

1. Линейные системы

1.1. Постановка задачи

$$t \in [0, T] \mapsto x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Линейное неоднородное уравнение:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

$$A(t) = ((a_{ij}(t))), \quad i, j = \overline{1, n}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n \end{cases}$$

Линейное однородное уравнение:

$$(1_0) \quad \dot{x} = A(t)x$$

Задача Коши для (1):

$$(2) \quad x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

1.2. Матмодели

1.2.1. Температура в доме

$x_{1,2}(t)$ — температура на 1, 2 этаже

x_g — температура земли

x_e — температура на улице

$$\dot{x}_1 = k_1(x_g - x_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_e - x_1) + p(t)$$

Коэффициент передачи через пол, через потолок, через стены + печка.

$$\dot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + k_4(x_e - x_2)$$

Числа $k_{1,2,3,4}$ известны.

$$A = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2 + k_3) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_4) \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} p + k_1 x_g + k_3 x_e \\ k_4 x_e \end{pmatrix}$$

1.2.2. Динамика цен и запасов

$s(t)$ — объём продаж за единицу времени.

$p(t)$ — текущая цена.

$I(t)$ — уровень запасов на каком-то складе.

$Q(t)$ — скорость поступления товара.

p_* — равновесная цена.

I_* — желаемый запас.

$$\begin{cases} \dot{s} = \beta(p - p_*), \quad \beta < 0 \\ \dot{p} = \alpha(I - I_*), \quad \alpha < 0 \\ \dot{I} = Q - s \end{cases} \quad x(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ p(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} -\beta p_* \\ -\alpha I_* \\ Q \end{pmatrix}$$

1.3. Корректность задачи Коши

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in (0, T)$$

$$(2) \quad x(0) = x^{(0)}$$

$$(*) \quad \begin{cases} t > 0 \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ f \in C[0, T] \\ A \in C[0, T] \quad (a_{ij} \in C[0, T]) \end{cases}$$

Th.1

Пусть выполнены условия (*). Тогда $\exists!$ решение (1) - (2).

1.4. Априорные оценки решения задачи Коши

$$x, y \in \mathbb{R}^n \quad |x| = \sqrt{\sum_1^n x_j^2}$$

$$(x, y) = \sum_1^n x_j y_j$$

$$(\dot{x}, x) = (Ax, x) + (f, x)$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x|^2 = (\dot{x}, x)$$

Неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x|^2 \leq |Ax| \cdot |x| + |f| \cdot |x|$$

$$\underbrace{|Ax|}_y = \sqrt{\sum y_i^2}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \cdot |x|$$

$$M_1 = \max_{\substack{t \in [0, T] \\ i \in [1, n]}} \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

$$y_i^2 \leq M_1 |x|^2$$

$$y = |Ax| = \sqrt{\sum y_i^2} \leq \sqrt{M_1 n |x|^2}$$

$$M_2 = \max_{t \in [0, T]} f(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x|^2 \leq \sqrt{M_1 n} |x|^2 + M_2 |x|$$

$$\frac{d}{dt} |x| \leq \sqrt{M_1 n} |x| + M_2$$

$$\frac{d}{dt} |x| - \sqrt{M_1 n} |x| \leq M_2$$

$$\left(\frac{d}{dt} |x| - \sqrt{M_1 n} |x| \right) e^{-\sqrt{M_1 n} t} \leq M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\sqrt{M_1 n} t} |x(t)| \right) \leq M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

Интегрируем:

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \left(e^{-\sqrt{M_1 n} t} |x(t)| \right) \leq \int_0^t M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$e^{-\sqrt{M_1 n} t} (|x(t)| - |x^{(0)}|) \leq \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}} (1 - e^{-\sqrt{M_1 n} t})$$

$$|x(t)| \leq e^{\sqrt{M_1 n} t} |x^{(0)}| + \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}} (e^{\sqrt{M_1 n} t} - 1)$$

1.5. Однородная система линейных ОДУ

$$(3) \quad \dot{x} = A(t)x, \quad t \in (0, T)$$

Замечание

Пусть

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \quad t \in (0, T) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда, существует единственное решение $x(t) \equiv 0$

Лемма 1

Множество решений (3) есть линейное пространство

Определение

Пусть вектор-функции $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in C[0, T]$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \dots$$

Система векторов называется линейно независимой, если:

$$\sum_{j=1}^m c_j x^{(j)}(t) = 0, \quad t \in [0, T] \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0$$

Определение

Система из n линейно независимых решений однородной задачи (3) называется фундаментальной системой решений.

Определение

Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ — решение (3)

$W(t) = \det(x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t))$ — определитель Вронского.

Определение

$\Phi(t) = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)})$ — фундаментальная матрица системы (3), где $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ — ф.с.р.

Лемма 2

$$\det \Phi(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]$$

27 Сентября 2024

$$A(t) = ((a_{ij}(t)))_{i,j=\overline{1,n}} \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, T]$$

Замечание

$$(2) \quad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$$

Утверждение

Пусть $B(t)$ дифференцируемая матрица, $\det B(t) \neq 0$

$$\frac{d}{dt}(\det B(t)) = \det(B(t)) \cdot \operatorname{tr}(B^{-1} \dot{B})$$

Пусть Φ — фундаментальная матрица.

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t) = \det(\Phi(t)) \operatorname{tr}(\Phi^{-1} \dot{\Phi}) = \det(\Phi(t)) \operatorname{tr}(\Phi^{-1} A \Phi)$$

Так как $W(t) = \det \Phi(t)$, а след матрицы обладает свойством $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, получаем:

$$\dot{W} = W \operatorname{tr} A$$

Формула Остроградского-Лиувилля:

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right)$$

Теорема

Пусть $\Phi(t), t \in [0, T]$ — фундаментальная матрица (1).

Тогда, $x(t), t \in [0, T]$ — решение (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \Phi(t)c \\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \text{const} \end{cases}$

(\Leftarrow):

$$\dot{x} = \dot{\Phi}c = A\Phi c = A \cdot \Phi c$$

Значит, Φc — решение. ■

(\Rightarrow):

Пусть $x = x(t)$ — решение (1).

Рассмотрим СЛАУ $\Phi(0)c = x(0)$

$$\det \Phi(t) \neq 0$$

$$\exists c \in \mathbb{R}^n$$

$y(t) := \Phi(t)c$ — решение (1)

Покажем, что $y \equiv x$

$$\dot{x} = Ax \quad \dot{y} = Ay \quad x(0) = y(0)$$

В силу единственности решения задачи Коши:

$$x(t) = y(t) = A(t)c \blacksquare$$

Замечание

Общее решение (1):

$$(3) \quad x(t) = \Phi(t)c, \text{ где } c \in \mathbb{R}^n$$

Теорема

Существует фундаментальная система решений для системы (1).

Ищем решение матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \Phi(0) = I$$

Пусть φ — первый столбец

$$\dot{\varphi} = A\varphi, \varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \exists! \text{ решение задачи Коши.}$$

$$\det \Phi(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \det \Phi(t) \neq 0, t \in [0, T]$$

Замечание 2

Пусть X — пространство решений (1). Из формулы (3) следует, что $\dim X = n$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax \quad \varphi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \varphi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi(t) = \det \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

$$x_2 = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

1.6. Система линейных неоднородных диффузов

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t), \text{ где } f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

Теорема

Пусть $\Phi(t)$, где $t \in [0, T]$ — фундаментальная система однородной системы.

$x = \hat{x}(t)$, где $t \in [0, T]$ — частное решение (1)

$x = x(t)$ — решение (1) $\Leftrightarrow x(t) = \Phi(t)c + \hat{x}(t)$ (2)

То есть, о.р.н.с. = о.р.о.с. + ч.р.н.с.

(\Leftarrow):

Обозначим $y(t) := \Phi(t)c$

$$\dot{y} = Ay$$

$$\dot{x} = \dot{y} + \dot{\hat{x}} = Ay + A\hat{x} + f = A(y + \hat{x}) + f = Ax + f \blacksquare$$

(\Rightarrow):

x — решение (1)

$$y := x - \hat{x}$$

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + f - A\hat{x} - f = Ay \Rightarrow y = \Phi c \blacksquare$$

1.6.1. Метод вариации произвольных постоянных

$$x(t) = \Phi(t)c(t)$$

Подставим в (1)

$$\dot{\Phi}c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f$$

Так как, $\dot{\Phi} = A\Phi$, то:

$$A\Phi c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f$$

$$\Phi\dot{c} = f$$

$$\dot{c} = \Phi^{-1}f$$

$$c(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s) \, ds + K, \text{ где } K - \text{ настоящая константа}$$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sin \dot{c}_1 - \cos \dot{c}_2 = 1 \\ \cos \dot{c}_1 + \sin \dot{c}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{c}_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & -\cos t \\ 0 & \sin t \end{pmatrix} = \sin t$$

$$\dot{c}_2 = \det \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} = -\cos t$$

$$c_1 = -\cos t + K_1$$

$$c_2 = -\sin t + K_2$$

$$x = (-\cos t + K_1) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + (-\sin t + K_2) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$x = K_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.6.2. Решение задачи Коши

$$(CP) \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$x(t) = \Phi(t) \left(\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s) \, ds + K \right)$$

$$x^{(0)} = \Phi(0)K, \quad K = \Phi^{-1}(0)x^{(0)}$$

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^{(0)} + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s) \, ds$$

Определение

Матрица Коши (импульсная матрица):

$$K(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$$

$$x(t) = K(t, 0)x^{(0)} + \int_0^t K(t, s)f(s) \, ds$$