20 Сентября 2024

# 1. Линейные системы

## 1.1. Постановка задачи

$$t \in [0,T] \longmapsto x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Линейное неоднородное уравнение:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in (0,T) \qquad (1)$$

$$A(t) = \big(\big(a_{ij}(t)\big)\big),\ i,j = \overline{1,n}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + f_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + f_n \end{cases}$$

Линейное однородное уравнение:

$$(1_0) \qquad \dot{x} = A(t)x$$

Задача Коши для (1):

$$(2) \qquad x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

## 1.2. Матмодели

### 1.2.1. Температура в доме

$x_{1,2}(t)$ — температура на 1, 2 этаже
$x_g$ — температура земли
$x_e$ — температура на улице

$$\dot{x}_1 = k_1(x_g - x_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_e - x_1) + p(t)$$

Коэффициент передачи через пол, через потолок, через стены + печка.

$$\dot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + k_4(x_e - x_2)$$

Числа $k_{1,2,3,4}$ известны.

$$A = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2 + k_3) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_4) \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} p + k_1 x_g + k_3 x_e \\ k_4 x_e \end{pmatrix}$$

### 1.2.2. Динамика цен и запасов

$s(t)$ — объём продаж за единицу времени.
$p(t)$ — текущая цена.
$I(t)$ — уровень запасов на каком-то складе.
$Q(t)$ — скорость поступления товара.
$p_*$ — равновесная цена.
$I_*$ — желаемый запас.

$$\begin{cases} \dot{s} = \beta(p - p_*),\ \beta < 0 \\ \dot{p} = \alpha(I - I_*),\ \alpha < 0 \\ \dot{I} = Q - s \end{cases} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ p(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} -\beta p_* \\ -\alpha I_* \\ Q \end{pmatrix}$$

## 1.3. Корректность задачи Коши

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in (0, T)$$

$$(2) \qquad x(0) = x^{(0)}$$

$$(*) \qquad \begin{cases} t > 0 \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ f \in C[0, T] \\ A \in C[0, T]\ \left(a_{ij} \in C[0, T]\right) \end{cases}$$

**Th.1**

Пусть выполнены условия $(*)$. Тогда $\exists!$ решение (1) - (2).

## 1.4. Априорные оценки решения задачи Коши

$$x, y \in \mathbb{R}^n \qquad |x| = \sqrt{\sum_1^n x_j^2}$$

$$(x, y) = \sum_1^n x_j y_j$$

$$(\dot{x}, x) = (Ax, x) + (f, x)$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ |x|^2 = (\dot{x}, x)$$

Неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x, y)| \le |x| \cdot |y|$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ |x|^2 \le |Ax| \cdot |x| + |f| \cdot |x|$$

$$|\underbrace{Ax}_{y}| = \sqrt{\sum y_i^2}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot |x|$$

$$M_1 = \max_{\substack{t \in [0,T] \\ i \in [1,n]}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

$$y_i^2 \le M_1 \; |x|^2$$

$$y = |Ax| = \sqrt{\sum y_i^2} \le \sqrt{M_1 n |x|^2}$$

$$M_2 = \max_{t \in [0,T]} f(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \; |x|^2 \le \sqrt{M_1 n} \; |x|^2 + M_2 \; |x|$$

$$\frac{d}{dt} \; |x| \le \sqrt{M_1 n} \; |x| + M_2$$

$$\frac{d}{dt} \; |x| - \sqrt{M_1 n} \; |x| \le M_2$$

$$\left( \frac{d}{dt} \; |x| - \sqrt{M_1 n} \; |x| \right) e^{-\sqrt{M_1 n} t} \le M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$\frac{d}{dt} \Big( e^{-\sqrt{M_1 n} t} \; |x(t)| \Big) \le M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

Интегрируем:

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \Big( e^{-\sqrt{M_1 n} t} \; |x(t)| \Big) \le \int_0^t M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$e^{-\sqrt{M_1 n} t} \Big( |x(t)| - |x^{(0)}| \Big) \le \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}} \Big( 1 - e^{-\sqrt{M_1 n} t} \Big)$$

$$\boxed{|\mathrm{x}(t)| \leq e^{\sqrt{M_1 n} t} \ |x^{(0)}| \ \mathrm{t} + \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}} \left(e^{\sqrt{M_1 n} t} - 1\right)}$$

## 1.5. Однородная система линейных ОДУ

$$(3) \qquad \dot{x} = A(t)x,\ t \in (0, T)$$

**Замечание**

Пусть

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax,\ t \in (0, T) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда, существует единственное решение $x(t) \equiv 0$

**Лемма 1**

Множество решений (3) есть линейное пространство

**Определение**

Пусть вектор-функции $x^{(1)}, ..., x^{(m)} \in C[0, T]$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, ...$$

Система векторов называется линейно независимой, если:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x^{(j)}(t) = 0,\ t \in [0, T] \Rightarrow c_1 = ... = c_m = 0$$

**Определение**

Система из $n$ линейно независимых решений однородной задачи (3) называется фундаментальной системой решений.

**Определение**

Пусть $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ — решение (3)

$W(t) = \det\left(x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)\right)$ — определитель Вронского.

**Определение**

$\Phi(t) = \left(\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(n)}\right)$ — фундаментальная матрица системы (3), где $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(n)}$ — ф.с.р.

**Лемма 2**

$$\det \Phi(t) \neq 0, \ \ t \in [0, T]$$