Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Прикладная математика и информатика

Отчет по лабораторной работе №1

по дисциплине
"Интервальный анализ"

Выполнила студентка
группы 5030102/80201 Деркаченко Анна Олеговна

Проверил
доцент, к.ф.-м.н. Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021 г.

Содержание

Список иллюстраций

1. Постановка задачи

Во многих задачах необходимо выяснить неособенность матрицы. Рассмотрим несколько типов таких задач.

1.1. Постановка задачи для матрицы линейной регрессии

Пусть дана указанная задача в общей регрессионной постановке $y = X\beta$, число уравнений $m = 2$ и погрешность входных данных неизвеста. Матрица средних значений элементов принимает вид:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$$

Необходимо:

1) Рассмотреть интервальную матрицу вида:
$$X = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & 1 \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & 1 \end{pmatrix}$$
2) Определить, при каком радиусе ε данная матрица содержит особенные точечные матрицы

1.2. Постановка задачи для матрицы задач томографии

Необходимо:

1) Рассмотреть интервальную матрицу вида:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \end{pmatrix}$$
2) Определить, при каком радиусе ε данная матрица содержит особенную матрицу

1.3. Глобальная оптимизация

Даны функции:

1) Функция Букина №6, имеющая один глобальный экстремум
$$f(x, y) = 100\sqrt{|y - 0.01x^2|} + 0.01|x + 10|; \tag{1}$$
2) Функция Химмельблау, имеющая 4 глобальных экстремума
$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2 \tag{2}$$

Необходимо:

1) Выполнить поиск глобального минимума с помощью простейшего интервального адаптивного алгоритма глобальной оптимизации
2) Проиллюстрировать
    - положения брусов из рабочего списка алгоритма и положения их центров
    - графики радиусов рабочих брусов
    - сходимость алгоритма

2. Теория

Опр: Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ называется ***особенной***, если $\exists A \in \mathbf{A} : det(A) = 0$. Иначе такая матрица Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ называется ***неособенная***.

2.1. Критерий Баумана

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ неособенна $\Leftrightarrow$ $\forall A', A'' \in \text{vert}\,\mathbf{A}\ \det(A') \cdot \det(A'') > 0$

2.2. Признак Румпа

$\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\sigma_{\max}(\text{rad}\,\mathbf{A}) < \sigma_{\min}(\text{mid}\,\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{A}$ неособенна

2.3. Глобальная оптимизация

Пусть имеется рабочий список рассматриваемых брусьев, для каждого из которых вычислено целевое значение функции в интервальном смысле. На каждой итерации выбирается брус из этого списка с наименьшей нижней оценкой значения функции, после чего заменяется на два новых бруса, образованных дроблением пополам его самой длинной компоненты. Затем на полученных брусьях вычисляется интервальная оценка целевой функции и выполняется переход на новую итерацию.

3. Реализация

Реализация лабораторной работы проводилась с помощью встроенных средств в среде разработки MATLAB и библиотеки IntLab для интервальной арифметики.

Исходный код лабораторной работы размещен в GitHub-репозитории.

URL: https://github.com/derkanw/IntervalAnalysis/tree/main/lab1

4. Результаты

4.1. Задача линейной регрессии

Чтобы точечная матрица была особенной, достаточно линейной зависимости ее строк. Предположим, что данное условие достигается при $\varepsilon = 0.05$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [0.95, 1.05] & 1 \\ [1.05, 1.15] & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 1.05 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{X},\ \det(X) = 0 \tag{3}$$

4.1.1. Критерий Баумана

Найдем определители крайних матриц:

$$\Delta_1 = -0.1 \quad \Delta_2 = 2\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_3 = -2\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_4 = -0.1 \tag{4}$$

Очевидно, что для выполнения критерий неособенности матрицы, необходимо, чтобы все определители были меньше нуля. Следовательно, при $\varepsilon \geq 0.05$ матрица будет особенной.

4.1.2. Признак Румпа

$$rad\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$mid\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\sigma_{max}(rad\,\mathbf{A}) = \varepsilon\sqrt{2} \tag{7}$$

$$\sigma_{min}(mid\,\mathbf{X}) = 0.048744 \tag{8}$$

При $\varepsilon\sqrt{2} < 0.048744 \Leftrightarrow \varepsilon < 0.0344672$ матрица $\mathbf{X}$ не будет особенной.

4.2. Задача линейной регрессии

4.2.1. Критерий Баумана

Найдем определители крайних матриц без учета повторяющихся:

$$\Delta_1 = 0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_2 = -0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_3 = 4.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_4 = -4.1\varepsilon - 0.1 \tag{9}$$

$$\Delta_5 = -2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_6 = 2\varepsilon^2 - 1.9\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_7 = 2\varepsilon^2 + 1.9\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_8 = -2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \tag{10}$$

$$\Delta_9 = 2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_1 0 = 2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \tag{11}$$

Так как $\varepsilon > 0$, то для $\Delta_2 = -0.1\varepsilon - 0.1 < 0$. Тогда все указанные определители должны быть отрицательными. Получим верхнее ограничение на значение ε:

$$\varepsilon < min\{1, \frac{1}{41}, \frac{1}{20}, 1.09564, \frac{1}{40}, 0.0456356\} \tag{12}$$

Таким образом, $\forall\varepsilon \geq \frac{1}{41}$ матрица $\mathbf{A}$ будет содержать особенные точечные матрицы.

4.2.2. Признак Румпа

$$rad\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$mid\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\sigma_{max}(rad\,\mathbf{A}) = 2\varepsilon \tag{15}$$

$$\sigma_{min}(mid\,\mathbf{X}) = 0.048744 \tag{16}$$

При $2\varepsilon < 0.048744 \Leftrightarrow \varepsilon < 0.024377$ матрица $\mathbf{X}$ не будет особенной.

4.3. Глобальная оптимизация

4.3.1. Функция Букина №6

Функция Букина $f(x, y) = 100\sqrt{|y - 0.01x^2|} + 0.01|x + 10|$ имеет один глобальный экстремум $f(-10, 1) = 0$ в пределах зоны рассмотрения.

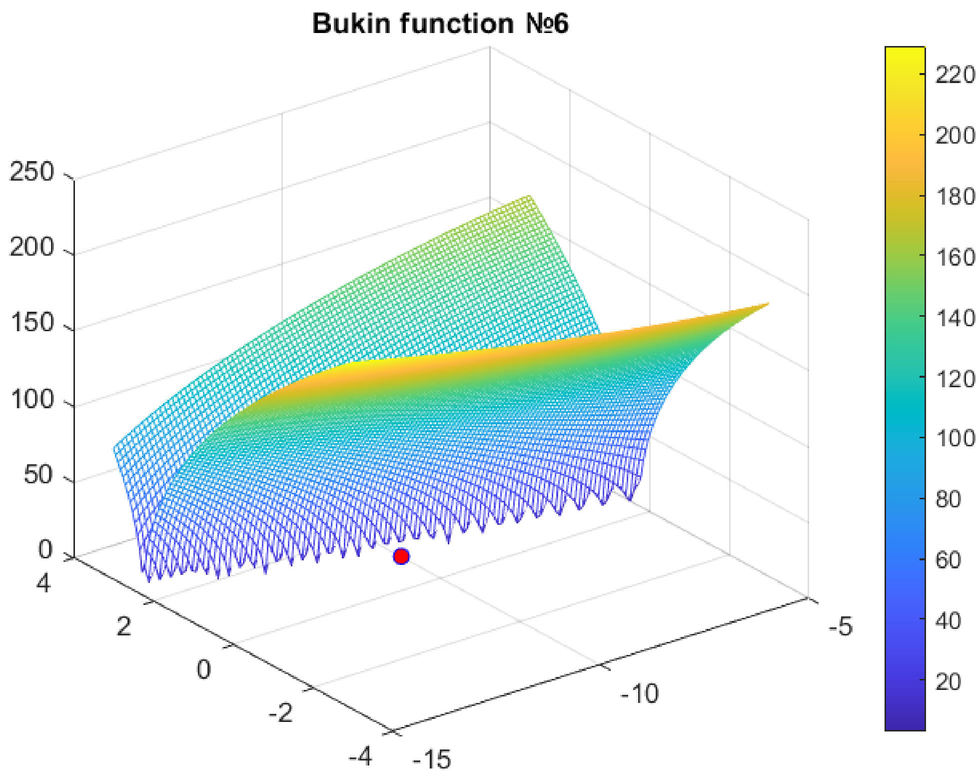

Рис. 1. График функции Букина

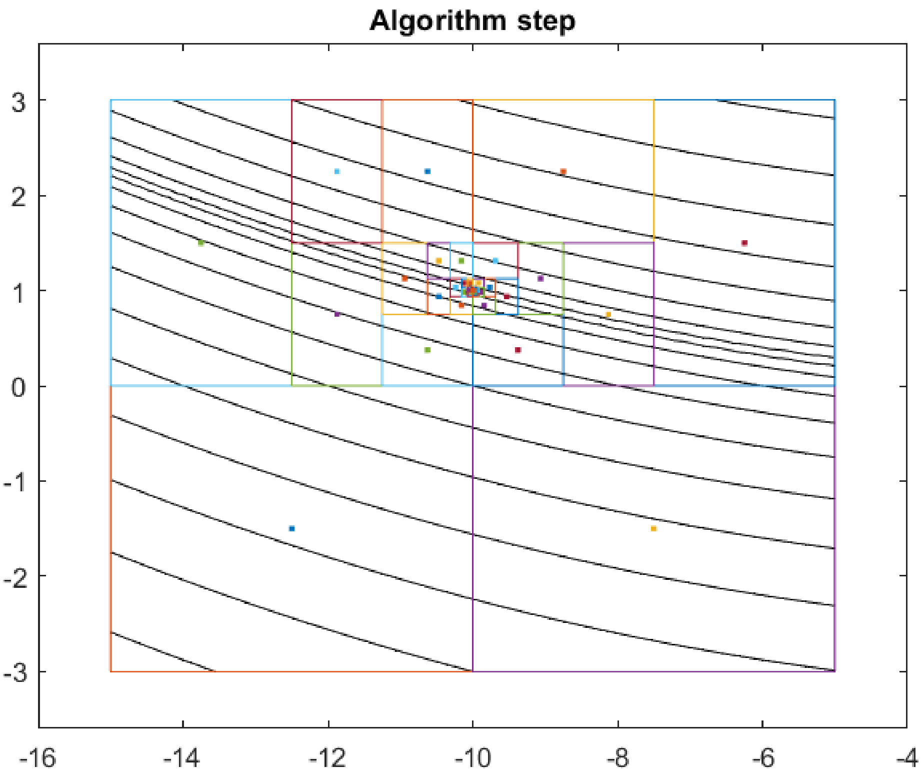

Рис. 2. Иллюстрация работы алгоритма для функции Букина

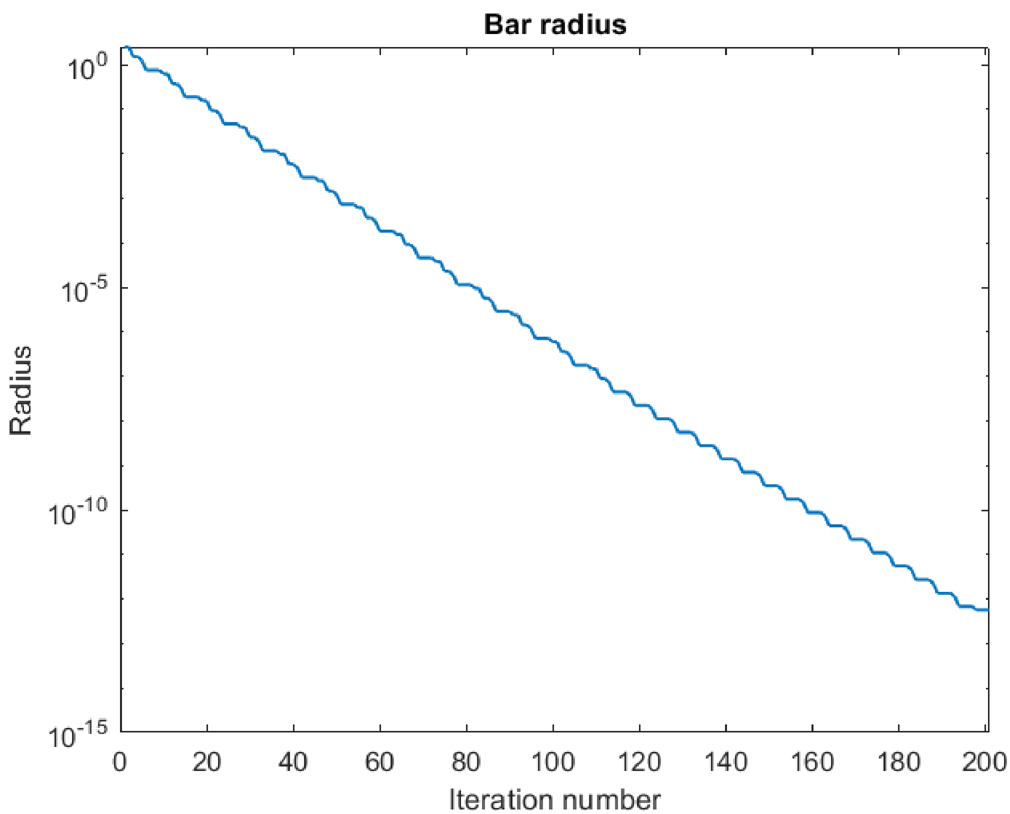

Рис. 3. Радиусы рабочих брусов для функции Букина

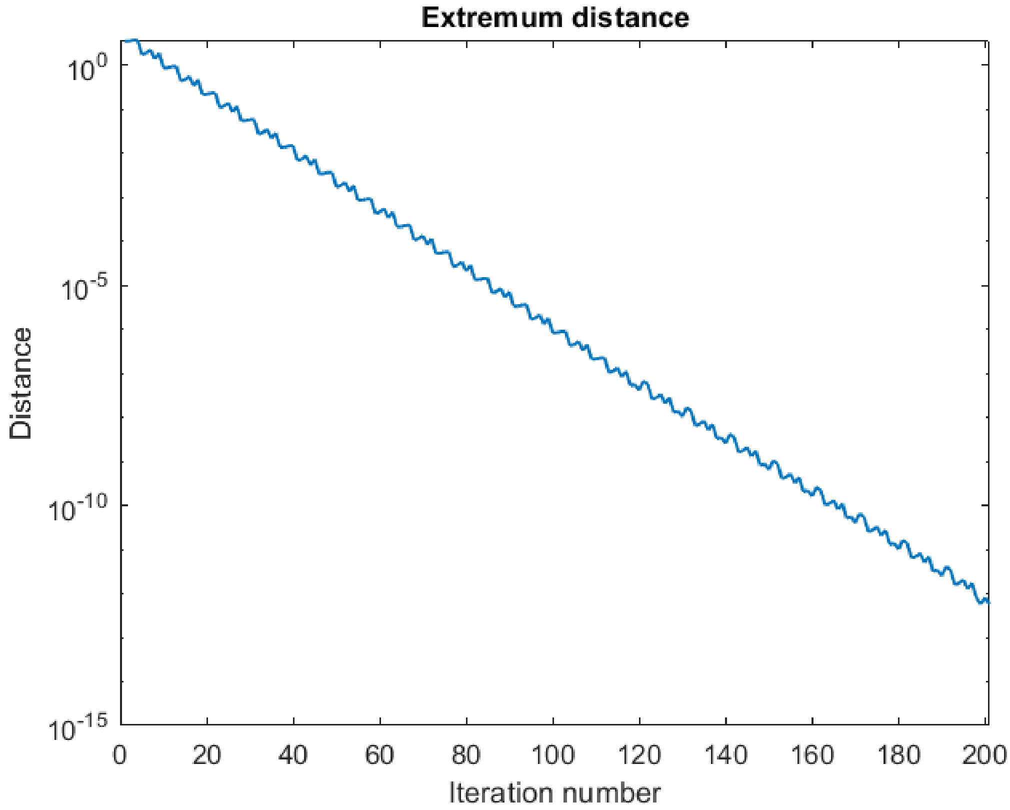

Рис. 4. Расстояние до точки экстремума для функции Букина

4.3.2. Функция Химмельблау

Функция Химмельблау $f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$ имеет 4 глобальных экстремума с нулевым значением в точках:

$$(3, 2), (-2.805118, 3.131312), (-3.77931, -3.283186), (3.584428, -1.848126)$$

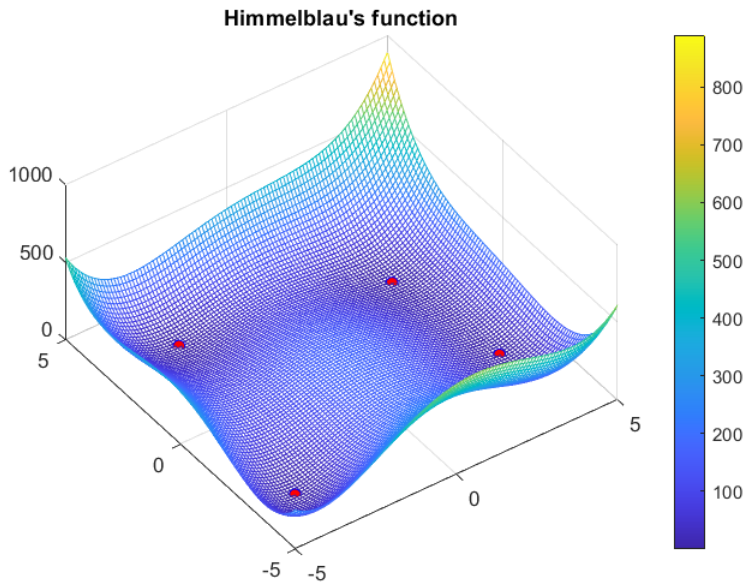

Рис. 5. График функции Химмельблау

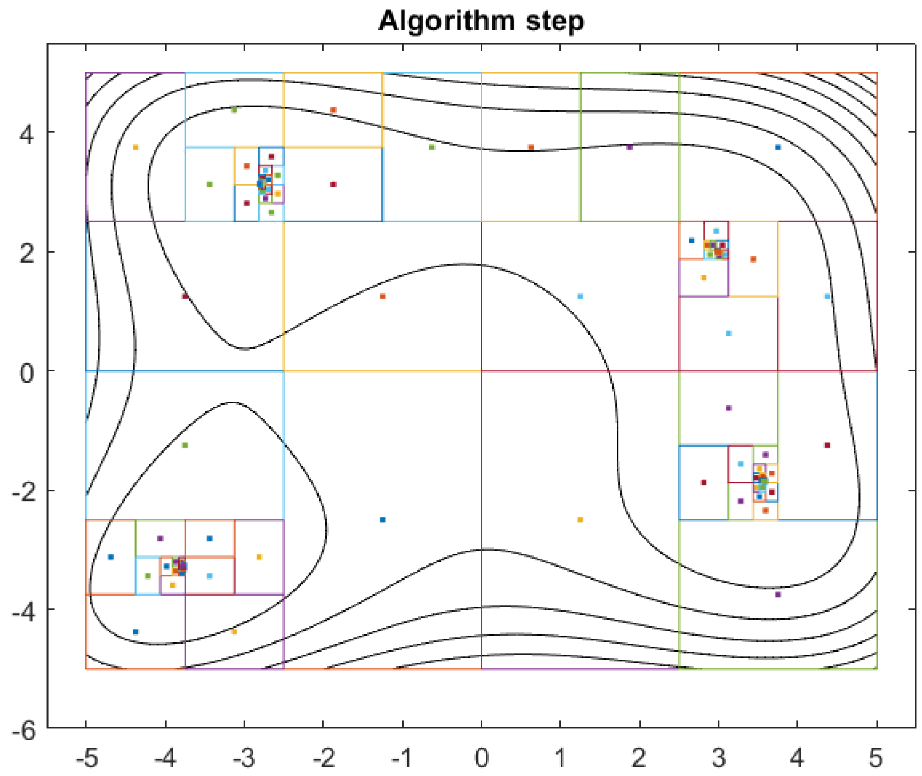

Рис. 6. Иллюстрация работы алгоритма для функции Химмельблау

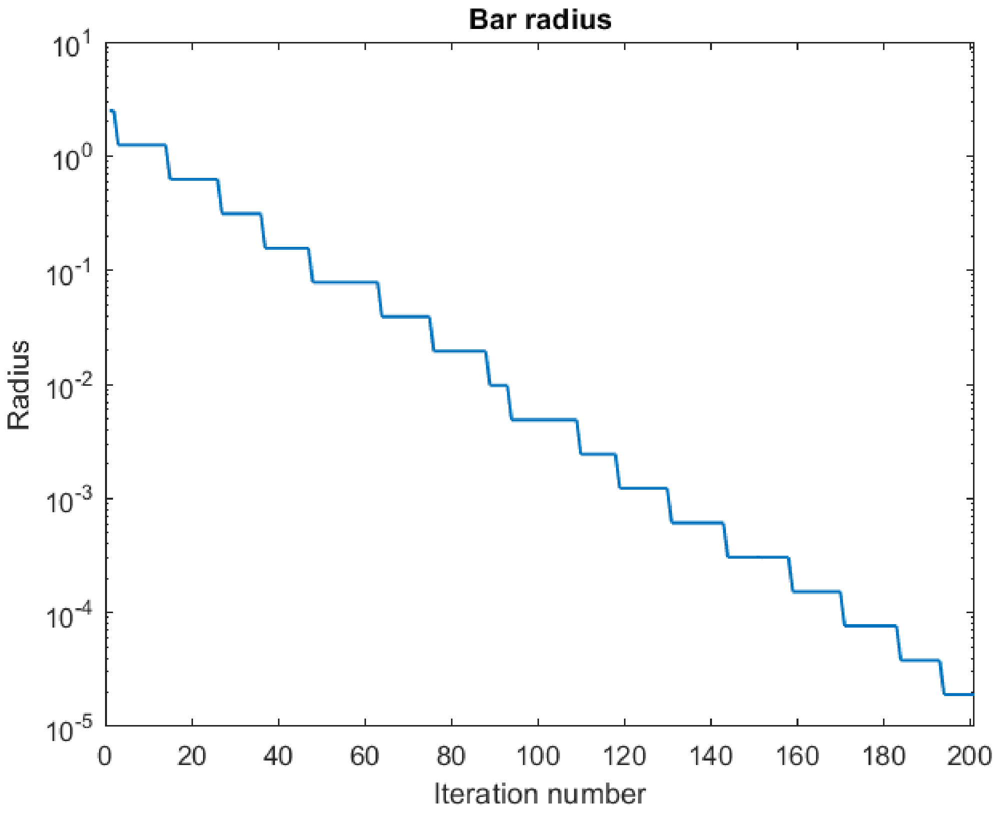

Рис. 7. Радиусы рабочих брусов для функции Химмельблау

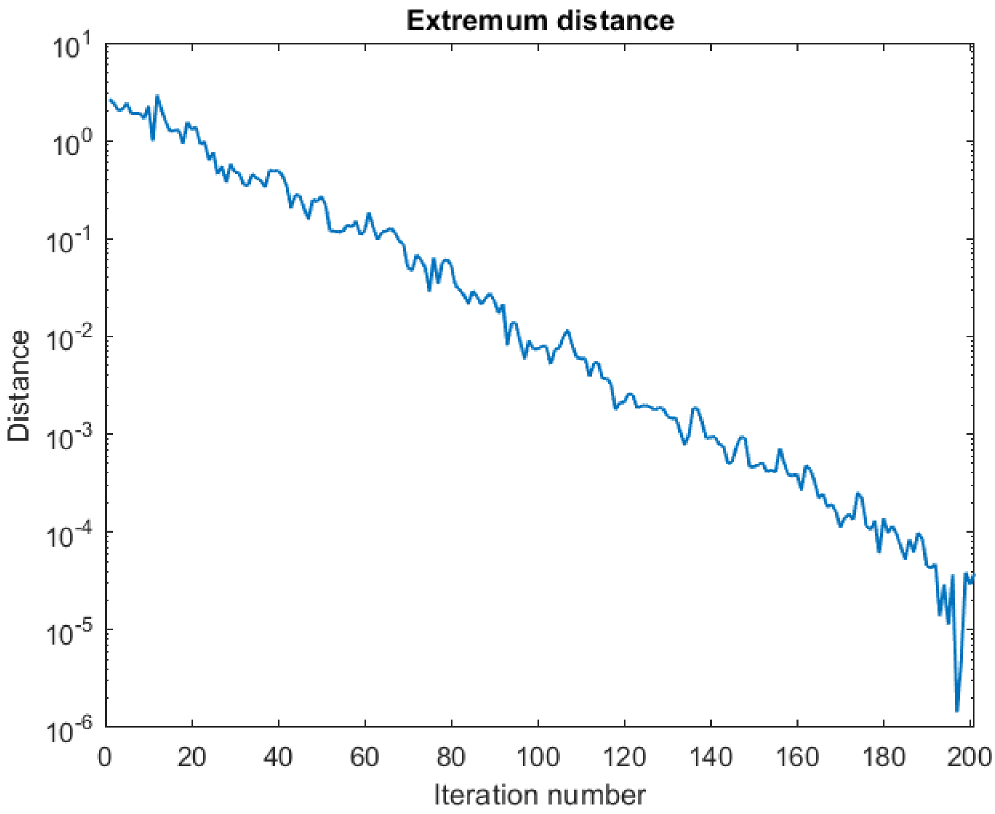

Рис. 8. Расстояние до точки экстремума для функции Химмельблау

5. Обсуждение

5.1. Особенность матрицы

Для задач линейной и полиномиальной регрессии рассматриваются квадратные матрицы $\mathbf{X}_n \in \mathbb{IR}^{n\times n}$. При переходе из линейной регрессии в полиномиальную рассматривается увеличение параметра n. При достаточной близости величин $mid\, X_n$ уменьшается значение ε и повышается вероятность получить вырожденную точечную матрицу.

Переход от задачи для матрицы линейной регрессии к задаче для матриц задач томографии производится путем ввода дополнительных интервальных величин. К тому же, матрицу для последней проще свести к особенной, уменьшая значение ε для интервала, на котором матрица является неособенной.

5.2. Глобальная оптимизация

На графиках, иллютрирующих работу простейшего интервального адаптивного алгоритма глобальной оптимизации, можно заметить, что для обеих функций характерно сгущение числа брусьев по мере приближения к экстремуму.

Расстрояние до точки экстремума и радиус рабочих брусов пропорциональны 10^{-12} для функции Букина и 10^{-5} для функции Химмельблау соответственно. Понижение сходимости алгоритма для функции Химмельблау можно объяснить сложность ее формы и наличием нескольких глобальных экстремумов.