Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе №4

по дисциплине
"Интервальный анализ"

Выполнила студентка
группы 5030102/80201 Деркаченко Анна Олеговна

Проверил
доцент, к.ф.-м.н. Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

Список иллюстраций

1. Постановка задачи

2. Получение решения по теореме Зюзина

Дана ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [2,5] & [0,1] \\ [1,2] & [1,4] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-2,1] \\ [-1,4] \end{pmatrix} \tag{1}$$

Необходимо:

1) Построить итерационную схему с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части

2) Проиллюстрировать

   - брусы итерационного процесса
   - радиусы решения в зависимости от номера итерации

2.1. Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона

Даны две ИСЛАУ:

$$\begin{pmatrix} [3,4] & [5,6] \\ [-1,1] & [-3,1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3,3] \\ [-1,2] \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} [3,4] & [5,6] \\ [-1,1] & [-3,1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3,4] \\ [-1,2] \end{pmatrix} \tag{3}$$

Необходимо:

1) Построить итерационную схему субдифференциального метода Ньютона для обеих ИСЛАУ

2) Проиллюстрировать брусы итерационного процесса

3. Теория

3.1. Теорема Зюзина

Теорема: пусть в ИСЛАУ вида $Cx = d$, где $C \in \mathbb{KR}^{n\times n}, d \in \mathbb{KR}^n$. При этом правильная проекция матрицы C имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение системы существует и единственно.

Построение итерационного процесса:

1) $D = diag\{c_{ii}\}_{i=1}^n, \quad E = C \ominus D$

2) $Cx = d \Leftrightarrow Dx = d \ominus Ex$

3) $x^{k+1} = inv\, D \cdot (d \ominus Ex^k), k = 0, 1, \ldots$

3.2. Субдифференциальный метод Ньютона

Построение итерационного процесса:

$$x^k = x^{k-1} - \tau(D^{k-1})^{-1}\mathcal{F}(x^{k-1}), \tag{4}$$

где $\mathcal{F}(x) = sti\,(C \cdot sti^{-1}\,(x)) - x + sti\,(d)$, $sti : \mathbb{KR}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ - операция стандартного погружения, D^{k-1} - субградиент отображения $\mathcal{F}$ в точке x^{k-1}, τ - константа ($\tau = 1$).

4. Реализация

Реализация лабораторной работы проводилась с помощью встроенных средств в среде разработки Octave, библиотеки kinterval для полной интервальной арифметики.

Исходный код лабораторной работы размещен в GitHub-репозитории.

URL: https://github.com/derkanw/IntervalAnalysis/tree/main/lab4

5. Результаты

5.1. Решение задачи по теореме Зюзина

Начальный брус обозначен синим цветом, а конечный результат - красным. Число итераций равно 10. Полученный результат для задачи (1): $x = \begin{pmatrix} [-0.8, 0.095228] \\ [0.058537, 0.76187] \end{pmatrix}$

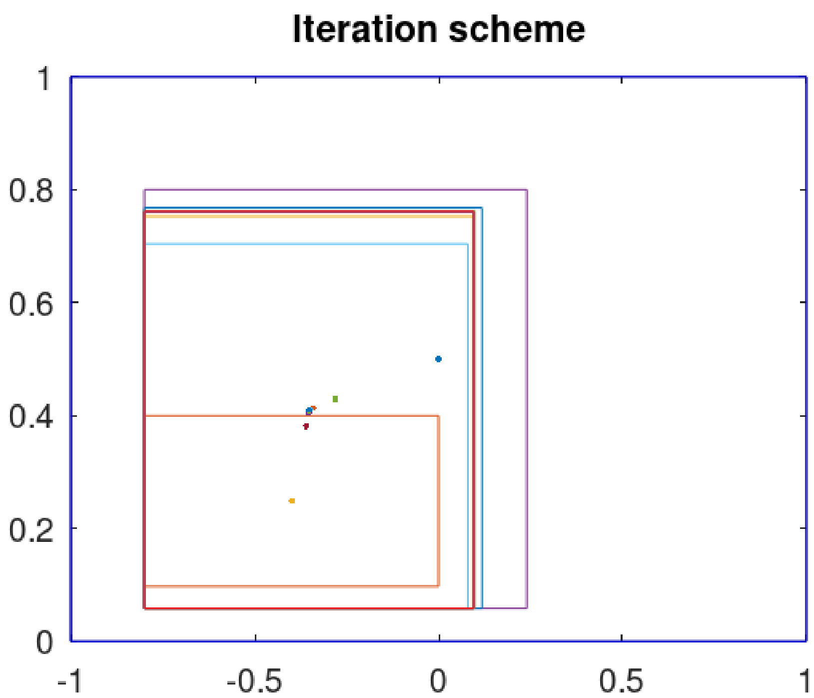

Рис. 1. Иллюстрация брусов при решении задачи по теореме Зюзина

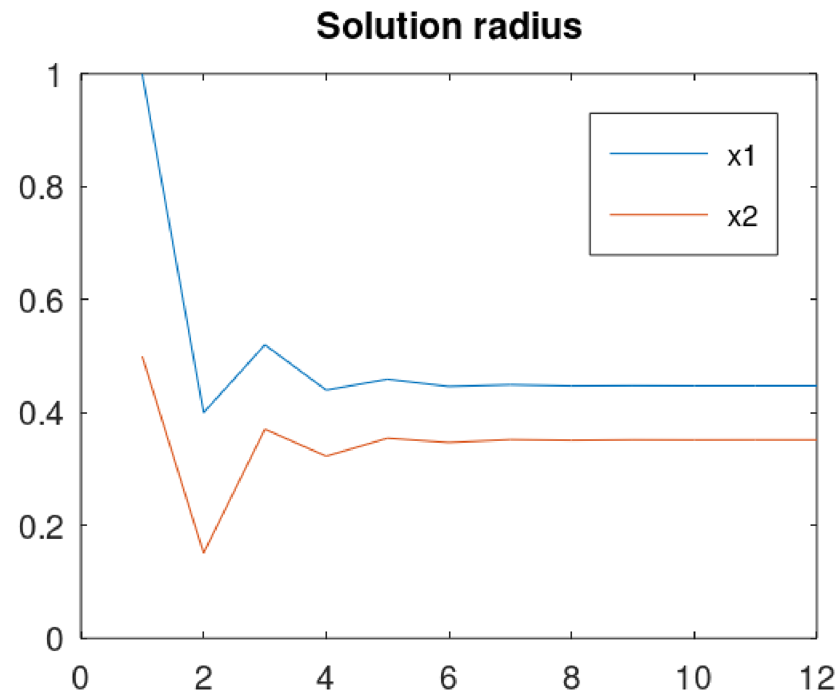

Рис. 2. Иллюстрация радиусов решения задачи по теореме Зюзина

5.2. Субдифференциальный метод Ньютона

Начальный брус обозначен синим цветом, конечный вид бруса - красным, зеленой пунктирной линией - границы допускового множества. Проведено 200 итераций метода.

Решение задачи (2) с параметром $\tau = 1$ получено за 4 итерации: $x = \begin{pmatrix} [-1.4803 * 10^{-16}, 0.5] \\ [-0.5, 0.1667] \end{pmatrix}$

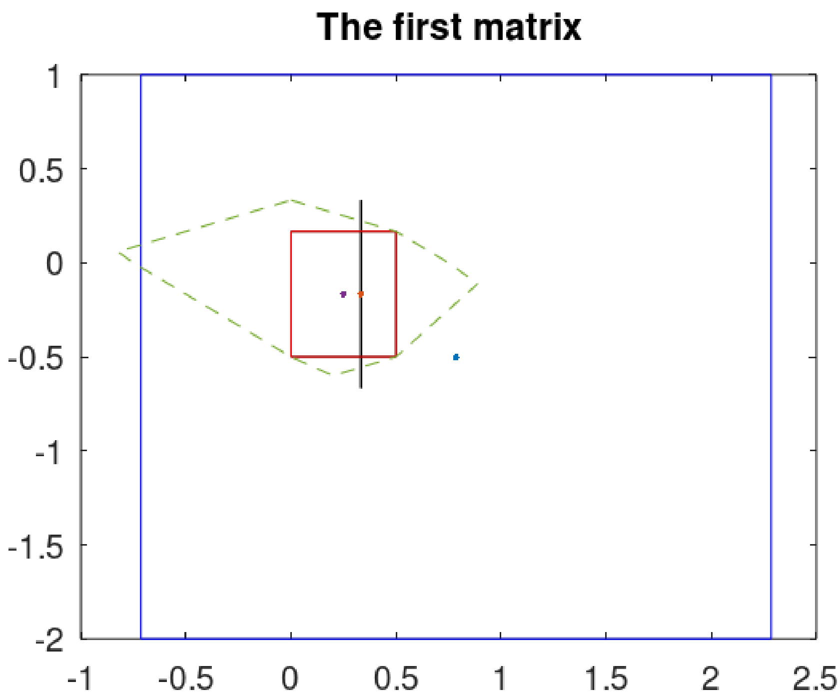

Рис. 3. Иллюстрация брусов при решении задачи (2)

Решение задачи (3) с $\tau = 1$, полученное на 200 итерации, равно $x = \begin{pmatrix} [-0.3333, 1] \\ [-0.3333, 0] \end{pmatrix}$

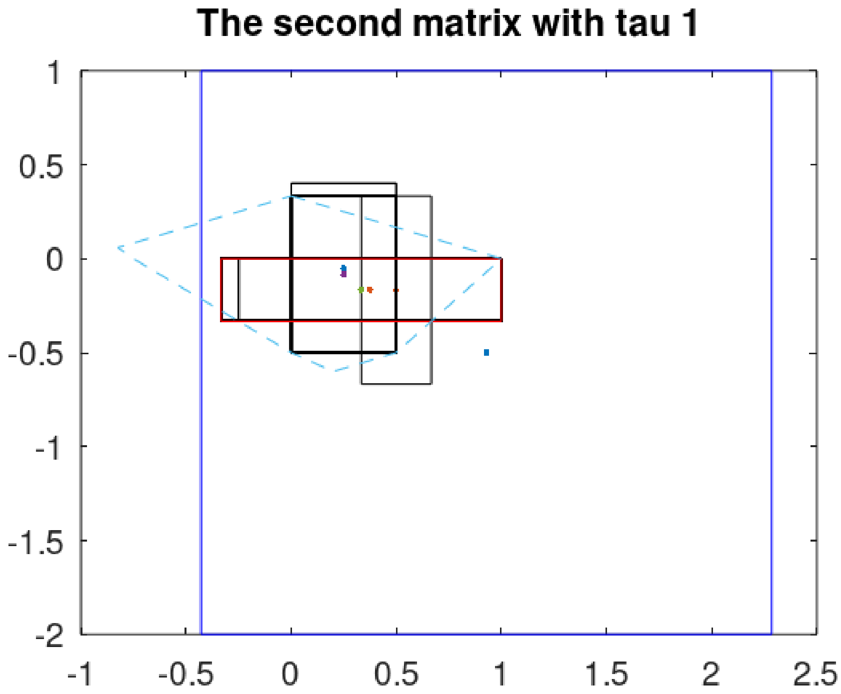

Рис. 4. Иллюстрация брусов при решении задачи (3) с $\tau = 1$

При уменьшении параметра $\tau = 0.1$ решение той же задачи, полученное на 200 итерации, равно $x = \begin{pmatrix} [-0.15837, 0.81674] \\ [-0.39442, 0.12217] \end{pmatrix}$

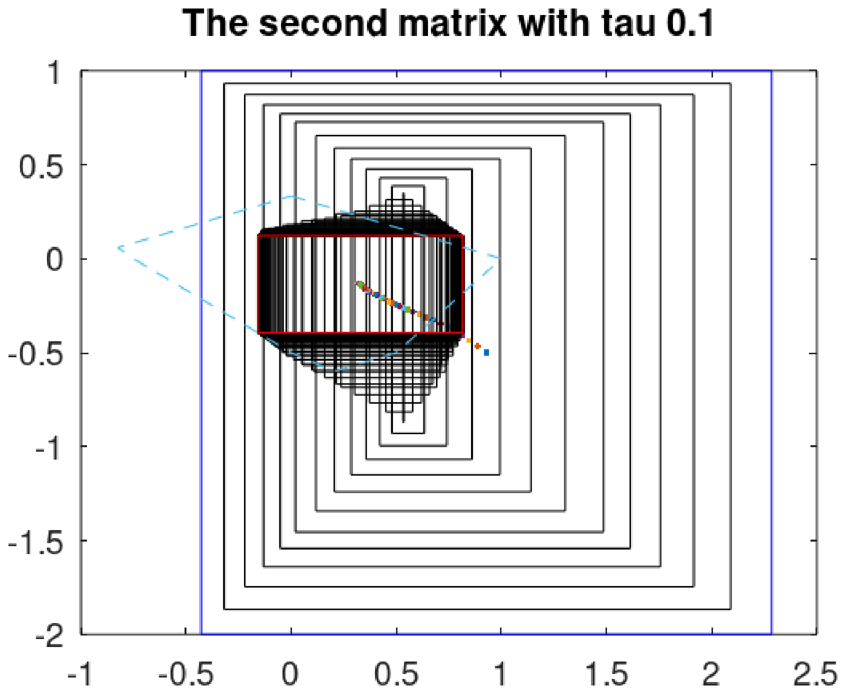

Рис. 5. Иллюстрация брусов при решении задачи (3) с $\tau = 0.1$

6. Обсуждение

6.1. Решение задачи по теореме Зюзина

На графике радиусов решения указанной задачи заметно, что значение данных радиусов перестает меняться уже к 6 итерации метода. Это иллюстрирует быструю сходимость метода. При этом наблюдается достаточно большое сокращение начального бруса до приемлемого для решения поставленной задачи.

6.2. Субдифференциальный метод Ньютона

Для задачи (2) метод Ньютона сошелся всего за 4 итерации, и решение полностью находится в пределах допускового множества.

При этом для похожей постановки задачи (задача (3)) уже наблюдается отсутствие полной сходимости и полученный результат является только некоторым уточнением. При уменьшении параметра τ можно заметить, что брусы решения получились иными и решение задачи оценивается чуть лучше. К тому же, при уменьшении параметра τ большая часть итогового бруса находится в пределах допускового множества и брусы изменяются более плавно.