дальневосточный федеральный университет
институт математики и компьютерных технологий.
6-й семестр, 2024-2025 учебный год.
лектор: колобов александр георгиевич.

# Численные МетОды дифференциальных уравнений (ЧМО)

также известные как

# отчисленные методы

2025-02-25

курс делится на 4 части

## первая часть

$$y' = f(x, y) \qquad \varphi(x, c)$$

задача коши (или задача с начальными условиями) ставится обычно так:

$$y' = f(x, y) \qquad x \in [x_0, x_0 + X]$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x) = \text{решение}$$

если условий больше, то такие задачи называются краевыми, потому что чаще всего мы работаем на отрезке и условия ставятся на краях отрезка.

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad x \in [a, b]$$

смешанные условия самого общего вида:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$

такая задача называется задачей дирихле.

пока что займёмся просто задачей коши.

$$y' = f(x, y) \qquad x \in [x_0, x_0 + X]$$
$$y(x_0) = y_0$$

самый простой способ — использовать формулу тэйлора:

$y(x)$ — есть, хотим посчитать $y(x+h)$:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \dots$$

подойдём по рабочекрестьянски, выкинем производные второй степени и старше:

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y) + O(h^2)$$

формула эйлера. формула грубовата, но на первый раз сойдёт, как говорится.

можно эту формулу улучшать.

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

по разному приближая этот интеграл, мы получаем разные решения.

рассмотрим пример, аппроксимируем интеграл при помощи формулы трапеций:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}(y'(x) + y'(x+h)) + O(h^3)$$

где:

$$y'(x) = f(x,y)$$
$$y'(x+h) = f(x+h, y(x+h))$$

это неявная формула адамса:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}(f(x,y) + f(x+h, y(x+h)) + O(h^3)$$

она неявная, поэтому можно сделать так (улучшенный метод эйлера):

$$f(x+h, y(x+h)) := f(x+h, y^*)$$

$$y^* := y(x) + hf(x,y)$$

## рунге-кутта

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_q, p_1, p_2, \dots, p_q \qquad b_{ij} \qquad 0 < j < i \leq q$$

предположим, что мы знаем все эти константы.

$$k_1(h) = hf(x, y)$$

$$k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h))$$

$$...$$

$$k_q(h) = hf\big(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1(h) + ... + \beta_{q,q-1} k_{q-1}(h)\big)$$

$$y(x+h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h) = z(h)$$

$$y(x+h) = z(h)$$

погрешность:

$$\varphi(h) = y(x+h) - z(h)$$

будем считать, что $\exists \varphi'(h), \varphi''(h), ..., \varphi^{(s)}(h), \varphi^{(s+1)}(h)$. будем выбирать константы так, чтобы все эти производные были нулями.

будем считать, что

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi'(0) = 0$$
$$\vdots$$
$$\varphi^{(s)}(0) = 0$$
$$\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$$

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^{s} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \qquad 0 < \theta < 1$$

$$\boxed{\varphi(h) = O(h^{s+1})}$$

пример:

$$q = 1$$
$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 hf(x, y) \qquad \varphi(0) = 0$$
$$\varphi'(h) = y'(x+h) - p_1 f(x, y)$$
$$\varphi'(0) = y'(x) - p_1 f(x, y) = f(x, y)(1 - p_1) = 0 \qquad p_1 = 1$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h)$$
$$\varphi''(0) = y''(x)$$

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y)$$

вот получили формулу эйлера, теперь рассмотрим:

$$q = 2$$

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 k_1(h) - p_2 k_2(h)$$

формула при $q = 4$:

$$k_1 = hf(x, y) \qquad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) \qquad k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x+h, y+k_3) \qquad y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

просто тупо запускаем цикл по i:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(...$$

$$|R_n| \leq e^{MX}[\cosh' X + N\varepsilon + |R_0|]$$

$R_0$ — это начальная погрешность, $M$ — константа, $X$ — длина отрезка

$$R_n = y(x_n) - y_n \qquad n \leq N$$

$$O(h^q)$$