дальневосточный федеральный университет
институт математики и компьютерных технологий.
6-й семестр, 2024-2025 учебный год.
лектор: колобов александр георгиевич.

Численные МетОды дифференциальных уравнений (ЧМО)

также известные как

отчисленные методы

2025-02-25

курс делится на 4 части

первая часть

$$y' = f(x, y) \qquad \varphi(x, c)$$

задача коши (или задача с начальными условиями) ставится обычно так:

$$y' = f(x, y) \qquad x \in [x_0, x_0 + X]$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x) = \text{решение}$$

если условий больше, то такие задачи называются краевыми, потому что чаще всего мы работаем на отрезке и условия ставятся на краях отрезка.

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad x \in [a, b]$$

смешанные условия самого общего вида:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1$$
$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$

такая задача называется задачей дирихле.

пока что займёмся просто задачей коши.

$$y' = f(x, y) \qquad x \in [x_0, x_0 + X]$$
$$y(x_0) = y_0$$

самый простой способ — использовать формулу тэйлора:

$y(x)$ — есть, хотим посчитать $y(x+h)$:

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \dots$$

подойдём по рабочекрестьянски, выкинем производные второй степени и старше:

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y) + O(h^2)$$

формула эйлера. формула грубовата, но на первый раз сойдёт, как говорится.

можно эту формулу улучшать.

$$y(x+h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

по разному приближая этот интеграл, мы получаем разные решения.

рассмотрим пример, аппроксимируем интеграл при помощи формулы трапеций:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}(y'(x) + y'(x+h)) + O(h^3)$$

где:

$$y'(x) = f(x,y)$$
$$y'(x+h) = f(x+h, y(x+h))$$

это неявная формула адамса:

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}(f(x,y) + f(x+h, y(x+h)) + O(h^3)$$

она неявная, поэтому можно сделать так (улучшенный метод эйлера):

$$f(x+h, y(x+h)) \coloneqq f(x+h, y^*)$$

$$y^* \coloneqq y(x) + hf(x,y)$$

рунге-кутта

$$\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_q, p_1, p_2, \dots, p_q \qquad b_{ij} \qquad 0 < j < i \le q$$

предположим, что мы знаем все эти константы.

$$k_1(h) = hf(x, y)$$

$$k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h))$$

$$...$$

$$k_q(h) = hf\big(x + \alpha_q h, y + \beta_{q1} k_1(h) + ... + \beta_{q,q-1} k_{q-1}(h)\big)$$

$$y(x + h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h) = z(h)$$

$$y(x + h) = z(h)$$

погрешность:

$$\varphi(h) = y(x + h) - z(h)$$

будем считать, что $\exists \varphi'(h), \varphi''(h), ..., \varphi^{(s)}(h), \varphi^{(s+1)}(h)$. будем выбирать константы так, чтобы все эти производные были нулями.

будем считать, что

$$\begin{gathered}
\varphi(0) = 0 \\
\varphi'(0) = 0 \\
\vdots \\
\varphi^{(s)}(0) = 0 \\
\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0
\end{gathered}$$

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^{s} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!} h^{s+1}, \qquad 0 < \theta < 1$$

$$\boxed{\varphi(h) = O(h^{s+1})}$$

пример:

$$\begin{gathered}
q = 1 \\
\varphi(h) = y(x + h) - y(x) - p_1 hf(x, y) \qquad \varphi(0) = 0 \\
\varphi'(h) = y'(x + h) - p_1 f(x, y) \\
\varphi'(0) = y'(x) - p_1 f(x, y) = f(x, y)(1 - p_1) = 0 \qquad p_1 = 1
\end{gathered}$$

$$\varphi''(h) = y''(x+h)$$
$$\varphi''(0) = y''(x)$$

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y)$$

вот получили формулу эйлера, теперь рассмотрим:

$$q = 2$$

$$\varphi(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 k_1(h) - p_2 k_2(h)$$

формула при $q = 4$:

$$k_1 = hf(x,y) \qquad k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) \qquad k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x+h, y+k_3) \qquad y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

просто тупо запускаем цикл по i:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(...$$

$$|R_n| \leq e^{MX}[\cosh' X + N\varepsilon + |R_0|]$$

R_0 — это начальная погрешность, M — константа, X — длина отрезка

$$R_n = y(x_n) - y_n \qquad n \leq N$$

$$O(h^q)$$

2025-03-04

метод конечных разностей

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), \ x \in G \\ lu(x) = \mu(x), \ x \in \Gamma \end{cases}, \quad H_0$$

$$\overline{G} = G + \Gamma$$

пусть наш отрезок для определённости $[0,1]$

$$\overline{\omega} = \{x_k = hk, k = 0, 1, ..., N; h \cdot N = 1\}$$

$$\Delta_h$$

$$y_h(x_k),\ x_k \in \overline{\omega}_h$$

проекция точного решения на сетку:

$$u_h = P_h u$$

P — оператор проектирования.

теперь можно сравнивать $\|y_h - u_h\|_h$.

условаие согласования:

$$\|\cdot\|_0 \coloneqq \lim_{h \to 0} \|\cdot\|_h$$

$$\|y\|_C = \max_{y \in \overline{G}} |y(x)|$$

аналог на сетке:

$$\|y_h\|_C = \max_{x_k \in \overline{\omega}_h} |y(x_k)|$$

чаще всего работают с:

$$\|y\|_{L_2} = \left(\int_0^1 y^2(x)\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$[\|y_h\|] = \left(\sum_{i=0}^{N} y^2(x_i) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$]\|y_h\|[= \left(\sum_{i=1}^{N-1} y^2(x_i) \right)^{\frac{1}{2}}$$

скобочками показывают включение крайних точек.

$$L,\ L_h$$

$$l,\ l_h$$

$$\begin{cases} L_h u_h = \varphi_h \\ l_h u_h = \chi_h \end{cases}$$

$$L_h u_h = \sum_{\xi \in Ш(x,h)} A_h(x,\xi) \cdot u_h(\xi)$$

$Ш(x,h)$ – шаблон

аппроксимация первой производной:

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \qquad (x, x+h)$$

введём понятие погрешность аппроксимации в конкретной точке:

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$$

порядок аппроксимации m :

$$\psi(x) = O(h^m)$$

вернёмся к разностной задаче:

$$\begin{cases} L_h u_h = \varphi_h \\ l_h u_h = \chi_h \end{cases}$$

это СЛАУ.

погрешность решения:

$$z_h = y_h - u_h$$

если подставить погрешность решения:

$$\begin{cases} L_h z_h = \psi_h \\ l_h z_h = \nu_h \end{cases}$$

если выполняются пределы, то аппроксимация работает:

$$\|\psi_h\|_{h_1} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\|\nu_h\|_{h_2} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\|\psi_h\|_{h_1} = O(h^m)$$

$$\|\nu_h\|_{h_2} = O(h^m)$$

обратите внимание, что можно использовать разные нормы.

мы говорим о сходимости, если:

$$\|z_h\|_{h_3} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$\|z_h\| = O(h^m)$$

ещё нас интересует корректность задачи (единственное решение + устойчивость).

держу в курсе, мы работаем только с линейными задачами.

$$\|y_h\|_{h_1} \leq M_1 |\varphi_h|_{h_2} + M_2 \|\chi_h\|_{h_3}$$

$M_1, M_2 - \text{const}$.

из аппроксимации и устойчивостти следует сходимость (теорема филиппова):

$$\|z_h\|_{h_1} = \|y_h - u_h\|_{h_1} \leq M_1 \|\psi_h\|_{h_2} + M_2 \|\nu_h\|_{h_3}$$

$$\|z_h\| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$u'(x)$$

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + O(h) \text{ разность вперёд}$$

$$\frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) + O(h) \text{ разность назад}$$

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}) = u'(x) + O(h^2) \text{ центральная разность}$$

как это доказать?

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) \pm \frac{h^3}{6}u'''(x) + O(h^4)$$

для второй производной трёхточечный шаблон:

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} = u''(x) + O(h^2)$$

$$\sigma\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+(1-\sigma)\frac{u(x+2h)-u(x+h)}{h}=u'(x)+\frac{h}{2}(3-2\sigma)u''(x)+O(h^2)$$

лучшая $\sigma=\frac{3}{2}$:

$$\frac{4u(x+h)-3u(x)-u(x+2h)}{2h}$$

$$\frac{3u(x)-4u(x-h)+u(x-2h)}{2h}$$

вот эту задачу мы будем решать весь семестр:

$$u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=f(x),\quad x\in[0,1]$$

$$\alpha_1u(0)+\beta_1u'(0)=\gamma_1$$

$$\alpha_2u(1)+\beta_2u'(1)=\gamma_2$$

$$x_i\in\overline{\omega}_h$$

разностная схема:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\frac{y_{i+1}-y(i-1)}{2h}+q_iu_i=f_i,\quad i=1,...,N-1$$

эта схема точности $O(h^2)$. теперь добавляем граничные условия, тоже их аппроксимируем:

$$\alpha_1y_0+\beta_1\frac{y_1-y_0}{h}=\gamma_1$$

$$\alpha_2y_N+\beta_2\frac{y_N-y_{N-1}}{h}=\gamma_2$$

здесь мы только точность $O(h)$ сделали. поэтому вообще эта схема из-за граничных условий становится схемой первого порядка.

а теперь сделаем второй порядок:

$$\alpha_1y_0+\beta_1\frac{-3y_0+4y_1-y_2}{2h}=\gamma_1$$

$$\alpha_2y_N+\beta_2(\cdots)=\gamma_2$$