24 Сентября 2024

1. Вводная

Колобов Александр Георгиевич, D947

Чтобы получить экзамен нужно:
- допуск от преподавателя по практике
- сдача теории (экзамен)

Можно сдавать частями (три коллоквиума):
- Прямые методы
- Итерационные методы
- Собственные значения

Курсовой проект. Подробно разобрать конкретный метод, который каждому будет дан. Ещё будет две теоретические задачи.

2. Первая лекция

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

Определение

$\|x\|$ — число, для которого выполняются 3 аксиомы:
1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Определение

Нормы вектора.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)} \text{ — евклидова норма}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

СЛАУ:

$$Ax = f$$

Определение

Нормы матрицы.

Евклидова норма:

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

Определение

Подчинённая матричная норма:

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Свойства:
1. $\|I\| = 1$
2. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Евклидова норма не является подчинённой, ведь $\|I\|_E = \sqrt{n} \neq 1$.

Из определения подчинённой матричной нормы вытекает:

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

Обратное

Определение

Согласованная матричная норма такая, что:

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^* A)}$, где A^* – транспонированная матрица

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left(\left(\max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_j| \right) = \max_j \sum_i |a_{ij}| \cdot \sum_j |x_j| =$$

$$= \left(\max_j \sum_i |a_{ij}| \right) \|x\|_1$$

Доказали, что

$$\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

k — номер столбца, где достигается максимум:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ \underbrace{1}_{k-\text{й индекс}} \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \|x\| ???$$

$$\|Ae_k\|_1 = \sum_i |a_{ik}|$$

Для второй матричной нормы $\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^* A)}$:

λ_i должны быть действительными и положительными

$A^* A$ — неотрицательно определена и симметрична

$$(A^* A)^* = A^* (A^*)^* = A^* A$$

Определение

Матрица C называется неотрицательно определённой, если

$$\forall (y, y) \geq 0$$

Похожим образом определяются положительно определённая матрица и другие.

Свойство скалярного произведения:

$$(Bx, y) = (x, B^* y)$$

$$(A^* Ax, x) = (Ax, Ax)) \geq 0$$

Из курса линейной алгебры известно, что все собственные значения симметрической матрицы вещественны.

Значит, $\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)}$ имеет смысл для симметрических матриц.

У симметрических матриц существует полная система ортонормированных собственных векторов.

$$(A^*A)u^{(i)} = \lambda_i u^{(i)}$$

$$\left(u^{(i)}, u^{(j)}\right) = \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{(i)}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{(i)}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u^{(j)}\right)} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$$

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(A^*Ax, x)} =$$

$$= \sqrt{\left(A^*A \sum_i \alpha_i u^{(i)}, \sum_j \alpha_j u^{(j)}\right)} = \sqrt{\left(\sum_i \alpha_i A^*Au^{(i)}, \sum_j \alpha_j u^{(j)}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_i \alpha_i \lambda_i u^{(i)}, \sum_j \alpha_j u^{(j)}\right)} = \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \lambda_i} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_i \alpha_i^2 \max_j \lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^*A)}\|x\|_2$$

$$\lambda_k(A^*A) = \max_i \lambda_i(A^*A)$$

Посчитаем вторую норму. Предположим, что матрица симметричная:

$$A^* = A$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^* A)} = \sqrt{\max_i \lambda_i(A^2)} = \sqrt{\max_i \lambda_i^2(A)} = \max_i |\lambda_i(A)|$$

`1 Октября 2024`

3. Обусловленность матрицы систем

Определение

Число обусловленности:

$$\mu(A) = \sup_{x,y \neq 0} \left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \div \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \right)$$

$$Ax = f$$

$$A(x + \xi) = f + \varphi$$

$$A\xi = \varphi$$

Попробуем оценить следующую величину:

$$\frac{\|\xi\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|f\|}{\|\varphi\|} = \frac{\|\xi\|}{\|x\|} \cdot \frac{\|Ax\|}{\|A\xi\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \div \frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} \leq \mu(A)$$

$$\frac{\|\xi\|}{\|x\|} \leq \mu(a) \frac{\|\varphi\|}{\|f\|}$$

Представим, что $\mu(A)$ невелико, меньше единицы оно быть не может, тогда маленькое возмущение правой части гарантирует, что возмущение в решении тоже невелико.

Как влияет погрешность матрицы на результат:

$$(A+\Sigma)(x+\xi)=f+\varphi$$

$$\frac{\|\xi\|}{\|x\|}\leq\frac{\mu(A)}{1-\mu(A)\frac{\|\Sigma\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\varphi\|}{\|f\|}+\frac{\|\Sigma\|}{\|A\|}\right)$$

При условии:

$$\left\|A^{-1}\right\|\|\Sigma\|<1$$

Нам нужна формула, по которой мы будем искать число обусловленности, выведем её.

$$\mu(A)=\sup_{x\neq 0}\frac{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\inf_{y\neq 0}\left(\frac{\|Ay\|}{\|y\|}\right)}=\frac{\|A\|}{\inf_{z\neq 0}\frac{1}{\frac{\|A^{-1}z\|}{\|z\|}}}=$$

$$=\frac{\|A\|}{\frac{1}{\sup_{z\neq 0}\frac{\|A^{-1}z\|}{\|z\|}}}=\|A\|\left\|A^{-1}\right\|$$

$$z:=Ay$$

Пример

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1.0001\\ 1.0001 & 1\end{pmatrix}\qquad f=\begin{pmatrix}2.0001\\ 2.0001\end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\|A\|=\max_{i=1,2}|\lambda_i(A)|$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1.0001\\ 1.0001 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)^2-1.0001^2=0$$

$$\lambda_1=0.0001\qquad\lambda_2=-10^{-4}$$

$$\|A\| = 2.0001 \qquad \left\|A^{-1}\right\| = 10^4$$

$$\mu(A) = 2001 \text{ большое число}$$

Рассмотрим следующую систему:

$$(A + \Sigma)y = f + \varphi$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.00005 \end{pmatrix} \qquad \varphi = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение системы:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Прямые методы

4.1. Метод Гаусса (метод исключения неизвестных)

Метод в основе которого лежит использование элементарных преобразований матрицы с целью применения её к треугольному или диагональному виду.

$$Ax = f$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}$$

Исключаем элемент x_1. Пусть $a_{11} \neq 0$:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{f_1}{a_{11}} \ \mid \cdot a_{21}$$

$$a_{21}x_1 + a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = a_{21}\frac{f_1}{a_{11}}$$

Теперь из второго уравнения системы вычитаем вот это, таким образом получим уравнение, в котором нет x_1.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)} \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1 \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)} \\ \ldots \\ \qquad\qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = f_n^{(1)} \end{cases}$$

Второй шаг. $a_{22}^{(1)} \neq 0$ и делаем аналогично.

После $n-1$ шагов получим матрицу, которая имеет верхний треугольный вид.

Теперь запишем формулы всех этих шагов.

1 шаг:

$$d_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - d_{i1}a_{1j}, \quad i, j = 2, \ldots, n$$

$$f_i^{(1)} = f_i - d_{i1}f_1$$

2 шаг:

$$d_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - d_{i2}a_{2j}^{(1)}, \quad i, j = 3, \ldots, n$$

$$f_i^{(2)} = f_i^{(1)} - d_{i2}f_2^{(1)}$$

$$A_{n-1}x = f^{(n-1)}$$

$$A_{n-1} = U \text{ верхняя треугольная матрица}$$

$$f^{(n-1)} = g$$

$$Ux = g$$

$$u_{nn}x_n = g_n$$

$$x_n = \frac{g_n}{u_{nn}}$$

k — й шаг обратного хода:

$$u_{kk}x_k + \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j = g_k$$

$$x_k = \frac{g_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj}x_j}{u_{kk}}$$

Условие, при котором ведущий элемент не равен нулю. Во-первых матрица должна быть невырожденной.

Критерий работы метода Гаусса

Отличие от нуля всех главных миноров.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \neq 0$$

$$a_{11} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22}^{(1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a_{11}a_{22}^{(1)} \neq 0$$

$$a_{22}^{(1)} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)} \neq 0$$

$$a_{33}^{(2)} \neq 0$$

Все главные элементы отличны от нуля.

4.2. LU-разложене

Тот же метод Гаусса, но записанный через разложение матриц.

$$D_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ -d_{21} & 1 & 0 & & \\ -d_{31} & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & \\ -d_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = D_1 A$$

$$D_2 := \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -d_{32} & \dots & \\ 0 & -d_{42} & \dots & \\ \vdots & & & \\ 0 & -d_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = D_2 A_1$$

$$A_{n-1}$$

$$U = A_{n-1} = D_{n-1} A_{n-2} = D_{n-1} D_{n-2} A_{n-3} = \ldots$$

$$U = D_{n-1} D_{n-2} \ldots D_1 A$$

$$D \coloneqq D_{n-1} D_{n-2} \ldots D_1$$

$$U = DA$$

$$L \coloneqq D^{(-1)}$$

$$A = LU$$

Как выглядит эта матрица:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ d_{21} & 1 & & & \\ d_{31} & d_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$LUx = f$$

$$Ux = y$$

$$Ly = f$$

Докажем необходимость в критерии работы метода Гаусса.

$$A = LU$$

$$A^{(k)} = L^{(k)} U^{(k)}$$

Подматрица k-го порядка.

$$\det A^{(k)} = \det L^{(k)} \det U^{(k)}$$

$$\det L^{(k)} = 1$$

$$\det U^{(k)} = u_{11} u_{12} \ldots u_{kk}$$

$$u_{ii} \neq 0, \quad i = \overline{1, k}$$

$$\det A^{(k)} \neq 0$$