20 Сентября 2024

1. Линейные системы

1.1. Постановка задачи

$$t \in [0, T] \longmapsto x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Линейное неоднородное уравнение:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in (0, T) \qquad (1)$$

$$A(t) = \left(\left(a_{ij}(t)\right)\right),\ i, j = \overline{1, n}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n \end{cases}$$

Линейное однородное уравнение:

$$(1_0) \qquad \dot{x} = A(t)x$$

Задача Коши для (1):

$$(2) \qquad x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

1.2. Матмодели

1.2.1. Температура в доме

$x_{1,2}(t)$ — температура на 1, 2 этаже
x_g — температура земли
x_e — температура на улице

$$\dot{x}_1 = k_1\left(x_g - x_1\right) + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_e - x_1) + p(t)$$

Коэффициент передачи через пол, через потолок, через стены + печка.

$$\dot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + k_4(x_e - x_2)$$

Числа $k_{1,2,3,4}$ известны.

$$A = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2 + k_3) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_4) \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} p + k_1 x_g + k_3 x_e \\ k_4 x_e \end{pmatrix}$$

1.2.2. Динамика цен и запасов

$s(t)$ — объём продаж за единицу времени.
$p(t)$ — текущая цена.
$I(t)$ — уровень запасов на каком-то складе.
$Q(t)$ — скорость поступления товара.
p_* — равновесная цена.
I_* — желаемый запас.

$$\begin{cases} \dot{s} = \beta(p - p_*),\ \beta < 0 \\ \dot{p} = \alpha(I - I_*),\ \alpha < 0 \\ \dot{I} = Q - s \end{cases} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ p(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} -\beta p_* \\ -\alpha I_* \\ Q \end{pmatrix}$$

1.3. Корректность задачи Коши

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in (0, T)$$

$$(2) \qquad x(0) = x^{(0)}$$

$$(*) \qquad \begin{cases} t > 0 \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ f \in C[0, T] \\ A \in C[0, T]\ \left(a_{ij} \in C[0, T]\right) \end{cases}$$

Th.1

Пусть выполнены условия $(*)$. Тогда $\exists!$ решение (1) - (2).

1.4. Априорные оценки решения задачи Коши

$$x, y \in \mathbb{R}^n \qquad |x| = \sqrt{\sum_1^n x_j^2}$$

$$(x, y) = \sum_1^n x_j y_j$$

$$(\dot{x}, x) = (Ax, x) + (f, x)$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ |x|^2 = (\dot{x}, x)$$

Неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x, y)| \le |x| \cdot |y|$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ |x|^2 \le |Ax| \cdot |x| + |f| \cdot |x|$$

$$|\underbrace{Ax}_{y}| = \sqrt{\sum y_i^2}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot |x|$$

$$M_1 = \max_{\substack{t \in [0,T] \\ i \in [1,n]}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

$$y_i^2 \leq M_1 \ |x|^2$$

$$y = |Ax| = \sqrt{\sum y_i^2} \leq \sqrt{M_1 n |x|^2}$$

$$M_2 = \max_{t \in [0,T]} f(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ |x|^2 \leq \sqrt{M_1 n} \ |x|^2 + M_2 \ |x|$$

$$\frac{d}{dt} \ |x| \leq \sqrt{M_1 n} \ |x| + M_2$$

$$\frac{d}{dt} \ |x| - \sqrt{M_1 n} \ |x| \leq M_2$$

$$\left(\frac{d}{dt} \ |x| - \sqrt{M_1 n} \ |x| \right) e^{-\sqrt{M_1 n} t} \leq M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\sqrt{M_1 n} t} \ |x(t)| \right) \leq M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

Интегрируем:

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \left(e^{-\sqrt{M_1 n} t} \ |x(t)| \right) \leq \int_0^t M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$e^{-\sqrt{M_1 n} t} \left(|x(t)| - |x^{(0)}| \right) \leq \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}} \left(1 - e^{-\sqrt{M_1 n} t} \right)$$

$$\boxed{|\mathrm{x}(t)| \le e^{\sqrt{M_1 n}t}\ |x^{(0)}|\ \mathrm{t} + \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}}\ \left(e^{\sqrt{M_1 n}t} - 1\right)}$$

1.5. Однородная система линейных ОДУ

$$(3) \qquad \dot{x} = A(t)x,\ t \in (0, T)$$

Замечание

Пусть

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax,\ t \in (0, T) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда, существует единственное решение $x(t) \equiv 0$

Лемма 1

Множество решений (3) есть линейное пространство

Определение

Пусть вектор-функции $x^{(1)}, ..., x^{(m)} \in C[0, T]$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, ...$$

Система векторов называется линейно независимой, если:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x^{(j)}(t) = 0,\ t \in [0, T] \Rightarrow c_1 = ... = c_m = 0$$

Определение

Система из n линейно независимых решений однородной задачи (3) называется фундаментальной системой решений.

Определение

Пусть $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ — решение (3)

$W(t) = \det\left(x^{(1)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right)$ — определитель Вронского.

Определение

$\Phi(t) = \left(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}\right)$ — фундаментальная матрица системы (3), где $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)}$ — ф.с.р.

Лемма 2

$$\det \Phi(t) \neq 0,\ \ t \in [0, T]$$

`27 Сентября 2024`

$$A(t) = \left(\left(a_{ij}(t)\right)\right)_{i,j=\overline{1,n}} \qquad n \in \mathbb{N},\ \ n \geq 2$$

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x \qquad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [0, T]$$

Замечание

$$(2) \qquad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$$

Утверждение

Пусть $B(t)$ дифференциируемая матрица, $\det B(t) \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det B(t)) = \det(B(t)) \cdot \operatorname{tr}\left(B^{-1}\dot{B}\right)$$

Пусть Φ — фундаментальная матрица.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\Phi(t) = \det(\Phi(t))\operatorname{tr}\left(\Phi^{-1}\dot{\Phi}\right) = \det(\Phi(t))\operatorname{tr}\left(\Phi^{-1}A\Phi\right)$$

Так как $W(t) = \det\Phi(t)$, а след матрицы обладает свойством $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, получаем:

$$\boxed{\dot{W} = W\operatorname{tr}A}$$

Формула Остроградского-Лиувилля:

$$\boxed{W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\operatorname{tr}A(s)\,\mathrm{d}s\right)}$$

Теорема

Пусть $\Phi(t), t \in [0, T]$ — фундаментальная матрица (1).

Тогда, $x(t), t \in [0, T]$ — решение (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \Phi(t)c \\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathrm{const} \end{cases}$

($\Leftarrow$):

$$\dot{x} = \dot{\Phi}c = A\Phi c = A \cdot \Phi c$$

Значит, Φc — решение. ■

($\Rightarrow$):

Пусть $x = x(t)$ — решение (1).

Рассмотрим СЛАУ $\Phi(0)c = x(0)$

$\det \Phi(t) \neq 0$

$\exists c \in \mathbb{R}^n$

$y(t) := \Phi(t)c$ — решение (1)

Покажем, что $y \equiv x$

$\dot{x} = Ax \qquad \dot{y} = Ay \qquad x(0) = y(0)$

В силу единственности решения задачи Коши:

$x(t) = y(t) = A(t)c$ ∎

Замечание

Общее решение (1):

$$x(t) = \Phi(t)c, \text{ где } c \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

Теорема

Существует фундаментальная система решений для системы (1).

Ищем решение матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \Phi(0) = I$$

Пусть φ — первый столбец

$\dot{\varphi} = A\varphi, \varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\exists!$ решение задачи Коши.

$\det \Phi(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \det \Phi(t) \neq 0,\ t \in [0, T]$

Замечание 2

Пусть X — пространство решений (1). Из формулы (3) следует, что $\dim X = n$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax \qquad \varphi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \varphi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi(t) = \det \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$
$$x_2 = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

1.6. Система линейных неоднородных диффуров

$$(1) \qquad \dot{x} = A(t)x + f(t), \text{ где } f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \not\equiv 0$$

Теорема

Пусть $\Phi(t)$, где $t \in [0, T]$ — фундаментальная система однородной системы.

$x = \hat{x}(t)$, где $t \in [0, T]$ — частное решение (1)

$x = x(t)$ — решение (1) $\Leftrightarrow x(t) = \Phi(t)\text{c} + \hat{x}(t) \quad (2)$

То есть, о.р.н.с. = о.р.о.с. + ч.р.н.с.

(⇐):

Обозначим $y(t) := \Phi(t)\text{c}$

$\dot{y} = Ay$

$\dot{x} = \dot{y} + \dot{\hat{x}} = Ay + A\hat{x} + f = A(y + \hat{x}) + f = Ax + f$ ■

(⇒):

x — решение (1)

$y := x - \hat{x}$

$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + f - A\hat{x} - f = Ay \Rightarrow y = \Phi c$ ■

1.6.1. Метод вариации произвольных постоянных

$x(t) = \Phi(t)c(t)$

Подставим в (1)

$\dot{\Phi}c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f$

Так как, $\dot{\Phi} = A\Phi$, то:

$A\Phi c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f$

$\Phi\dot{c} = f$

$$\boxed{\dot{c} = \Phi^{-1} f}$$

$$c(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s)\,\mathrm{d}s + K, \text{ где } K - \text{ настоящая константа}$$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sin \dot{c}_1 - \cos \dot{c}_2 = 1 \\ \cos \dot{c}_1 + \sin \dot{c}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{c}_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & -\cos t \\ 0 & \sin t \end{pmatrix} = \sin t$$

$$\dot{c}_2 = \det \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} = -\cos t$$

$$c_1 = -\cos t + K_1$$
$$c_2 = -\sin t + K_2$$

$$x = (-\cos t + K_1) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + (-\sin t + K_2) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$x = K_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.6.2. Решение задачи Коши

$$(CP) \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$x(t) = \Phi(t) \left(\int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s)\,\mathrm{d}s + K \right)$$

$$x^{(0)} = \Phi(0)K,\ \ K = \Phi^{-1}(0)x^{(0)}$$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^{(0)} + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s}$$

Определение

Матрица Коши (импульсная матрица):

$$K(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$$

$$\boxed{x(t) = K(t,0)x^{(0)} + \int_0^t K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s}$$

4 Октября 2024

Теорема повышения гладкости

$$x = x(t),\ \text{ где } t \in [0,T] - \text{решение}$$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\ \text{ где } 0 < t < T$$

$$A \in C^k[0,T],\ \text{ где } f \in C^k[0,T]$$

$$k = 0, 1, ...$$

Тогда,

$$x \in C^{k+1}[0,T]$$

$$\ddot{x} = \dot{A}x + A\dot{x} + \dot{x}$$

$$\dot{A}x + A\dot{x} + \dot{x} \in C[0,T]$$

$$\Rightarrow x \in C^2[0,T] \ \text{ и т.д.} \ \blacksquare$$

2. Системы диффуров с постоянными коэффициентами

Однородная система:

$$(1)\quad \dot{x} = Ax, t \in [0, T]$$

$$A = \left(\left(a_{kj}\right)\right)_{k,j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Замечание

Рассмотрим случай, когда Наташа равна единичке. Если $\dot{x} = ax$, тогда $x = Ce^{at}$

2.1. Матричная экспонента

$$\text{Пусть } A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = \left(\left(a_{kj}\right)\right)$$

$$\|A\| = \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|$$

$$A_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} A \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \|A_m - A\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$B = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \left\| B - \sum_{m=1}^{N} A_m \right\| \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

Определение

$$\exp A = e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$$

Лем ма

$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ матричный ряд e^A сходится

$$S_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} A^j$$

Пользуясь фактом $\left\|A^j\right\| \leq \|A\|^j$

$$\left\|S_m - S_{m+k}\right\| = \left\|\sum_{j=m+1}^{m+k} \tfrac{1}{j!} A^j\right\| \leq \sum_{j=m+1}^{m+k} \tfrac{1}{j!} \|A\|^j \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \blacksquare$$

Замечание

$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A \Leftrightarrow AB = BA$

Теорема

$\Phi(t) = e^{tA}$ – фундаментальная матрица системы (1)

$$\dot{\Phi}(t) = \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left(e^{(t+h)A} - e^{tA}\right) = \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I\right)e^{tA} =$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{1}{h}\left(I + hA + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \ldots - I\right)e^{tA} = Ae^{tA}$$

$$\det \Phi(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \blacksquare$$

Следствие 1

Общее решение (1):

$$x(t) = e^{tA}c, \text{ где } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Следствие 2

Решение задачи Коши:

$$x = Ax,\ x(t_0) = x^{(0)}$$

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x^{(0)}$$

2.2. Структура e^{tA}

2.2.1. Жорданова форма матрицы

Определение

Функция $\lambda \mapsto \det(P - \lambda I) =$

$$= (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

это характеристический многочлен матрицы P

$$a_1 = (-1)^n \operatorname{tr}(P)$$

$$a_n = \det(P)$$

Определение

$P, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ называются подобными ($P \sim Q$), если

$$\exists S, \det S \neq 0$$

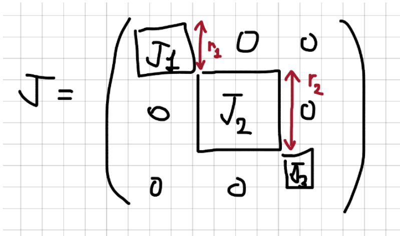
$$Q = S^{-1} P S \text{ или } SQ = PS$$

$$\det(Q - \lambda I) = \det\left(S^{-1}(P - \lambda I)S\right) = \det(P - \lambda I)$$

У подобных матриц одинаковы и следы и определители.

Определение

$$J = \operatorname{diag}\{J_1, J_2, \ldots, J_k\}$$



$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & & & \\ & \lambda_m & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_m & 1 \\ & & & & \lambda_m \end{pmatrix} \text{ — клетка Жордана}$$

Теорема

$$A \sim J = \operatorname{diag}\left\{J_0, J_1, \ldots, J_q\right\}$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_{p+k} & 1 & & & \\ & \lambda_{p+k} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{p+k} & 1 \\ & & & & \lambda_{p+k} \end{pmatrix}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — простые собственные числа A

λ_{p+k} — кратные собственные числа A кратности r_k

$$n = p + q$$

Даже если матрица имеет элементы $\in \mathbb{R}$, её собственные числа могут $\in \mathbb{C}$.

$$A = SJS^{-1}, \det S \neq 0$$

$$A^k = SJ\underbrace{S^{-1} \cdot S}_{I}JS^{-1} \cdot \dots \cdot SJS^{-1} = SJ^kS^{-1}$$

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(tA^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j SJ^jS^{-1} = Se^{tJ}S^{-1}$$

$$\Psi(t) := e^{tJ} = S^{-1}e^{tA}S$$

$$\dot{\Psi} = S^{-1}Ae^{tA}S$$

2.2.2. Экспонента Жордановской матрицы

Утверждение 1

$$J = \operatorname{diag}\left\{J_0, J_1, \dots, J_q\right\} \Rightarrow$$

$$e^{tJ} = \operatorname{diag}\left\{e^{tJ_0}, e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_q}\right\}$$

Утверждение 2

$$e^{tJ_0} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_p} \end{pmatrix}$$

$$B = \lambda I + H, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Утверждение 3

$$\text{Пусть } B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} r \text{ столбцов}$$

$$e^{tB} = e^{t\lambda I} e^{tH} = e^{\lambda t} I e^{tH} = e^{\lambda t} e^{tH}$$

$$e^{tH} = I + tH + \frac{1}{2!} t^2 H^2 + \dots$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tB} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!} t & \dots & \frac{1}{(r-1)!} t^{r-1} \\ & 1 & t & \dots & \frac{1}{(r-2)!} t^{r-2} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

$$J = \operatorname{diag}\{J_0, J_1, ..., J_q\}$$

$$\text{Тогда } e^{tJ} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_p} \end{pmatrix} & & \\ & e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t & ... & \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1} \\ & 1 & t & ... & \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$