20 Сентября 2024

1. Линейные системы

1.1. Постановка задачи

$$t \in [0, T] \longmapsto x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Линейное неоднородное уравнение:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in (0, T) \qquad (1)$$

$$A(t) = \big(\big(a_{ij}(t)\big)\big),\ i, j = \overline{1, n}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + f_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + f_n \end{cases}$$

Линейное однородное уравнение:

$$(1_0) \qquad \dot{x} = A(t)x$$

Задача Коши для (1):

$$(2) \qquad x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

1.2. Матмодели

1.2.1. Температура в доме

$x_{1,2}(t)$ — температура на 1, 2 этаже
x_g — температура земли
x_e — температура на улице

$$\dot{x}_1 = k_1(x_g - x_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_e - x_1) + p(t)$$

Коэффициент передачи через пол, через потолок, через стены + печка.

$$\dot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + k_4(x_e - x_2)$$

Числа $k_{1,2,3,4}$ известны.

$$A = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2 + k_3) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_4) \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} p + k_1 x_g + k_3 x_e \\ k_4 x_e \end{pmatrix}$$

1.2.2. Динамика цен и запасов

$s(t)$ — объём продаж за единицу времени.
$p(t)$ — текущая цена.
$I(t)$ — уровень запасов на каком-то складе.
$Q(t)$ — скорость поступления товара.
p_* — равновесная цена.
I_* — желаемый запас.

$$\begin{cases} \dot{s} = \beta(p - p_*),\ \beta < 0 \\ \dot{p} = \alpha(I - I_*),\ \alpha < 0 \\ \dot{I} = Q - s \end{cases} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ p(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} -\beta p_* \\ -\alpha I_* \\ Q \end{pmatrix}$$

1.3. Корректность задачи Коши

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in (0, T)$$

$$(2) \qquad x(0) = x^{(0)}$$

$$(*) \qquad \begin{cases} t > 0 \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ f \in C[0, T] \\ A \in C[0, T]\ \big(a_{ij} \in C[0, T]\big) \end{cases}$$

Th.1

Пусть выполнены условия $(*)$. Тогда $\exists!$ решение (1) - (2).

1.4. Априорные оценки решения задачи Коши

$$x, y \in \mathbb{R}^n \qquad |x| = \sqrt{\sum_1^n x_j^2}$$

$$(x, y) = \sum_1^n x_j y_j$$

$$(\dot{x}, x) = (Ax, x) + (f, x)$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ |x|^2 = (\dot{x}, x)$$

Неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x, y)| \le |x| \cdot |y|$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ |x|^2 \le |Ax| \cdot |x| + |f| \cdot |x|$$

$$|\underbrace{Ax}_{y}| = \sqrt{\sum y_i^2}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot |x|$$

$$M_1 = \max_{\substack{t \in [0,T] \\ i \in [1,n]}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

$$y_i^2 \leq M_1 \ |x|^2$$

$$y = |Ax| = \sqrt{\sum y_i^2} \leq \sqrt{M_1 n |x|^2}$$

$$M_2 = \max_{t \in [0,T]} f(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ |x|^2 \leq \sqrt{M_1 n} \ |x|^2 + M_2 \ |x|$$

$$\frac{d}{dt} \ |x| \leq \sqrt{M_1 n} \ |x| + M_2$$

$$\frac{d}{dt} \ |x| - \sqrt{M_1 n} \ |x| \leq M_2$$

$$\left(\frac{d}{dt} \ |x| - \sqrt{M_1 n} \ |x| \right) e^{-\sqrt{M_1 n} t} \leq M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$\frac{d}{dt} \Big(e^{-\sqrt{M_1 n} t} \ |x(t)| \Big) \leq M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

Интегрируем:

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \Big(e^{-\sqrt{M_1 n} t} \ |x(t)| \Big) \leq \int_0^t M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$e^{-\sqrt{M_1 n} t} \Big(|x(t)| - |x^{(0)}| \Big) \leq \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}} \Big(1 - e^{-\sqrt{M_1 n} t} \Big)$$

$$\boxed{|\mathrm{x}(t)| \le e^{\sqrt{M_1 n}t}\ |x^{(0)}|\ \mathrm{t} + \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}}\left(e^{\sqrt{M_1 n}t} - 1\right)}$$

1.5. Однородная система линейных ОДУ

$$(3) \qquad \dot{x} = A(t)x,\ t \in (0, T)$$

Замечание

Пусть

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax,\ t \in (0, T) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда, существует единственное решение $x(t) \equiv 0$

Лемма 1

Множество решений (3) есть линейное пространство

Определение

Пусть вектор-функции $x^{(1)}, ..., x^{(m)} \in C[0, T]$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, ...$$

Система векторов называется линейно независимой, если:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x^{(j)}(t) = 0,\ t \in [0, T] \Rightarrow c_1 = ... = c_m = 0$$

Определение

Система из n линейно независимых решений однородной задачи (3) называется фундаментальной системой решений.

Определение

Пусть $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ — решение (3)

$W(t) = \det\left(x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)\right)$ — определитель Вронского.

Определение

$\Phi(t) = \left(\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(n)}\right)$ — фундаментальная матрица системы (3), где $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(n)}$ — ф.с.р.

Лемма 2

$$\det \Phi(t) \neq 0, \ \ t \in [0, T]$$

`27 Сентября 2024`

$$A(t) = \left(\left(a_{ij}(t)\right)\right)_{i,j=\overline{1,n}} \qquad n \in \mathbb{N}, \ \ n \geq 2$$

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x \qquad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [0, T]$$

Замечание

$$(2) \qquad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$$

Утверждение

Пусть $B(t)$ дифференциируемая матрица, $\det B(t) \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det B(t)) = \det(B(t)) \cdot \operatorname{tr}\left(B^{-1}\dot{B}\right)$$

Пусть Φ — фундаментальная матрица.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\Phi(t) = \det(\Phi(t))\,\mathrm{tr}\left(\Phi^{-1}\dot{\Phi}\right) = \det(\Phi(t))\,\mathrm{tr}\left(\Phi^{-1}A\Phi\right)$$

Так как $W(t) = \det\Phi(t)$, а след матрицы обладает свойством $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, получаем:

$$\boxed{\dot{W} = W\,\mathrm{tr}\,A}$$

Формула Остроградского-Лиувилля:

$$\boxed{W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}\,A(s)\,\mathrm{d}s\right)}$$

Теорема

Пусть $\Phi(t), t \in [0, T]$ — фундаментальная матрица (1).

Тогда, $x(t), t \in [0, T]$ — решение (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = \Phi(t)c \\ c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathrm{const} \end{cases}$

($\Leftarrow$):

$$\dot{x} = \dot{\Phi}c = A\Phi c = A \cdot \Phi c$$

Значит, Φc — решение. ■

($\Rightarrow$):

Пусть $x = x(t)$ — решение (1).

Рассмотрим СЛАУ $\Phi(0)c = x(0)$

$\det\Phi(t) \neq 0$

$\exists c \in \mathbb{R}^n$

$y(t) := \Phi(t)c$ — решение (1)

Покажем, что $y \equiv x$

$\dot{x} = Ax \qquad \dot{y} = Ay \qquad x(0) = y(0)$

В силу единственности решения задачи Коши:

$x(t) = y(t) = A(t)c$ ■

Замечание

Общее решение (1):

$$(3) \qquad x(t) = \Phi(t)c, \text{ где } c \in \mathbb{R}^n$$

Теорема

Существует фундаментальная система решений для системы (1).

Ищем решение матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \Phi(0) = I$$

Пусть φ — первый столбец

$\dot{\varphi} = A\varphi, \varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\exists!$ решение задачи Коши.

$\det \Phi(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \det \Phi(t) \neq 0, \ t \in [0, T]$

Замечание 2

Пусть X — пространство решений (1). Из формулы (3) следует, что $\dim X = n$

Пример

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1\end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax \qquad \varphi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \qquad \varphi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

$$\det\Phi(t) = \det\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

$$x_1 = c_1\sin t - c_2\cos t$$
$$x_2 = c_1\cos t + c_2\sin t$$

1.6. Система линейных неоднородных диффуров

$$(1) \qquad \dot{x} = A(t)x + f(t), \text{ где } f(t) = \begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix} \not\equiv 0$$

Теорема

Пусть $\Phi(t)$, где $t \in [0, T]$ — фундаментальная система однородной системы.

$x = \hat{x}(t)$, где $t \in [0, T]$ — частное решение (1)

$x = x(t)$ — решение (1) $\Leftrightarrow x(t) = \Phi(t)\mathrm{c} + \hat{x}(t) \quad (2)$

То есть, о.р.н.с. = о.р.о.с. + ч.р.н.с.

($\Leftarrow$):

Обозначим $y(t) := \Phi(t)\mathrm{c}$

$\dot{y} = Ay$

$\dot{x} = \dot{y} + \dot{\hat{x}} = Ay + A\hat{x} + f = A(y + \hat{x}) + f = Ax + f$ ■

(⇒):

x — решение (1)

$y \coloneqq x - \hat{x}$

$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + f - A\hat{x} - f = Ay \Rightarrow y = \Phi c$ ■

1.6.1. Метод вариации произвольных постоянных

$x(t) = \Phi(t)c(t)$

Подставим в (1)

$\dot{\Phi}c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f$

Так как, $\dot{\Phi} = A\Phi$, то:

$A\Phi c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f$

$\Phi\dot{c} = f$

$\boxed{\dot{c} = \Phi^{-1} f}$

$$c(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s) \, \mathrm{d}s + K, \text{ где } K - \text{ настоящая константа}$$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sin \dot{c}_1 - \cos \dot{c}_2 = 1 \\ \cos \dot{c}_1 + \sin \dot{c}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{c}_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & -\cos t \\ 0 & \sin t \end{pmatrix} = \sin t$$

$$\dot{c}_2 = \det\begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} = -\cos t$$

$$c_1 = -\cos t + K_1$$
$$c_2 = -\sin t + K_2$$

$$x = (-\cos t + K_1)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + (-\sin t + K_2)\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$x = K_1\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + K_2\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.6.2. Решение задачи Коши

$$(CP)\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$x(t) = \Phi(t)\left(\int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s)\,\mathrm{d}s + K\right)$$

$$x^{(0)} = \Phi(0)K,\ \ K = \Phi^{-1}(0)x^{(0)}$$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^{(0)} + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s) f(s)\,\mathrm{d}s}$$

Определение

Матрица Коши (импульсная матрица):

$$K(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$$

$$\boxed{x(t) = K(t,0)x^{(0)} + \int_0^t K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s}$$

4 Октября 2024

Теорема повышения гладкости

$$x = x(t),\ \text{где } t \in [0,T] - \text{решение}$$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\ \text{где } 0 < t < T$$

$$A \in C^k[0,T],\ \text{где } f \in C^k[0,T]$$

$$k = 0, 1, \dots$$

Тогда,

$$x \in C^{k+1}[0,T]$$

$$\ddot{x} = \dot{A}x + A\dot{x} + \dot{x}$$

$$\dot{A}x + A\dot{x} + \dot{x} \in C[0,T]$$

$$\Rightarrow x \in C^2[0,T] \text{ и т.д. } \blacksquare$$

2. Системы диффуров с постоянными коэффициентами

Однородная система:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax, t \in [0,T]$$

$$A = \left(\left(a_{kj}\right)\right)_{k,j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Замечание

Рассмотрим случай, когда Наташа равна единичке. Если $\dot{x} = ax$, тогда $x = Ce^{at}$

2.1. Матричная экспонента

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = \left(\left(a_{kj}\right)\right)$

$$\|A\| = \max_{1 \le k \le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{kj}\right|$$

$$A_m \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} A \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \|A_m - A\| \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$B = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \left\| B - \sum_{m=1}^{N} A_m \right\| \underset{N \to \infty}{\to} 0$$

Определение

$$\exp A = e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$$

Лемма

$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ матричный ряд e^A сходится

$$S_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} A^j$$

Пользуясь фактом $\left\|A^j\right\| \le \|A\|^j$

$$\left\|S_m - S_{m+k}\right\| = \left\|\sum_{j=m+1}^{m+k} \frac{1}{j!} A^j\right\| \le \sum_{j=m+1}^{m+k} \frac{1}{j!} \|A\|^j \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0 \ \blacksquare$$

Замечание

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A \Leftrightarrow AB = BA$$

Теорема

$$\Phi(t) = e^{tA} \text{ — фундаментальная матрица системы (1)}$$

$$\dot{\Phi}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(e^{(t+h)A} - e^{tA}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I\right)e^{tA} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(I + hA + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \ldots - I\right)e^{tA} = Ae^{tA}$$

$$\det \Phi(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \blacksquare$$

Следствие 1

Общее решение (1):

$$x(t) = e^{tA}c, \text{ где } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Следствие 2

Решение задачи Коши:

$$x = Ax, \ x(t_0) = x^{(0)}$$

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x^{(0)}$$

2.2. Структура e^{tA}

2.2.1. Жорданова форма матрицы

Определение

$$\text{Функция } \lambda \mapsto \det(P - \lambda I) =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

$$\text{это характеристический многочлен матрицы } P$$

$$a_1 = (-1)^n \operatorname{tr}(P)$$

$$a_n = \det(P)$$

Определение

$$P, Q \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ называются подобными } (P \sim Q)\text{, если}$$

$$\exists S, \det S \neq 0$$

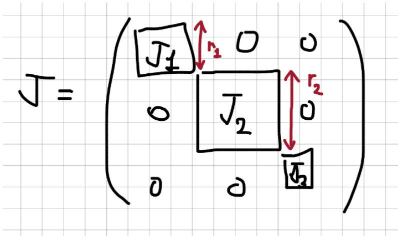
$$Q = S^{-1} P S \text{ или } SQ = PS$$

$$\det(Q - \lambda I) = \det\left(S^{-1}(P - \lambda I) S\right) = \det(P - \lambda I)$$

У подобных матриц одинаковы и следы и определители.

Пример

$$J = \operatorname{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_k\}$$



$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & & & \\ & \lambda_m & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_m & 1 \\ & & & & \lambda_m \end{pmatrix} \text{ — клетка Жордана}$$

Теорема

$$A \sim J = \operatorname{diag}\left\{J_0, J_1, \dots, J_q\right\}$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_{p+k} & 1 & & & \\ & \lambda_{p+k} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{p+k} & 1 \\ & & & & \lambda_{p+k} \end{pmatrix}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ — простые собственные числа A

λ_{p+k} — кратные собственные числа A кратности r_k

$$n = p + q$$

Даже если матрица имеет элементы $\in \mathbb{R}$, её собственные числа могут $\in \mathbb{C}$.

$$A = SJS^{-1}, \det S \neq 0$$

$$A^k = SJ\underbrace{S^{-1} \cdot S}_{I}JS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^kS^{-1}$$

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(tA^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j SJ^jS^{-1} = Se^{tJ}S^{-1}$$

$$\Psi(t) := e^{tJ} = S^{-1}e^{tA}S$$

$$\dot{\Psi} = S^{-1}Ae^{tA}S$$

2.2.2. Экспонента Жордановской матрицы

Утверждение 1

$$J = \operatorname{diag}\left\{J_0, J_1, \ldots, J_q\right\} \Rightarrow$$

$$e^{tJ} = \operatorname{diag}\left\{e^{tJ_0}, e^{tJ_1}, \ldots, e^{tJ_q}\right\}$$

Утверждение 2

$$e^{tJ_0} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_p} \end{pmatrix}$$

$$B = \lambda I + H, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Утверждение 3

$$\text{Пусть } B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} r \text{ столбцов}$$

$$e^{tB} = e^{t\lambda I} e^{tH} = e^{\lambda t} I e^{tH} = e^{\lambda t} e^{tH}$$

$$e^{tH} = I + tH + \frac{1}{2!} t^2 H^2 + \dots$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tB} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!} t & \dots & \frac{1}{(r-1)!} t^{r-1} \\ & 1 & t & \dots & \frac{1}{(r-2)!} t^{r-2} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

$$J = \operatorname{diag}\left\{J_0, J_1, ..., J_q\right\}$$

$$\text{Тогда } e^{tJ} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_p} \end{pmatrix} & & \\ & e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t & ... & \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1} \\ & 1 & t & ... & \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

18 Октября 2024

$$\Phi(t) = e^{tA} = S \operatorname{diag}\left\{e^{tJ_0}, e^{tJ_1}, ..., e^{tJ_q}\right\} S^{-1}$$

$$e^{tJ_k} = e^{t\lambda_k} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & ... & \frac{t^{r_k - 1}}{(r_k - 1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_k \text{ кратность собственных значений } \lambda_k$$

2.2.3. Метод Эйлера

Пусть λ собственное число A кратности r.

λ соответствует решение (1)

$$\boxed{x(t) = e^{\lambda t} Q(t), \quad Q - \text{многочлен, степени} \leq r - 1}$$

/1/

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 4x_1 - x_2 \\ \dot{x_2} = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \pm 2i$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{(3+2i)t}$$

$$(3+2i)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cancel{e^{\cdots}} = \begin{pmatrix} 4a - b \\ 5a + 2b \end{pmatrix} \cancel{e^{\cdots}} = A\varphi$$

$$a = 1, b = 1 - 2i$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{3t}(\cos(2t) + i\sin(2t))$$

$$x(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t + \sin t \end{pmatrix}$$

Пример 2

$$\dot{x} = Ax,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda - 2)^1(\lambda - 1)^2 = 0$$

1. $\lambda = 2$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b+c \\ -2a-c \\ 2a+b+2c \end{pmatrix}$$

$a = 1, c = 2, b = -2$

$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$

2. $\lambda = 1,\ r = 2$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \alpha_2 \\ \beta_1 t + \beta_2 \\ \gamma_1 t + \gamma_2 \end{pmatrix} e^{t}$$

Первая строчка:

$(\alpha_1 + (\alpha_1 t + \alpha_2))e^t = (2(\alpha_1 t + \alpha_2) + \beta_1 t + \beta_2 + \gamma_1 t + \gamma_2)e^t$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \\ \alpha_1 = 2\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \end{cases}$$

Вторая строчка:

$\beta_1 + \beta_1 t + \beta_2 = -2(\alpha_1 t + \alpha_2) - \gamma_1 t - \gamma_2$

Третья аналогично:

$\gamma_1 + \gamma_1 t + \gamma_2 = 2(\alpha_1 t + \alpha_2 + \beta_1 t + \beta_2 + 2(\gamma_1 t + \gamma_2))$

Решаем алгебру:

$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = -\gamma_1,\ \beta_1 = -\alpha_2,\ \beta_2 = \beta_1 - \gamma_2$

$$
\begin{cases}
\alpha_1 = 0 \\
\alpha_2 = c_2 \\
\beta_1 = -c_2 \\
\beta_2 = -c_2 - c_3 \\
\gamma_1 = c_1 \\
\gamma_2 = c_3
\end{cases}
$$

$$
\text{Ответ: } x = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_2 t - (c_2 + c_3) \\ c_2 t + c_3 \end{pmatrix} e^t =
$$

$$
= c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t - 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

2.3. Неоднородные системы

$$
(1_n) \quad \dot{x} = Ax + f(t)
$$

$$
A \in \mathbb{R}^{n \times n}
$$

$$
x(t) = \hat{x}(t) + \Phi(t)c
$$

$$
c \in \mathbb{R}^n, \ \hat{x} - \text{частное решение}, \ \Phi(t)c - \text{о.р.о.с.}
$$

Замечание

$$
\dot{x} = Ax + kf_1(t) + f_2(t), \ k = \text{const}
$$

$$
\dot{x}^{(1)} = Ax^{(1)} + f_1(t)
$$

$$
\dot{x}^{(2)} = Ax^{(2)} + f_2(t)
$$

$$
\Rightarrow x = kx^{(1)} + x^{(2)}
$$

Неоднородность в виде квазимногочлена:

$$f(t) = e^{\mu t} P(t),\ \ \deg P = m,\ \ P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\mu \in \mathbb{C}$$

Замечание

$$\text{Пусть } f(t) = \sin 3t \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\sim e^{3it} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

2.3.1. Нерезонансный случай

μ не является собственным значением A

$\dot{x} = Ax + e^{\mu t} P(t)$

$\hat{x}(t) = e^{\mu t} Q(t),\ \ \deg Q \leq m,\ \ Q(t) = \sum_{j=0}^{m} q_j t^j,\ \ q_j \in \mathbb{R}^n$

$\left(\mu Q + \dot{Q}\right) \cancel{e^{\mu t}} = A e^{\mu t} Q + \cancel{e^{\mu t}} P$

$\boxed{(\mu I - A) Q = P - \dot{Q}}$

$P(t) = \sum_{j=0}^{m} p_j t^j$

$t^m : (\mu I = A) q_m = p_m$

$q_m = (\mu I - A)^{-1} p_m$

$t^{m-1} : (\mu I - A) q_{m-1} = p_{m-1} - m q_m = p_{m-1} - m (\mu I - A)^{-1} p_m$

2.3.2. Резонансный случай

25 Октября 2024

$$\exists \lambda_k - \text{собственное значение } A,\ \ \mu = \lambda_k$$

$$\hat{x}(t) = e^{\mu t} Q(t)$$

$\deg Q \leq m + l,\ l -$ максимальный размер Жордановской клетки, соответствуеющей λ_k

$$l \leq \text{кратности собственного значения}$$

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + e^{2t} \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$$

$$f(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ m = 0$$

$$\hat{x}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Подставляем в задачу и получаем:

$$q = -1,\ p = \frac{2}{3}$$

$$\hat{x} = e^{2t}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + b = a \\ 3a + 4b = b \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ — собственный вектор, соответсветсвтуеющий $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \lambda = 5$$

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Задача тов. Коши:

$$x(0) = 0$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_1 = -\frac{3}{4},\ c_2 = \frac{1}{12}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{4} e^t + \frac{1}{12} e^{5t} + \frac{2}{3} e^{2t} \\ x_2 = \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{5t} - e^{2t} \end{cases}$$

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon \sin t \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}, \quad t > 0$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Можно решать при $\varepsilon = 1$, а потом домножать ответ.

$$\sin t = \mathrm{Im}\ e^{it}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$b = ia \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}(t) = e^{it} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix}$$

Теперь подставляем в задачу и находим четыре числа:

$$ie^{it} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} + e^{it} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} a_2 t + b_2 \\ -a_1 t - b_1 \end{pmatrix} + e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 t + b_2 \\ -a_1 t - b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t^1 : \; ia_1 = a_2, \; ia_2 = -a_1$$

$$t^0 : \; ib_1 + a_1 = b_2 + 1, \; ib_2 + a_2 = -b_1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \; a_2 = \frac{i}{2}, \; ib_1 = b_2 + \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \; a_2 = \frac{i}{2}, \; b_1 = 0, \; b_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\dot{x}(t) = e^{it}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{i}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{it}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{i}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_1 e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -\frac{1}{2} + c_1 i - c_2 i = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = -\frac{1}{4}i,\ c_2 = \frac{1}{4}i$$

$$x(t) = e^{it}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{i}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{4}i\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}e^{it} + \frac{1}{4}ie^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im}\, x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t\sin t - \frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos t \\ \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin t \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$x_1(t) = \frac{\varepsilon}{2}t\sin t$$

$$x_2(t) = \frac{\varepsilon}{2}(t\cos t - \sin t)$$

3. Устойчивость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

3.1. Определение устойчивости и простейшее применение

«Fur fier kein beer»

«Fur fier kein beer»

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ t > 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Определение

Пусть $x = \varphi(t),\ t \geq 0$ – решение (1). Решение $\varphi(x)$ называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \wedge \forall \text{ решения } x = \psi(t) \text{ системы } (1),$$

$$\exists \delta_\varepsilon > 0$$

$$\text{такого, что } |\varphi(0) - \psi(0)| < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon$$

$$\forall t > 0$$

Определение

Решение $x = \varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если к дополнению к этому,

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$$

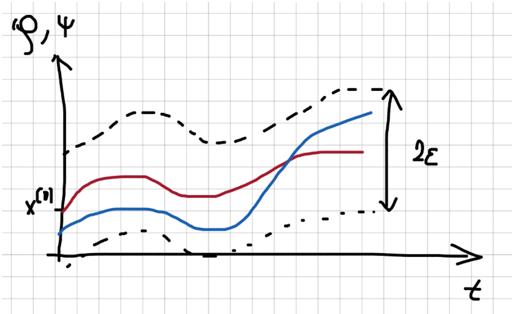
`1 Ноября 2024`

Мы рассматриваем систему вида:

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \text{ где } t > 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}$$

Предположим, что есть $x^{(0)} \in \mathbb{R}$. Существует единственное решение (1) при начальных условиях $\left|x(0) - x^{(0)}\right| \leq r$

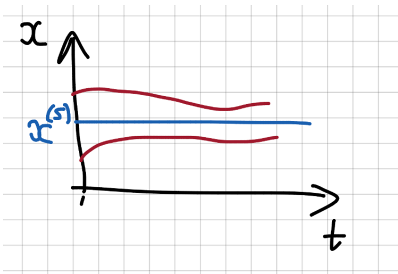


Замечание

Устойчивость стационарного решения:

$x^{(s)} = \mathrm{const}$

$f\left(t, x^{(s)}\right) = 0$



Замечание

$y = x - \varphi$

$(2) \quad \dot{y} = f(t, y + \varphi) - f(t, \varphi)$

Устойчивость решения φ системы (1) $\Leftrightarrow$ устойчивость решения $y = 0$ системы (2).

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Ищем решение:

$$x(t) = u(t)e^t$$

$$\dot{x} = \dot{u}e^t + \cancel{ue^t} = \cancel{ue^t} - u^2e^{2t}$$

$$\dot{u} = -u^2e^t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int e^t \,\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{u} = -e^t + C$$

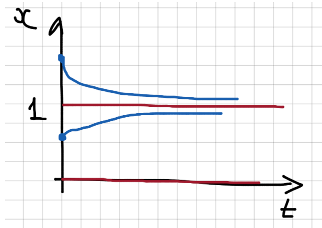
$$u = \frac{1}{e^t - C}$$

$$\frac{1}{1-C} = x_0$$

$$C = 1 - \frac{1}{x_0}$$

$$x(t) = \frac{e^t}{e^t - 1 + \frac{1}{x_0}} = \frac{x_0e^t}{1 + x_0(e^t - 1)} = \frac{x_0e^{-t}}{e^{-2t} + x_0(e^{-t} - e^{-2t})} =$$

$$= \frac{x_0}{e^{-t} + x_0(1 - e^{-t})} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$$



Решение $x_0 = 1$ асимтотически устойчивое.

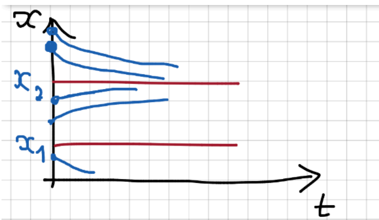
Решение $x_0 = 0$ неустойчивое, потому что если придать небольшую флуктуацию, то решение сольётся в экстазе с единичкой на бесконечности.

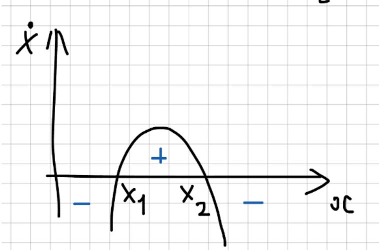
Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 - k, \;\; k = \text{const} > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Стационарное решение $x - x^2 - k = 0$. Дискриминант $1 - 4k$.

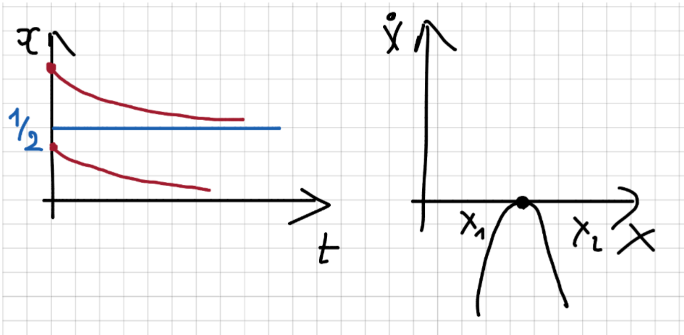
1. $0 < k < \frac{1}{4} \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$





x_2 устойчивое, x_1 неустойчивое.

2. $k = \frac{1}{4}$



Не устойчивое.

3. $k > \frac{1}{4}$

Тут производная будет отрицательна, поэтому решения не устойчивые.

3.2. Устойчивость решений однородных линейных систем с постоянными коэффициентами

Объектом изучения будет следующая система:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax$$

$$A \in R^{n \times n}$$

Стационарным решением (не зависящем от времени) будет:

$$x_s = 0 \text{ — устойчиво или нет? будем изучать}$$

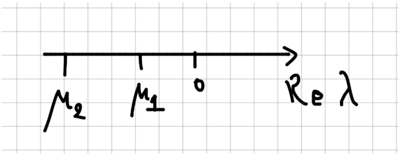
Пусть собственные значения A: $\lambda_i = \mu_j + i\nu_j,\ \mu_j = \text{Re}\ \lambda_j$

Лемма 1

Пусть $\forall j$ Re $\lambda_j < 0$.

Тогда $\exists M, \alpha > 0:$

$|\varphi(t)| \le Me^{-\alpha t}\ \forall t > 0,$ где φ —решение(1)



$$\alpha := \frac{1}{2}|\mu_1| > 0$$

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} P_j(t),\ \text{где } P_j - \text{многочлен}$$

$$e^{\lambda_j t} = e^{\mu_j t} \cdot e^{i\nu_j t}$$

$$|\varphi(t)| \le \sum_{j=1}^{m} e^{\mu_j t} \left|P_j(t)\right|$$

$$|\varphi(t)|e^{\alpha t} \le \sum_{j=1}^{m} e^{(\alpha+\mu_j)t} \left|P_j(t)\right| \le \sum_{j=1}^{m} e^{-\frac{1}{2}\mu_1 t} \left|P_j(t)\right| \le M$$

Лемма 2

Пусть $\varphi = \varphi(t),\ t > 0 -$ решение задачи Коши $(\dot{x} = Ax,\ x(0) = x^{(0)})$, $\mathrm{Re}\ \lambda_j > 0,\ j = 1, ..., m.$

Тогда $\exists M, \alpha > 0$:

$|\varphi(t)| \le M\left|x^{(0)}\right|e^{-\alpha t}$

$$\varphi(t) = \Phi(t)x^{(0)}$$

$$\Phi(t) = e^{tA} \quad \dot{\Phi} = A\Phi \quad \Phi(0) = I$$

$$|\varphi(t)| \le \|\Phi(t)\| \cdot \left|x^{(0)}\right|$$

$\|\Phi(t)\| \leq Me^{\alpha t}$ ■

Теорема об асимтотической устойчивости системы (1)

Решение $x(s) \equiv 0$ асимтотически устойчивое

$$\Leftrightarrow$$

$\mathrm{Re}\ \lambda_j < 0,\ j = 1, ..., m$

$(\Leftarrow):$

$$|\varphi(t)| \leq M\left|x^{(0)}\right|e^{-\alpha t}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M}$$

Если $\left|x^{(0)}\right| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow$

$|\varphi(t)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M}e^{-\alpha t} < \varepsilon \to 0$

$(\Rightarrow:)$

Предположим противное. Пусть $\mathrm{Re}\ \lambda_1 = \mu_1 \geq 0$.

Тогда $\exists h \in \mathbb{C}^n \quad h = h^{(1)} + ih^{(2)}$

$Ah = \lambda_1 h$

$$x(t) = \mathrm{Re}\ \left(he^{\lambda_1 t}\right) = \mathrm{Re}\ \left(\left(h^{(1)} + ih^{(2)}\right)e^{(\mu_1 + \nu_1)t}\right) =$$
$$= e^{\mu_1 t}\left(h^{(1)} \cos \nu_1 t - h^{(2)} \sin \nu_1 t\right) \not\to 0,\ t \to +\infty$$

$$\forall c = \mathrm{const} \quad \varphi(t) = c\hat{x}(t) - \text{решение}$$

$$|\varphi(0)| \leq c|\hat{x}(0)| - \text{сколь угодно малое при маленьких с}$$

$$\varphi(t) \not\to 0,\ t \to \infty$$

Получили противоречие.

Замечание

Решение $x_s \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову

$\Rightarrow$

$\operatorname{Re} \lambda_j \le 0,\ j = 1, ..., m$

8 Октября 2024

3.3. Функция Ляпунова

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x),\ t > 0$$

$$f(t, 0) = 0$$

$$x_s(t) = 0,\ t > 0 \text{ — стационарное решение}$$

$$f : [0, +\infty] \times \{|x| \le r\}$$

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \text{ — обычная Евклидова норма}$$

Определение

$$V(x),\ x \in B = \{|x| \le r\} \subset \mathbb{R}^n$$

— функция Ляпунова, если:
1. $V \in C^1(B),\ V(x) \ge 0,\ V(0) = 0,\ V(x) > 0,\ x \ne 0$
2. $f(t, x) \cdot \nabla V(x) \le 0,\ x \in B,\ t \ge 0$

Лемма Ляпунова

Пусть $\exists$ функция Ляпунова для системы (1).
Тогда решение $x_s \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову
Если дополнительно $\exists W(x),\ x \in B,\ W \in C(B),\ W(0) = 0$
$W(x) > 0,\ x \ne 0$ и при этом $f(x, t) \nabla V(x) \le -W(x),\ x \in B$
Тогда x_s ещё и асимптотически устойчиво.

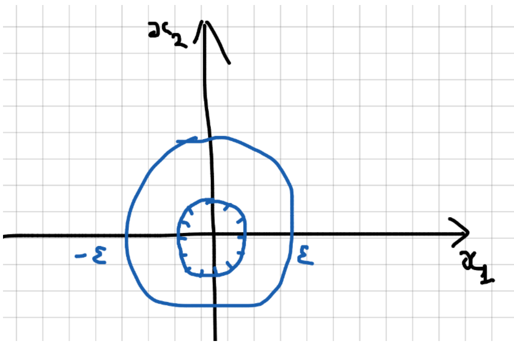
В данном случае устойчивость по Ляпунову для стационарного решения:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$
$$\forall \text{ реш } (1), |x(0)| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon, \ t > 0$$

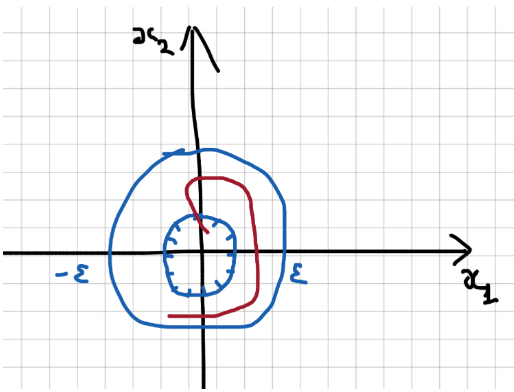
Асимптотическая устойчивость — добавляем:

$$\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0$$

Доказателство леммы Ляпунова. Для этого рассмотрим сферу радиуса ε. Пусть $\varepsilon \in (0, r)$, $\delta_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \varepsilon\}$, $V_\varepsilon = \min_{x \in \delta_\varepsilon V(x)}$



Выбор δ_ε: $V(x) < V_\varepsilon$, если $|x| < \delta_\varepsilon$



Пусть $x := \varphi(t)$, $t > 0$ – решение (1), $|x(0)| < \delta_\varepsilon$.

1. Решение $\varphi(t)$ действительно определено при $t > 0$

Предположим противное, тогда $\exists t_1 > 0,\ |\varphi(t)| \to +\infty,\ t \to t_1$. Отсюда вытекает, что $\exists t_0 > 0,\ |\varphi(t_0)| = \varepsilon$. В желудок Ляпунова затолкали решение:

$$\mu(t) = V(\varphi(t)),$$

$$\mu'(t) = \sum_1^n \frac{\partial V}{\partial x_j}\dot{\varphi}_j = f \cdot \nabla V \le 0 \Rightarrow \mu(t) \text{ не возрастает!}$$

$$V_\varepsilon > V(\varphi(0)) = \mu(0) \ge \mu(t_0) = V(\varphi(t_0)) \ge V_\varepsilon$$

Вот и получили противоречие.

2. $\nexists t_0 : |\varphi(t_0)| = \varepsilon \Rightarrow |\varphi(t)| < \varepsilon,\ t > 0$

Доказали устойчивость, теперь покажем, что предел решения на бесконечности равен нулю (асимптотическая устойчивость):

$$|\varphi(t)| \to 0,\ t \to 0$$

.

Утверждение

$$\lim_{t\to+\infty} V(\varphi(t)) = 0$$

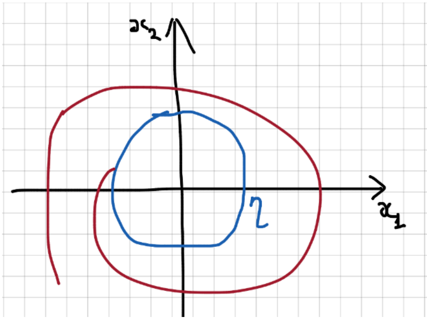
Воспользуемся этим утверждением. Предположим противное:

$$|\varphi(t)| \nrightarrow 0,\ t \to +\infty \Rightarrow \exists t_k \to +\infty\ |\varphi(t_k)| \ge \eta > 0$$

$$\beta = \min_{\eta<|x|<\beta} V(x)$$

$$V(\varphi(t_k)) \ge \beta > 0\ \forall k$$

$$t_k \to +\infty$$



Получили противоречие утверждению.

$$f\nabla V \leq -W$$

Теперь докажем само утверждение.

$$\lim_{t\to\infty} V(\varphi(t)) = 0$$

Предположим противное $\mu(t) = V(\varphi(t))$ не возрастающая. Тогда $\lim_{t\to+\infty} \mu(t) = \alpha > 0$.

$$\mu(t) \geq \alpha, \;\; t > 0$$

$$V(\varphi(t)) \geq \alpha > 0$$

$$0 < \sigma < |\varphi(t)| < \varepsilon$$

$$A := \min_{\sigma<|x|<\varepsilon} W(x)$$

Продифференцируем μ:

$$\mu'(t) = f\nabla V \leq -W \leq -A$$

$$\mu'(t) \leq -A$$

Если это неравенство проинтегрировать.

$$\mu(t) - \mu(t_*) \leq -A(t - t_*)$$

Если в этом неравенстве $t \to +\infty$, тогда $\mu(t) \to -\infty$. Но оно не может стремиться к $-\infty$, потому что она отрицательной быть не может. Мораль — получили противоречие.

Сейчас пойдут примеры.

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 \end{cases}$$

$$x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — стационарное решение, положение равновесия}$$

Подобрать функцию — это искусство.

$$V(x) = x_1^2 + x_2^4$$

Проверим, будет ли она функцией Ляпунова или нет.

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0, \ x \neq 0$$

$$f \nabla V = x_1 x_2^4 \cdot 2x_1 + (-x_1^2 x_2 \cdot 4x_2^3) = -2x_1^2 x_2^4 \leq 0$$

$$\Rightarrow x_s = 0 \text{ устойчиво}$$

Пример 2

$$\dot{x} = -g(x), \ x = x(t) \in \mathbb{R}, \ t > 0$$

$$g(0) = 0, \ xg(x) > 0, \ \forall x \neq 0, \ |x| \leq r, \ g \text{ — липш.}$$

$$V(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$$

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0, \;\; x \neq 0 \text{ очев, подумайте}$$

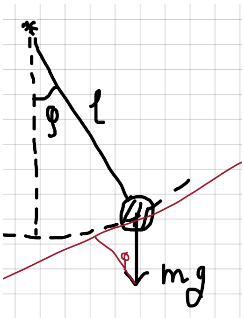
$$f \nabla V = -g(x) = -g^2(x) \leq 0$$

$$W(x) := g^2(x)$$

Тогда решение ещё и асимптотически устойчиво:

$$f \nabla V \leq -W$$

Пример (маятник)



$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi - b\dot{\varphi}$$

$$a = \frac{g}{l} = \omega^2$$

$$x_1 = \varphi, \;\; x_2 = \dot{\varphi}$$

$$a, b > 0, \;\; |x_1| < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a\sin x_1 - bx_2 \end{cases} \quad x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — стационарное решение}$$

1. $V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$

$V(0) = 0,\ V(x) > 0,\ x \neq 0$

$f\nabla V = x_2 a \sin x_1 + (-a \sin x_1 - bx_2)x_2 = -bx_2^2 \leq 0$

Должна быть асимтотическая устойчиовть (физическая чуйка). Определяется хитрая функция Ляпунова:

2. $V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}xPx$

   $P = \begin{pmatrix} \frac{b^2}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{pmatrix}$ — положительно определённая

   $f\nabla V = -\frac{1}{2}abx_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}bx_2^2 \leq 0$

   $-W(x) := -\frac{1}{2}abx_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}bx_2^2$

   $f\nabla V \leq -W$

   x_s — асимптотически устойчивое решение.