

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

**Прикладная математика и информатика**

## **ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №4**

по дисциплине  
"Интервальный анализ"

Выполнила студентка  
группы 5030102/80201

Деркаченко Анна Олеговна

Проверил  
доцент, к.ф.-м.н.

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2021 г.

# Содержание

<b>1. Постановка задачи</b>	<b>4</b>
1.1. Получение решения по теореме Зюзина . . . . .	4
1.2. Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона . . . . .	4
<b>2. Теория</b>	<b>4</b>
2.1. Теорема Зюзина . . . . .	4
2.2. Субдифференциальный метод Ньютона . . . . .	5
<b>3. Реализация</b>	<b>5</b>
<b>4. Результаты</b>	<b>5</b>
4.1. Решение задачи по теореме Зюзина . . . . .	5
4.2. Субдифференциальный метод Ньютона . . . . .	6
<b>5. Обсуждение</b>	<b>8</b>
5.1. Решение задачи по теореме Зюзина . . . . .	8
5.2. Субдифференциальный метод Ньютона . . . . .	8

## Список иллюстраций

1.	Иллюстрация брусков при решении задачи по теореме Зюзина . . . . .	5
2.	Иллюстрация радиусов решения задачи по теореме Зюзина . . . . .	6
3.	Иллюстрация брусков при решении задачи (2) . . . . .	6
4.	Иллюстрация брусков при решении задачи (3) с $\tau = 1$ . . . . .	7
5.	Иллюстрация брусков при решении задачи (3) с $\tau = 0.1$ . . . . .	7

# 1. Постановка задачи

## 1.1. Получение решения по теореме Зюзина

Дана ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [2, 5] & [0, 1] \\ [1, 2] & [1, 4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-2, 1] \\ [-1, 4] \end{pmatrix} \quad (1)$$

Необходимо:

- 1) Построить итерационную схему с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части
- 2) Проиллюстрировать
  - брусы итерационного процесса
  - радиусы решения в зависимости от номера итерации

## 1.2. Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона

Даны две ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3, 3] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3, 4] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (3)$$

Необходимо:

- 1) Построить итерационную схему субдифференциального метода Ньютона для обеих ИСЛАУ
- 2) Проиллюстрировать брусы итерационного процесса

# 2. Теория

## 2.1. Теорема Зюзина

**Теорема:** пусть в ИСЛАУ вида  $Cx = d$ , где  $C \in \mathbb{KR}^{n \times n}$ ,  $d \in \mathbb{KR}^n$ . При этом правильная проекция матрицы  $C$  имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение системы существует и единственно.

**Построение итерационного процесса:**

- 1)  $D = \text{diag}\{c_{ii}\}_{i=1}^n, \quad E = C \ominus D$
- 2)  $Cx = d \Leftrightarrow Dx = d \ominus Ex$
- 3)  $x^{k+1} = \text{inv } D \cdot (d \ominus Ex^k), k = 0, 1, \dots$

## 2.2. Субдифференциальный метод Ньютона

Построение итерационного процесса:

$$x^k = x^{k-1} - \tau(D^{k-1})^{-1}\mathcal{F}(x^{k-1}), \quad (4)$$

где  $\mathcal{F}(x) = sti(C \cdot sti^{-1}(x)) - x + sti(d)$ ,  $sti : \mathbb{K}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  - операция стандартного погружения,  $D^{k-1}$  - субградиент отображения  $\mathcal{F}$  в точке  $x^{k-1}$ ,  $\tau$  - константа ( $\tau = 1$ ).

## 3. Реализация

Реализация лабораторной работы проводилась с помощью встроенных средств в среде разработки Octave, библиотеки kinterval для полной интервальной арифметики.

Исходный код лабораторной работы размещен в GitHub-репозитории.

URL: <https://github.com/derkanw/IntervalAnalysis/tree/main/lab4>

## 4. Результаты

### 4.1. Решение задачи по теореме Зюзина

Начальный брус обозначен синим цветом, а конечный результат - красным. Число итераций равно 10. Полученный результат для задачи (1):  $x = \begin{pmatrix} [-0.8, 0.095228] \\ [0.058537, 0.76187] \end{pmatrix}$

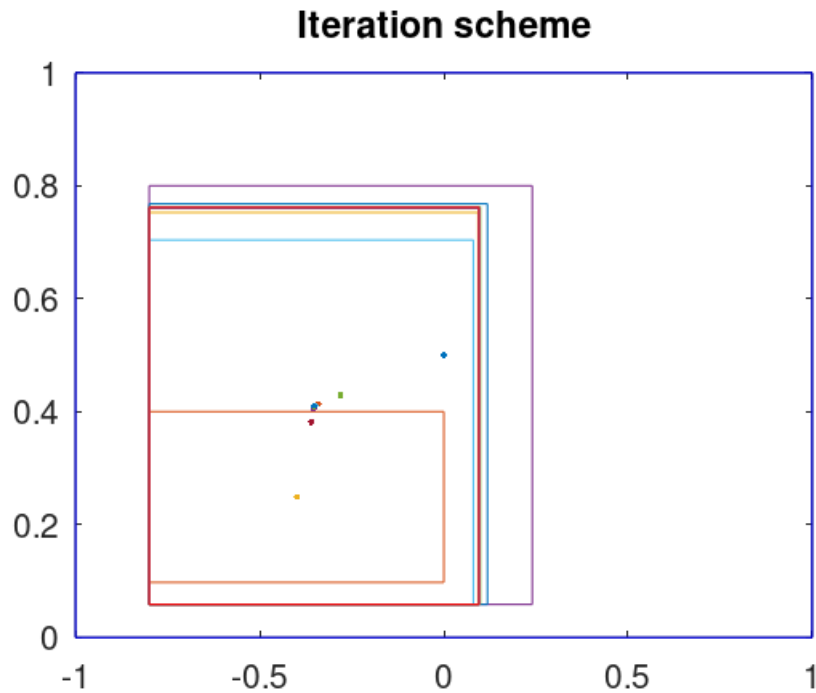


Рис. 1. Иллюстрация брусков при решении задачи по теореме Зюзина

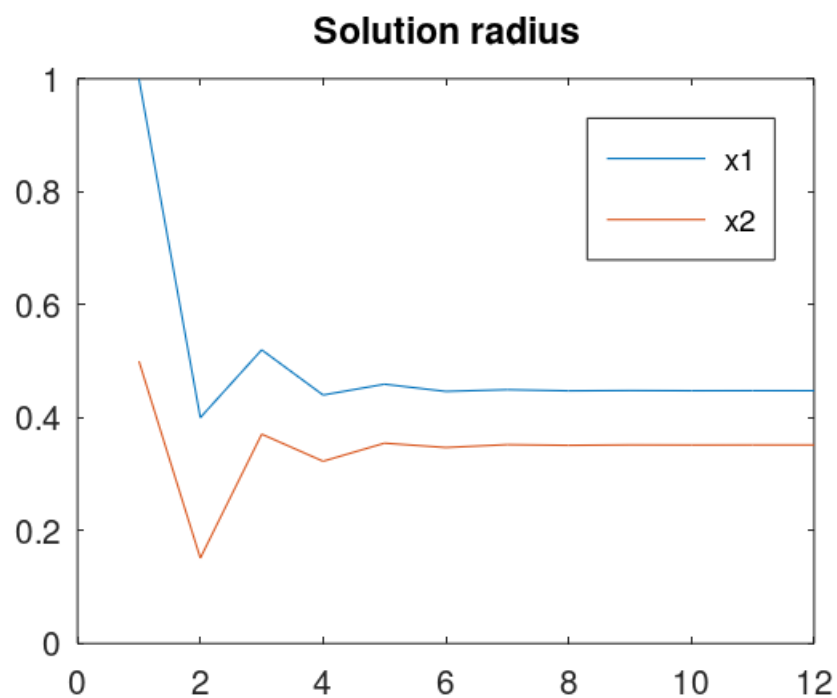


Рис. 2. Иллюстрация радиусов решения задачи по теореме Зюзина

## 4.2. Субдифференциальный метод Ньютона

Начальный брус обозначен синим цветом, конечный вид бруса - красным, зеленой пунктирной линией - границы допускового множества. Проведено 200 итераций метода.

Решение задачи (2) с параметром  $\tau = 1$  получено за 4 итерации:  $x = \begin{pmatrix} [-1.4803 \cdot 10^{-16}, 0.5] \\ [-0.5, 0.1667] \end{pmatrix}$

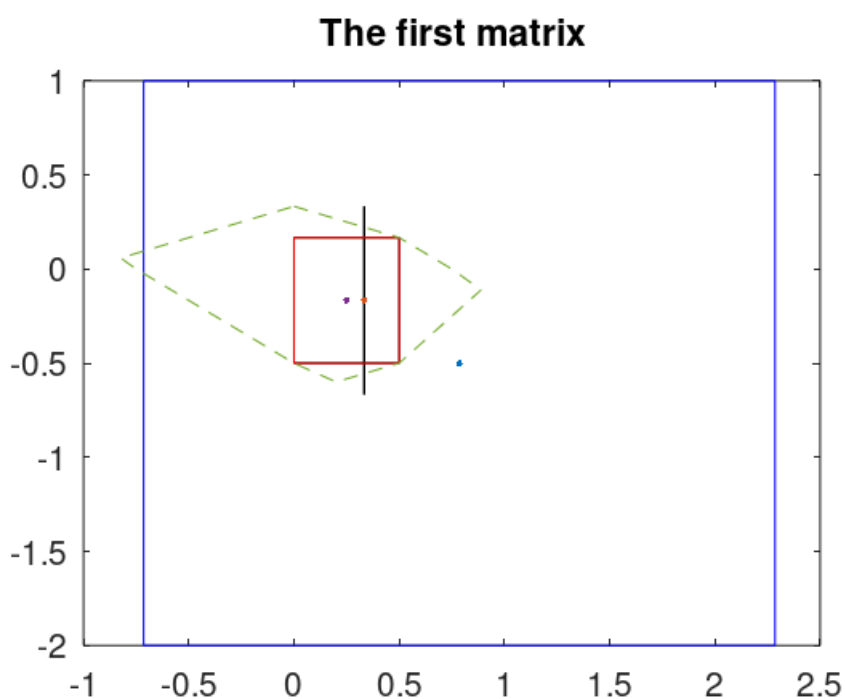


Рис. 3. Иллюстрация брусков при решении задачи (2)

Решение задачи (3) с  $\tau = 1$ , полученное на 200 итерации, равно  $x = \begin{pmatrix} [-0.3333, 1] \\ [-0.3333, 0] \end{pmatrix}$

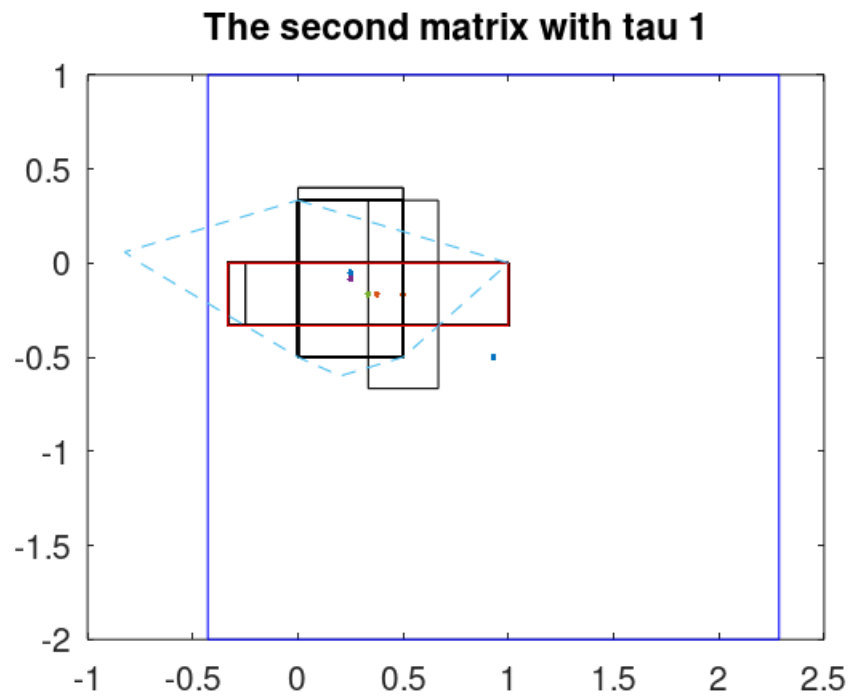


Рис. 4. Иллюстрация брусов при решении задачи (3) с  $\tau = 1$

При уменьшении параметра  $\tau = 0.1$  решение той же задачи, полученное на 200 итерации, равно  $x = \begin{pmatrix} [-0.15837, 0.81674] \\ [-0.39442, 0.12217] \end{pmatrix}$

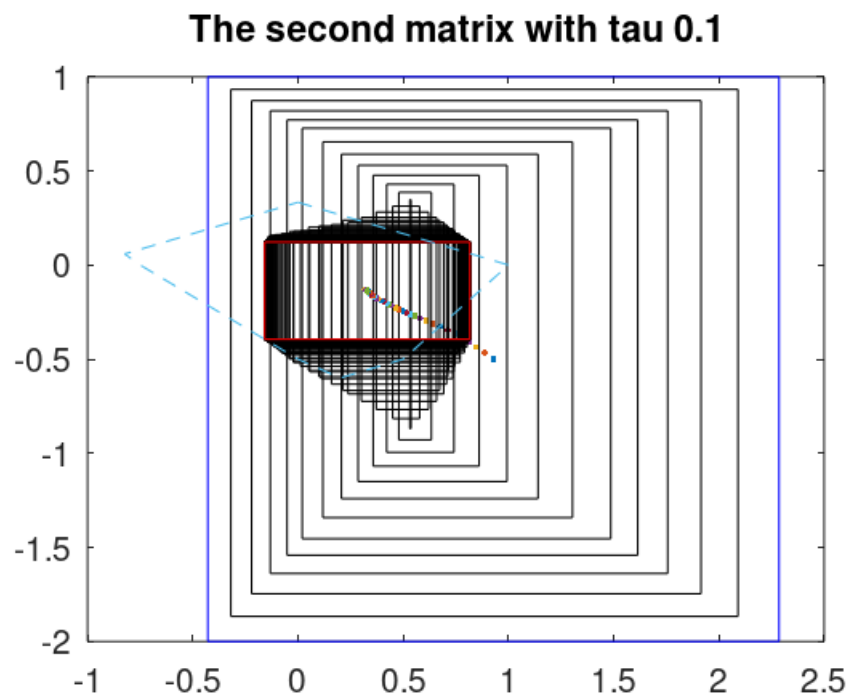


Рис. 5. Иллюстрация брусов при решении задачи (3) с  $\tau = 0.1$

## 5. Обсуждение

### 5.1. Решение задачи по теореме Зюзина

На графике радиусов решения указанной задачи заметно, что значение данных радиусов перестает меняться уже к 6 итерации метода. Это иллюстрирует быструю сходимость метода. При этом наблюдается достаточно большое сокращение начального бруса до приемлемого для решения поставленной задачи.

### 5.2. Субдифференциальный метод Ньютона

Для задачи (2) метод Ньютона сошелся всего за 4 итерации, и решение полностью находится в пределах допускового множества.

При этом для похожей постановки задачи (задача (3)) уже наблюдается отсутствие полной сходимости и полученный результат является только некоторым уточнением. При уменьшении параметра  $\tau$  можно заметить, что брусы решения получились иными и решение задачи оценивается чуть лучше. К тому же, при уменьшении параметра  $\tau$  большая часть итогового бруса находится в пределах допускового множества и брусы изменяются более плавно.