24 Сентября 2024

1. Вводная

Колобов Александр Георгиевич, D947

Чтобы получить экзамен нужно:
- допуск от преподавателя по практике
- сдача теории (экзамен)

Можно сдавать частями (три коллоквиума):
- Прямые методы
- Итерационные методы
- Собственные значения

Курсовой проект. Подробно разобрать конкретный метод, который каждому будет дан. Ещё будет две теоретические задачи.

2. Первая лекция

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Определение

$\|x\|$ — число, для которого выполняются 3 аксиомы:
1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Определение

Нормы вектора.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)} - \text{евклидова норма}$$
$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

СЛАУ:

$$Ax = f$$

Определение

Нормы матрицы.

Евклидова норма:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

Определение

Подчинённая матричная норма:

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Свойства:
1. $\|I\| = 1$
2. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Евклидова норма не является подчинённой, ведь $\|I\|_E = \sqrt{n} \neq 1$.

Из определения подчинённой матричной нормы вытекает:

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

Обратное

Определение

Согласованная матричная норма такая, что:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

$\|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_2 = \sqrt{\max\limits_i \lambda_i(A^* A)},$ где A^* – транспонированная матрица

$\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_j| \right) = \max_j \sum_i |a_{ij}| \cdot \sum_j |x_j| =$$

$$= \left(\max_j \sum_i |a_{ij}| \right) \|x\|_1$$

Доказали, что

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

k — номер столбца, где достигается максимум:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ \underbrace{1}_{k\text{−й индекс}} \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \|x\| ???$$

$$\|Ae_k\|_1 = \sum_i |a_{ik}|$$

Для второй матричной нормы $\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^* A)}$:

λ_i должны быть действительными и положительными

$A^* A$ — неотрицательно определена и симметрична

$$(A^* A)^* = A^* (A^*)^* = A^* A$$

Определение

Матрица C называется неотрицательно определённой, если

$$\forall (y, y) \geq 0$$

Похожим образом определяются положительно определённая матрица и другие.

Свойство скалярного произведения:

$$(Bx, y) = (x, B^* y)$$

$$(A^*Ax, x) = (Ax, Ax)) \geq 0$$

Из курса линейной алгебры известно, что все собственные значения симметрической матрицы вещественны.

Значит, $\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)}$ имеет смысл для симметрических матриц.

У симметрических матриц существует полная система ортонормированных собственных векторов.

$$(A^*A)u^{(i)} = \lambda_i u^{(i)}$$

$$\left(u^{(i)}, u^{(j)}\right) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{(i)}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{(i)}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u^{(j)}\right)} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$$

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(A^*Ax, x)} =$$

$$= \sqrt{\left(A^*A \sum_i \alpha_i u^{(i)}, \sum_j \alpha_j u^{(j)}\right)} = \sqrt{\left(\sum_i \alpha_i A^*Au^{(i)}, \sum_j \alpha_j u^{(j)}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_i \alpha_i \lambda_i u^{(i)}, \sum_j \alpha_j u^{(j)}\right)} = \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \lambda_i} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \max_j \lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)} \|x\|_2$$

$$\lambda_k(A^*A) = \max_i \lambda_i(A^*A)$$

Посчитаем вторую норму. Предположим, что матрица симметричная:

$$A^* = A$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^2)} = \sqrt{\max_i \lambda_i^2(A)} = \max_i |\lambda_i(A)|$$

1 Октября 2024

3. Обусловленность матрицы систем

Определение

Число обусловленности:

$$\mu(A) = \sup_{x,y \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \div \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \right)$$

$$Ax = f$$

$$A(x + \xi) = f + \varphi$$

$$A\xi = \varphi$$

Попробуем оценить следующую величину:

$$\frac{\|\xi\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|f\|}{\|\varphi\|} = \frac{\|\xi\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|Ax\|}{\|A\xi\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \div \frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} \leq \mu(A)$$

$$\frac{\|\xi\|}{\|x\|} \leq \mu(a) \frac{\|\varphi\|}{\|f\|}$$

Представим, что $\mu(A)$ невелико, меньше единицы оно быть не может, тогда маленькое возмущение правой части гарантирует, что возмущение в решении тоже невелико.

Как влияет погрешность матрицы на результат:

$$(A+\Sigma)(x+\xi)=f+\varphi$$

$$\frac{\|\xi\|}{\|x\|}\le\frac{\mu(A)}{1-\mu(A)\frac{\|\Sigma\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\varphi\|}{\|f\|}+\frac{\|\Sigma\|}{\|A\|}\right)$$

При условии:

$$\left\|A^{-1}\right\|\|\Sigma\|<1$$

Нам нужна формула, по которой мы будем искать число обусловленности, выведем её.

$$\mu(A)=\sup_{x\ne0}\frac{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\inf_{y\ne0}\left(\frac{\|Ay\|}{\|y\|}\right)}=\frac{\|A\|}{\inf_{z\ne0}\frac{1}{\frac{\|A^{-1}z\|}{\|z\|}}}=$$

$$=\frac{\|A\|}{\frac{1}{\sup_{z\ne0}\frac{\|A^{-1}z\|}{\|z\|}}}=\|A\|\left\|A^{-1}\right\|$$

$$z:=Ay$$

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1.0001\\ 1.0001 & 1\end{pmatrix}\qquad f=\begin{pmatrix}2.0001\\ 2.0001\end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\|A\|=\max_{i=1,2}|\lambda_i(A)|$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1.0001\\ 1.0001 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)^2-1.0001^2=0$$

$$\lambda_1 = 0.0001 \qquad \lambda_2 = -10^{-4}$$

$$\|A\| = 2.0001 \qquad \|A^{-1}\| = 10^4$$

$$\mu(A) = 2001 \text{ большое число}$$

Рассмотрим следующую систему:

$$(A + \Sigma)y = f + \varphi$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.00005 \end{pmatrix} \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение системы:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Прямые методы

4.1. Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

Метод в основе которого лежит использование элементарных преобразований матрицы с целью применения её к треугольному или диагональному виду.

$$Ax = f$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}$$

Исключаем элемент x_1. Пусть $a_{11} \neq 0$:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{f_1}{a_{11}} \mid \cdot\, a_{21}$$

$$a_{21}x_1 + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = a_{21}\frac{f_1}{a_{11}}$$

Теперь из второго уравнения системы вычитаем вот это, таким образом получим уравнение, в котором нет x_1.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = f_1 \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)} \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = f_1 \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)} \\ \dots \\ \qquad\qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = f_n^{(1)} \end{cases}$$

Второй шаг. $a_{22}^{(1)} \neq 0$ и делаем аналогично.

После $n-1$ шагов получим матрицу, которая имеет верхний треугольный вид.

Теперь запишем формулы всех этих шагов.

1 шаг:

$$d_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - d_{i1}a_{1j}, \quad i,j = 2, \dots, n$$

$$f_i^{(1)} = f_i - d_{i1}f_1$$

2 шаг:

$$d_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - d_{i2}a_{2j}^{(1)}, \quad i,j = 3, \dots, n$$

$$f_i^{(2)} = f_i^{(1)} - d_{i2} f_2^{(1)}$$

$$A_{n-1} x = f^{(n-1)}$$

$$A_{n-1} =: U \text{ верхняя треугольная матрица}$$

$$f^{(n-1)} =: g$$

$$Ux = g$$

$$u_{nn} x_n = g_n$$

$$x_n = \frac{g_n}{u_{nn}}$$

k — й шаг обратного хода:

$$u_{kk} x_k + \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j = g_k$$

$$x_k = \frac{g_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j}{u_{kk}}$$

Условие, при котором ведущий элемент не равен нулю. Во-первых матрица должна быть невырожденной.

Критерий работы метода Гаусса

Отличие от нуля всех главных миноров.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \neq 0$$

$$a_{11} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}^{(1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a_{11} a_{22}^{(1)} \neq 0$$

$$a_{22}^{(1)} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a_{11} a_{22}^{(1)} a_{33}^{(2)} \neq 0$$

$$a_{33}^{(2)} \neq 0$$

Все главные элементы отличны от нуля.

4.2. LU-разложене

Тот же метод Гаусса, но записанный через разложение матриц.

$$D_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ -d_{21} & 1 & 0 & & \\ -d_{31} & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & \\ -d_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = D_1 A$$

$$D_2 := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -d_{32} & \dots & \\ 0 & -d_{42} & \dots & \\ \vdots & & & \\ 0 & -d_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = D_2 A_1$$

$$A_{n-1}$$

$$U = A_{n-1} = D_{n-1} A_{n-2} = D_{n-1} D_{n-2} A_{n-3} = \dots$$

$$U = D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1 A$$

$$D \coloneqq D_{n-1} D_{n-2} \dots D_1$$

$$U = DA$$

$$L \coloneqq D^{(-1)}$$

$$A = LU$$

Как выглядит эта матрица:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ d_{21} & 1 & & & \\ d_{31} & d_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$LUx = f$$

$$Ux \coloneqq y$$

$$Ly = f$$

Докажем необходимость в критерии работы метода Гаусса.

$$A = LU$$

$$A^{(k)} = L^{(k)} U^{(k)}$$

Подматрица k-го порядка.

$$\det A^{(k)} = \det L^{(k)} \det U^{(k)}$$

$$\det L^{(k)} = 1$$

$$\det U^{(k)} = u_{11}u_{12}...u_{kk}$$

$$u_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, k}$$

$$\det A^{(k)} \neq 0$$

`08 Октября 2024`

4.3. Метод квадратного корня

Считаем, что все главные миноры не равны нулю.

$$A = LU$$

$$U = DV$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & v_{12} & v_{13} & \ldots & v_{1n} \\ & 1 & v_{23} & \ldots & v_{2n} \\ & & & & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & d_1 v_{12} & d_1 v_{13} & \ldots & d_1 v_{1n} \\ & d_2 & d_2 v_{23} & \ldots & d_2 v_{2n} \\ & & & & \vdots \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

$$d_i = u_{ii} \quad v_{ij} = \frac{u_{ij}}{u_{ii}}$$

Есть далее понятие LDV-разложение, оно определяется единственным образом.

Пусть A - симметрическая:

$$A = A^*$$

$$A = LDV$$

$$A^* = (LDV)^* = V^* D^* L^* = (V^* D L^*) = A$$

$$\Rightarrow L = V^*, V = L^*$$

$$A = V^* D V$$

Пусть матрица A положительно определённая. Тогда по критерию Сильвестра все её угловые миноры положительны.

$$(Ax, x) > 0$$

$$(Dx, x) = (DVy, Vy) = (Ay, y) > 0$$

$$x = Vy$$

Все элементы на диагонали в D больше нуля.

$$D^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}\left(\sqrt{d_1}, ..., \sqrt{d_n}\right)$$

$$A = V^* D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} V$$

$$W = D^{\frac{1}{2}} V$$

$$W^* = V^* D^{\frac{1}{2}}$$

$$A = W^* W$$

$$Ax = f$$

$$W^* W x = f$$

$$y := Wx$$

$$W^* y = f$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} W^*_{ik} W_{kj} = \sum_{k=1}^{n} W_{ki} W_{kj} = \sum_{k=1}^{i} W_{ki} W_{kj}$$

$$a_{11} = W_{11} W_{11} \Rightarrow W_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$i = 1 \quad j = 2, 3, ..., n :$$
$$a_{1j} = W_{11} W_{1j}$$

$$W_{1j} = \frac{a_{1j}}{W_{11}}$$

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{i} W_{ki} W_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} W_{ki}^2 + W_{ii}^2$$

$$W_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} W_{ki}^2}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} W_{ki} W_{kj} + W_{ii} W_{ij}$$

$$W_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} W_{ki} W_{kj}}{W_{ii}}$$

$$j = i + 1, ..., n$$

Это был метод квадратного корня.

Если матрица симметрическая, но не является положительно определённой, значит решением будут комплексные числа, ничего страшного).

4.4. QR разложение (Пуэр разложение)

Определение

Гиперплоскость с нормалью $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$, проходящая через начало координат

$$(p, x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n = 0$$

Ортогональное преобразование отражения относительно гиперплоскости, проходящей через начало координат:

$$y = x - 2\frac{(p, x)}{(p, p)} p$$

$$y = x - 2\frac{(p,x)}{(p,p)}p = x - \frac{2}{(p,p)}(p,x)p = x - \frac{2}{(p,p)}pp^*x =$$

$$= \left(I - \frac{2}{(p,p)}pp^*\right)x$$

$$P := I - \frac{2}{(p,p)}pp^*$$

$$y = Px$$

Свойства:

1. $P^2 = I$

$$P^2x = P(Px) = P\left(x - 2\frac{(p,x)}{(p,p)}p\right) = Px - 2\frac{(p,x)}{(p,p)}Pp =$$

$$= Px - 2\frac{\left(\frac{p}{x}\right)}{(p,p)}\left(p - 2\frac{(p,p)}{(p,p)}p\right) = x - \cancel{2\frac{(p,x)}{(p,p)}} + \cancel{2\frac{(p,x)}{p,p}} = x$$

2. $P^* = P$

$$P^* = \left(I - \frac{2}{(p,p)}pp^*\right)^* = I - \frac{2}{(p,p)}p^{**}p^* = p$$

3. Матрица ортогональная $P^*P = P^2 = I$

4. Преобразование отражения не изменится, если вместо вектора нормали p взять вектор βp

$$P = I - \frac{2}{(\beta p, \beta p)}(\beta p)(\beta p)^* = I - \frac{2}{(p,p)}p^*$$

5. Вектор нормали p можно определить как разность между исходным и отражённым вектором: $p = x - y$

$$x - y = 2\frac{(p,x)}{(p,p)}p$$

6. $p_1 = p_2 = \ldots = p_k = 0$

$\Rightarrow y_1 = x_1, y_2 = x_2, ..., y_k = x_k$

Докажем:

$$y_i = x_i - 2\frac{p_i}{\sum_{l=1}^{n} p_l^2} \sum_{l=1}^{n} p_l x_l$$

Из этой формулы очевидно (я хз??? он так сказал на лекции)

7. $p_1 = p_2 = ... = p_k = 0 \;$ и $\; x_{k+1} = ... = x_n = 0$

$\Rightarrow y_{k+1} = ... = y_n = 0$

$$A = QR,$$

где Q ортогональная матрица, а R верхняя треугольная

Получим матрицу A_1 следующим образом:

$$A_1 = P_1 A$$

Как должен выглядеть первый столбец:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Введём обозначение столбцов матрицы A и A_1: $a_j, a_j^{(1)}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_1 \qquad \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1^{(1)}$$

$$P_1 a_1 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вектор нормали $p^{(1)} = a_1 - a_1^{(1)}$ (разность между исходным и отражённым)

$$\begin{aligned} p_1^{(1)} &= a_{11} - a_{11}^{(1)} \\ p_2^{(1)} &= a_{21} \\ &\vdots \\ p_n^{(1)} &= a_{n1} \end{aligned}$$

При ортогональном преобразовании длина вектора не меняется:

$$\left\| a_1^{(1)} \right\|_2^2 = \|a_1\|_2^2$$

$$\left(a_{11}^{(1)} \right)^2 = \sum_{l=1}^{n} a_{11}^2$$

$$a_{11}^{(1)} = \pm \sqrt{\sum_{l=1}^{n} a_{li}^2}$$

$$p_1^{(1)} = a_{11} \pm \sqrt{\sum_{l=1}^{n} a_{li}^2}$$

$$\sigma_1 := \begin{cases} 1, \ a_{11} \geq 0 \\ -1, \ a_{11} < 0 \end{cases}$$

$$p_1^{(1)} = a_{11} + \sigma_1 \sqrt{\sum_{l=1}^{n} a_{li}^2}$$

$$a_j^{(1)} = a_j - 2\frac{\left(p^{(1)}, a_j\right)}{\left(p_1^{(1)}, p_1^{(1)}\right)} p^{(1)}, \text{ где } \ j = 2, ..., n$$

По этой формуле полностью будет определена матрица A_1.

`15 Октября 2024`

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1,k-1}^{(1)} & a_{1k}^{(1)} & a_{1,k+1}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(1)} & a_{2,k+1}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & a_{k-1,k-1}^{(k-1)} & a_{k-1,k}^{(k-1)} & a_{k-1,k+1}^{(k-1)} & \dots & a_{k-1,n}^{(k-1)} \\ & & & & a_{kk}^{(k)} & a_{k,k+1}^{(k)} & \dots & d_{k,n}^{(k)} \\ & & & & a_{k+1,k}^{(k+1)} & a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & \dots & d_{k+1,n}^{(k+1)} \\ & & & & a_{n-1,k}^{(n-1)} & a_{n-1,k+1}^{(n-1)} & \dots & d_{n-1,n}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$A_k = P_k A_{k-1}$$

$$a_k^{(k)} = P_k a_k^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{1k}^{(1)} \\ a_{2k}^{(2)} \\ \vdots \\ a_{n-1,k}^{(k-1)} \\ a_{kk}^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p^{(k)} = a_k^{(k-1)} - a_k^{(k)}$$

$$p_l^{(k)} = 0, \quad l = 1, 2, ..., n-1$$

$$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} - a_{kk}^{(k)}$$

$$p_l^{(k)} = a_{lk}^{(k-1)}, \quad l = k+1, ..., n$$

$$\left\| a_k^{(k+1)} \right\|_2^2 = \left\| a_k^{(k)} \right\|_2^2$$

$$a_{kk}^{(k)} = \pm \sqrt{\sum_{l=k}^{n} \left(a_{lk}^{(k-1)} \right)^2}$$

$$\sigma_k = \begin{cases} 1, \ a_{kk}^{(k-1)} \geq 0 \\ -1, \ a_{kk}^{(k-1)} < 0 \end{cases}$$

$$p_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} \left(a_{lk}^{(k-1)} \right)^2}$$

$$a_j^{(k)} = a_j^{(k-1)} - 2 \frac{p^{(k)}, a_j^{(k-1)}}{\left(p^{(k)}, p^{(k)}\right)} p^k$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2 \frac{p_i^{(k)}}{\sum_{l=n}^{n} \left(p_l^{(k)} \right)^2} \sum_{l=k}^{n} p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)}$$

$$j = k+1, ..., n$$

$$p_1^{(k)} = p_2^{(k)} = ... = p_{k-1}^{(k)} = 0$$

Нужно сделать $n-1$ шаг. Рассмотрим весь процесс в целом.

$$R = A_{n-1} = P_{n-1} A_{n-2} = P_{n-1} P_{n-2} A_{n-3} = ... =$$
$$= P_{n-1} P_{n-2} ... P_2 P_1 A$$

$$Q := P_1 P_2 ... P_{n-1}$$

Матрица Q ортогональная (как произведение ортогональных матриц).

$$Q^* = P_{n-1}^* ... P_1^* = P_{n-1} ... P_1$$

$$R = Q^* A$$

$$A = QR$$

Требования для существования этого разложения:

Рассмотрим случай, когда мы делим на ноль.

$$\sum_{l=k}^{n} \left(p_l^{(k)}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow p_l^{(k)} = 0,\ l = k, ..., n$$

Подберём вектор нормали, который будет ненулевым, но оставит вектор на месте. Чтобы формально в алгоритме шаг выполнился.

Например,

$$p^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Теперь можем говорить, что QR разложение существует для любых матриц.

Рассмотрим вопрос решения уравнений с помощью QR разложений.

$$Ax = f$$

$$QRx = f$$

$$Rx = Q^* f$$

Распишем Q^*:

$$Q^* = P_{n-1} ... P_1$$

$$Q^* f := g$$

$$f^{(1)} = P_1 f$$

$$f^{(2)} = P_2 f^{(1)}$$

$$g = f^{(n-1)} = P_{n-1} f^{(n-2)}$$

$$f^{(1)} = f - 2\frac{\left(p^{(1)}, f\right)}{\left(p^{(1)}, p^{(1)}\right)} p^{(1)}$$

$$f^{(k)} = f^{(k-1)} - 2\frac{p^{(k)}}{\sum_{l=k}^{n}\left(p_l^{(k)}\right)^2}\sum_{l=k}^{n} p_l^{(k)} f_l^{(k-1)}, \quad i = k, k+1, ..., n$$

4.5. Метод окаймления

Способ отыскания обратной матрицы.

$$A = A_n = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{array}\right)$$

$$A_{n-1}$$

$$v_n = \left(a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{n,n-1}\right)$$

$$u_n = \left(a_{1n}, a_{2,n}, ..., a_{n-1,n}\right)^*$$

$$A_n = \begin{pmatrix} A_n - 1 & u_n \\ v_n & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} P_{n-1} & r_n \\ q_n & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix} = D_n$$

Предполагаем, что A_{n-1}^{-1} известна

$$\begin{pmatrix} A_n - 1 & u_n \\ v_n & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} & r_n \\ q_n & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A_{n-1} P_{n-1} + u_n q_n = E \\ v_n P_{n-1} + a_{nn} q_n = 0 \\ A_{n-1} r_n + \frac{u_n}{\alpha_n} = 0 \\ v_n r_n + \frac{a_{nn}}{\alpha_n} = 1 \end{cases}$$

Возмьём третье и выразим:

$$\boxed{r_n = -A_{n-1}^{-1} \frac{u_n}{\alpha_n}}$$

Подставляем в четвёртое:

$$-\frac{v_n A_{n-1}^{-1} u_n}{\alpha_n} + \frac{a_{nn}}{\alpha_n} = 1$$

$$\boxed{\alpha_n = a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1} u_n}$$

$$\boxed{P_{n-1} = A_{n-1}^{-1} - A_{n-1}^{-1} u_n q_n}$$

$$v_n \left(A_{n-1}^{-1} - A_{n-1}^{-1} u_n q_n\right) + a_{nn} q_n = 0$$

$$v_n A_{n-1}^{-1} + \left(a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1} u_n\right) q_n = 0$$

$$v_n A_{n-1}^{-1} + \alpha_n q_n = 0$$

$$\boxed{q_n = -\frac{v_n A_{n-1}^{-1}}{\alpha_n}}$$

1. $\qquad -A_{n-1}^{-1} u_n \qquad \left(\beta_{1n}, \ldots, \beta_{n-1,n}\right)^*$

2. $$-v_n A_{n-1}^{-1} \qquad \left(\gamma_{n1}, \ldots, \gamma_{n,n-1}\right)$$

3. $$\alpha_n = a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{ni}\beta_{in} = a_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}\gamma_{ni}$$

4. $$d_{ik} = d_{ik} + \frac{\beta_{ik}\gamma_{nk}}{\alpha_n}, \quad i, k \le n-1$$

$$d_{in} = \frac{\beta_{in}}{\alpha_n} \quad d_{nk} = \frac{\gamma_{nk}}{\alpha_n}$$

Работа в первом блоке завершена. Можно сдавать первый коллоквиум по прямым методам. Д947.