дальневосточный федеральный университет
институт математики и компьютерных технологий.
6-й семестр, 2024-2025 учебный год.
лектор: колобов александр георгиевич.

Численные МетОды дифференциальных уравнений (ЧМО)

также известные как

отчисленные методы

2025-02-25

курс делится на 4 части

1. первая часть

$$y' = f(x, y) \qquad \varphi(x, c)$$

задача коши (или задача с начальными условиями) ставится обычно так:

$$y' = f(x, y) \qquad x \in [x_0, x_0 + X]$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x) = \text{решение}$$

если условий больше, то такие задачи называются краевыми, потому что чаще всего мы работаем на отрезке и условия ставятся на краях отрезка.

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad x \in [a, b]$$

смешанные условия самого общего вида:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$

такая задача называется задачей дирихле.

пока что займёмся просто задачей коши.

$$y' = f(x, y) \qquad x \in [x_0, x_0 + X]$$
$$y(x_0) = y_0$$

самый простой способ — использовать формулу тэйлора:

$y(x)$ — есть, хотим посчитать $y(x+h)$:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \dots$$

подойдём по рабочекрестьянски, выкинем производные второй степени и старше:

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y) + O(h^2)$$

формула эйлера. формула грубовата, но на первый раз сойдёт, как говорится.

можно эту формулу улучшать.

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

по разному приближая этот интеграл, мы получаем разные решения.

рассмотрим пример, аппроксимируем интеграл при помощи формулы трапеций:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}(y'(x) + y'(x+h)) + O(h^3)$$

где:

$$y'(x) = f(x,y)$$
$$y'(x+h) = f(x+h, y(x+h))$$

это неявная формула адамса:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}(f(x,y) + f(x+h, y(x+h)) + O(h^3)$$

она неявная, поэтому можно сделать так (улучшенный метод эйлера):

$$f(x+h, y(x+h)) := f(x+h, y^*)$$

$$y^* := y(x) + hf(x,y)$$

1.1. рунге-кутта

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_q, p_1, p_2, \dots, p_q \qquad \beta_{ij} \qquad 0 < j < i \le q$$

предположим, что мы знаем все эти константы.

$$k_1(h) = hf(x, y)$$

$$k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h))$$

$$...$$

$$k_q(h) = hf\big(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1(h) + ... + \beta_{q,q-1} k_{q-1}(h)\big)$$

$$y(x + h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h) = z(h)$$

$$y(x + h) \approx z(h)$$

погрешность:

$$\varphi(h) = y(x + h) - z(h)$$

будем считать, что $\exists \varphi'(h), \varphi''(h), ..., \varphi^{(s)}(h), \varphi^{(s+1)}(h)$. будем выбирать константы так, чтобы все эти производные были нулями.

будем считать, что

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi'(0) = 0$$
$$\vdots$$
$$\varphi^{(s)}(0) = 0$$
$$\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$$

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^{s} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \qquad 0 < \theta < 1$$

$$\boxed{\varphi(h) = O(h^{s+1})}$$

пример:

$$q = 1$$
$$\varphi(h) = y(x + h) - y(x) - p_1 hf(x, y) \qquad \varphi(0) = 0$$
$$\varphi'(h) = y'(x + h) - p_1 f(x, y)$$
$$\varphi'(0) = y'(x) - p_1 f(x, y) = f(x, y)(1 - p_1) = 0 \qquad p_1 = 1$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h)$$
$$\varphi''(0) = y''(x)$$

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y)$$

вот получили формулу эйлера, теперь рассмотрим:

$$q = 2$$

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 k_1(h) - p_2 k_2(h)$$

формула при $q = 4$:

$$k_1 = hf(x,y) \qquad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) \qquad k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x+h, y+k_3) \qquad y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

просто тупо запускаем цикл по `i`:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(...$$

$$|R_n| \leq e^{MX}[\cosh' X + N\varepsilon + |R_0|]$$

R_0 — это начальная погрешность, M — константа, X — длина отрезка

$$R_n = y(x_n) - y_n \qquad n \leq N$$

$$O(h^q)$$

`2025-03-04`

1.2. метод конечных разностей

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x),\ x \in G \\ lu(x) = \mu(x),\ x \in \Gamma \end{cases}, \quad H_0$$

$$\overline{G} = G + \Gamma$$

пусть наш отрезок для определённости $[0,1]$

$$\overline{\omega} = \{x_k = hk, k = 0, 1, ..., N; h \cdot N = 1\}$$

$$\Delta h$$

$$y_h(x_k),\ x_k \in \overline{\omega}_h$$

проекция точного решения на сетку:

$$u_h = P_h u$$

P — оператор проектирования.

теперь можно сравнивать $\|y_h - u_h\|_h$.

условаие согласования:

$$\|\cdot\|_0 := \lim_{h \to 0} \|\cdot\|_h$$

$$\|y\|_C = \max_{y \in \overline{G}} |y(x)|$$

аналог на сетке:

$$\|y_h\|_C = \max_{x_k \in \overline{\omega}_h} |y(x_k)|$$

чаще всего работают с:

$$\|y\|_{L_2} = \left(\int_0^1 y^2(x) \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$[\|y_h\|] = \left(\sum_{i=0}^{N} y^2(x_i) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$]\|y_h\|[= \left(\sum_{i=1}^{N-1} y^2(x_i) \right)^{\frac{1}{2}}$$

скобочками показывают включение крайних точек.

$$L,\ L_h$$

$$l,\ l_h$$

$$\begin{cases} L_h u_h = \varphi_h \\ l_h u_h = \chi_h \end{cases}$$

$$L_h u_h = \sum_{\xi \in Ш(x,h)} A_h(x,\xi) \cdot u_h(\xi)$$

$Ш(x,h)$ — шаблон

аппроксимация первой производной:

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \qquad (x, x+h)$$

введём понятие погрешность аппроксимации в конкретной точке:

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$$

порядок аппроксимации m :

$$\psi(x) = O(h^m)$$

вернёмся к разностной задаче:

$$\begin{cases} L_h u_h = \varphi_h \\ l_h u_h = \chi_h \end{cases}$$

это СЛАУ.

погрешность решения:

$$z_h = y_h - u_h$$

если подставить погрешность решения:

$$\begin{cases} L_h z_h = \psi_h \\ l_h z_h = \nu_h \end{cases}$$

если выполняются пределы, то аппроксимация работает:

$$\|\psi_h\|_{h_1} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\|\nu_h\|_{h_2} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\|\psi_h\|_{h_1} = O(h^m)$$

$$\|\nu_h\|_{h_2} = O(h^m)$$

обратите внимание, что можно использовать разные нормы.

мы говорим о сходимости, если:

$$\|z_h\|_{h_3} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$\|z_h\| = O(h^m)$$

ещё нас интересует корректность задачи (единственное решение + устойчивость).

держу в курсе, мы работаем только с линейными задачами.

$$\|y_h\|_{h_1} \leq M_1 |\varphi_h|_{h_2} + M_2 \|\chi_h\|_{h_3}$$

$M_1, M_2 - \text{const}$.

из аппроксимации и устойчивостти следует сходимость (теорема филиппова):

$$\|z_h\|_{h_1} = \|y_h - u_h\|_{h_1} \leq M_1 \|\psi_h\|_{h_2} + M_2 \|\nu_h\|_{h_3}$$

$$\|z_h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$u'(x)$$

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + O(h) \text{ разность вперёд}$$

$$\frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) + O(h) \text{ разность назад}$$

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + O(h^2) \text{ центральная разность}$$

как это доказать?

$$u(x \pm h) = u(x) \pm h u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) \pm \frac{h^3}{6} u'''(x) + O(h^4)$$

для второй производной трёхточечный шаблон:

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + O(h^2)$$

$$\sigma\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+(1-\sigma)\frac{u(x+2h)-u(x+h)}{h}=u'(x)+\frac{h}{2}(3-2\sigma)u''(x)+O(h^2)$$

лучшая $\sigma=\frac{3}{2}$:

$$\frac{4u(x+h)-3u(x)-u(x+2h)}{2h}$$

вот эту задачу мы будем решать весь семестр:

$$u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=f(x),\quad x\in[0,1]$$

$$\alpha_1 u(0)+\beta_1 u'(0)=\gamma_1$$

$$\alpha_2 u(1)+\beta_2 u'(1)=\gamma_2$$

$$x_i\in\overline{\omega}_h$$

разностная схема:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_i u_i=f_i,\quad i=1,...,N-1$$

эта схема точности $O(h^2)$. теперь добавляем граничные условия, тоже их аппроксимируем:

$$\alpha_1 y_0+\beta_1\frac{y_1-y_0}{h}=\gamma_1$$

$$\alpha_2 y_N+\beta_2\frac{y_N-y_{N-1}}{h}=\gamma_2$$

здесь мы только точность $O(h)$ сделали. поэтому вообще эта схема из-за граничных условий становится схемой первого порядка.

а теперь сделаем второй порядок:

$$\alpha_1 y_0+\beta_1\frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}=\gamma_1$$

$$\alpha_2 y_N+\beta_2(\cdots)=\gamma_2$$

2025-03-11

1.3. распространение волны

три типа уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0$$

эллиптическое уравнение лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

если правая часть не $= 0$, а $= f(x, y)$, то это уравнение пуассона.

для построения разностных схем нужно ввести сетку. тут уже две переменные x, y, нужно две сетки, например, $x \in [0, 1],\ t \in [0, T]$.

пример прямоугольной сетки на двухмерном пространстве:

$$x_i = a + ih \qquad y_i = c + il$$

возьмём уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 \le x \le 1,\ a > 0,\ t > 0$$

начальное условие:

$$U(x, 0) = \varphi(x)$$

граничное условие:

$$U(0, t) = \psi_1(t)$$
$$U(1, t) = \psi_2(t)$$

сетка:

$$x_i = ih,\ i = 0, 1, ..., N$$

$$t_j = j\tau,\ j = 0, 1, ...$$

U_i^j — обозначение для $U(x_i, t_j)$. снизу пространственные координаты, сверху — временная.

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=a\frac{u_{i+1}^j-2u_i^j+u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$u_i^0=\varphi(x_i)$$

это двуслойная схема по времени $O(\tau)$, по пространству $O\left(h^2\right)$. записывают просто $O\left(\tau+h^2\right)$. схема является явной.

напишем ещё одну схему для того же уравнения (то же самое, но по времени $j+1$):

$$\frac{u_i^{j+1}-u_i^j}{\tau}=a\frac{u_{i+1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i-1}^{j+1}}{h^2}$$

тут на j-м слое одна точка, а на $(j+1)$-м аж три! это неявная схема. придётся решать СЛАУ. можно юзать метод монотонной прогонки.

точность такая же. но зачем нам тогда неявная схема? оказывается, она для чего-то нужна.

давайте запишем дифференциальную задачу

$$LU(x,t)=F(x,t)$$

$$G,\Gamma,\overline{G}$$

построим разностную схему:

$$L_h u_h=f_h$$

пусть $\tau=rh$, то есть шаги зависимы.

рассмотрим разность между точным и приближённым:

$$\delta u_i^j:=U_i^j-u_i^j$$

$$\delta u:=\max_{i,j}\left|\delta u_i^j\right|$$

считаем, что разностная схема сходится, если:

$$\lim_{h\to 0}\delta u=0$$

мы говорим о точности k-го порядка, если $u\le \mathrm{const}\cdot h^k$

$$u_h=U_h-\delta_h$$

$$L_h u_h = L_h U_h - L_h \delta_h = f_h$$

невязка, погрешность аппроксимации:

$$R_n = L_h U_h - f_h$$

$$L_h \delta_h = R_h$$

$$R := \max R_h$$

более-менее точное определение аппроксимации:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \tau \to 0}} R = 0$$

на минуточку представим, что разностная схема у нас очень сложная и:

$$O\left(h^2 + \tau + \frac{\tau}{h^2}\right)$$

нам для аппроксимации надо, чтобы τ стремился к нулю быстрее, чем h^2.

есть такое понятие, как условная аппроксимация и безусловная (абсолютная). если τ стремится к нулю быстрее, чем h^2, то это условная аппроксимация. если $O(h^2 + \tau^2)$ — то это абсолютная аппроксимация.

$$u_i^{j+1} = \lambda u_{i-1}^j + (1 - 2\lambda) u_i^j + \lambda u_{i+1}^j, \;\; \lambda := \frac{a\tau}{h^2}$$

предположим, что $\lambda \leq \frac{1}{2}$. то есть уже некое ограничение на соотношение шагов. сумма коэффициентов:

$$\lambda + (1 - 2\lambda) + \lambda = 1$$

а теперь оценим:

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} \left| u_i^{j+1} \right| = \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| \lambda u_{i-1}^j + (1 - 2\lambda) u_i^j + \lambda u_{i-1}^j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| u_i^j \right| (\lambda + (1 - 2\lambda) + \lambda)$$

получили:

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} \left| u_i^{j+1} \right| \leq \max_{1 \leq i \leq N-1} \left| u_i^j \right|$$

то есть решение со временем не растёт! а что это есть как не устойчивость? это и есть устойчивость!

можно ещё будет пошаманить и показать, что $\lambda > \frac{1}{2}$, то процесс развалится, но мы конечно же доказывать такое не будем.

это конечно не дикий недостаток, но недостаток всё же — ограничение на соотношение шагов.

а давайте теперь запишем неявную схему:

$$\lambda u_{i-1}^{j+1} - (1+2\lambda) u_i^{j+1} + \lambda u_{i-1}^{j+1} = -u_i^j,\ i = 1, 2, ..., N-1$$

нужно решать слау методом прогонки.

вспомним условие адамара (диагональное преобладание), когда:

$$|a_{ij}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{ij}|$$

тут диагональное преобладание на лицо:

$$|1 + 2\lambda| > |\lambda| + |\lambda|$$

2025-03-18

1.4. волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$U|_{t=0} = U(x, 0) = \varphi(x)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{x=0} = 0,\ U|_{x=0} = 0$$

шаблон — крест:

$$i, j+1$$

$$i-1, j \qquad i, j \qquad i+1, j$$

$$i-1, j-1$$

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{i+1}^i - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i)$$

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi(x_i) \Rightarrow u_i^1 = u_i^0 + \tau\psi(x_i) \qquad = O(\tau)$$

и так далее...

эта схема второго порядка $O(h^2 + \tau^2)$. но на первом шаге мы потеряем точность. но это не критично.

будем юзать тейлора:

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t}\bigg|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} + O(\tau^3)$$

конкретно:

$$u_i^1 = u_i + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2}a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u_i^1 = \varphi(x_i) + \tau\psi(x_i) + \frac{\tau^2 a^2}{2}\varphi''(x_i)$$

$$\lambda \coloneqq \frac{a^2\tau^2}{h^2}$$

$$u_i^{j+1} = 2(1-\lambda)u_i^j + \lambda\left(u_{i+1}^j - u_{i-1}^j\right) - u_i^{j-1}$$

$$\lambda < 1$$

следующая схема:

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\tau^2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{i-1}^{j-1} - 2u_i^{j-1} + u_{i+1}^{j-1}}{h^2}\right)$$

$$\lambda u_{i-1}^{j+1} - (1+2\lambda)u_i^{j+1} + \lambda_{i+1}^{j+1} = (1+2\lambda)u_i^{j+1} - \lambda\left(u_{i+1}^{j-1} + u_{i-1}^{j-1}\right) - 2u_i^j$$

$$u_0^j - u_N^j = 0$$

1.5. уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$U(x, y, 0) = \varphi(x, y)$$

положим $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le t \le T$. вот в таком параллелепипеде рассмтраиваем задачу.

$$x_i = ih,\ y_i = jl,\ t_k = \tau k$$

посмотрим на схему:

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{ij}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{ij}^k + u_{i,j-1}^k}{l^2}$$

$$u_{ij}^{k+1} = (1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2)u_{ij}^k + \lambda_1\left(u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k\right) + \lambda + 2\left(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k\right)$$

$$\lambda_1 = \frac{\tau}{h^2} \qquad \lambda_2 = \frac{\tau}{l^2}$$

условие устойчивости: $\lambda_1 + \lambda_2 \le \frac{1}{2}$.

можно себе упростить жизни. рассмотрим, когда $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

устойчивость — норма решения не растёт по времени.

$$\lambda_1\left(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1}\right) - (1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2)u_{ij}^{k+1} + \lambda_2\left(u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}\right) = -u_{ij}^k$$

тут будет матричная прогонка.

1.6. уравнение лапласа (эллиптическое)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

$$U|_\Gamma = \varphi(x, y)$$

этот процесс стационарный — от времени не зависит.

схема типа крест:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

предположили, что шаг по x и y одинаков $= h$.

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right)$$

решаем итерационно:

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)}\right)$$

это метод якоби в чистом виде!

но лучше использовать другой подход, более красивый.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$U|_\Gamma = \varphi(x, y)$$

по сути это тоже самое, ведь процесс-то стационарный. этот подход называется фиктивным временем. таким образом мы перешли от эллиптического к параболическому уравнению. это метод установления.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

$$U \xrightarrow[t \to \infty]{} V$$

сходимость очень быстрая, 4-5 шагов!

`на этом первая часть окончена. можно сдавать коллок!`

`2025-03-25`

2. вторая часть

рассмотрим функци*анал*:

$$J_1(u) = \int_a^b \pi(x, u, u')\,\mathrm{d}x$$

$$u = u(x)$$

имеет первую непрерывную производную. граничные условия:

$$u(a) = u_a \qquad u(b) = u_b$$

u_1 находится в ε-окрестности функции:

$$|u_1(x) - u(x)| \le \varepsilon$$

среди функций, лежащих в ε-окрестности, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих граничным условиям, найти функцию, доставляющую экстремум функционалу J_1.

введём ещё функцию $\eta : \eta(a) = \eta(b) = 0$.

$$u_\alpha(x) = u(x) + \alpha\eta(x)$$

параметр α мал, чтобы u_α тоже попадала в окрестность.

подставим:

$$J_1(u_\alpha) = \int_a^b \pi(x, u + \alpha\eta, u' + \alpha\eta')\,\mathrm{d}x$$

посмотрим это как на функцию от α:

$$J_1(u_\alpha) \coloneqq \Phi(\alpha)$$

первая вариация функционала:

$$\partial J_1(u) = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}$$

вторая вариация функционала:

$$\partial^2 J_1(u) = \left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0}$$

$$\partial J_1(u) = \int_a^b (\pi_u\eta + \pi_{u'}\eta')\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b \pi_{u'}\eta'\,\mathrm{d}x = \pi_{u'}\eta\ |_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi_{u'})\eta(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\partial J_1(u) = \int_a^b \eta(x)\left(\pi_u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi_{u'})\right)\mathrm{d}x = 0$$

уравнение эйлера:

$$\pi_u - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\pi_{u'}) = 0$$

$$\pi = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + ku^2 - 2fu$$

$$k(x), f(x), k > 0$$

уравнение эйлера для вон того функционала:

$$-\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + ku = f(x)$$

$$Lu = f, \qquad u \in \Phi(L)$$

$\Phi(L)$ — всюду плотное множество. то есть его замыкание совпадает с ним самим.

$$J_1(u) = \min_{v \in \Phi(L)} J_1(v)$$

$$J_1(u) = (Lu, u) - 2(f, u)$$

L — линейный, самосопряжённый, положительный:

самосопряжённый:

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

положительный:

$$(Lu, u) > 0$$

если решение задачи существует, то оно доставляет минимум.

$$Lu_0 = f \qquad u_\alpha = u_0 + \alpha\eta$$

$$\eta \in \Phi(L)$$

$$\begin{gathered} J_1(v_\alpha) = (L(u_0 + \alpha\eta), u_0 + \alpha\eta) - 2f, u_0 + \alpha\eta) = \\ = L(u_0, u_0) + 2\alpha(Lu_0, \eta) + \alpha^2(L\eta, \eta) - 2(f, u_0) - 2\alpha(f, \eta) = \\ = J_1(u_0) + 2\alpha(Lu_0 - f_1\eta) + \alpha^2(L\eta, \eta) \end{gathered}$$

- $2\alpha(Lu_0 - f_1\eta) = 0$
- $(L\eta, \eta) > 0$

$$J_1(v_\alpha) > J(u_0)$$

доказано. теперь в другую сторону докажем:

u_0 — элемент, который доставляет минимум.

$$J_1(v_\alpha) \geq J_1(u_0)$$

$$v_\alpha = u_0 + \alpha\eta$$

$$J_1(v_\alpha) = J_1(u_0) + 2\alpha(Lu_0 - f, \eta) + \alpha^2(L\eta, \eta)$$

$$2\alpha(Lu_0 - f, \eta) + \alpha^2(L\eta, \eta) \geq 0$$

тут вспоминаем школу и получаем:

$$(Lu_0 - f, \eta) = 0$$

второй сомножитель — произвольная функция, значит Lu_0 некуда деваться — оно равно нулю.

в дальнейшем будем работать с задачей (I):

$$-\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + ku = f(x) \qquad x \in [a, b]$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

задача (II) — уравнение пуассона:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y) \qquad (x, y) \in \Omega$$

$$u \mid_\Gamma = 0$$

$$\Omega = (a, b) \times (c, d)$$

$$\Omega = \Omega + \Gamma$$

введём ещё парочку пространств:

U_1 — функции с непрерывными производными до второго порядка включительно и с нулевыми граничными условиями: $u(a) = u(b) = 0$.

U_2 — функции с непрерывными производными до второго порядка включительно и $u|_\Gamma = 0$.

теперь обратимся к вариационным производным.

$$J_1(u) = \int_a^b \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + ku^2 - \alpha f u\right) \mathrm{d}x$$

$$J_2(u) = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2fu\right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

пространство соболева:

$$\overset{0}{W}{}_2^1[a,b]$$

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^1} = \left(\int_a^b \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \left(\iint_\Omega \left[u^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$J_1(u) = \min_{v \in W_2^1[a,b]} J_1(v)$$

$$J_2(u) = \min_{v \in W_2^1(\Omega)} J_2(v)$$

2025-04-01

2.1. метод ритца

строится минимизирующая последовательность

$$\mu = \inf J(u)$$

u_n называется минимизирующей, если $\lim_{n \to \infty} J(u_n) = \mu$

классический метод ритца заключается в выборе φ_i, $i = 1, ..., n$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\varphi_i \in H_A$ (энергетическое пространство, в нашем случае пространство соболева)
2. $\forall n \ \varphi_i$ — линейно независимы
3. $\{\varphi_i\}$ полна в H_A

$$\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}, ..., \varphi_n^{(n)} \qquad V_n$$

полнота:

$$\forall u \in H_A \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i : \|u - u_n\|_{H_A} < \varepsilon$$

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}$$

$$J(u_n) = (Au_n, u_n) - 2(f, u_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} A\varphi_i^{(n)} a_i^{(n)}, \sum_{p=1}^{n} a_p^{(n)} \varphi_p^{(n)} \right) - 2\left(f, \sum_{p=1}^{n} a_p^{(n)} \varphi_p^{(n)} \right) =$$

$$= \sum_{i,p=1}^{n} \left(A\varphi_i^{(n)}, \varphi_p^{(n)} \right) a_i^{(n)} a_p^{(n)} - 2 \sum_{p=1}^{n} a_p^{(n)} \left(f, \varphi_p^{(n)} \right)$$

такое условие:

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial a_i^{(n)}} = 0, \quad i = 1, ..., n$$

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial a_i^{(n)}} = 2 \sum_{p=1}^{n} \left(A\varphi_i^{(n)}, \varphi_p^{(n)} \right) a_p^{(n)} - 2\left(f, \varphi_p^{(n)} \right), \quad i = 1, ..., n$$

получили слау относительно коэффициентов a:

$$\sum_{p=1}^{n}) \left(A\varphi_i^{(n)}, \varphi_p^{(n)} \right) a_p^{(n)} = \left(f, \varphi_i^{(n)} \right), \quad i = 1, ..., n$$

определитель грамма:

$$\left\{ \left(A\varphi_i^{(n)}, \varphi_p^{(n)} \right) \right\}$$

он всегда отличен от нуля, значит система имеет единственное решение.

находим коэффициенты a_i и получаем решение в аналитическом виде:

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \varphi_i^{(n)}$$

2.2. метод галёркина (бубнова-галёркина)

это проекционный метод.

мы решаем то же самое уравнение:

$$Au = f$$

вводится слабая форма этого уравнения:

$$(Au, v) = (f, v), \qquad v \in H_A$$

из этого условия ортогональности ищутся коэффициенты a_i:

$$(Au_n - f, \varphi_i) = 0,\ i = 1, ..., n$$

a.k.a. метод конечных элементов (МКЭ).

в качестве элементов базиса используются локальные сплайны.

функция называется финитной, если она равна нулю, кроме конечного интервала.

аспекты применения метода:

1. нужно осуществить некое разбиение T_n области $\overline{\Omega}$ на конечное число подобластей K. эти подобласти и называются конечными элементами.
   1. $\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in T_n} K$
   2. $K \in T_n$ – конечные элементы не вырождаются
   3. соседние конечные элементы не перекрываются
2. строится конечномерное подпространство, чтобы на каждой подобласти выбранного разбиения базисные функции φ_i должны быть многочленами некой степени не выше заданной.
3. в заданном конечномерном подпространстве должен существовать по крайней мере один базис из функций с минимальными носителями.

посмотрим как работает этот метод на конкретной задаче:

$$u \in W_2^1[a, b]$$

$$J(u) = \inf_{v \in W_2^1[a,b]} J(v)$$

$$J(v) = \int_a^b (v')^2 \,\mathrm{d}x - 2 \int_a^b f v \,\mathrm{d}x$$

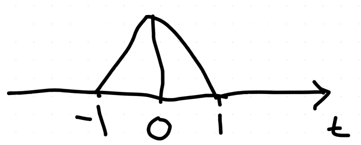
$$\Delta : x_i = a + ih, \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

возьмём пространство сплайнов первой степени с однородными краевыми условиями (так как мы работаем в пространстве соболева):

$$V_n \qquad n = N - 1$$

$$V_{N-1}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 + t,\ t \in [-1, 0] \\ 1 - t,\ t \in [0, 1] \\ 0,\ t \notin [-1, 1] \end{cases}$$



$$\varphi_i^{(N-1)} = \varphi\left(\frac{x - x_i}{h}\right),\ i = 1, ..., N$$

согласно методу ритца мы ищем решение:

$$u_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} v_i \varphi_i^{(N-1)}(x)$$

$$v_i = \mathrm{const}$$

если посчитать в точке $x = x_i$

$$v_i = u_{N-1}(x_i)$$

$$A = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$$

$$\left(A\varphi_i^{(N-1)}, \varphi_p^{(N-1)}\right) = \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi_i^{(N-1)}, \varphi_p^{(N-1)}\right) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\varphi_i^{(N-1)}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}\varphi_p^{(N-1)}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{h},\ i = p \\ -\frac{1}{h},\ i = p \pm 1 \\ 0,\ |i - p| > 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{h}(-v_{i-1}+2v_i-v_{i+1})=hg_i$$

$$\begin{cases} -\frac{v_{i-1}-2v_i+v_{i+1}}{h^2}=g_i \\ v_0=v_N=0 \end{cases}$$

$$g_i=\frac{1}{h}\int_a^b f\varphi_i^{(n-1)}\,\mathrm{d}x$$

`2025-04-08`

2.3. метод коллокации

$$Lu=f,\qquad x\in[a,b]$$

$$Lu\mid_{x=\xi_k}=f(\xi_k)$$

сплайны шонберга или кубические сплайны класса C^2:

$$S(x)\in C^2$$

будем искать решение в виде кубического сплайна.

задача:

$$L[y(x)]=y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=r(x),\qquad x\in[a,b]$$

$$\alpha_1 y(a)+\beta_1 y'(a)=\gamma_1$$

$$\alpha_2 y(b)+\beta_2 y'(b)=\gamma_2$$

пусть задача имеет единственное решение.

чтобы строить сплайн, нужна сетка:

$$\Delta:\quad a=x_0<x_1<...<x_N=b$$

точки коллокации (или узлы коллокации): ξ_k.

условие коллокации:

$$L(S(\xi_k))=S''(\xi_k)+p(\xi_k)S'(\xi_k)+q(\xi_k)S(\xi_k)=r(\xi_k),\qquad \xi_k\in[a,b]$$

$$\alpha_1 S(a)+\beta_1 S'(a)=\gamma_1$$

$$\alpha_2 S(b)+\beta_2 S'(b)=\gamma_2$$

сколько брать узлов? размерность пространства сплайнов C^2 составляет $N+3$. то есть должно быть уравнений $N+3$.

у нас уже есть два условия на концах, поэтому будем брать $(N+1)$ штук:

$$\xi_k, \;\; k = 0, ..., N$$

по-босяцки, узлы коллокации совпадают с узлами сплайна:

$$\xi_k = x_k$$

если хотим получить схему повышенной точности, то тогда точки могут не совпадать уже.

рассмотрим частный случай, когда первой производной нет $(p(x) \equiv 0)$.

$$S(x_i) \coloneqq u_i$$

$$S''(x_i) \coloneqq M_i$$

$$M_i + q_i u_i = r_i, \qquad i = 0, ..., N$$

$$q_i = q(x_i), \quad r_i = r(x_i)$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1} + h_i}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}}\right),$$
$$i = 1, ..., N-1$$

$$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}} \qquad \lambda_i = 1 - \mu_i$$

сплайн по моментам записывается следующим образом:

$$S(x) = u_i(1-t) + u_{i+1}t - \frac{h_i^2}{6}t(1-t)\left[(2-t)M_i + (1+t)M_{i+1}\right]$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \qquad t = \frac{x - x_i}{h_i}$$

$$S'(x) = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}\left[(2 - 6t + 3t^2)M_i + (1 - 3t^2)M_{i+1}\right]$$

$$\lambda_i\left(1+\frac{h_{i-1}^2}{6}q_{i-1}\right)u_{i-1}-\left(1-\frac{h_ih_{i-1}}{3}q_i\right)u_i+\mu_i\left(1+\frac{h_i^2}{6}+q_{i+1}\right)u_{i+1}=$$

$$=\frac{h_{i-1}h_i}{6}(\mu_i r_{i-1}+2r_i+\lambda_i r_{i+1}),\quad i=1,...,N-1$$

$$\alpha_1 S(x_0)+\beta_1 S'(x_0)=\gamma_0$$

потребуем диагональное преобладание:

$$\left|1-\frac{h_ih_{i-1}}{3}q_i\right|-\lambda_i\left|1+\frac{h_{i-1}^2}{6}q_{i-1}\right|-\mu_i\left|1+\frac{h_i^2}{6}+q_{i+1}\right|>0$$

$$h_{i-1}^2\max\{|q_{i-1}|,|q_i|\}\le 6,\quad i=1,...,N$$

$$q(x)\le q<0$$

$$\beta_1\le 0\qquad \beta_2,a_j\ge 0$$

$$|a_i|+|b_i|\ne 0,\quad i=1,2$$

условие можно достичь, пошаманив с параметров h.

а если представить, что $p(x)\not\equiv 0$, то… заебёмся, смысла нет этим заниматься.

теорема о сходимости, общая.

пусть $p(x)\equiv 0$

$$y(x)\in C^2W_{\Delta,\infty}^4[a,b]$$

$$\|S(x)-y(x)\|_C=O\left(\overline{h}^2\right),\quad \overline{h}=\max_i h_i$$

точное решение на всём отрезке принадлежит классу це 2:

$$y(x)\in C^2[a,b]$$

а внутри подотрезочка:

$$y(x)\in W_\infty^4[x_i,x_{i+1}]$$

«ок».

$$|S(x) - S_c(x)| + |S_c(x) - y(x)| \leq \text{оценки}$$

$$O\left(\overline{h}^4\right)$$

`2025-04-15`

$$L[y(x)] = y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \quad x \in [a, b]$$

мы рассматривали $p(x) \equiv 0$, теперь рассмотрим общий случай.

B-сплайны (сокращение от «базисный» сплайн):

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} b_i B_i(x)$$

сетка для построения сплайна:

$$\Delta : x_0 < x_1 < ... < x_N$$

$$B_i(x) = \frac{1}{6} \begin{cases} 0, & x < x_{i-2} \\ t^3, & x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1} \\ 1 + 3t + 3t^2(1-t), & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ 1 + 3(1-t) + 3t^2(1-t)^2, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ (1-t)^3, & x_{i+1} \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x > x_{i+1} \end{cases}$$

$$t_i = \frac{x - x_i}{h}$$

$$\sum_{i-1}^{N+1} b_i B_i''(x) + p(x) \sum_{i-1}^{N+1} b_i B_i'(x) + q(x) + \sum_{i-1}^{N+1} b_i B_i(x) = r(x)$$

подставляем в точке x_k:

$$\sum_{i-1}^{N+1} b_i B_i''(x_k) + p(x) \sum_{i-1}^{N+1} b_i B_i'(x_k) + q(x_k) \sum_{i-1}^{N+1} b_i B_i(x_k) = r(x_k)$$

$$\sum_{i=k-1}^{k+1} b_i [B_i''(x_k) + p(x_k) B_i'(x_k) + q(x_k) B_i(x_k)] = r(x_k)$$

получится трёхдиагональная матрица с мусором в начале и конце. нужно будет исключить b_{N+1}, b_{-1}.

условия диагонального преобладания:

$$1 - \frac{1}{2}p_i h_i + \frac{1}{6}q_i h^2 \geq 0$$

$$1 + \frac{1}{2}p_i h_{i-1} + \frac{1}{6}q_i h_{i-1}^2 \geq 0$$

условие простое. чтобы его достичь, надо просто взять достаточно маленький шаг.

$$\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} = f_i'' + O(h^2)$$

если потянуть, то:

$$\frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2} = f_i'' + \frac{h^2}{12}f_i'''' + O(h^4)$$

момент сплайна:

$$M_i = f_i'' + O(h^2)$$

$$M_i = f_i'' - \frac{h^2}{12}f_i'''' + O(h^4)$$

полусумма:

$$\frac{1}{2}\left(M_i + \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{h^2}\right) = f_i'' + O(h^4)$$

$$\frac{M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}}{h^2} = f_i'''' + O(h^4)$$

2.4. основные свойства метода сплайн-коллокации

- одинаковая эффективность как на равномерных, так и на неравномерных сетках. эффективность значит простота, что можно привести к трёхдиагональной матрице.
- высокая точность аппроксимации первой производной
- простота построения схем повышенной точности. в том числе для уравнений с переменными коэффициентами
- решение и его производные можно вычислять в любых точках области

$$b_i = f_i + O(h^2)$$

можно сдавать второй коллок.

3. третья часть