идея метода Кравчика - построение последовательности $\{X^k\}_{k=0}^{\infty}$ через формулу $X^{k+1} = X^k \cap \mathcal{K}(X^k, \bar{x}^k)$.

Частный случай метода Кравчика: $x^{k+1} = (\Lambda \cdot b + (I - \Lambda \cdot A) \cdot x^k) \cap x^k$, где A - матрица ИСЛАУ, b - вектор правой части.

Выбор начальных условий: Для каждой системы уравнений начальный брус, точки $\bar{x}$, предобуславливатель Λ и матрица L выбираются эмпирически.

Для линейной задачи предобуславливатель $\Lambda = (mid\ A)^{-1}$.

Для нелинейной задачи используются следующие значения:

$$X^0 = \begin{pmatrix} [0.1, 5] \\ [0.1, 5] \end{pmatrix}, \bar{x}^k = mid\ X^k, \Lambda = \Lambda(x) = (mid\ J(x))^{-1}, L = L(x) = J(x), \tag{4}$$

где $J(x)$ - якобиан.

Для выбора начального бруса в слуае ИСЛАУ справедливо утверждение:

$$\eta = ||I - \Lambda \cdot A||_\infty < 1 \Rightarrow \Xi_{uni} \subset \begin{pmatrix} [-\theta, \theta] \\ \cdots \\ [-\theta, \theta] \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\theta = \frac{||\Lambda \cdot b||_\infty}{1-\eta}$.

3. Реализация

Реализация лабораторной работы проводилась с помощью встроенных средств в среде разработки MATLAB и библиотеки IntLab для интервальной арифметики.

Исходный код лабораторной работы размещен в GitHub-репозитории.

URL: https://github.com/derkanw/IntervalAnalysis/tree/main/lab2

4. Результаты

4.1. Линейна задача

4.1.1. Спектральный радиус

Для сходимости итерационного процесса необходимо, чтобы спектральный радиус матрицы $|I - \Lambda A|$ был меньше 1.

$\Lambda \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{15} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$

$|I - \Lambda A| \approx \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$\rho(|I - \Lambda A|) \approx 0.4 < 1$

Таким образом, процесс будет сходится.

4.1.2. Оценка бруса начального положения

$\eta = ||I - \Lambda \cdot A||_\infty \approx 0.8 < 1$

$\Lambda \cdot b \approx \begin{pmatrix} [\frac{1}{5}, \frac{6}{5}] \\ [\frac{1}{15}, \frac{-6}{5}] \end{pmatrix}$

$\theta = \frac{||\Lambda \cdot b||_\infty}{1-\eta} \approx 6$

Тогда $X^0 = \begin{pmatrix} [-6, 6] \\ [-6, 6] \end{pmatrix}$

4.1.3. Метод Кравчика

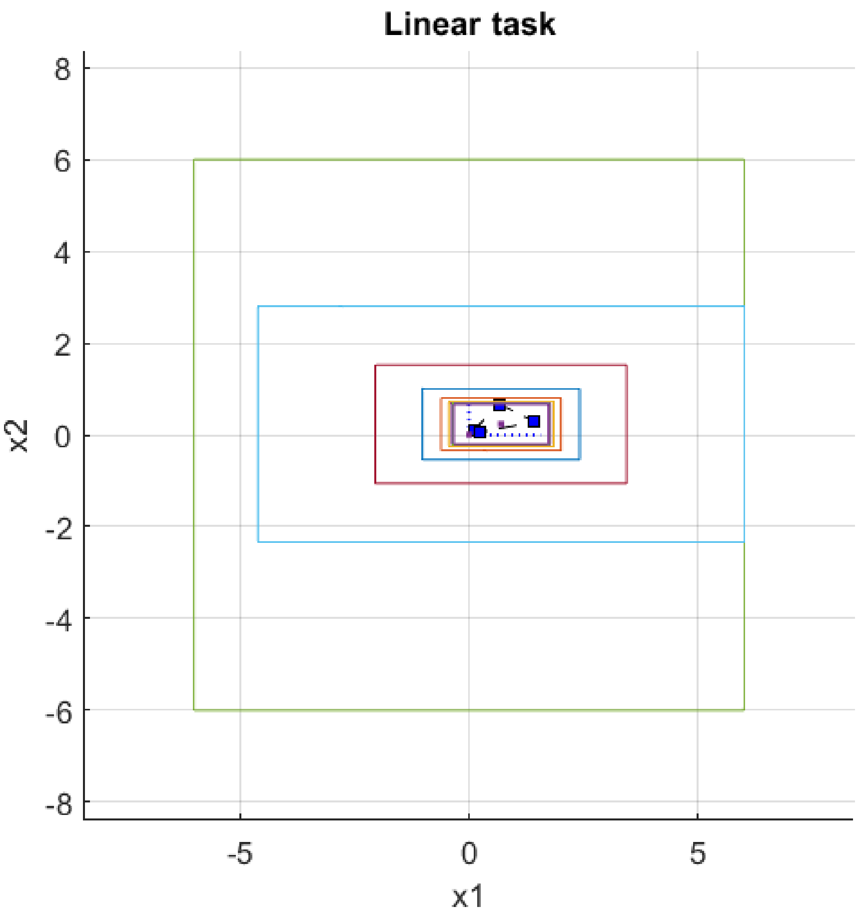

Рис. 1. Иллюстрация работы метода Кравчика для линейной задачи

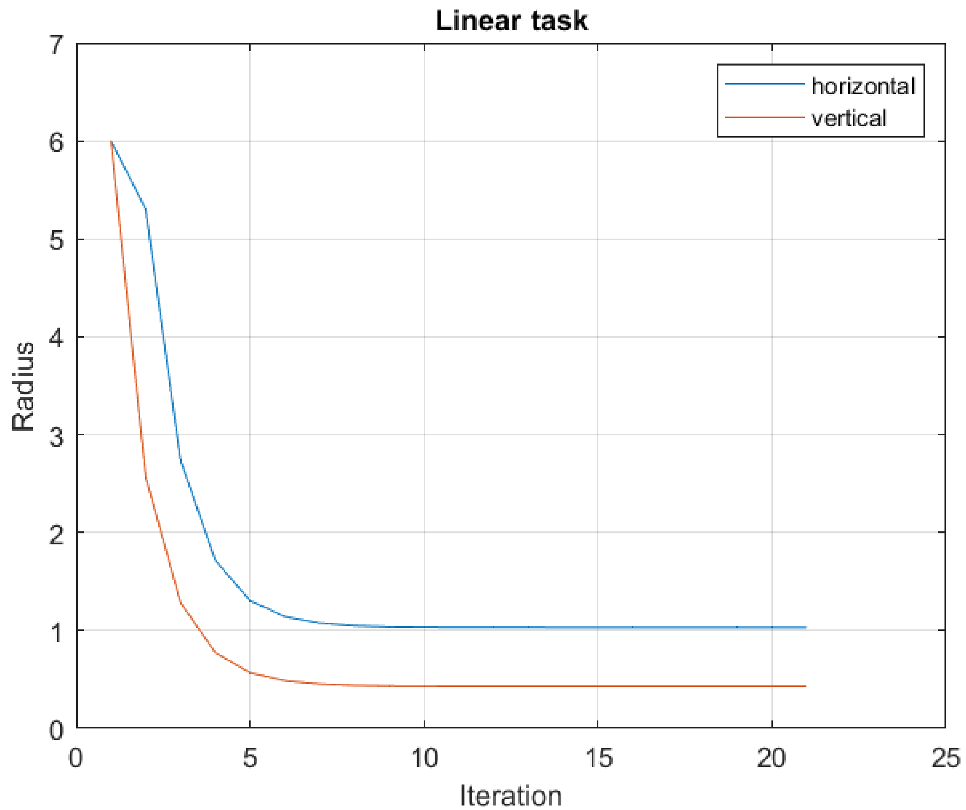

Рис. 2. График радиусов для обоих осей бруса для линейной задачи

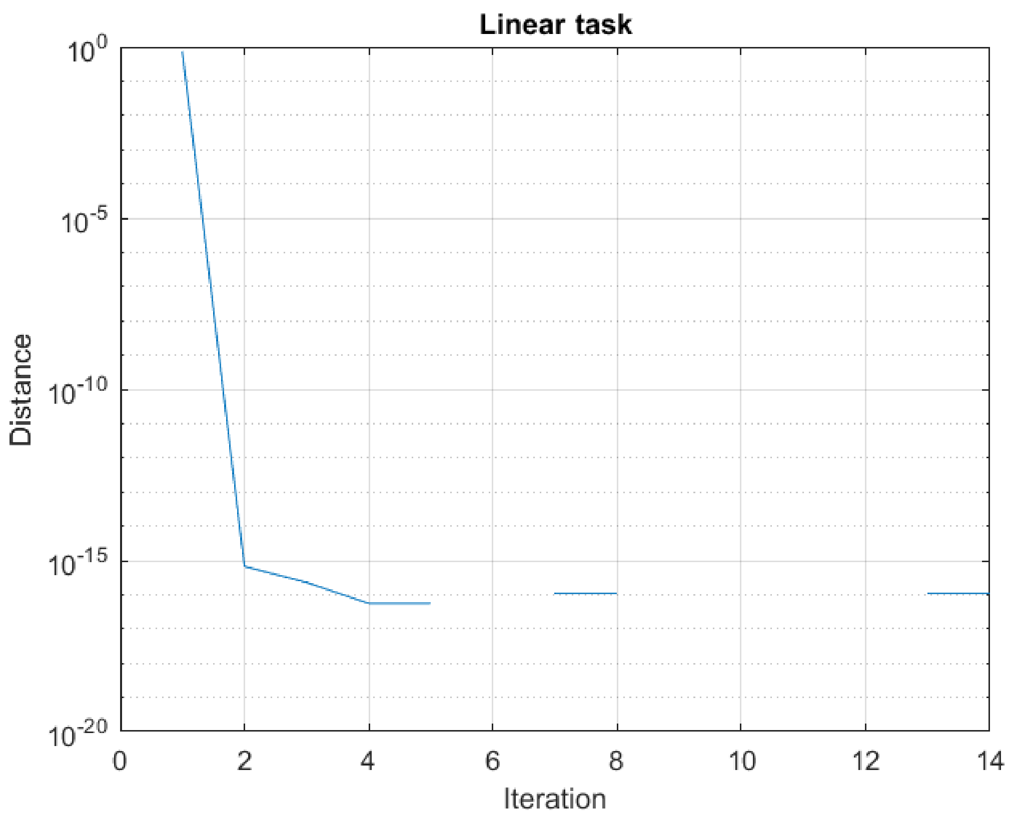

Рис. 3. График сходимости брусов для линейной задачи

4.2. Нелинейная задача

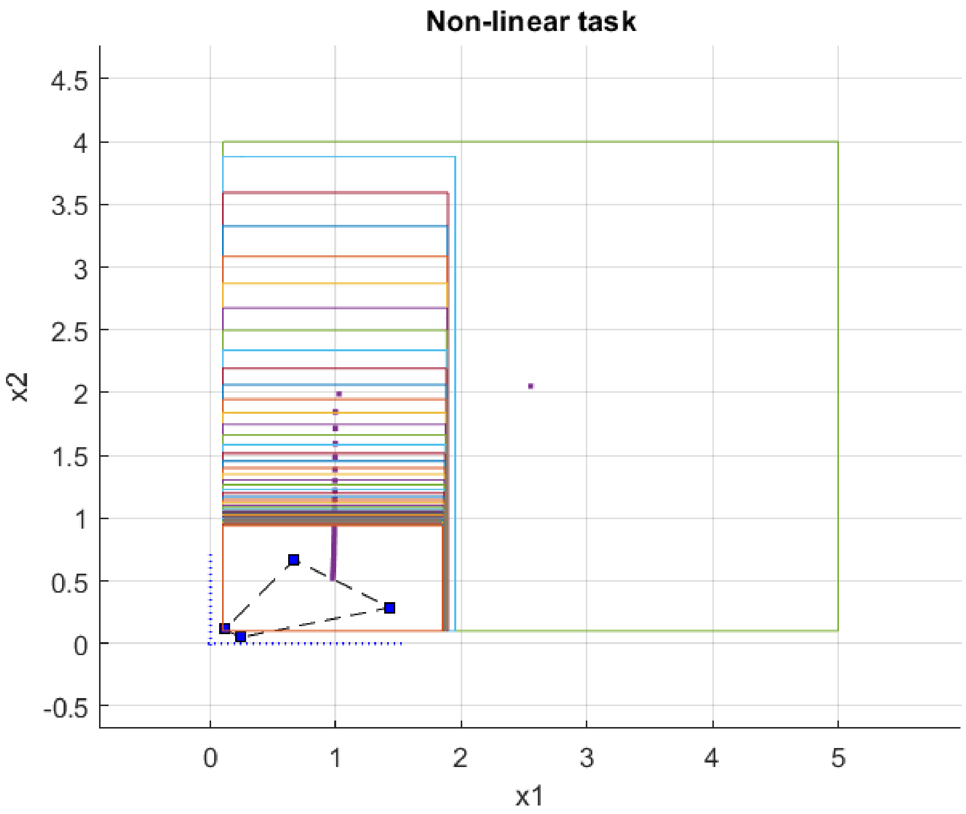

Рис. 4. Иллюстрация работы метода Кравчика для линейной задачи

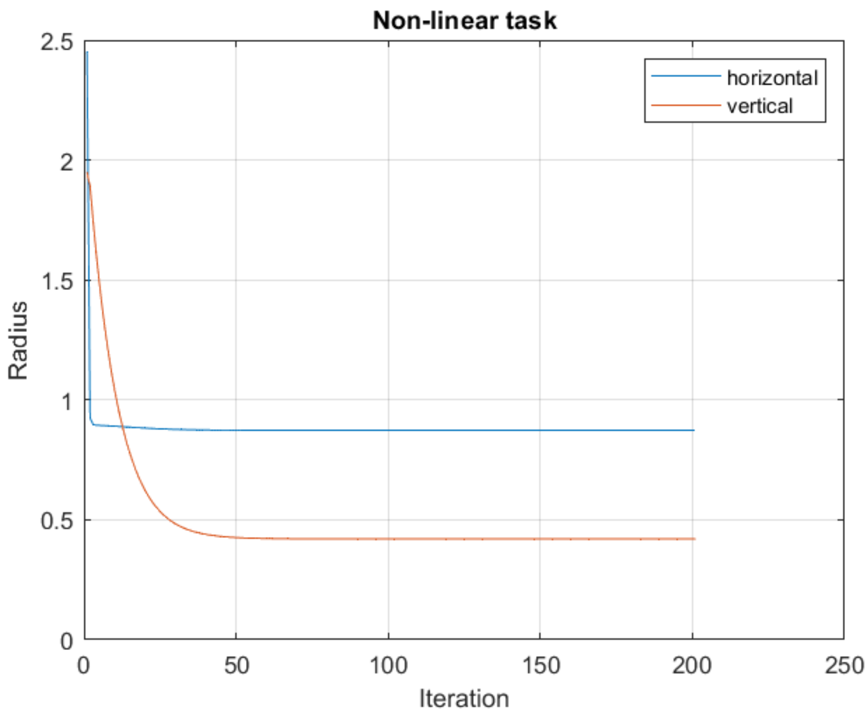

Рис. 5. График радиусов для обоих осей бруса для линейной задачи

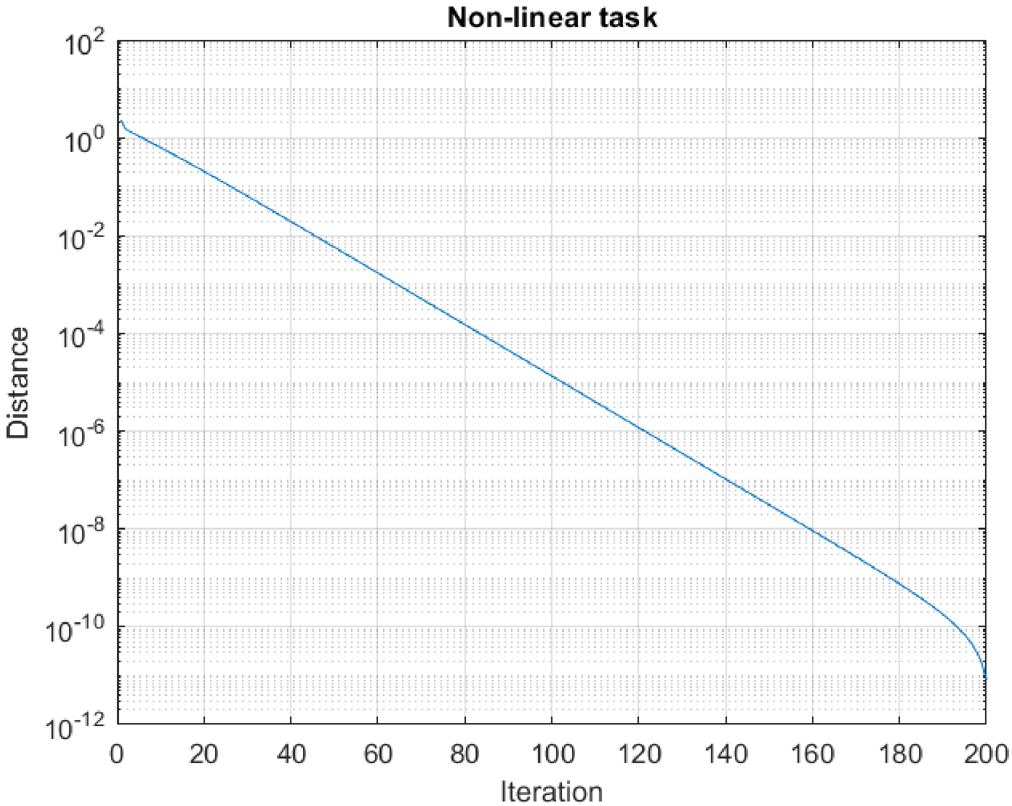

Рис. 6. График сходимости брусов для линейной задачи

5. Обсуждение

Для обеих задач была выбрана геометрически эквивалентная постановка, поэтому отображенные на иллюстрации работы метода Кравчика множества Ξ_{uni} являются идентичными.

В работе алгоритма для линейной и нелинейной задач заметна разница. В процессе итерации для линейной задачи идет уточнение обоих граней бруса, а для нелинейной - почти всегда только одной.

При этом можно сказать, что в линейном случае метод Кравчика "правильно"сходится к множеству Ξ_{uni}, а для нелинейного случая начальный брус строится так, чтобы он лежал в первом ортанте, что помогает избежать деления на 0 при вычислении якобиана. Поэтому сходимость брусов происходит не совсем "правильно".

Радиусы обоих осей бруса перестают сильно изменяться уже к 10 итерации для линейной задачи и к 50 итерации для нелинейной. При этом вертикальный радиус бруса в обоих случаях почти идентичен, а горизонтальный немного отличается, но находится в пределах единицы.

Процесс для линейной задачи сходится очень быстро, буквально на 2 итерации происходит сильное уточнение до 10^{-15}, а после 4 итерации достигнуто уточнение с максимально возможной точностью. Для нелинейной задачи этот процесс сходится медленнее и через 200 итераций не достигается точность порядка 10^{-15}. Также заметно, что после 180 итераций линейность сходимости прекращается и сходимость начинает ускоряться.