UNIVERSIDAD CATOLICA DE LA SANTISIMA CONCEPCION
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y FISICA APLICADAS

Pauta Certamen 1
Cálculo III IN1009C

Problema 1. Considere la función $f : dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = 3 - \sqrt{x^2 + 4\,y^2 - 4x + 16y + 20},$$

y la superficie $\mathcal{S}$ corresponde a su gráfica.

(a) **(12 puntos)** Indique el dominio $dom(f)$ y esboce las curvas de nivel

$$\mathcal{C}_k = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x,y) = k\Big\}, \quad \text{para } k = -1, 0, 1, 3.$$

(b) **(5 puntos)** Esboce la curva de intersección entre la superficie $\mathcal{S}$ y el plano $y = -2$.

(c) **(3 puntos)** Indique a que superficie corresponde la gráfica de $\mathcal{S}$ y esbócela.

Solución: (a) Notemos que f está bien definida si $x^2 + 4\,y^2 - 4x + 16y + 20 \geq 0$, lo que completando cuadrados, es equivalente a verificar que:

$$(x-2)^2 + 4\,(y+2)^2 \geq 0\,,$$

de donde, es claro que $dom(f) = \mathbb{R}^2$ y $f(x,y) = 3 - \sqrt{(x-2)^2 + 4\,(y+2)^2}$. Luego, haciendo $f(x,y) = k$, deducimos que el conjunto de curvas de nivel resulta:

$$C_k = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x-2)^2 + 4\,(y+2)^2 = (3-k)^2\Big\}, \quad \text{para } k \leq 3.$$

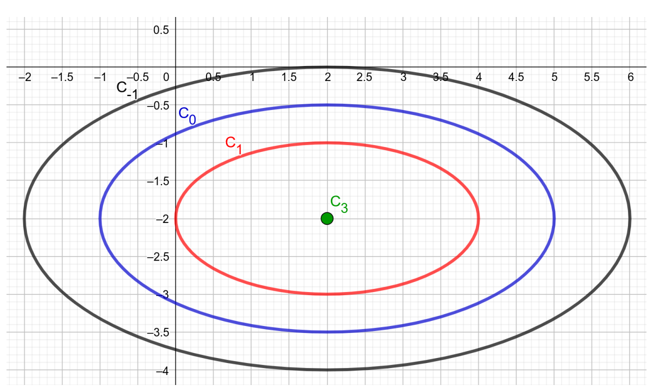
En particular, para $k = -1, 0, 1, 3$, obtenemos, respectivamente,

☐ $C_{-1} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \dfrac{(x-2)^2}{4^2} + \dfrac{(y+2)^2}{2^2} = 1\Big\}$; ☐ $C_0 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \dfrac{(x-2)^2}{3^2} + \dfrac{(y+2)^2}{(3/2)^2} = 1\Big\}$;

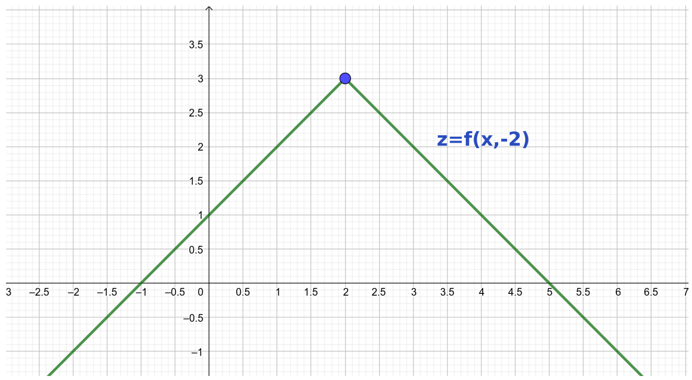
☐ $C_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \dfrac{(x-2)^2}{2^2} + \dfrac{(y+2)^2}{1^2} = 1\Big\}$;

☐ $C_3 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x-2)^2 + 4\,(y+2)^2 = 0\Big\} \Longrightarrow C_3 = \big\{(2,-2)\big\}\,.$

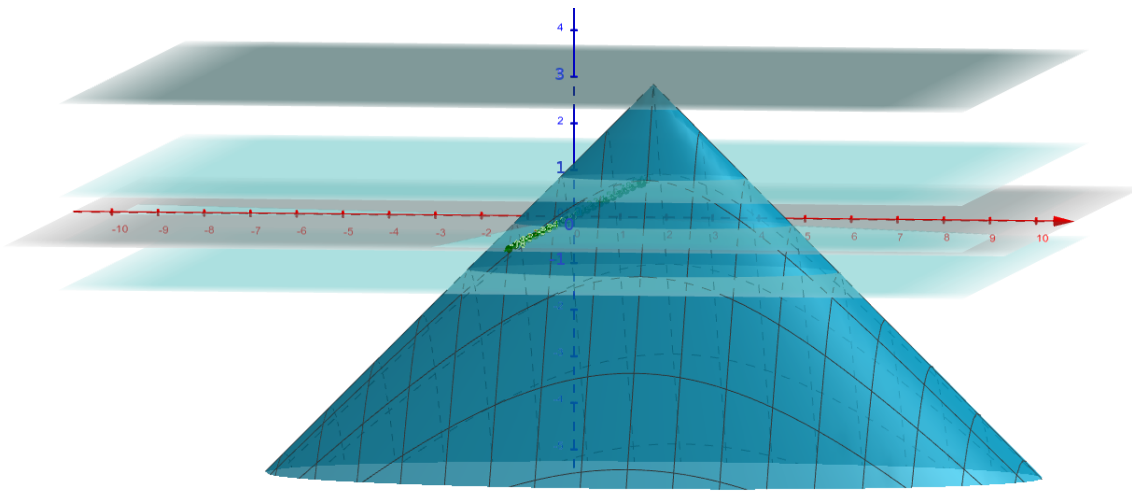
Así, las gráficas de las curvas de nivel para $k = -1, 0, 1$ y $k = 3$, corresponden a las elipses centradas en $(2,-2)$ y al punto $(2,-2)$, respectivamente, como se detallan a continuación:



(b) Notemos que la curva de intersección entre la superficie $\mathcal{S}$ y el plano $y=-2$ está dada por $z=f(x,-2)=3-|x-2|$, cuya gráfica es la función valor absoluto abierta hacia abajo con vértice $(2,3)$ restringida al plano $y=-2$, el cual es paralelo al plano XZ (o plano $y=0$), como se detalla a continuación:



(c) De los apartados (a) y (b), deducimos que la superficie $\mathcal{S}$ corresponde a la traslación del cono elíptico negativo $z=-\sqrt{x^2+4\,y^2}$, con traslación $(2,-2,3)$, cuya gráfica es:



Problema 2.

(2.1) Usando resultados apropiados, pruebe que los siguientes límites **existen** y determine su valor.

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \frac{\operatorname{sen}(\pi xyz)}{\ln(xyz-5)}$; (5 Puntos)

Solución:
Si hacemos el cambio de variable $u=xyz$, se tiene que si $(x,y,z)\longrightarrow(1,2,3)$, entonces $u\longrightarrow 6$ (2 Puntos).
Además,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \frac{\operatorname{sen}(\pi xyz)}{\ln(xyz-5)} &= \lim_{u\to 6}\frac{\operatorname{sen}(\pi u)}{\ln(u-5)}\\ &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to 6}\frac{\pi\cos(\pi u)}{\dfrac{1}{(u-5)}}\\ &= \pi. \qquad (\text{ 3 Puntos})\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{(x+1)^4+(y-2)^3}{2(x+1)^2+3(y-2)^2}$. (5 Puntos)

Solución:
Se tiene que este límite es igual a 0. En efecto

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\frac{(x+1)^4+(y-2)^3}{2(x+1)^2+3(y-2)^2}\right| \\
&\leq \frac{(x+1)^4}{2(x+1)^2+3(y-2)^2} + \frac{|y-2|^3}{2(x+1)^2+3(y-2)^2} \\
&\leq \frac{(x+1)^4}{2(x+1)^2} + \frac{|y-2|^3}{3(y-2)^2} \\
&= \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{|y-2|}{3} \to 0, \qquad \text{(4 Puntos).}
\end{aligned}$$

cuando $(x,y)\to(-1,2)$. Luego por el Teorema del sandwich:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{(x+1)^4+(y-2)^3}{2(x+1)^2+3(y-2)^2} = 0 \qquad \text{(1 Punto).}$$

(2.2) Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por (10 Puntos)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y-1}{\sqrt{x^4+(y-1)^2}} & , \quad (x,y)\neq(0,1), \\ 0 & , \quad (x,y)=(0,1). \end{cases}$$

Pruebe que la función f es continua en $\mathbb{R}^2-\{(0,1)\}$, pero **no es continua en** $(0,1)$.

Solución:
Claramente f es continua en $\mathbb{R}^2-\{(0,1)\}$, debido a que esta definida como el cuociente de funciones continua con denominador no nulo (2 Puntos).
Por otro lado, si para $m\in\mathbb{N}$ tomamos la familia de curvas

$$C_m = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y-1 = mx^2\right\},$$

se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,1)\\(x,y)\in C_m\\ m\in\mathbb{N}}} \frac{y-1}{\sqrt{x^4+(y-1)^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^4+m^2x^4}} = \lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x^2\sqrt{1+m^2}} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \qquad \text{(4 Puntos)}$$

el cual depende de m. De aquí se concluye que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{y-1}{\sqrt{x^4+(y-1)^2}}$ no existe (2 Puntos) y por lo tanto f no es continua en $(0,1)$. (2 Puntos)

Problema 3. Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & , \quad \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & , \quad \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

(3.1) Determine las derivadas parciales $f_x(x, y)$ en todo su dominio.
Solución
Para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{y^2(x^2 + y^4) - xy^2(2x)}{(x^2 + y^4)^2} \\ &= \frac{y^2(y^4 - x^2)}{(x^2 + y^4)^2} \qquad \textbf{(3puntos)}\end{aligned}$$

Para el punto $(0, 0)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h * 0^2}{h^2 + 0^4} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} \\ &= 0 \qquad \textbf{(1puntos)}\end{aligned}$$

(3.2) Pruebe que la función no es diferenciable en el punto $(0, 0)$. (Justifique su respuesta)
Solución
Por el siguiente Teorema si la función f no es continua en un punto entonces f no es diferenciable en dicho punto. **(3 puntos)**
la función f no es continua en el punto $(0, 0)$, en efecto

$$\begin{aligned}\lim_{x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} &= \lim_{y \to 0} \frac{y^2 * y^2}{y^4 + y^4} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{y^4}{2y^4} \\ &= \lim_{y \to 0} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \neq f(0, 0) = 0 \qquad \textbf{(1puntos)}\end{aligned}$$

(3.3) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$ en la dirección del vector $\vec{u} = (a, b)$ unitario.
Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{tat^2b^2}{t^2a^2+t^4b^4}-0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^3ab^2}{t^3(a^2++t^2b^4)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{ab^2}{a^2+t^2b^4} \\
&= \begin{cases} \dfrac{b^2}{a} & \text{,si, } a\neq 0 \\ \\ 0 & \text{, si, } a=0 \end{cases} \qquad \textbf{(4puntos)}
\end{aligned}
$$

(3.4) Determine el plano tangente y la recta normal a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(2,1)$.
Solución

Para $(x,y) \neq (0,0)$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{2xy(x^2+y^4)-xy^2(4y^3)}{(x^2+y^4)^2} \\
&= \frac{2xy(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2} \qquad \textbf{(3puntos)}
\end{aligned}
$$

Evaluaciones en el punto $(2,1)$

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -\frac{3}{25} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{12}{25} \qquad f(2,1) = \frac{2}{5} \qquad \textbf{(3puntos)}
$$

Plano tangente en el punto $(2,1)$ es:

$$
\frac{-3}{25}(x-2) + \frac{12}{25}(y-1) = z - \frac{2}{5} \qquad \textbf{(1puntos)}
$$

Recta normal en el punto $(2,1)$ es:

$$
\frac{x-2}{\frac{-3}{25}} = \frac{y-1}{\frac{12}{25}} = \frac{z-\frac{2}{5}}{-1} \qquad \textbf{(1puntos)}
$$