Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

**Прикладная математика и информатика**

# Отчет по лабораторной работе №3

по дисциплине
"Интервальный анализ"

Выполнила студентка
группы 5030102/80201 Деркаченко Анна Олеговна

Проверил
доцент, к.ф.-м.н. Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021 г.

# Содержание

# Список иллюстраций

# 1. Постановка задачи

Пусть дана ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [1,2] \cdot x_1 + [0,5] \cdot x_2 = [2,8] \\ x_1 - [1,2] \cdot x_2 = 0 \\ [1,3] \cdot x_1 = [5,8] \end{cases} \tag{1}$$

Необходимо:

1) Вычислить максимум распознающего функционала
2) Достичь разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции:
   - правой части
   - матрицы
3) Вычислить оценки вариабельности решения
4) Исследовать управление положением решения за счет:
   - радиусов элементов матрицы в целом
   - радиусов элементов матрицы построчно

# 2. Теория

## 2.1. Распознающий функционал

**Опр:** ***распознающий функционал*** - ограниченный, вогнутый функционал, достигающий конечного максимума на $\mathbb{R}^n$.

$$Tol(x) = Tol(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ rad\, \mathbf{b}_i - \left| mid\, \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \tag{2}$$

$$x \in \Xi_{tol} \Leftrightarrow Tol(x) \ge 0 \tag{3}$$

Если $\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x) \ge 0$, то допусковое множество не пусто, иначе $\Xi_{tol} = \varnothing$. Обратное также верно.

## 2.2. Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части

**Идея метода:** к каждой компоненте правой части ИСЛАУ добавляется величина $K \cdot \nu_i \cdot [-1, 1]$, где $i$ - номер компоненты, $\nu_i$ - вес, задающий относительное расширение $i$-компоненты, $K$ - общий коэффициент расширения вектора $\mathbf{b}$.

Положим значение $\nu_i = 1\, \forall i = \overline{1,3}$. $K$ подбирается из соотношения $K + \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x) \ge 0$, что делает ИСЛАУ разрешимой.

## 2.3. Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

**Идея метода:** модифицировать матрицу ИСЛАУ $\mathbf{A}$ за счет ее замены на $\mathbf{A} \ominus K \cdot N \cdot \mathbf{E}$, где $N = \{\nu_i\}$ - матрица весов, $K$ - общий коэффициент сужения $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ состоит из интервалов $[-e_{ij}, e_{ij}]$.

Коррекция выполняется пропорционально координатам точки максимума распознающего функционала с проверкой принадлежности вычислений к $\mathbb{IR}$.

Для управления положением максимума распознающего функционала $N$ - единичная матрица для коррекции матрицы в целом, а для построчной коррекции выбирается $N = diag\{\nu_i\}$.

## 2.4. Оценки вариабельности решения

*Абсолютная оценка вариабельности:*

$$ive(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A \in \mathbf{A}} cond\, A \cdot ||argmax\, Tol(x)|| \frac{\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x)}{||\mathbf{b}||} \tag{4}$$

*Относительная оценка вариабельности:*

$$rve(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A \in \mathbf{A}} cond\, A \cdot \max_{x \in \mathbb{R}^n} Tol(x) \tag{5}$$

# 3. Реализация

Реализация лабораторной работы проводилась с помощью встроенных средств в среде разработки MATLAB, библиотеки IntLab для интервальной арифметики, библиотеки tolsolvty для нахождения максимума распознающего функционала.

Исходный код лабораторной работы размещен в GitHub-репозитории.

URL: https://github.com/derkanw/IntervalAnalysis/tree/main/lab3

# 4. Результаты

## 4.1. Достижение разрешимости ИСЛАУ

Исходная ИСЛАУ имеет пустое допусковое множество, так как максимальное значение $Tol = -2.0769 < 0$ для точки $[2.9231, 0.84615]$.

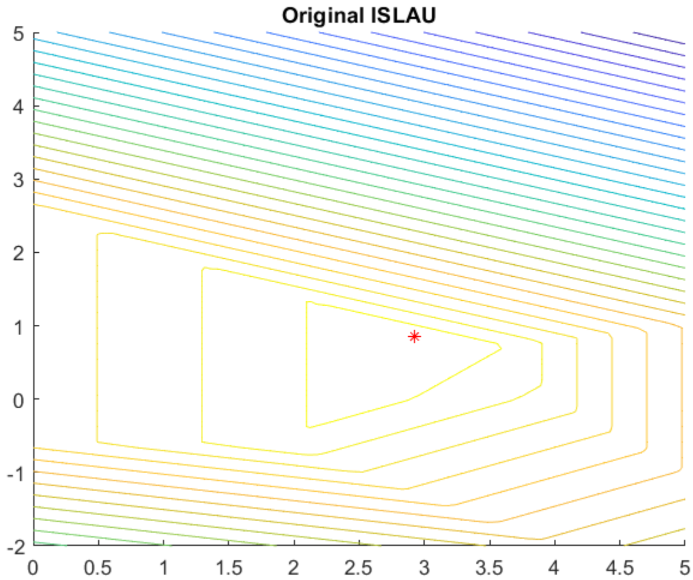


Рис. 1. График $Tol(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$

## 4.2. Коррекция правой части

При коррекции правой части получено максимальное значение $Tol = 0.41538 > 0$ для точки $[2.9231, 0.84615]$. То есть система стала совместной.

При этом вектор-столбец **b'** $= ([-0.4924, 10.4924], [-2.4924, 2.4924], [2.5076, 10.4924])$, оценки $ive = 0.13593$ и $rve = 0.67211$.

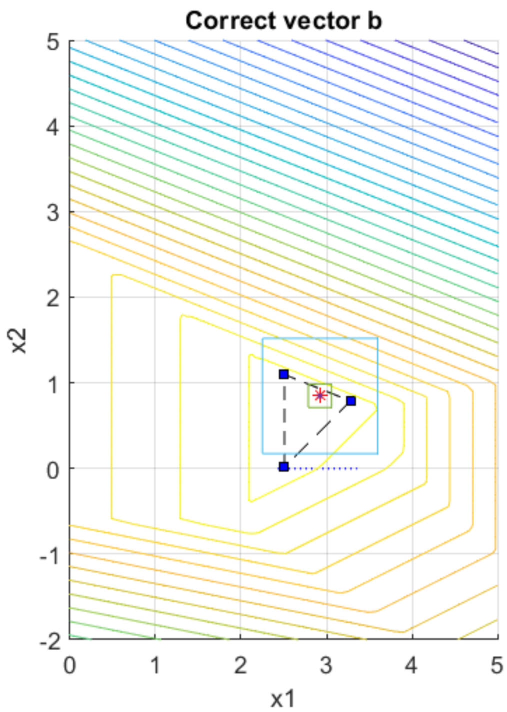


Рис. 2. График $Tol(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ для ИСЛАУ с коррекцией в правой части

## 4.3. Коррекция матрицы

При коррекции матрицы получено максимальное значение $Tol = 0.32981 > 0$ для точки $[2.6683, 1.3345]$. То есть система стала совместной. При этом матрица имеет вид:

$$\mathbf{A'} = \begin{pmatrix} [1.4826, 1.5174] & [2.2864, 2.7136] \\ 1 & [-1.5028, -1.4972] \\ [1.9974, 2.0026] & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Абсолютная и относительная оценка вариабельности принимают значения $ive = 0.11275$ и $rve = 0.42923$ соответственно.

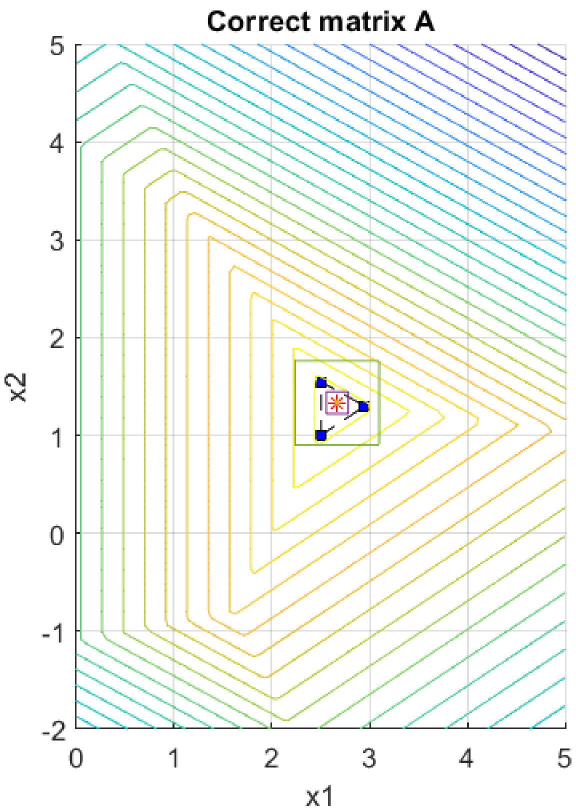


Рис. 3. График $Tol(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ для ИСЛАУ с коррекцией матрицы

## 4.4. Управление положением максимума распознающего функционала

Позиция максимума распознающего функционала определяется на каждой итерации применением сжатия вдвое интервалов для каждой строки матрицы. Всего проведено 10 таких итераций.

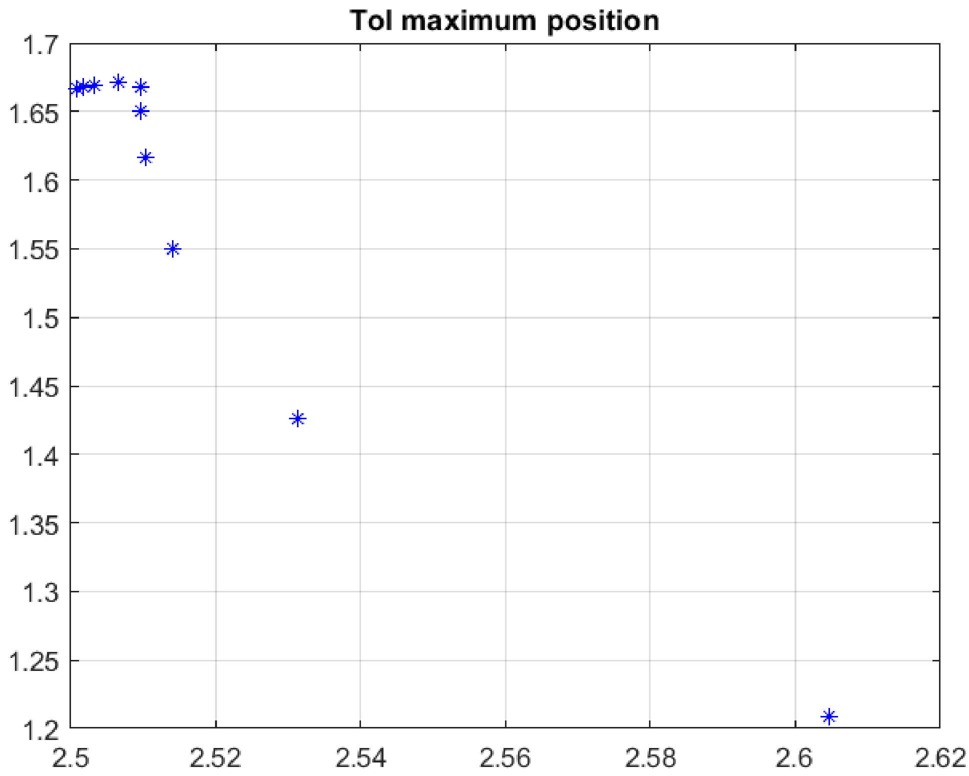


Рис. 4. Положение максимумов Tol при коррекции матрицы в целом

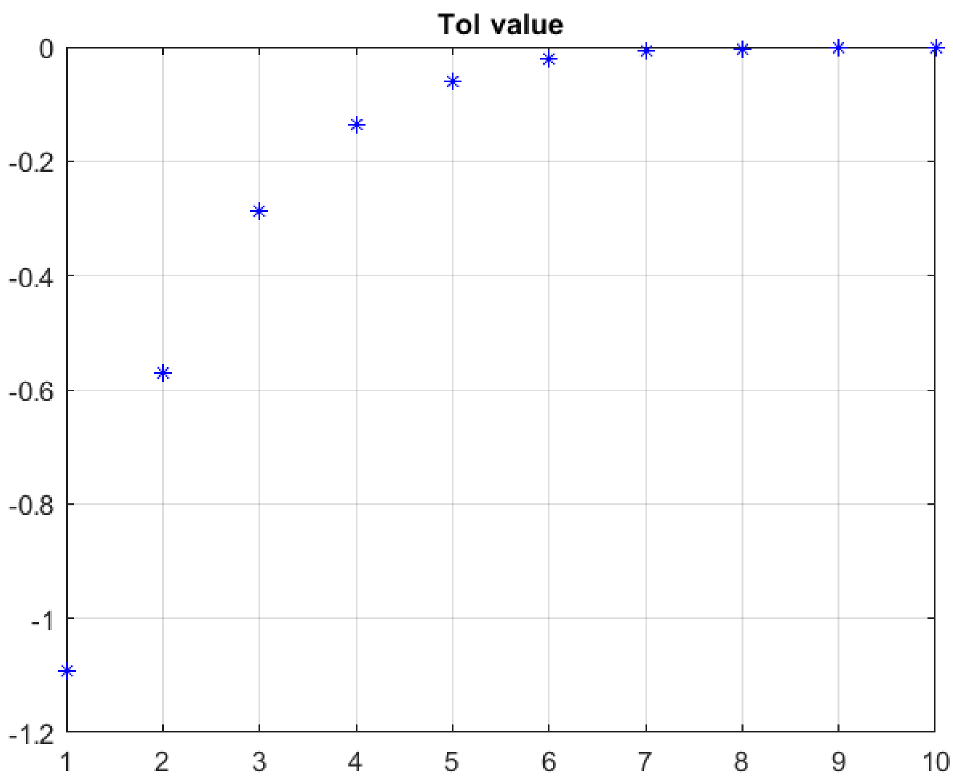


Рис. 5. Значение Tol при коррекции матрицы в целом

Результат, полученный отдельно для каждой строки:

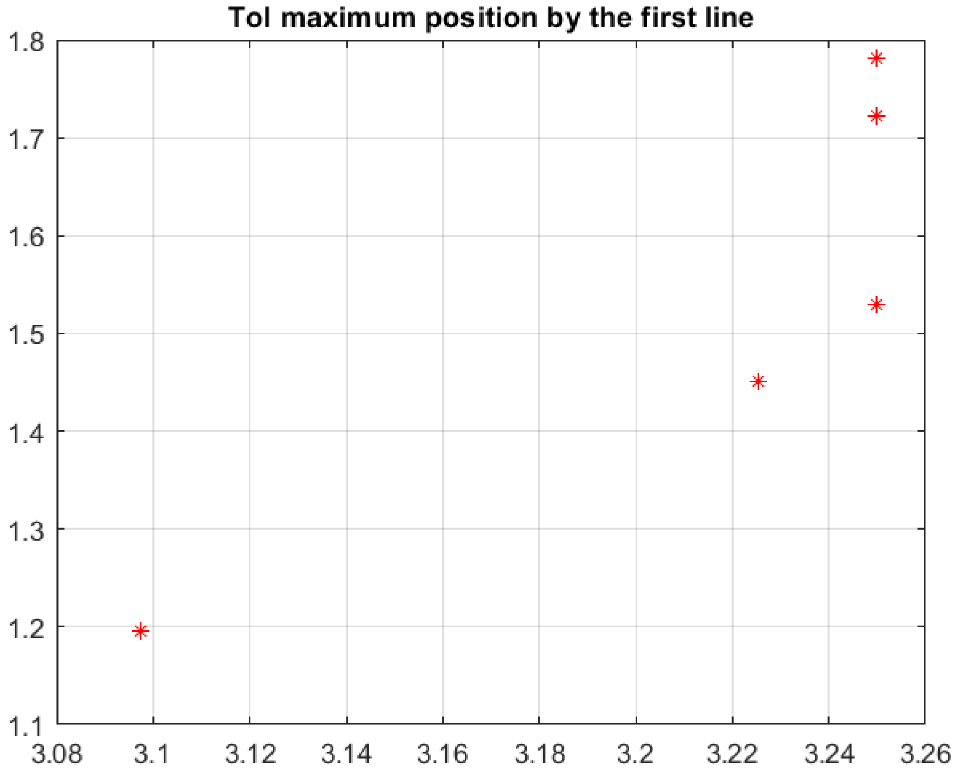


Рис. 6. Положение максимумов Tol при коррекции матрицы построчно (1 строка)

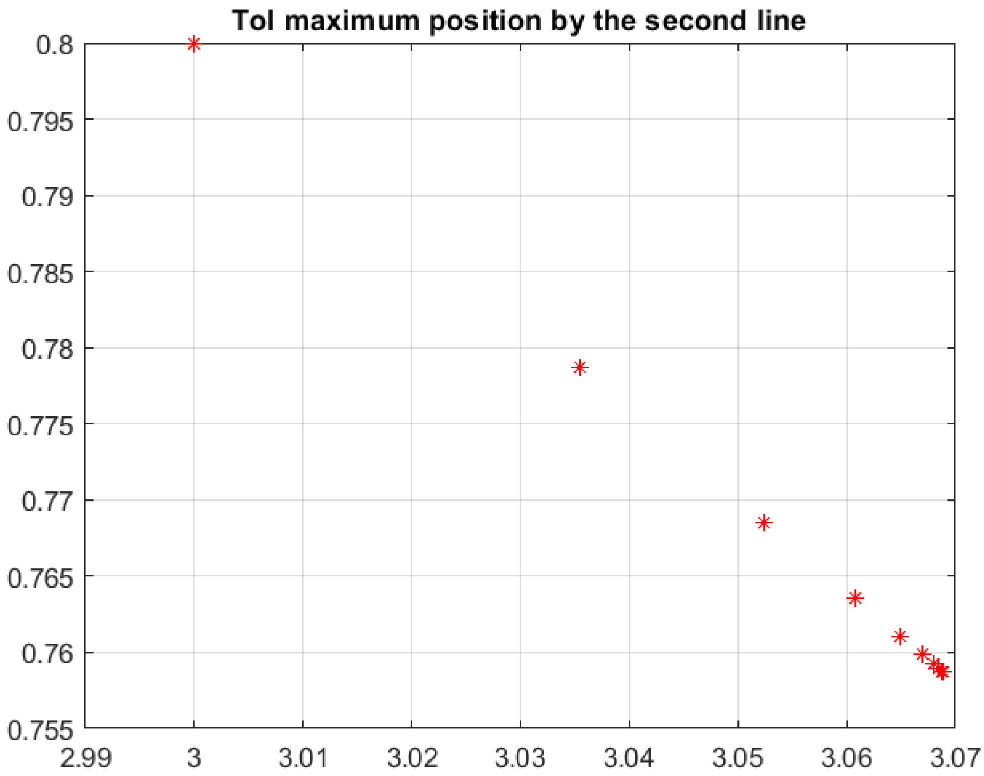


Рис. 7. Положение максимумов Tol при коррекции матрицы построчно (2 строка)

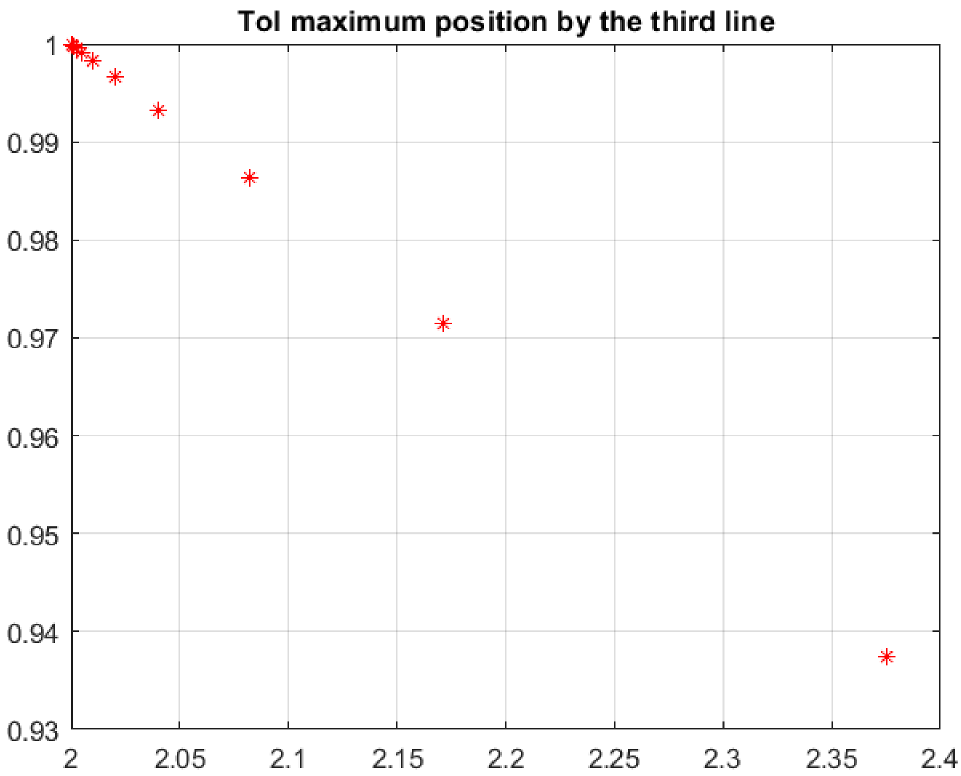


Рис. 8. Положение максимумов Tol при коррекции матрицы построчно (3 строка)

## 5. Обсуждение

Коррекция правой части ИСЛАУ не меняет форму распознающего функционала и положение максимума. Это объясняется, что использование коэффициента расширения увеличивает значение максимума распознающего функционала на величину этого коэффициента. Но достижение разрешимости напрямую зависит от выбора величины данного коэффициента.

Коррекция матрицы ИСЛАУ изменяет форму распознающего функционала и влечет смещение положения максимума. При этом данная коррекция показывает меньшие значения оценок вариабельности по сравнению с значениями оценок при коррекции правой части ИСЛАУ.

Если рассмотреть управление положением максимуа при коррекции матрицы в целом, то можно выделить сгущение точек максимума на каждой итерации к точке $[2.5008, 1.6672]$ (для 10 итерации). При этом данное сгущение замедляется при каждой новой итерации. Данную закономерность можно объяснить постепенным сужением интервалов исходной матрицы, и такой процесс приводит к достижению разрешимости ИСЛАУ. К тому же, замедление данного процесса происходит из-за выбора способа сужения интервалов: нами выбрано сужение вдвое, а не, например, уменьшение на определенную величину.

Похожая закономерность наблюдается для значения $Tol$. Данная величина стартует с отрицательного значения и по мере коррекции матрицы достигает околонулевого значения после 8 итерации. Увеличив количество итераций мы получим логарифмический процесс схождения к нулю, при этом число итераций можно выбрать из ограничений на желаемую точность.

При управлении положением максимума построчно в большинстве случаев так же заметно сгущение полученных точек максимума при итерациях к одному из положений. Данная закономерность не соблюдается для случая коррекции только первой строки матрицы. Ее коррекция не вызывает единообразного влияния на общее смещение положения максимума, а скорее, является своеобразным шумом при данных вычислениях.