

дальневосточный федеральный университет
институт математики и компьютерных технологий.
6-й семестр, 2024-2025 учебный год.
лектор: колобов александр георгиевич.

Численные МетОды дифференциальных уравнений (ЧМО)

также известные как

отчисленные методы

2025-02-25

курс делится на 4 части

1. первая часть

$$y' = f(x, y) \quad \varphi(x, c)$$

задача коши (или задача с начальными условиями) ставится обычно так:

$$y' = f(x, y) \quad x \in [x_0, x_0 + X]$$

$$y(x_0) = y_0 \quad y(x) = \text{решение}$$

если условий больше, то такие задачи называются краевыми, потому что чаще всего мы работаем на отрезке и условия ставятся на краях отрезка.

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad x \in [a, b]$$

смешанные условия самого общего вида:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$

такая задача называется задачей дирихле.

пока что займёмся просто задачей коши.

$$y' = f(x, y) \quad x \in [x_0, x_0 + X]$$

$$y(x_0) = y_0$$

самый простой способ — использовать формулу тэйлора:

$y(x)$ — есть, хотим посчитать $y(x + h)$:

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \dots$$

подойдём по рабочекрестьянски, выкинем производные второй степени и старше:

$$y(x + h) = y(x) + hf(x, y) + O(h^2)$$

формула эйлера. формула грубовата, но на первый раз сойдёт, как говорится.

можно эту формулу улучшать.

$$y(x + h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(x, y) dx$$

по разному приближая этот интеграл, мы получаем разные решения.

рассмотрим пример, аппроксимируем интеграл при помощи формулы трапеций:

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{2}(y'(x) + y'(x + h)) + O(h^3)$$

где:

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y'(x + h) = f(x + h, y(x + h))$$

это неявная формула адамса:

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{2}(f(x, y) + f(x + h, y(x + h))) + O(h^3)$$

она неявная, поэтому можно сделать так (улучшенный метод эйлера):

$$f(x + h, y(x + h)) := f(x + h, y^*)$$

$$y^* := y(x) + hf(x, y)$$

1.1. рунге-кутта

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_q, p_1, p_2, \dots, p_q \quad \beta_{ij} \quad 0 < j < i \leq q$$

предположим, что мы знаем все эти константы.

$$k_1(h) = hf(x, y)$$

$$k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h))$$

...

$$k_q(h) = hf(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1(h) + \dots + \beta_{q,q-1} k_{q-1}(h))$$

$$y(x+h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^q p_i k_i(h) = z(h)$$

$$y(x+h) \approx z(h)$$

погрешность:

$$\varphi(h) = y(x+h) - z(h)$$

будем считать, что $\exists \varphi'(h), \varphi''(h), \dots, \varphi^{(s)}(h), \varphi^{(s+1)}(h)$. будем выбирать константы так, чтобы все эти производные были нулями.

будем считать, что

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(0) = 0$$

\vdots

$$\varphi^{(s)}(0) = 0$$

$$\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$$

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^s \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

$$\boxed{\varphi(h) = O(h^{s+1})}$$

пример:

$$q = 1$$

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 hf(x, y) \quad \varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(h) = y'(x+h) - p_1 f(x, y)$$

$$\varphi'(0) = y'(x) - p_1 f(x, y) = f(x, y)(1 - p_1) = 0 \quad p_1 = 1$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h)$$

$$\varphi''(0) = y''(x)$$

$$y(x+h) = y(x) + hf(x, y)$$

вот получили формулу эйлера, теперь рассмотрим:

$$q = 2$$

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 k_1(h) - p_2 k_2(h)$$

формула при $q = 4$:

$$k_1 = hf(x, y) \quad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) \quad k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x+h, y+k_3) \quad y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

просто тупо запускаем цикл по i :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(\dots$$

$$|R_n| \leq e^{MX} [\cosh' X + N\varepsilon + |R_0|]$$

R_0 — это начальная погрешность, M — константа, X — длина отрезка

$$R_n = y(x_n) - y_n \quad n \leq N$$

$$O(h^q)$$

2025-03-04

1.2. метод конечных разностей

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in G \\ lu(x) = \mu(x), & x \in \Gamma \end{cases}, \quad H_0$$

$$\overline{G} = G + \Gamma$$

пусть наш отрезок для определённости $[0, 1]$

$$\overline{\omega} = \{x_k = hk, k = 0, 1, \dots, N; h \cdot N = 1\}$$

$$\Delta h$$

$$y_h(x_k), \quad x_k \in \bar{\omega}_h$$

проекция точного решения на сетку:

$$u_h = P_h u$$

P — оператор проектирования.

теперь можно сравнивать $\|y_h - u_h\|_h$.

условие согласования:

$$\|\cdot\|_0 := \lim_{h \rightarrow 0} \|\cdot\|_h$$

$$\|y\|_C = \max_{y \in \bar{G}} |y(x)|$$

аналог на сетке:

$$\|y_h\|_C = \max_{x_k \in \bar{\omega}_h} |y(x_k)|$$

чаще всего работают с:

$$\|y\|_{L_2} = \left(\int_0^1 y^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$[\|y_h\|] = \left(\sum_{i=0}^N y^2(x_i) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$]\|y_h\|[= \left(\sum_{i=1}^{N-1} y^2(x_i) \right)^{\frac{1}{2}}$$

скобочками показывают включение крайних точек.

$$L, \quad L_h$$

$$l, \quad l_h$$

$$\begin{cases} L_h u_h = \varphi_h \\ l_h u_h = \chi_h \end{cases}$$

$$L_h u_h = \sum_{\xi \in \Pi(x, h)} A_h(x, \xi) \cdot u_h(\xi)$$

$\Pi(x, h)$ — шаблон

аппроксимация первой производной:

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (x, x+h)$$

введём понятие погрешность аппроксимации в конкретной точке:

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$$

порядок аппроксимации m :

$$\psi(x) = O(h^m)$$

вернёмся к разностной задаче:

$$\begin{cases} L_h u_h = \varphi_h \\ l_h u_h = \chi_h \end{cases}$$

это СЛАУ.

погрешность решения:

$$z_h = y_h - u_h$$

если подставить погрешность решения:

$$\begin{cases} L_h z_h = \psi_h \\ l_h z_h = \nu_h \end{cases}$$

если выполняются пределы, то аппроксимация работает:

$$\|\psi_h\|_{h_1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\|\nu_h\|_{h_2} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\|\psi_h\|_{h_1} = O(h^m)$$

$$\|\nu_h\|_{h_2} = O(h^m)$$

обратите внимание, что можно использовать разные нормы.

мы говорим о сходимости, если:

$$\|z_h\|_{h_3} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\|z_h\| = O(h^m)$$

ещё нас интересует корректность задачи (единственное решение + устойчивость).

держу в курсе, мы работаем только с линейными задачами.

$$\|y_h\|_{h_1} \leq M_1 |\varphi_h|_{h_2} + M_2 \|\chi_h\|_{h_3}$$

$M_1, M_2 - \text{const.}$

из аппроксимации и устойчивости следует сходимость (теорема Филиппова):

$$\|z_h\|_{h_1} = \|y_h - u_h\|_{h_1} \leq M_1 \|\psi_h\|_{h_2} + M_2 \|\nu_h\|_{h_3}$$

$$\|z_h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$u'(x)$$

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + O(h) \text{ разность вперёд}$$

$$\frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) + O(h) \text{ разность назад}$$

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + O(h^2) \text{ центральная разность}$$

как это доказать?

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) \pm \frac{h^3}{6}u'''(x) + O(h^4)$$

для второй производной трёхточечный шаблон:

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + O(h^2)$$

$$\sigma \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + (1-\sigma) \frac{u(x+2h) - u(x+h)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2}(3-2\sigma)u''(x) + O(h^2)$$

лучшая $\sigma = \frac{3}{2}$:

$$\frac{4u(x+h) - 3u(x) - u(x+2h)}{2h}$$

вот эту задачу мы будем решать весь семестр:

$$u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$\alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = \gamma_1$$

$$\alpha_2 u(1) + \beta_2 u'(1) = \gamma_2$$

$$x_i \in \bar{\omega}_h$$

разностная схема:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i u_i = f_i, \quad i = 1, \dots, N-1$$

эта схема точности $O(h^2)$. теперь добавляем граничные условия, тоже их аппроксимируем:

$$\alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma_1$$

$$\alpha_2 y_N + \beta_2 \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \gamma_2$$

здесь мы только точность $O(h)$ сделали. поэтому вообще эта схема из-за граничных условий становится схемой первого порядка.

а теперь сделаем второй порядок:

$$\alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = \gamma_1$$

$$\alpha_2 y_N + \beta_2 (\dots) = \gamma_2$$

1.3. распространение волны

три типа уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0$$

эллиптическое уравнение лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

если правая часть не $= 0$, а $= f(x, y)$, то это уравнение пуассона.

для построения разностных схем нужно ввести сетку. тут уже две переменные x, y , нужно две сетки, например, $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$.

пример прямоугольной сетки на двухмерном пространстве:

$$x_i = a + ih \quad y_i = c + il$$

возьмём уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad a > 0, \quad t > 0$$

начальное условие:

$$U(x, 0) = \varphi(x)$$

граничное условие:

$$U(0, t) = \psi_1(t)$$

$$U(1, t) = \psi_2(t)$$

сетка:

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots$$

U_i^j — обозначение для $U(x_i, t_j)$. снизу пространственные координаты, сверху — временная.

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i)$$

это двуслойная схема по времени $O(\tau)$, по пространству $O(h^2)$. записывают просто $O(\tau + h^2)$. схема является явной.

напишем ещё одну схему для того же уравнения (то же самое, но по времени $j + 1$):

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = a \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}$$

тут на j -м слое одна точка, а на $(j + 1)$ -м аж три! это неявная схема. придётся решать СЛАУ. можно юзать метод монотонной прогонки.

точность такая же. но зачем нам тогда неявная схема? оказывается, она для чего-то нужна.

давайте запишем дифференциальную задачу

$$LU(x, t) = F(x, t)$$

$$G, \Gamma, \bar{G}$$

построим разностную схему:

$$L_h u_h = f_h$$

пусть $\tau = rh$, то есть шаги зависимы.

рассмотрим разность между точным и приближённым:

$$\delta u_i^j := U_i^j - u_i^j$$

$$\delta u := \max_{i,j} |\delta u_i^j|$$

считаем, что разностная схема сходится, если:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \delta u = 0$$

мы говорим о точности k -го порядка, если $u \leq \text{const} \cdot h^k$

$$u_h = U_h - \delta_h$$

$$L_h u_h = L_h U_h - L_h \delta_h = f_h$$

невязка, погрешность аппроксимации:

$$R_n = L_h U_h - f_h$$

$$L_h \delta_h = R_h$$

$$R := \max R_h$$

более-менее точное определение аппроксимации:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} R = 0$$

на минуточку представим, что разностная схема у нас очень сложная и:

$$O\left(h^2 + \tau + \frac{\tau}{h^2}\right)$$

нам для аппроксимации надо, чтобы τ стремился к нулю быстрее, чем h^2 .

есть такое понятие, как условная аппроксимация и безусловная (абсолютная). если τ стремится к нулю быстрее, чем h^2 , то это условная аппроксимация. если $O(h^2 + \tau^2)$ — то это абсолютная аппроксимация.

$$u_i^{j+1} = \lambda u_{i-1}^j + (1 - 2\lambda) u_i^j + \lambda u_{i+1}^j, \quad \lambda := \frac{a\tau}{h^2}$$

предположим, что $\lambda \leq \frac{1}{2}$. то есть уже некое ограничение на соотношение шагов. сумма коэффициентов:

$$\lambda + (1 - 2\lambda) + \lambda = 1$$

а теперь оценим:

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} |u_i^{j+1}| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\lambda u_{i-1}^j + (1 - 2\lambda) u_i^j + \lambda u_{i+1}^j| \leq \max_{1 \leq i \leq N-1} |u_i^j| (\lambda + (1 - 2\lambda) + \lambda)$$

получили:

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} |u_i^{j+1}| \leq \max_{1 \leq i \leq N-1} |u_i^j|$$

то есть решение со временем не растёт! а что это есть как не устойчивость? это и есть устойчивость!

можно ещё будет пошаманить и показать, что $\lambda > \frac{1}{2}$, то процесс развалится, но мы конечно же доказывать такое не будем.

это конечно не дикий недостаток, но недостаток всё же — ограничение на соотношение шагов.

а давайте теперь запишем неявную схему:

$$\lambda u_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\lambda)u_i^{j+1} + \lambda u_{i+1}^{j+1} = -u_i^j, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1$$

нужно решать слау методом прогонки.

вспомним условие адамара (диагональное преобладание), когда:

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{ij}|$$

тут диагональное преобладание на лицо:

$$|1 + 2\lambda| > |\lambda| + |\lambda|$$

2025-03-18

1.4. волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$U|_{t=0} = U(x, 0) = \varphi(x)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=0} = 0$$

шаблон — крест:

$$i, j + 1$$

$$i - 1, j \quad i, j \quad i + 1, j$$

$$i - 1, j - 1$$

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i)$$

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi(x_i) \Rightarrow u_i^1 = u_i^0 + \tau\psi(x_i) = O(\tau)$$

и так далее...

эта схема второго порядка $O(h^2 + \tau^2)$. но на первом шаге мы потеряем точность. но это не критично.

будем юзать тейлора:

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t} \Big|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{t=0} + O(\tau^3)$$

конкретно:

$$u_i^1 = u_i + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_i^1 = \varphi(x_i) + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2 a^2}{2} \varphi''(x_i)$$

$$\lambda := \frac{a^2 \tau^2}{h^2}$$

$$u_i^{j+1} = 2(1 - \lambda)u_i^j + \lambda(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) - u_i^{j-1}$$

$$\lambda < 1$$

следующая схема:

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i-1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i+1}^{j-1}}{h^2} \right)$$

$$\lambda u_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\lambda)u_i^{j+1} + \lambda u_{i+1}^{j+1} = (1 + 2\lambda)u_i^{j+1} - \lambda(u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}) - 2u_i^j$$

$$u_0^j - u_N^j = 0$$

1.5. уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$U(x, y, 0) = \varphi(x, y)$$

положим $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq t \leq T$. вот в таком параллелепипеде рассматриваем задачу.

$$x_i = ih, \quad y_i = jl, \quad t_k = \tau k$$

посмотрим на схему:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j-1}^k}{l^2}$$

$$u_{ij}^{k+1} = (1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)u_{ij}^k + \lambda_1(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k) + \lambda_2(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k)$$

$$\lambda_1 = \frac{\tau}{h^2} \quad \lambda_2 = \frac{\tau}{l^2}$$

условие устойчивости: $\lambda_1 + \lambda_2 \leq \frac{1}{2}$.

можно себе упростить жизни. рассмотрим, когда $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

устойчивость — норма решения не растёт по времени.

$$\lambda_1(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1}) - (1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2)u_{ij}^{k+1} + \lambda_2(u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}) = -u_{ij}^k$$

тут будет матричная прогонка.

1.6. уравнение лапласа (эллиптическое)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

$$U|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$$

этот процесс стационарный — от времени не зависит.

схема типа крест:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

предположили, что шаг по x и y одинаков $= h$.

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$$

решаем итерационно:

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} \right)$$

это метод якоби в чистом виде!

но лучше использовать другой подход, более красивый.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$U|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$$

по сути это тоже самое, ведь процесс-то стационарный. этот подход называется фиктивным временем. таким образом мы перешли от эллиптического к параболическому уравнению. это метод установления.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$U \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} V$$

сходимость очень быстрая, 4-5 шагов!

на этом первая часть окончена. можно сдавать коллок!

2025-03-25

2. вторая часть

рассмотрим функционал:

$$J_1(u) = \int_a^b \pi(x, u, u') \, dx$$

$$u = u(x)$$

имеет первую непрерывную производную. граничные условия:

$$u(a) = u_a \quad u(b) = u_b$$

u_1 находится в ε -окрестности функции:

$$|u_1(x) - u(x)| \leq \varepsilon$$

среди функций, лежащих в ε -окрестности, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих граничным условиям, найти функцию, доставляющую экстремум функционалу J_1 .

введём ещё функцию $\eta : \eta(a) = \eta(b) = 0$.

$$u_\alpha(x) = u(x) + \alpha\eta(x)$$

параметр α мал, чтобы u_α тоже попадала в окрестность.

подставим:

$$J_1(u_\alpha) = \int_a^b \pi(x, u + \alpha\eta, u' + \alpha\eta') \, dx$$

посмотрим это как на функцию от α :

$$J_1(u_\alpha) := \Phi(\alpha)$$

первая вариация функционала:

$$\partial J_1(u) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

вторая вариация функционала:

$$\partial^2 J_1(u) = \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} \right|_{\alpha=0}$$

$$\partial J_1(u) = \int_a^b (\pi_u \eta + \pi_{u'} \eta') \, dx$$

$$\int_a^b \pi_{u'} \eta' \, dx = \pi_{u'} \eta \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}(\pi_{u'}) \eta(x) \, dx$$

$$\partial J_1(u) = \int_a^b \eta(x) \left(\pi_u - \frac{d}{dx}(\pi_{u'}) \right) \, dx = 0$$

уравнение эйлера:

$$\pi_u - \frac{d}{dx}(\pi_{u'}) = 0$$

$$\pi = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + ku^2 - 2fu$$

$$k(x), f(x), k > 0$$

уравнение эйлера для вон того функционала:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + ku = f(x)$$

$$Lu = f, \quad u \in \Phi(L)$$

$\Phi(L)$ — всюду плотное множество. то есть его замыкание совпадает с ним самим.

$$J_1(u) = \min_{v \in \Phi(L)} J_1(v)$$

$$J_1(u) = (Lu, u) - 2(f, u)$$

L — линейный, самосопряжённый, положительный:

самосопряжённый:

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

положительный:

$$(Lu, u) > 0$$

если решение задачи существует, то оно доставляет минимум.

$$Lu_0 = f \quad u_\alpha = u_0 + \alpha\eta$$

$$\eta \in \Phi(L)$$

$$\begin{aligned} J_1(v_\alpha) &= (L(u_0 + \alpha\eta), u_0 + \alpha\eta) - 2(f, u_0 + \alpha\eta) = \\ &= L(u_0, u_0) + 2\alpha(Lu_0, \eta) + \alpha^2(L\eta, \eta) - 2(f, u_0) - 2\alpha(f, \eta) = \\ &= J_1(u_0) + 2\alpha(Lu_0 - f_1, \eta) + \alpha^2(L\eta, \eta) \end{aligned}$$

- $2\alpha(Lu_0 - f_1, \eta) = 0$
- $(L\eta, \eta) > 0$

$$J_1(v_\alpha) > J(u_0)$$

доказано. теперь в другую сторону докажем:

u_0 — элемент, который доставляет минимум.

$$J_1(v_\alpha) \geq J_1(u_0)$$

$$v_\alpha = u_0 + \alpha\eta$$

$$J_1(v_\alpha) = J_1(u_0) + 2\alpha(Lu_0 - f, \eta) + \alpha^2(L\eta, \eta)$$

$$2\alpha(Lu_0 - f, \eta) + \alpha^2(L\eta, \eta) \geq 0$$

тут вспоминаем школу и получаем:

$$(Lu_0 - f, \eta) = 0$$

второй сомножитель — произвольная функция, значит Lu_0 некуда деваться — оно равно нулю.

в дальнейшем будем работать с задачей (I):

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + ku = f(x) \quad x \in [a, b]$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

задача (II) — уравнение пуассона:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) \quad (x, y) \in \Omega$$

$$u|_{\Gamma} = 0$$

$$\Omega = (a, b) \times (c, d)$$

$$\Omega = \Omega + \Gamma$$

введём ещё парочку пространств:

U_1 — функции с непрерывными производными до второго порядка включительно и с нулевыми граничными условиями: $u(a) = u(b) = 0$.

U_2 — функции с непрерывными производными до второго порядка включительно и $u|_{\Gamma} = 0$.

теперь обратимся к вариационным производным.

$$J_1(u) = \int_a^b \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + ku^2 - \alpha fu \right) dx$$

$$J_2(u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2fu \right] dx dy$$

пространство соболева:

$$W_2^1[a, b]$$

$$\|u\|_{W_2^1} = \left(\int_a^b \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \left(\iint_{\Omega} \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$J_1(u) = \min_{v \in W_2^1[a, b]} J_1(v)$$

$$J_2(u) = \min_{v \in W_2^1(\Omega)} J_2(v)$$

2025-04-01

2.1. метод ритца

строится минимизирующая последовательность

$$\mu = \inf J(u)$$

u_n называется минимизирующей, если $\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \mu$

классический метод ритца заключается в выборе φ_i , $i = 1, \dots, n$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\varphi_i \in H_A$ (энергетическое пространство, в нашем случае пространство соболева)
2. $\forall n \varphi_i$ — линейно независимы
3. $\{\varphi_i\}$ полна в H_A

$$\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, \dots, \varphi_n^{(n)} \quad V_n$$

полнота:

$$\forall u \in H_A \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists N, u_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i : \|u - u_n\|_{H_A} < \varepsilon$$

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}$$

$$\begin{aligned} J(u_n) &= (Au_n, u_n) - 2(f, u_n) = \left(\sum_{i=1}^n A\varphi_i^{(n)} a_i^{(n)}, \sum_{p=1}^n a_p^{(n)} \varphi_p^{(n)} \right) - 2 \left(f, \sum_{p=1}^n a_p^{(n)} \varphi_p^{(n)} \right) = \\ &= \sum_{i,p=1}^n \left(A\varphi_i^{(n)}, \varphi_p^{(n)} \right) a_i^{(n)} a_p^{(n)} - 2 \sum_{p=1}^n a_p^{(n)} (f, \varphi_p^{(n)}) \end{aligned}$$

такое условие:

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial a_i^{(n)}} = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial a_i^{(n)}} = 2 \sum_{p=1}^n \left(A\varphi_i^{(n)}, \varphi_p^{(n)} \right) a_p^{(n)} - 2(f, \varphi_i^{(n)}), \quad i = 1, \dots, n$$

получили слау относительно коэффициентов a :

$$\sum_{p=1}^n \left(A\varphi_i^{(n)}, \varphi_p^{(n)} \right) a_p^{(n)} = (f, \varphi_i^{(n)}), \quad i = 1, \dots, n$$

определитель грамма:

$$\left\{ \left(A\varphi_i^{(n)}, \varphi_p^{(n)} \right) \right\}$$

он всегда отличен от нуля, значит система имеет единственное решение.

находим коэффициенты a_i и получаем решение в аналитическом виде:

$$u_n = \sum_{i=1}^n a_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}$$

2.2. метод галёркина (бубнова-галёркина)

это проекционный метод.

мы решаем то же самое уравнение:

$$Au = f$$

вводится слабая форма этого уравнения:

$$(Au, v) = (f, v), \quad v \in H_A$$

из этого условия ортогональности ищутся коэффициенты a_i :

$$(Au_n - f, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

а.к.а. метод конечных элементов (МКЭ).

в качестве элементов базиса используются локальные сплайны.

функция называется финитной, если она равна нулю, кроме конечного интервала.

аспекты применения метода:

1. нужно осуществить некое разбиение T_n области $\bar{\Omega}$ на конечное число подобластей K . эти подобласти и называются конечными элементами.

1. $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in T_n} K$

2. $K \in T_n$ — конечные элементы не вырождаются

3. соседние конечные элементы не перекрываются

2. строится конечномерное подпространство, чтобы на каждой подобласти выбранного разбиения базисные функции φ_i должны быть многочленами некой степени не выше заданной.

3. в заданном конечномерном подпространстве должен существовать по крайней мере один базис из функций с минимальными носителями.

посмотрим как работает этот метод на конкретной задаче:

$$u \in W_2^1[a, b]$$

$$J(u) = \inf_{v \in W_2^1[a, b]} J(v)$$

$$J(v) = \int_a^b (v')^2 dx - 2 \int_a^b f v dx$$

$$\Delta : x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

возьмём пространство сплайнов первой степени с однородными краевыми условиями (так как мы работаем в пространстве соболева):

$$V_n \quad n = N-1$$

$$V_{N-1}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1+t, & t \in [-1, 0] \\ 1-t, & t \in [0, 1] \\ 0, & t \notin [-1, 1] \end{cases}$$



$$\varphi_i^{(N-1)} = \varphi\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \quad i = 1, \dots, N$$

согласно методу ритца мы ищем решение:

$$u_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} v_i \varphi_i^{(N-1)}(x)$$

$$v_i = \text{const}$$

если посчитать в точке $x = x_i$

$$v_i = u_{N-1}(x_i)$$

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}$$

$$\begin{aligned} \left(A \varphi_i^{(N-1)}, \varphi_p^{(N-1)} \right) &= \left(-\frac{d^2}{dx^2} \varphi_i^{(N-1)}, \varphi_p^{(N-1)} \right) = \int_a^b \frac{d\varphi_i^{(N-1)}}{dx} \frac{d\varphi_p^{(N-1)}}{dx} dx = \\ &= \begin{cases} \frac{2}{h}, & i = p \\ -\frac{1}{h}, & i = p \pm 1 \\ 0, & |i - p| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{h}(-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1}) = hg_i$$

$$\begin{cases} -\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2} = g_i \\ v_0 = v_N = 0 \end{cases}$$

$$g_i = \frac{1}{h} \int_a^b f \varphi_i^{(n-1)} dx$$

2025-04-08

2.3. метод коллокации

$$Lu = f, \quad x \in [a, b]$$

$$Lu|_{x=\xi_k} = f(\xi_k)$$

сплайны шонберга или кубические сплайны класса C^2 :

$$S(x) \in C^2$$

будем искать решение в виде кубического сплайна.

задача:

$$L[y(x)] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad x \in [a, b]$$

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$

пусть задача имеет единственное решение.

чтобы строить сплайн, нужна сетка:

$$\Delta : \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

точки коллокации (или узлы коллокации): ξ_k .

условие коллокации:

$$L(S(\xi_k)) = S''(\xi_k) + p(\xi_k)S'(\xi_k) + q(\xi_k)S(\xi_k) = r(\xi_k), \quad \xi_k \in [a, b]$$

$$\alpha_1 S(a) + \beta_1 S'(a) = \gamma_1$$

$$\alpha_2 S(b) + \beta_2 S'(b) = \gamma_2$$

сколько брать узлов? размерность пространства сплайнов C^2 составляет $N + 3$. то есть должно быть уравнений $N + 3$.

у нас уже есть два условия на концах, поэтому будем брать $(N + 1)$ штук:

$$\xi_k, \quad k = 0, \dots, N$$

по-босяцки, узлы коллокации совпадают с узлами сплайна:

$$\xi_k = x_k$$

если хотим получить схему повышенной точности, то тогда точки могут не совпадать уже.

рассмотрим частный случай, когда первой производной нет ($p(x) \equiv 0$).

$$S(x_i) := u_i$$

$$S''(x_i) := M_i$$

$$M_i + q_i u_i = r_i, \quad i = 0, \dots, N$$

$$q_i = q(x_i), \quad r_i = r(x_i)$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1} + h_i} \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} \right),$$

$$i = 1, \dots, N - 1$$

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} \quad \lambda_i = 1 - \mu_i$$

сплайн по моментам записывается следующим образом:

$$S(x) = u_i(1 - t) + u_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t(1 - t)[(2 - t)M_i + (1 + t)M_{i+1}]$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad t = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$S'(x) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}[(2 - 6t + 3t^2)M_i + (1 - 3t^2)M_{i+1}]$$

$$\begin{aligned} \lambda_i \left(1 + \frac{h_{i-1}^2}{6} q_{i-1} \right) u_{i-1} - \left(1 - \frac{h_i h_{i-1}}{3} q_i \right) u_i + \mu_i \left(1 + \frac{h_i^2}{6} + q_{i+1} \right) u_{i+1} = \\ = \frac{h_{i-1} h_i}{6} (\mu_i r_{i-1} + 2r_i + \lambda_i r_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$$\alpha_1 S(x_0) + \beta_1 S'(x_0) = \gamma_0$$

потребуем диагональное преобладание:

$$\left| 1 - \frac{h_i h_{i-1}}{3} q_i \right| - \lambda_i \left| 1 + \frac{h_{i-1}^2}{6} q_{i-1} \right| - \mu_i \left| 1 + \frac{h_i^2}{6} + q_{i+1} \right| > 0$$

$$h_{i-1}^2 \max\{|q_{i-1}|, |q_i|\} \leq 6, \quad i = 1, \dots, N$$

$$q(x) \leq q < 0$$

$$\beta_1 \leq 0 \qquad \beta_2, a_j \geq 0$$

$$|a_i|+|b_i|\neq 0, \quad i=1,2$$

условие можно достичь, пошаманив с параметров h .

а если представить, что $p(x) \not\equiv 0$, то... заебёмся, смысла нет этим заниматься.

теорема о сходимости, общая.

пусть $p(x) \equiv 0$

$$y(x) \in C^2 W_{\Delta,\infty}^4[a,b]$$

$$\|S(x)-y(x)\|_C=O\big(\overline{h}^2\big),\quad \overline{h}=\max_i h_i$$

точное решение на всём отрезке принадлежит классу це 2:

$$y(x) \in C^2[a,b]$$

а внутри подотрезочка:

$$y(x) \in W_{\infty}^4[x_i,x_{i+1}]$$

«ОК».

$$|S(x) - S_c(x)| + |S_c(x) - y(x)| \leq \text{оценки}$$

$$O(\overline{h}^4)$$