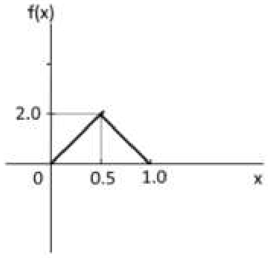
*29. **产生一个[0, 1]区间内均匀分布的随机数不是难事，但是这次策划变花样了，现在有一个boss怪，其攻击具有如图所示的概率密度：**



该如何产生呢?

算法步骤：

1. 生成一个服从均匀分布的随机数$U \sim U(0,1)$;

2. 设F为指定分布的分布函数，则$X = F^{-1}(U)$即为指定分布的随机数。

简单点说，就是将F(x)在dy微元映射到x轴的dx微元，是一个将均匀分布映射回x分布的过程。

简单点说，就是将 F(x)在 dy 微元映射到 x 轴的 dx 微元，是一个将均匀分布映射回 x 分布的过程。

证明蓝色的结论：

1、 证明 y 是均匀分布的

这里我们对于反函数，就考虑0<y<1的时候，简单一点分析：

$$
\begin{aligned}
F(y) &= P(Y < y) \\
&= P(f(x) < y) \\
&= P(x < f^{-1}(y)) \\
&= f(f^{-1}(y)) \\
&= y
\end{aligned}
$$

由上式可知，$\varphi(y) = 1$，说明y是一个均匀分布函数。

2、 为什么分布函数的反函数可以求取正态分布的随机数

假设x=f(-1)(y)，由上面可知，y是一个均匀分布的函数，x是它的反函数，我们要求的就是x的值。

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P(X < x) \\
&= P(f^{-1}(y) < x) \\
&= P(y < f^{-1}(x))
\end{aligned}
$$

上面式子可能你会有点看不懂，你可以从另外一个角度来理解，y=f(x)，f(x)是分布函数的值，则有x=f(-1)(y)，x是服从正态分布的，所以可以求分布函数的反函数来得到x。

但是很不幸的是，一般正态分布的反函数都很难求，但是并不是这种思想没有用，下面介绍的box-muller方法就是基于反函数方法的改进。

衍生：生成正态分布的

方法3 box-muller方法

这个方法是反函数的方法的变形，需要推导了，比较麻烦，但是运算量小，是我们常用的产生正态分布随机数的方法。

首先我们先来求服从正态分布 $N(0,\delta^2)$ 的随机数，该正态分布的密度函数为 $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}e^{-\frac{x^2}{2\delta^2}}$。

设（X,Y）是一对相对独立服从上述正态分布的随机数，则其概率密度函数为：

$$f_{(x,y)}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\delta^2}}$$

我们设 $x=r\sin\theta; y=r\cos\theta$,则对于r的分布函数有

$$P(R<r)=\int_0^{2\pi}\int_0^r\frac{1}{2\pi\delta^2}e^{-\frac{u^2}{2\delta^2}}*udud\theta$$

下面我们来对其进行化简：

$$P(R<r)=\int_0^{2\pi}\int_0^r\frac{1}{2\pi\delta^2}e^{-\frac{u^2}{2\delta^2}}*udud\theta$$

$$=\frac{1}{2\delta^2}\int_0^r e^{-\frac{u^2}{2\delta^2}}du^2$$

$$=-e^{-\frac{u^2}{2\delta^2}}\Big|_0^r=1-\delta*e^{-\frac{r^2}{2\delta^2}}$$

则对于r的分布函数求反函数, 可得：

$$R=\delta*\sqrt{-2\ln(1-Z)}$$

可以令（1-Z）为均匀分布的随机数，这里因为Z为r的分布密度，所以Z为均匀分布，1-Z也为均匀分布。均匀分布的反函数即满

$$X=R\cos\theta=\delta*\sqrt{-2\ln(1-Z)}\cos\theta=\delta*\sqrt{-2\ln(U_1)}\cos 2\pi U_2$$

U1，U2都满足在（0,1）区间内的均匀分布。

通过上面的公式就可以得到满足 $N(0,\delta^2)$ 的随机数，我们如果要求得到满足 $N(\mu,\delta^2)$ 的随机数，只需要在 $X1=X+\mu$，向左或向右平移u个单位即可。

这样，通过上述的公式就可以得到满足 $N(\mu,\delta^2)$ 的随机数了。