

1. Линейные системы

1.1. Постановка задачи

$$t \in [0, T] \mapsto x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Линейное неоднородное уравнение:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

$$A(t) = ((a_{ij}(t))), \quad i, j = \overline{1, n}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n \end{cases}$$

Линейное однородное уравнение:

$$(1_0) \quad \dot{x} = A(t)x$$

Задача Коши для (1):

$$(2) \quad x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

1.2. Матмодели

1.2.1. Температура в доме

$x_{1,2}(t)$ — температура на 1, 2 этаже

x_g — температура земли

x_e — температура на улице

$$\dot{x}_1 = k_1(x_g - x_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_e - x_1) + p(t)$$

Коэффициент передачи через пол, через потолок, через стены + печка.

$$\dot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + k_4(x_e - x_2)$$

Числа $k_{1,2,3,4}$ известны.

$$A = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2 + k_3) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_4) \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} p + k_1 x_g + k_3 x_e \\ k_4 x_e \end{pmatrix}$$

1.2.2. Динамика цен и запасов

$s(t)$ — объём продаж за единицу времени.

$p(t)$ — текущая цена.

$I(t)$ — уровень запасов на каком-то складе.

$Q(t)$ — скорость поступления товара.

p_* — равновесная цена.

I_* — желаемый запас.

$$\begin{cases} \dot{s} = \beta(p - p_*), \quad \beta < 0 \\ \dot{p} = \alpha(I - I_*), \quad \alpha < 0 \\ \dot{I} = Q - s \end{cases} \quad x(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ p(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} -\beta p_* \\ -\alpha I_* \\ Q \end{pmatrix}$$

1.3. Корректность задачи Коши

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in (0, T)$$

$$(2) \quad x(0) = x^{(0)}$$

$$(*) \quad \begin{cases} t > 0 \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ f \in C[0, T] \\ A \in C[0, T] \quad (a_{ij} \in C[0, T]) \end{cases}$$

Th.1

Пусть выполнены условия (*). Тогда $\exists!$ решение (1) - (2).

1.4. Априорные оценки решения задачи Коши

$$x, y \in \mathbb{R}^n \quad |x| = \sqrt{\sum_1^n x_j^2}$$

$$(x, y) = \sum_1^n x_j y_j$$

$$(\dot{x}, x) = (Ax, x) + (f, x)$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x|^2 = (\dot{x}, x)$$

Неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x|^2 \leq |Ax| \cdot |x| + |f| \cdot |x|$$

$$\underbrace{|Ax|}_y = \sqrt{\sum y_i^2}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \cdot |x|$$

$$M_1 = \max_{\substack{t \in [0, T] \\ i \in [1, n]}} \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

$$y_i^2 \leq M_1 |x|^2$$

$$y = |Ax| = \sqrt{\sum y_i^2} \leq \sqrt{M_1 n |x|^2}$$

$$M_2 = \max_{t \in [0, T]} f(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |x|^2 \leq \sqrt{M_1 n} |x|^2 + M_2 |x|$$

$$\frac{d}{dt} |x| \leq \sqrt{M_1 n} |x| + M_2$$

$$\frac{d}{dt} |x| - \sqrt{M_1 n} |x| \leq M_2$$

$$\left(\frac{d}{dt} |x| - \sqrt{M_1 n} |x| \right) e^{-\sqrt{M_1 n} t} \leq M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\sqrt{M_1 n} t} |x(t)| \right) \leq M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

Интегрируем:

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \left(e^{-\sqrt{M_1 n} t} |x(t)| \right) \leq \int_0^t M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$e^{-\sqrt{M_1 n} t} (|x(t)| - |x^{(0)}|) \leq \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}} (1 - e^{-\sqrt{M_1 n} t})$$

$$|x(t)| \leq e^{\sqrt{M_1 n} t} |x^{(0)}| t + \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}} (e^{\sqrt{M_1 n} t} - 1)$$

1.5. Однородная система линейных ОДУ

$$(3) \quad \dot{x} = A(t)x, \quad t \in (0, T)$$

Замечание

Пусть

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, & t \in (0, T) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда, существует единственное решение $x(t) \equiv 0$

Лемма 1

Множество решений (3) есть линейное пространство

Определение

Пусть вектор-функции $x^{(1)}, \dots, x^{(m)} \in C[0, T]$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \dots$$

Система векторов называется линейно независимой, если:

$$\sum_{j=1}^m c_j x^{(j)}(t) = 0, \quad t \in [0, T] \Rightarrow c_1 = \dots = c_m = 0$$

Определение

Система из n линейно независимых решений однородной задачи (3) называется фундаментальной системой решений.

Определение

Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ — решение (3)

$W(t) = \det(x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t))$ — определитель Вронского.

Определение

$\Phi(t) = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)})$ — фундаментальная матрица системы (3), где $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ — ф.с.р.

Лемма 2

$$\det \Phi(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]$$

27 Сентября 2024

$$A(t) = ((a_{ij}(t)))_{i,j=\overline{1,n}} \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2$$

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, T]$$

Замечание

$$(2) \quad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$$

Утверждение

Пусть $B(t)$ дифференцируемая матрица, $\det B(t) \neq 0$

$$\frac{d}{dt}(\det B(t)) = \det(B(t)) \cdot \operatorname{tr}(B^{-1} \dot{B})$$

Пусть Φ — фундаментальная матрица.

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t) = \det(\Phi(t)) \operatorname{tr}(\Phi^{-1} \dot{\Phi}) = \det(\Phi(t)) \operatorname{tr}(\Phi^{-1} A \Phi)$$

Так как $W(t) = \det \Phi(t)$, а след матрицы обладает свойством $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, получаем:

$$\dot{W} = W \operatorname{tr} A$$

Формула Остроградского-Лиувилля:

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) \, ds \right)$$

Теорема

Пусть $\Phi(t), t \in [0, T]$ — фундаментальная матрица (1).

Тогда, $x(t), t \in [0, T]$ — решение (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \Phi(t)c \\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \text{const} \end{cases}$

(\Leftarrow):

$$\dot{x} = \dot{\Phi}c = A\Phi c = A \cdot \Phi c$$

Значит, Φc — решение. ■

(\Rightarrow):

Пусть $x = x(t)$ — решение (1).

Рассмотрим СЛАУ $\Phi(0)c = x(0)$

$$\det \Phi(t) \neq 0$$

$$\exists c \in \mathbb{R}^n$$

$y(t) := \Phi(t)c$ — решение (1)

Покажем, что $y \equiv x$

$$\dot{x} = Ax \quad \dot{y} = Ay \quad x(0) = y(0)$$

В силу единственности решения задачи Коши:

$$x(t) = y(t) = A(t)c \blacksquare$$

Замечание

Общее решение (1):

$$(3) \quad x(t) = \Phi(t)c, \text{ где } c \in \mathbb{R}^n$$

Теорема

Существует фундаментальная система решений для системы (1).

Ищем решение матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \Phi(0) = I$$

Пусть φ — первый столбец

$$\dot{\varphi} = A\varphi, \varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \exists! \text{ решение задачи Коши.}$$

$$\det \Phi(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \det \Phi(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]$$

Замечание 2

Пусть X — пространство решений (1). Из формулы (3) следует, что $\dim X = n$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax \quad \varphi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \varphi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi(t) = \det \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

$$x_2 = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

1.6. Система линейных неоднородных диффузов

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t), \text{ где } f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \neq 0$$

Теорема

Пусть $\Phi(t)$, где $t \in [0, T]$ — фундаментальная система однородной системы.

$x = \hat{x}(t)$, где $t \in [0, T]$ — частное решение (1)

$$x = x(t) - \text{решение (1)} \Leftrightarrow x(t) = \Phi(t)c + \hat{x}(t) \quad (2)$$

То есть, о.р.н.с. = о.р.о.с. + ч.р.н.с.

(\Leftarrow):

Обозначим $y(t) := \Phi(t)c$

$$\dot{y} = Ay$$

$$\dot{x} = \dot{y} + \dot{\hat{x}} = Ay + A\hat{x} + f = A(y + \hat{x}) + f = Ax + f \blacksquare$$

(\Rightarrow) :

x — решение (1)

$$y := x - \hat{x}$$

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + f - A\hat{x} - f = Ay \Rightarrow y = \Phi c \blacksquare$$

1.6.1. Метод вариации произвольных постоянных

$$x(t) = \Phi(t)c(t)$$

Подставим в (1)

$$\dot{\Phi}c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f$$

Так как, $\dot{\Phi} = A\Phi$, то:

$$A\Phi c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f$$

$$\Phi\dot{c} = f$$

$$\dot{c} = \Phi^{-1}f$$

$$c(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s) \, ds + K, \text{ где } K - \text{ настоящая константа}$$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sin \dot{c}_1 - \cos \dot{c}_2 = 1 \\ \cos \dot{c}_1 + \sin \dot{c}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{c}_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & -\cos t \\ 0 & \sin t \end{pmatrix} = \sin t$$

$$\dot{c}_2 = \det \begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} = -\cos t$$

$$c_1 = -\cos t + K_1$$

$$c_2 = -\sin t + K_2$$

$$x = (-\cos t + K_1) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + (-\sin t + K_2) \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$x = K_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + K_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.6.2. Решение задачи Коши

$$(CP) \begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$x(t) = \Phi(t) \left(\int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s) \, ds + K \right)$$

$$x^{(0)} = \Phi(0)K, \quad K = \Phi^{-1}(0)x^{(0)}$$

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^{(0)} + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s) \, ds$$

Определение

Матрица Коши (импульсная матрица):

$$K(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$$

$$x(t) = K(t, 0)x^{(0)} + \int_0^t K(t, s)f(s) \, ds$$

4 Октября 2024

Теорема повышения гладкости

$x = x(t)$, где $t \in [0, T]$ — решение

$\dot{x} = A(t)x + f(t)$, где $0 < t < T$

$A \in C^k[0, T]$, где $f \in C^k[0, T]$

$k = 0, 1, \dots$

Тогда,

$x \in C^{k+1}[0, T]$

$\ddot{x} = \dot{A}x + A\dot{x} + \dot{x}$

$\dot{A}x + A\dot{x} + \dot{x} \in C[0, T]$

$\Rightarrow x \in C^2[0, T]$ и т.д. ■

2. Системы диффузов с постоянными коэффициентами

Однородная система:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax, t \in [0, T]$$

$$A = ((a_{kj}))_{k,j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Замечание

Рассмотрим случай, когда Наташа равна единичке. Если $\dot{x} = ax$, тогда $x = Ce^{at}$

2.1. Матричная экспонента

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = ((a_{kj}))$

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$$

$$A_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} A \stackrel{\text{def}}{=} \|A_m - A\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$B = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \stackrel{\text{def}}{=} \left\| B - \sum_{m=1}^N A_m \right\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Определение

$$\exp A = e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$$

Лемма

$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ матричный ряд e^A сходится

$$S_m = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} A^j$$

Пользуясь фактом $\|A^j\| \leq \|A\|^j$

$$\|S_m - S_{m+k}\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{m+k} \frac{1}{j!} A^j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{m+k} \frac{1}{j!} \|A\|^j \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \blacksquare$$

Замечание

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A \Leftrightarrow AB = BA$$

Теорема

$\Phi(t) = e^{tA}$ — фундаментальная матрица системы (1)

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{(t+h)A} - e^{tA}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{hA} - I) e^{tA} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(I + hA + \frac{1}{2!} (hA)^2 + \dots - I \right) e^{tA} = A e^{tA}\end{aligned}$$

$$\det \Phi(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \blacksquare$$

Следствие 1

Общее решение (1):

$$x(t) = e^{tA} c, \text{ где } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Следствие 2

Решение задачи Коши:

$$x = Ax, \quad x(t_0) = x^{(0)}$$

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x^{(0)}$$

2.2. Структура e^{tA}

2.2.1. Жорданова форма матрицы

Определение

Функция $\lambda \mapsto \det(P - \lambda I) =$
 $= (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$
это характеристический многочлен матрицы P

$$a_1 = (-1)^n \operatorname{tr}(P)$$

$$a_n = \det(P)$$

Определение

$P, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ называются подобными ($P \sim Q$), если
 $\exists S, \det S \neq 0$
 $Q = S^{-1}PS$ или $SQ = PS$

$$\det(Q - \lambda I) = \det(S^{-1}(P - \lambda I)S) = \det(P - \lambda I)$$

У подобных матриц одинаковы и следы и определители.

Пример

$$J = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_k\}$$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{J_3} \end{pmatrix}$$

$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & & \\ & \lambda_m & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_m & 1 \\ & & & & \lambda_m \end{pmatrix} - \text{клетка Жордана}$$

Теорема

$$A \sim J = \text{diag}\{J_0, J_1, \dots, J_q\}$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_{p+k} & 1 & & \\ & \lambda_{p+k} & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda_{p+k} & 1 \\ & & & & \lambda_{p+k} \end{pmatrix}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — простые собственные числа A

λ_{p+k} — кратные собственные числа A кратности r_k

$$n = p + q$$

Даже если матрица имеет элементы $\in \mathbb{R}$, её собственные числа могут $\in \mathbb{C}$.

$$A = SJS^{-1}, \det S \neq 0$$

$$A^k = S \underbrace{JS^{-1} \cdot SJS^{-1} \cdot \dots \cdot SJS^{-1}}_I = SJ^k S^{-1}$$

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (tA^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j S J^j S^{-1} = S e^{tJ} S^{-1}$$

$$\Psi(t) := e^{tJ} = S^{-1} e^{tA} S$$

$$\dot{\Psi} = S^{-1} A e^{tA} S$$

2.2.2. Экспонента Жордановской матрицы

Утверждение 1

$$J = \text{diag}\{J_0, J_1, \dots, J_q\} \Rightarrow$$

$$e^{tJ} = \text{diag}\{e^{tJ_0}, e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_q}\}$$

Утверждение 2

$$e^{tJ_0} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_p} \end{pmatrix}$$

$$B = \lambda I + H, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Утверждение 3

$$\text{Пусть } B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} \quad r \text{ столбцов}$$

$$e^{tB} = e^{t\lambda I} e^{tH} = e^{\lambda t} I e^{tH} = e^{\lambda t} e^{tH}$$

$$e^{tH} = I + tH + \frac{1}{2!} t^2 H^2 + \dots$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tB} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t & \dots & \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1} \\ & 1 & t & \dots & \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

$$J = \text{diag}\{J_0, J_1, \dots, J_q\}$$

Тогда $e^{tJ} =$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_p} \end{pmatrix} & & \\ & e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t & \dots & \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1} \\ & 1 & t & \dots & \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

18 Октября 2024

$$\Phi(t) = e^{tA} = S \text{diag}\{e^{tJ_0}, e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_q}\} S^{-1}$$

$$e^{tJ_k} = e^{t\lambda_k} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

r_k кратность собственных значений λ_k

2.2.3. Метод Эйлера

Пусть λ собственное число A кратности r .

λ соответствует решение (1)

$$x(t) = e^{\lambda t} Q(t), \quad Q - \text{многочлен, степени } \leq r - 1$$

/1/

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \pm 2i$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{(3+2i)t}$$

$$(3+2i) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cancel{e^{(3+2i)t}} = \begin{pmatrix} 4a - b \\ 5a + 2b \end{pmatrix} \cancel{e^{(3+2i)t}} = A\varphi$$

$$a = 1, b = 1 - 2i$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - 2i \end{pmatrix} e^{3t} (\cos(2t) + i \sin(2t))$$

$$x(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2 \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2 \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

Пример 2

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda - 2)^1 (\lambda - 1)^2 = 0$$

1. $\lambda = 2$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b + c \\ -2a - c \\ 2a + b + 2c \end{pmatrix}$$

$$a = 1, c = 2, b = -2$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$2. \lambda = 1, r = 2$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \alpha_2 \\ \beta_1 t + \beta_2 \\ \gamma_1 t + \gamma_2 \end{pmatrix} e^t$$

Первая строчка:

$$(\alpha_1 + (\alpha_1 t + \alpha_2))e^t = (2(\alpha_1 t + \alpha_2) + \beta_1 t + \beta_2 + \gamma_1 t + \gamma_2)e^t$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \\ \alpha_1 = 2\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \end{cases}$$

Вторая строчка:

$$\beta_1 + \beta_1 t + \beta_2 = -2(\alpha_1 t + \alpha_2) - \gamma_1 t - \gamma_2$$

Третья аналогично:

$$\gamma_1 + \gamma_1 t + \gamma_2 = 2(\alpha_1 t + \alpha_2 + \beta_1 t + \beta_2 + 2(\gamma_1 t + \gamma_2))$$

Решаем алгебру:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -\gamma_1, \beta_1 = -\alpha_2, \beta_2 = \beta_1 - \gamma_2$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = c_2 \\ \beta_1 = -c_2 \\ \beta_2 = -c_2 - c_3 \\ \gamma_1 = c_1 \\ \gamma_2 = c_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } x &= c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_2 t - (c_2 + c_3) \\ c_2 t + c_3 \end{pmatrix} e^t = \\ &= c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t - 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3. Неоднородные системы

$$(1_n) \quad \dot{x} = Ax + f(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$x(t) = \hat{x}(t) + \Phi(t)c$$

$c \in \mathbb{R}^n$, \hat{x} — частное решение, $\Phi(t)c$ — о.р.о.с.

Замечание

$$\dot{x} = Ax + kf_1(t) + f_2(t), \quad k = \text{const}$$

$$\dot{x}^{(1)} = Ax^{(1)} + f_1(t)$$

$$\dot{x}^{(2)} = Ax^{(2)} + f_2(t)$$

$$\Rightarrow x = kx^{(1)} + x^{(2)}$$

Неоднородность в виде квазимногочлена:

$$f(t) = e^{\mu t} P(t), \quad \deg P = m, \quad P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\mu \in \mathbb{C}$$

Замечание

$$\begin{aligned} \text{Пусть } f(t) &= \sin 3t \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \\ &\sim e^{3it} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3.1. Нерезонансный случай

μ не является собственным значением A

$$\dot{x} = Ax + e^{\mu t} P(t)$$

$$\hat{x}(t) = e^{\mu t} Q(t), \quad \deg Q \leq m, \quad Q(t) = \sum_{j=0}^m q_j t^j, \quad q_j \in \mathbb{R}^n$$

$$(\mu Q + \dot{Q})e^{\mu t} = Ae^{\mu t} Q + e^{\mu t} P$$

$$(\mu I - A)Q = P - \dot{Q}$$

$$P(t) = \sum_{j=0}^m p_j t^j$$

$$t^m : (\mu I - A)q_m = p_m$$

$$q_m = (\mu I - A)^{-1} p_m$$

$$t^{m-1} : (\mu I - A)q_{m-1} = p_{m-1} - m q_m = p_{m-1} - m(\mu I - A)^{-1} p_m$$

2.3.2. Резонансный случай

25 Октября 2024

$\exists \lambda_k$ — собственное значение A , $\mu = \lambda_k$

$$\hat{x}(t) = e^{\mu t} Q(t)$$

$\deg Q \leq m + l$, l – максимальный размер Жордановской клетки, соответствующей λ_k

$l \leq$ кратности собственного значения

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + e^{2t} \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

$$f(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m = 0$$

$$\hat{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Подставляем в задачу и получаем:

$$q = -1, \quad p = \frac{2}{3}$$

$$\hat{x} = e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + b = a \\ 3a + 4b = b \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор, соответствующий $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \lambda = 5$$

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Задача тов. Коши:

$$x(0) = 0$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_1 = -\frac{3}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{12}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{12}e^{5t} + \frac{2}{3}e^{2t} \\ x_2 = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} - e^{2t} \end{cases}$$

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon \sin t \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}, \quad t > 0$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Можно решать при $\varepsilon = 1$, а потом домножать ответ.

$$\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$b = ia \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}(t) = e^{it} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix}$$

Теперь подставляем в задачу и находим четыре числа:

$$i e^{it} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} + e^{it} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} a_2 t + b_2 \\ -a_1 t - b_1 \end{pmatrix} + e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 t + b_2 \\ -a_1 t - b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t^1 : ia_1 = a_2, ia_2 = -a_1$$

$$t^0 : ib_1 + a_1 = b_2 + 1, ib_2 + a_2 = -b_1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{i}{2}, ib_1 = b_2 + \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{i}{2}, b_1 = 0, b_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\dot{x}(t) = e^{it} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{i}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{it} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{i}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -\frac{1}{2} + c_1 i - c_2 i = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = -\frac{1}{4}i, \quad c_2 = \frac{1}{4}i$$

$$x(t) = e^{it} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{i}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{4}i \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} + \frac{1}{4}i e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \sin t - \frac{1}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos t \\ \frac{1}{2}t \cos t - \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin t \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$x_1(t) = \frac{\varepsilon}{2} t \sin t$$

$$x_2(t) = \frac{\varepsilon}{2} (t \cos t - \sin t)$$

3. Устойчивость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

3.1. Определение устойчивости и простейшее применение

«Fur fier kein beer»

«Fur fier kein beer»

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad t > 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Определение

Пусть $x = \varphi(t)$, $t \geq 0$ — решение (1). Решение $\varphi(x)$ называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \text{ решения } x = \psi(t) \text{ системы (1),}$$

$$\exists \delta_\varepsilon > 0$$

$$\text{такого, что } |\varphi(0) - \psi(0)| < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon$$

$$\forall t > 0$$

Определение

Решение $x = \varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если к дополнению к этому,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$$

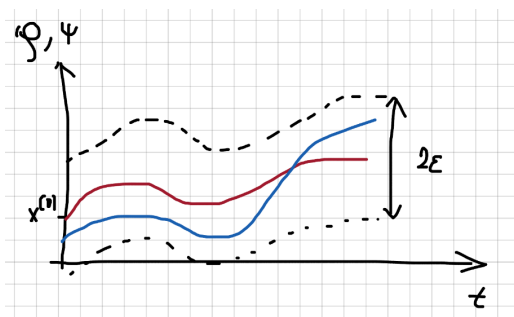
1 Ноября 2024

Мы рассматриваем систему вида:

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad \text{где } t > 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}$$

Предположим, что есть $x^{(0)} \in \mathbb{R}$. Существует единственное решение (1) при начальных условиях $|x(0) - x^{(0)}| \leq r$

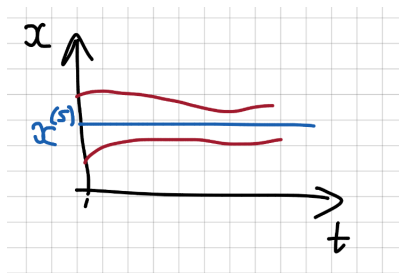


Замечание

Устойчивость стационарного решения:

$$x^{(s)} = \text{const}$$

$$f(t, x^{(s)}) = 0$$



Замечание

$$y = x - \varphi$$

$$(2) \quad \dot{y} = f(t, y + \varphi) - f(t, \varphi)$$

Устойчивость решения φ системы (1) \Leftrightarrow устойчивость решения $y = 0$ системы (2).

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Ищем решение:

$$x(t) = u(t)e^t$$

$$\dot{x} = \dot{u}e^t + ue^t = ue^t - u^2e^{2t}$$

$$\dot{u} = -u^2e^t$$

$$\int \frac{du}{u^2} = - \int e^t dt$$

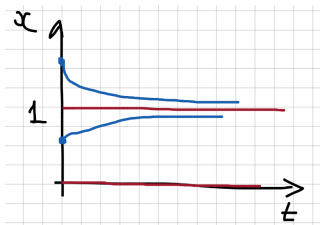
$$-\frac{1}{u} = -e^t + C$$

$$u = \frac{1}{e^t - C}$$

$$\frac{1}{1 - C} = x_0$$

$$C = 1 - \frac{1}{x_0}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^t}{e^t - 1 + \frac{1}{x_0}} = \frac{x_0 e^t}{1 + x_0(e^t - 1)} = \frac{x_0 e^{-t}}{e^{-2t} + x_0(e^{-t} - e^{-2t})} = \\ &= \frac{x_0}{e^{-t} + x_0(1 - e^{-t})} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$



Решение $x_0 = 1$ асимптотически устойчивое.

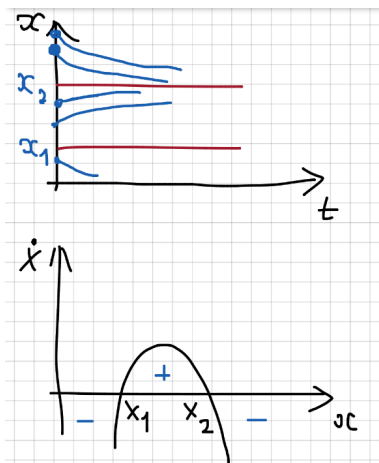
Решение $x_0 = 0$ неустойчивое, потому что если придать небольшую флуктуацию, то решение сольётся в экстазе с единичкой на бесконечности.

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 - k, & k = \text{const} > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

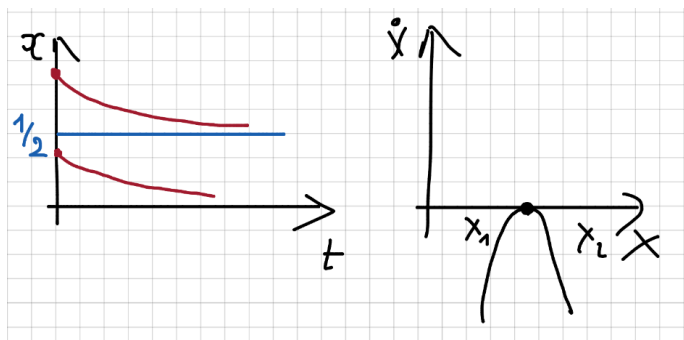
Стационарное решение $x - x^2 - k = 0$. Дискриминант $1 - 4k$.

$$1. \ 0 < k < \frac{1}{4} \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$$



x_2 устойчивое, x_1 неустойчивое.

2. $k = \frac{1}{4}$



Не устойчивое.

3. $k > \frac{1}{4}$

Тут производная будет отрицательна, поэтому решения не устойчивые.

3.2. Устойчивость решений однородных линейных систем с постоянными коэффициентами

Объектом изучения будет следующая система:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax$$

$$A \in R^{n \times n}$$

Стационарным решением (не зависящем от времени) будет:

$$x_s = 0 \text{ — устойчиво или нет? будем изучать}$$

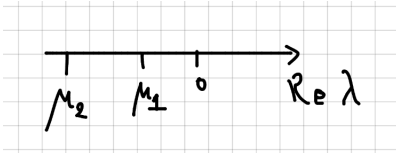
Пусть собственные значения A : $\lambda_i = \mu_j + i\nu_j$, $\mu_j = \text{Re } \lambda_j$

Лемма 1

Пусть $\forall j \text{ Re } \lambda_j < 0$.

Тогда $\exists M, \alpha > 0$:

$$|\varphi(t)| \leq M e^{-\alpha t} \quad \forall t > 0, \text{ где } \varphi - \text{решение(1)}$$



$$\alpha := \frac{1}{2} |\mu_1| > 0$$

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} P_j(t), \text{ где } P_j - \text{многочлен}$$

$$e^{\lambda_j t} = e^{\mu_j t} \cdot e^{i\nu_j t}$$

$$|\varphi(t)| \leq \sum_{j=1}^m e^{\mu_j t} |P_j(t)|$$

$$|\varphi(t)| e^{\alpha t} \leq \sum_{j=1}^m e^{(\alpha + \mu_j)t} |P_j(t)| \leq \sum_{j=1}^m e^{-\frac{1}{2}\mu_1 t} |P_j(t)| \leq M$$

Лемма 2

Пусть $\varphi = \varphi(t)$, $t > 0$ — решение задачи Коши $(\dot{x} = Ax, x(0) = x^{(0)})$, $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда $\exists M, \alpha > 0$:

$$|\varphi(t)| \leq M |x^{(0)}| e^{-\alpha t}$$

$$\varphi(t) = \Phi(t)x^{(0)}$$

$$\Phi(t) = e^{tA} \quad \dot{\Phi} = A\Phi \quad \Phi(0) = I$$

$$|\varphi(t)| \leq \|\Phi(t)\| \cdot |x^{(0)}|$$

$$\|\Phi(t)\| \leq M e^{\alpha t} \blacksquare$$

Теорема об асимптотической устойчивости системы (1)

Решение $x(s) \equiv 0$ асимптотически устойчивое

$$\Leftrightarrow$$

$\operatorname{Re} \lambda_j < 0, j = 1, \dots, m$

$(\Leftarrow) :$

$$|\varphi(t)| \leq M |x^{(0)}| e^{-\alpha t}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M}$$

Если $|x^{(0)}| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow$

$$|\varphi(t)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} e^{-\alpha t} < \varepsilon \rightarrow 0$$

$(\Rightarrow:)$

Предположим противное. Пусть $\operatorname{Re} \lambda_1 = \mu_1 \geq 0$.

Тогда $\exists h \in \mathbb{C}^n \quad h = h^{(1)} + i h^{(2)}$

$$Ah = \lambda_1 h$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} (h e^{\lambda_1 t}) = \operatorname{Re} ((h^{(1)} + i h^{(2)}) e^{(\mu_1 + \nu_1 i) t}) = \\ &= e^{\mu_1 t} (h^{(1)} \cos \nu_1 t - h^{(2)} \sin \nu_1 t) \not\rightarrow 0, t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\forall c = \text{const} \quad \varphi(t) = c \hat{x}(t) - \text{решение}$$

$|\varphi(0)| \leq c |\hat{x}(0)|$ — сколь угодно малое при маленьких c

$$\varphi(t) \not\rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$

Получили противоречие.

Замечание

Решение $x_s \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову

\Rightarrow

$\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0, j = 1, \dots, m$

8 Октября 2024

3.3. Функция Ляпунова

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad t > 0$$

$$f(t, 0) = 0$$

$x_s(t) = 0, t > 0$ – стационарное решение

$$f : [0, +\infty] \times \{|x| \leq r\}$$

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \text{ — обычная Евклидова норма}$$

Определение

$$V(x), \quad x \in B = \{|x| \leq r\} \subset \mathbb{R}^n$$

– функция Ляпунова, если:

1. $V \in C^1(B), V(x) \geq 0, V(0) = 0, V(x) > 0, x \neq 0$
2. $f(t, x) \cdot \nabla V(x) \leq 0, x \in B, t \geq 0$

Лемма Ляпунова

Пусть \exists функция Ляпунова для системы (1).

Тогда решение $x_s \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову

Если дополнительно $\exists W(x), x \in B, W \in C(B), W(0) = 0$

$W(x) > 0, x \neq 0$ и при этом $f(x, t) \nabla V(x) \leq -W(x), x \in B$

Тогда x_s ещё и асимптотически устойчиво.

В данном случае устойчивость по Ляпунову для стационарного решения:

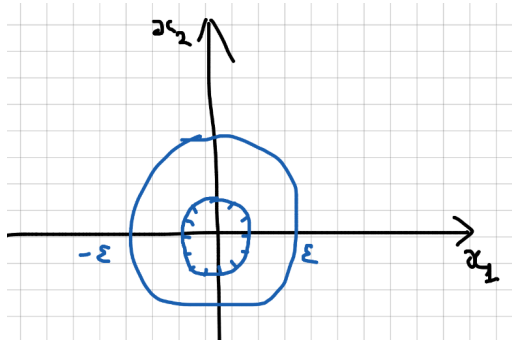
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$

$$\forall \text{ реш (1), } |x(0)| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon, \quad t > 0$$

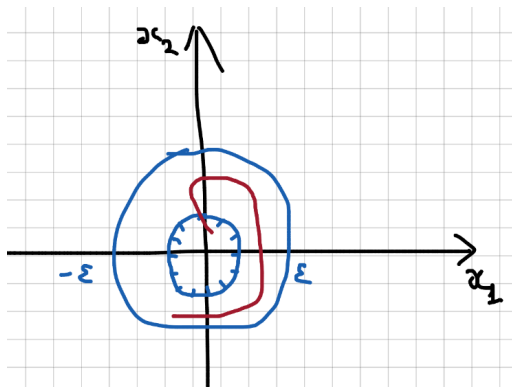
Асимптотическая устойчивость — добавляем:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$$

Доказательство леммы Ляпунова. Для этого рассмотрим сферу радиуса ε . Пусть $\varepsilon \in (0, r)$, $\delta_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \varepsilon\}$, $V_\varepsilon = \min_{x \in \delta_\varepsilon} V(x)$



Выбор δ_ε : $V(x) < V_\varepsilon$, если $|x| < \delta_\varepsilon$



Пусть $x := \varphi(t)$, $t > 0$ — решение (1), $|x(0)| < \delta_\varepsilon$.

1. Решение $\varphi(t)$ действительно определено при $t > 0$

Предположим противное, тогда $\exists t_1 > 0, |\varphi(t)| \rightarrow +\infty, t \rightarrow t_1$. Отсюда вытекает, что $\exists t_0 > 0, |\varphi(t_0)| = \varepsilon$. В желудок Ляпунова затолкали решение:

$$\mu(t) = V(\varphi(t)),$$

$$\mu'(t) = \sum_1^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{\varphi}_j = f \cdot \nabla V \leq 0 \Rightarrow \mu(t) \text{ не возрастает!}$$

$$V_\varepsilon > V(\varphi(0)) = \mu(0) \geq \mu(t_0) = V(\varphi(t_0)) \geq V_\varepsilon$$

Вот и получили противоречие.

2. $\nexists t_0 : |\varphi(t_0)| = \varepsilon \Rightarrow |\varphi(t)| < \varepsilon, t > 0$

Доказали устойчивость, теперь покажем, что предел решения на бесконечности равен нулю (асимптотическая устойчивость):

$$|\varphi(t)| \rightarrow 0, t \rightarrow 0$$

.

Утверждение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t)) = 0$$

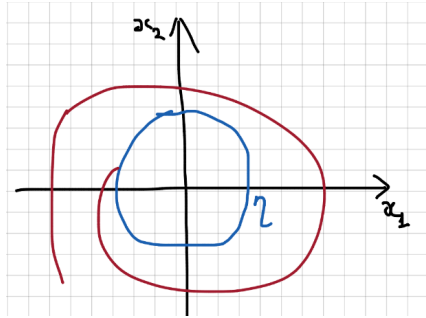
Воспользуемся этим утверждением. Предположим противное:

$$|\varphi(t)| \nrightarrow 0, t \rightarrow +\infty \Rightarrow \exists t_k \rightarrow +\infty |\varphi(t_k)| \geq \eta > 0$$

$$\beta = \min_{\eta < |x| < \beta} V(x)$$

$$V(\varphi(t_k)) \geq \beta > 0 \quad \forall k$$

$$t_k \rightarrow +\infty$$



Получили противоречие утверждению.

$$f \nabla V \leq -W$$

Теперь докажем само утверждение.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(\varphi(t)) = 0$$

Предположим противное $\mu(t) = V(\varphi(t))$ не возрастающая. Тогда $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(t) = \alpha > 0$.

$$\mu(t) \geq \alpha, \quad t > 0$$

$$V(\varphi(t)) \geq \alpha > 0$$

$$0 < \sigma < |\varphi(t)| < \varepsilon$$

$$A := \min_{\sigma < |x| < \varepsilon} W(x)$$

Продифференцируем μ :

$$\mu'(t) = f \nabla V \leq -W \leq -A$$

$$\mu'(t) \leq -A$$

Если это неравенство проинтегрировать.

$$\mu(t) - \mu(t_*) \leq -A(t - t_*)$$

Если в этом неравенстве $t \rightarrow +\infty$, тогда $\mu(t) \rightarrow -\infty$. Но оно не может стремиться к $-\infty$, потому что она отрицательной быть не может. Мораль — получили противоречие.

Сейчас пойдут примеры.

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 \end{cases}$$

$x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — стационарное решение, положение равновесия

Подобрать функцию — это искусство.

$$V(x) = x_1^2 + x_2^4$$

Проверим, будет ли она функцией Ляпунова или нет.

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0, \quad x \neq 0$$

$$f\nabla V = x_1 x_2^4 \cdot 2x_1 + (-x_1^2 x_2 \cdot 4x_2^3) = -2x_1^2 x_2^4 \leq 0$$

$$\Rightarrow x_s = 0 \text{ устойчиво}$$

Пример 2

$$\dot{x} = -g(x), \quad x = x(t) \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$g(0) = 0, \quad xg(x) > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad |x| \leq r, \quad g - \text{липш.}$$

$$V(x) = \int_0^x g(s) \, ds$$

$$V(0) = 0$$

$V(x) > 0$, $x \neq 0$ очев, подумайте

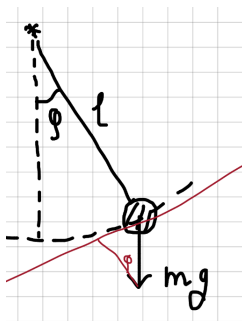
$$f\nabla V = -g^2(x) \leq 0$$

$$W(x) := g^2(x)$$

Тогда решение ещё и асимптотически устойчиво:

$$f\nabla V \leq -W$$

Пример (маятник)



$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin(\varphi)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi - b\dot{\varphi}$$

$$a = \frac{g}{l} = \omega^2$$

$$x_1 = \varphi, \quad x_2 = \dot{\varphi}$$

$$a, b > 0, \quad |x_1| < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1 - bx_2 \end{cases} \quad x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — стационарное решение}$$

$$1. \quad V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0, \quad x \neq 0$$

$$f\nabla V = x_2 a \sin x_1 + (-a \sin x_1 - b x_2) x_2 = -b x_2^2 \leq 0$$

Должна быть асимптотическая устойчивовть (физическая чуйка). Определяется хитрая функция Ляпунова:

$$2. \quad V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x P x$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{b^2}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{pmatrix} - \text{положительно определённая}$$

$$f\nabla V = -\frac{1}{2} a b x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2} b x_2^2 \leq 0$$

$$-W(x) := -\frac{1}{2} a b x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2} b x_2^2$$

$$f\nabla V \leq -W$$

x_s — асимптотически устойчивое решение.

15 Ноября 2024

3.4. Экспоненциальная устойчивость динамических систем

Речь идёт о следующей системе:

$$(1) \quad \dot{x} = f(x), \quad t > 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Правая часть не зависит от t . Это динамическая (или автономная) система.

$$f(0) = 0 \quad x_s \equiv 0 - \text{стационарное решение}$$

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & | \cdot x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 & | \cdot x_2 \end{cases}$$

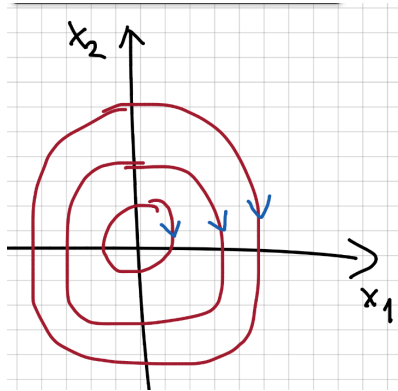
Изобразим фазовый портрет.

$$\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = C = \text{const}$$

Вот этот рисунок — фазовый портрет. Решения x_1, x_2 — фазовые переменные.



Решение устойчиво по Ляпунову, но не устойчиво асимптотически.

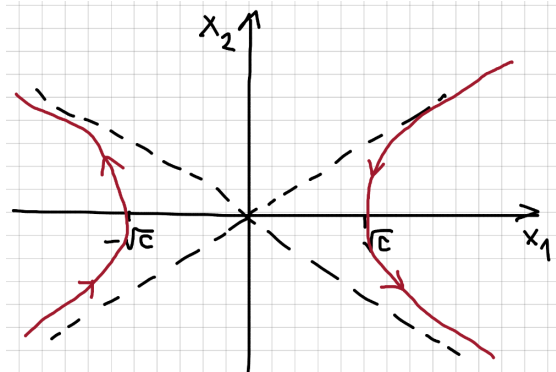
Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 & | \cdot x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 & | \cdot x_2 \end{cases}$$

$$x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$x_1^2 - x_2^2 = C = \text{const}$$



Решение этой системы не устойчиво по Ляпунову.

Сформулируем теорему для экспоненциальной устойчивости нулевого решения.

Теорема

Пусть существует функция Ляпунова для системы (1),

$$f \nabla V \leq -\alpha V \quad (\alpha > 0)$$

И выполняется:

$$C_1 |x|^2 \leq V(x) \leq C_2 |x|^2$$

Тогда:

Существует константа $M > 0$, что

$$|x(t)| \leq M e^{-\frac{\alpha}{2} t} |x(0)|$$

Пусть

$x = x(t)$, $t \geq 0$ – решение 1

$$\mu(t) = V(x(t))$$

$$\mu'(t) = \sum_1^n V'_{x_j} \dot{x}_j = f \nabla V \leq \alpha V(x(t))$$

$$\mu'(t) \leq \alpha \mu(t)$$

$$(\mu' + \alpha \mu) e^{\alpha t} \leq 0$$

$$(\mu(t) e^{\alpha t})' \leq 0$$

$$\mu(t) e^{\alpha t} \leq \mu(0)$$

$$\mu(t) = V(x(t)) \leq \mu(0) = V(x(0)) e^{-\alpha t}$$

Теперь неравенство с C_1 и C_2 применяем:

$$C_1 |x(t)|^2 \leq \mu(t) = V(x(t)) \leq \mu(0) = V(x(0)) e^{-\alpha t} \leq C_2 |x(0)|^2 e^{-\alpha t}$$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + g(x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + h(x_1) \end{cases}$$

$$|g(s)| \leq \frac{1}{2}|s|, \quad |h(s)| \leq \frac{1}{2}|s|$$

$$\text{Пусть } V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}|x|^2$$

$$\begin{aligned} f \nabla V &= (-x_1 + g(x_2))x_1 + (-x_2 + h(x_1))x_2 \leq \\ &\leq -(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}|x_1 x_2| + \frac{1}{2}|x_1 x_2| \leq \end{aligned}$$

$$\text{Пользуясь } |x_1 x_2| \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\leq -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = -V(x)$$

Решение является экспоненциально устойчивым.

$$V(x) \leq V(0)e^{-t}$$

3.5. Анализ устойчивости по первому приближению.

Есть такая замечательная формула:

$$f(x) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0)x + o(|x|)$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \left(\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(0) \right) \right)_{k,j=1,\dots,n} \quad \text{— матрица Якоби}$$

$$f(x) = Ax + g(x), \quad g(x) = o(|x|)$$

$$f(0) = 0$$

$$(1) \quad \dot{x} = f(x)$$

$f(0) = 0$, $x_s \equiv 0$ — стационарное решение

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + g(x)$$

Теорема

Пусть

λ_k , $k = 1, \dots, n$ — собственные числа

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad \operatorname{Re} \lambda_k < 0$$

$$\exists M, \alpha, r > 0$$

$$|g(x)| \leq M|x|^{1+\alpha}, \quad |x| \leq r$$

Тогда $x_s = 0$ асимптотически устойчиво.

Лемма Гронуолла

Пусть есть интегральное неравенство для неотрицательной функции:

$$0 \leq A(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t A(s) \, ds, \quad t, C_1, C_2 \geq 0$$

Тогда:

$$A(t) \leq C_1 e^{C_2 t}$$

$$W(t) := C_1 + C_2 \int_0^t A(s) \, ds$$

$$A(t) \leq W(t)$$

$$W'(t) = C_2 A(t) \leq C_2 W(t)$$

$$A(t) \leq W(t) \leq W(0) e^{C_2 t} = C_1 e^{C_2 t}$$

Следствие: $C_1 = 0 \Rightarrow A(t) = 0$

Доказываем теорему:

$$\dot{x} - Ax = g(x)$$

$$e^{-tA}(\dot{x} - Ax) = e^{-tA}g(x)$$

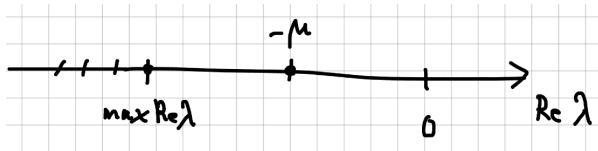
$$\frac{d}{dt}(e^{-tA}x(t)) = e^{-tA}g(x(t))$$

$$e^{-tA}x(t) = x(0) = \int_0^t e^{-sA}g(x(s)) \, ds$$

$$(2) \quad x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{-(s-t)A}g(x(s)) \, ds$$

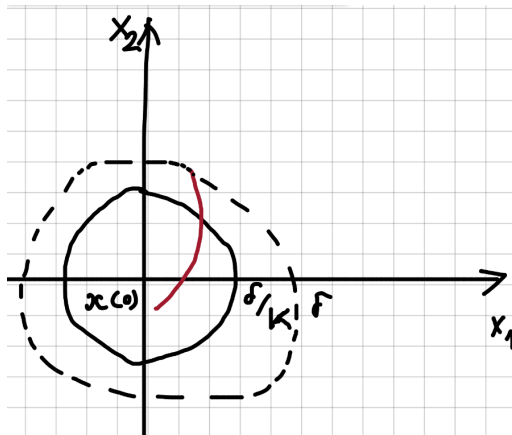
$$\mu > 0$$

$$\|e^{tA}\| \leq K e^{-\mu t}$$



Пусть $\delta > 0$, $|x(0)| < \frac{\delta}{k} \leq \delta < r$

$$|x(t)| \leq S, \quad t \in [0, t_k]$$



$$|x(t_*)| = S$$

$$A(t) = e^{\mu t}|x(t)|$$

$$A(t) \leq K e^{-\mu t} e^{\mu t} |x(0)| + \int_0^t M |x(s)|^{1+\alpha} K A(s) ds$$

$$|x(0)| \leq \delta^\alpha$$

По лемме Гронуолла:

$$A(t) \leq K |x(0)| e^{MK\delta^\alpha t}$$

Выбираем $\delta : MK\delta^\alpha < \frac{\mu}{2}$

$$e^{\mu t} |x(t)| \leq K |x(0)| e^{-\frac{\mu}{2} t}$$

$$|x(t)| \leq K |x_0| e^{-\frac{\mu}{2} t}$$

Это неравенство доказывает асимптотическую устойчивость. Что и требовалось доказать.

Вопросы??? Перерыв.

22 Ноября 2024

3.6. Анализ точек покоя (стационарных точек) линейной системы в двумерном случае.

$$\dot{x} = Ax, \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{2,2}$$

Собственные значения:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Получаем квадратное уравнение вида:

$$\lambda^2 - \text{tr } A \cdot \lambda + \det A$$

Пусть λ_1, λ_2 — корни квадратного уравнения, то есть, собственные числа матрицы A .

Рассмотрим несколько случаев.

1. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Подобная матрица:

$$A = S^{-1}JS \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = S^{-1}JSx$$

Делаем замену переменной: $y := Sx$

$$\dot{y} = Jy$$

Рассмотрим как выглядят уравнения:

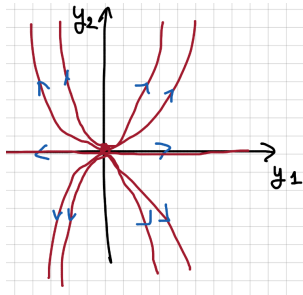
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$$\left(\frac{y_1}{C_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = \left(\frac{y_2}{C_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}}$$

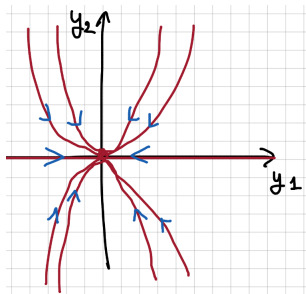
$$y_2 = C_2 \left(\frac{y_1}{C_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

1.а. Пусть $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.



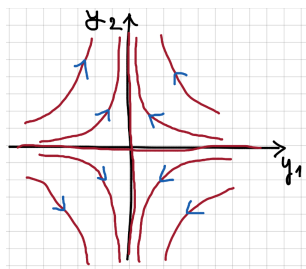
Неустойчивый узел.

1.б. Пусть $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



Устойчивый узел

1.в. Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



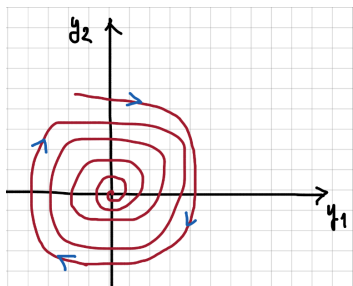
Седло (неустойчивое).

2. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{\alpha t} \cos \beta t \\ y_2 = C_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \end{cases}$$

2.a. $\alpha < 0$

$$\left(\frac{y_1}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{C_2}\right)^2 = e^{2\alpha t}$$



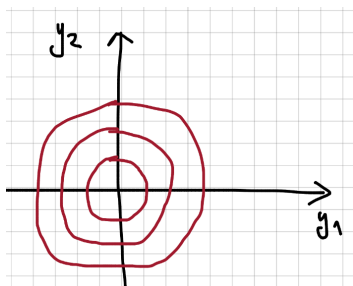
Устойчивая логарифмическая спираль.

2.б. $\alpha > 0$

Неустойчивая логарифмическая спираль.

2.в. $\alpha = 0$

$$\frac{y_1^2}{C_1^2} + \frac{y_2^2}{C_2^2} = 1$$



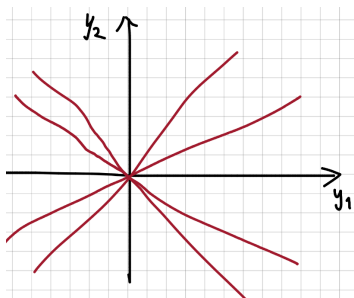
Центр. Устойчивость, но не асимптотическая.

3. $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

3.а. $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1, & y_1 = C_1 e^{\lambda t} \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2, & y_2 = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{C_2}{C_1}, \quad y_2 = k y_1$$



Если $\lambda < 0$, то устойчивый узел

Если $\lambda > 0$, то неустойчивый узел

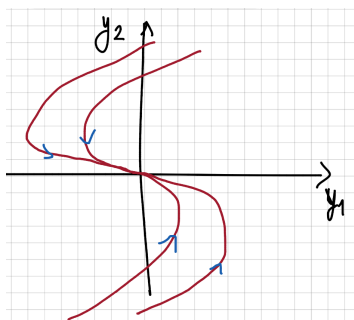
3.б. $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases}$$

$$y_2 = C^2 e^{\lambda t}$$

$$y_1 = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

$$y_1 = \frac{C_1}{C_2} y_2 + C_2 \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{C_2} \cdot \frac{y_2}{C_2}$$



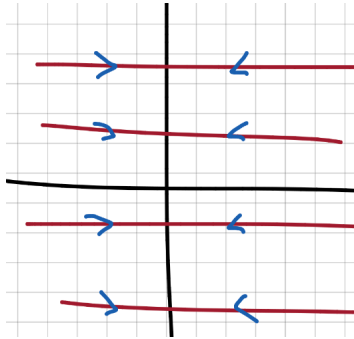
Устойчивый вырожденный узел.

4. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = 0 \end{cases}$$

$$y_2 = C_2, y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$$



Устойчивый, но не асимптотически.

3.7. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматриваем:

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x) \text{ — система ОДУ}$$

$$(t, x) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Определение

Функция $v(t, x)$, $(t, x) \in D$ называется первым интегралом системы (1), если

$$v(t, x(t)) = \text{const}, (t, x(t)) \in D$$

$$\forall \text{ решения } x \text{ системы (1)}$$

Пример. Равномерное движение в потенциальном поле

$$m\ddot{x} = -U'(x), \quad t > 0$$

U — потенциал силы.

$$x_1 := x, \quad x_2 := \dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{m}\dot{U}(x_1) \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 x_2 = -\frac{1}{m}\dot{U}(x_1)x_2$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(x_2^2) = -\frac{1}{m} \frac{d}{dt}(U(x_1))$$

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{m}U(x_1) = \text{const}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E = \text{const}$$

$$v(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{m}U(x_1)$$

Это первый интеграл системы.

Продифференцируем по t :

$$v_t + \sum_{j=1}^n v_{x_j} \dot{x}_j = 0$$

$$\dot{x}_j = f_j(t, x)$$

$$v_t + \sum_1^n v_{x_j} f_j = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + f \nabla v = 0$$

Определение

Первые интегралы системы (1) v_1, v_2, \dots, v_k называются (функционально) независимыми, если

$$\text{rank} \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n}} \right) = k$$