20 Сентября 2024

1. Линейные системы

1.1. Постановка задачи

$$t \in [0, T] \longmapsto x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Линейное неоднородное уравнение:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in (0, T) \qquad (1)$$

$$A(t) = \big(\big(a_{ij}(t)\big)\big),\ i, j = \overline{1, n}$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + f_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + f_n \end{cases}$$

Линейное однородное уравнение:

$$(1_0) \qquad \dot{x} = A(t)x$$

Задача Коши для (1):

$$(2) \qquad x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

1.2. Матмодели

1.2.1. Температура в доме

$x_{1,2}(t)$ — температура на 1, 2 этаже
x_g — температура земли
x_e — температура на улице

$$\dot{x}_1 = k_1\left(x_g - x_1\right) + k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_e - x_1) + p(t)$$

Коэффициент передачи через пол, через потолок, через стены + печка.

$$\dot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2) + k_4(x_e - x_2)$$

Числа $k_{1,2,3,4}$ известны.

$$A = \begin{pmatrix} -(k_1 + k_2 + k_3) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_4) \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} p + k_1 x_g + k_3 x_e \\ k_4 x_e \end{pmatrix}$$

1.2.2. Динамика цен и запасов

$s(t)$ — объём продаж за единицу времени.
$p(t)$ — текущая цена.
$I(t)$ — уровень запасов на каком-то складе.
$Q(t)$ — скорость поступления товара.
p_* — равновесная цена.
I_* — желаемый запас.

$$\begin{cases} \dot{s} = \beta(p - p_*),\ \beta < 0 \\ \dot{p} = \alpha(I - I_*),\ \alpha < 0 \\ \dot{I} = Q - s \end{cases} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} s(t) \\ p(t) \\ I(t) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} -\beta p_* \\ -\alpha I_* \\ Q \end{pmatrix}$$

1.3. Корректность задачи Коши

$$(1) \qquad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in (0, T)$$

$$(2) \qquad x(0) = x^{(0)}$$

$$(*) \qquad \begin{cases} t > 0 \\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ f \in C[0, T] \\ A \in C[0, T]\ \big(a_{ij} \in C[0, T]\big) \end{cases}$$

Th.1

Пусть выполнены условия $(*)$. Тогда $\exists!$ решение (1) - (2).

1.4. Априорные оценки решения задачи Коши

$$x, y \in \mathbb{R}^n \qquad |x| = \sqrt{\sum_1^n x_j^2}$$

$$(x, y) = \sum_1^n x_j y_j$$

$$(\dot{x}, x) = (Ax, x) + (f, x)$$

С другой стороны:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|x|^2 = (\dot{x}, x)$$

Неравенство Коши-Буняковского:

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|x|^2 \leq |Ax| \cdot |x| + |f| \cdot |x|$$

$$|\underbrace{Ax}_{y}| = \sqrt{\sum y_i^2}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \cdot |x|$$

$$M_1 = \max_{\substack{t \in [0,T] \\ i \in [1,n]}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

$$y_i^2 \leq M_1 \ |x|^2$$

$$y = |Ax| = \sqrt{\sum y_i^2} \leq \sqrt{M_1 n |x|^2}$$

$$M_2 = \max_{t \in [0,T]} f(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ |x|^2 \leq \sqrt{M_1 n} \ |x|^2 + M_2 \ |x|$$

$$\frac{d}{dt} \ |x| \leq \sqrt{M_1 n} \ |x| + M_2$$

$$\frac{d}{dt} \ |x| - \sqrt{M_1 n} \ |x| \leq M_2$$

$$\left(\frac{d}{dt} \ |x| - \sqrt{M_1 n} \ |x| \right) e^{-\sqrt{M_1 n} t} \leq M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$\frac{d}{dt} \Big(e^{-\sqrt{M_1 n} t} \ |x(t)| \Big) \leq M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

Интегрируем:

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \Big(e^{-\sqrt{M_1 n} t} \ |x(t)| \Big) \leq \int_0^t M_2 e^{-\sqrt{M_1 n} t}$$

$$e^{-\sqrt{M_1 n} t} \Big(|x(t)| - |x^{(0)}| \Big) \leq \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}} \Big(1 - e^{-\sqrt{M_1 n} t} \Big)$$

$$\boxed{|\mathrm{x}(t)| \le e^{\sqrt{M_1 n} t}\ |x^{(0)}|\ \mathrm{t} + \frac{M_2}{\sqrt{M_1 n}}\ \left(e^{\sqrt{M_1 n} t} - 1\right)}$$

1.5. Однородная система линейных ОДУ

$$(3) \qquad \dot{x} = A(t)x,\ t \in (0, T)$$

Замечание

Пусть

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax,\ t \in (0, T) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Тогда, существует единственное решение $x(t) \equiv 0$

Лемма 1

Множество решений (3) есть линейное пространство

Определение

Пусть вектор-функции $x^{(1)}, ..., x^{(m)} \in C[0, T]$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, ...$$

Система векторов называется линейно независимой, если:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x^{(j)}(t) = 0,\ t \in [0, T] \Rightarrow c_1 = ... = c_m = 0$$

Определение

Система из n линейно независимых решений однородной задачи (3) называется фундаментальной системой решений.

Определение

Пусть $x^{(1)}, ..., x^{(n)}$ — решение (3)

$W(t) = \det\left(x^{(1)}(t), ..., x^{(n)}(t)\right)$ — определитель Вронского.

Определение

$\Phi(t) = \left(\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(n)}\right)$ — фундаментальная матрица системы (3), где $\varphi^{(1)}, ..., \varphi^{(n)}$ — ф.с.р.

Лемма 2

$$\det \Phi(t) \neq 0, \;\; t \in [0, T]$$

27 Сентября 2024

$$A(t) = \left(\left(a_{ij}(t)\right)\right)_{i,j=\overline{1,n}} \qquad n \in \mathbb{N}, \;\; n \geq 2$$

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x \qquad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [0, T]$$

Замечание

$$(2) \qquad \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$$

Утверждение

Пусть $B(t)$ дифференциируемая матрица, $\det B(t) \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det B(t)) = \det(B(t)) \cdot \operatorname{tr}\left(B^{-1}\dot{B}\right)$$

Пусть Φ — фундаментальная матрица.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\Phi(t) = \det(\Phi(t))\,\mathrm{tr}\Big(\Phi^{-1}\dot{\Phi}\Big) = \det(\Phi(t))\,\mathrm{tr}\big(\Phi^{-1}A\Phi\big)$$

Так как $W(t) = \det\Phi(t)$, а след матрицы обладает свойством $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, получаем:

$$\boxed{\dot{W} = W\,\mathrm{tr}\,A}$$

Формула Остроградского-Лиувилля:

$$\boxed{W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\mathrm{tr}\,A(s)\,\mathrm{d}s\right)}$$

Теорема

Пусть $\Phi(t), t \in [0, T]$ — фундаментальная матрица (1).

Тогда, $x(t), t \in [0, T]$ — решение (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x(t)=\Phi(t)c \\ c=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathrm{const} \end{cases}$

($\Leftarrow$):

$$\dot{x} = \dot{\Phi}c = A\Phi c = A\cdot\Phi c$$

Значит, Φc — решение. ■

($\Rightarrow$):

Пусть $x = x(t)$ — решение (1).

Рассмотрим СЛАУ $\Phi(0)c = x(0)$

$\det\Phi(t) \neq 0$

$\exists c \in \mathbb{R}^n$

$y(t) := \Phi(t)c$ — решение (1)

Покажем, что $y \equiv x$

$\dot{x} = Ax \qquad \dot{y} = Ay \qquad x(0) = y(0)$

В силу единственности решения задачи Коши:

$x(t) = y(t) = A(t)c$ ■

Замечание

Общее решение (1):

$$(3) \qquad x(t) = \Phi(t)c,\ \text{где } c \in \mathbb{R}^n$$

Теорема

Существует фундаментальная система решений для системы (1).

Ищем решение матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \Phi(0) = I$$

Пусть φ — первый столбец

$\dot{\varphi} = A\varphi, \varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\exists!$ решение задачи Коши.

$\det \Phi(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \det \Phi(t) \neq 0,\ t \in [0, T]$

Замечание 2

Пусть X — пространство решений (1). Из формулы (3) следует, что $\dim X = n$

Пример

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1\end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax \qquad \varphi^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \varphi^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi(t) = \det \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$
$$x_2 = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

1.6. Система линейных неоднородных диффуров

$$(1) \qquad \dot{x} = A(t)x + f(t), \text{ где } f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \not\equiv 0$$

Теорема

Пусть $\Phi(t)$, где $t \in [0, T]$ – фундаментальная система однородной системы.

$x = \hat{x}(t)$, где $t \in [0, T]$ – частное решение (1)

$x = x(t)$ – решение (1) $\Leftrightarrow x(t) = \Phi(t)\text{c} + \hat{x}(t) \quad (2)$

То есть, о.р.н.с. = о.р.о.с. + ч.р.н.с.

($\Leftarrow$):

Обозначим $y(t) := \Phi(t)\text{c}$

$\dot{y} = Ay$

$\dot{x} = \dot{y} + \dot{\hat{x}} = Ay + A\hat{x} + f = A(y + \hat{x}) + f = Ax + f$ ■

($\Rightarrow$):

x – решение (1)

$y := x - \hat{x}$

$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + f - A\hat{x} - f = Ay \Rightarrow y = \Phi c$ ■

1.6.1. Метод вариации произвольных постоянных

$x(t) = \Phi(t)c(t)$

Подставим в (1)

$\dot{\Phi}c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f$

Так как, $\dot{\Phi} = A\Phi$, то:

$A\Phi c + \Phi\dot{c} = A\Phi c + f$

$\Phi\dot{c} = f$

$$\boxed{\dot{c} = \Phi^{-1} f}$$

$$c(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s) f(s)\, \mathrm{d}s + K, \text{ где } K - \text{ настоящая константа}$$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sin \dot{c}_1 - \cos \dot{c}_2 = 1 \\ \cos \dot{c}_1 + \sin \dot{c}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\dot{c}_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & -\cos t \\ 0 & \sin t \end{pmatrix} = \sin t$$

$$\dot{c}_2 = \det\begin{pmatrix} \sin t & 1 \\ \cos t & 0 \end{pmatrix} = -\cos t$$

$$c_1 = -\cos t + K_1$$
$$c_2 = -\sin t + K_2$$

$$x = (-\cos t + K_1)\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + (-\sin t + K_2)\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$x = K_1\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + K_2\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.6.2. Решение задачи Коши

$$(CP)\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + f(t) \\ x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$$x(t) = \Phi(t)\left(\int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s + K\right)$$

$$x^{(0)} = \Phi(0)K,\ \ K = \Phi^{-1}(0)x^{(0)}$$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x^{(0)} + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s}$$

Определение

Матрица Коши (импульсная матрица):

$$K(t,s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$$

$$\boxed{x(t) = K(t,0)x^{(0)} + \int_0^t K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s}$$

4 Октября 2024

Теорема повышения гладкости

$$x = x(t),\ \text{где}\ t \in [0,T] - \text{решение}$$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\ \text{где}\ 0 < t < T$$

$$A \in C^k[0,T],\ \text{где}\ f \in C^k[0,T]$$

$$k = 0, 1, \ldots$$

Тогда,

$$x \in C^{k+1}[0,T]$$

$$\ddot{x} = \dot{A}x + A\dot{x} + \dot{x}$$

$$\dot{A}x + A\dot{x} + \dot{x} \in C[0,T]$$

$$\Rightarrow x \in C^2[0,T]\ \text{и т.д.}\ \blacksquare$$

2. Системы диффуров с постоянными коэффициентами

Однородная система:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax, t \in [0,T]$$

$$A = \left(\left(a_{kj}\right)\right)_{k,j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Замечание

Рассмотрим случай, когда Наташа равна единичке. Если $\dot{x} = ax$, тогда $x = Ce^{at}$

2.1. Матричная экспонента

$$\text{Пусть } A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A = \left(\left(a_{kj}\right)\right)$$

$$\|A\| = \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{kj}\right|$$

$$A_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} A \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \|A_m - A\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$B = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \left\| B - \sum_{m=1}^{N} A_m \right\| \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

Определение

$$\exp A = e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$$

Лемма

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ матричный ряд } e^A \text{ сходится}$$

$$S_m = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} A^j$$

$$\text{Пользуясь фактом } \left\|A^j\right\| \le \|A\|^j$$

$$\left\|S_m - S_{m+k}\right\| = \left\|\sum_{j=m+1}^{m+k} \tfrac{1}{j!} A^j\right\| \le \sum_{j=m+1}^{m+k} \tfrac{1}{j!} \|A\|^j \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \blacksquare$$

Замечание

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A \Leftrightarrow AB = BA$$

Теорема

$\Phi(t) = e^{tA}$ — фундаментальная матрица системы (1)

$$\dot{\Phi}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(e^{(t+h)A} - e^{tA}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(e^{hA} - I\right)e^{tA} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(I + hA + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \ldots - I\right)e^{tA} = Ae^{tA}$$

$$\det \Phi(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow \blacksquare$$

Следствие 1

Общее решение (1):

$$x(t) = e^{tA}c, \text{ где } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Следствие 2

Решение задачи Коши:

$$x = Ax, \; x(t_0) = x^{(0)}$$

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x^{(0)}$$

2.2. Структура e^{tA}

2.2.1. Жорданова форма матрицы

Определение

Функция $\lambda \mapsto \det(P - \lambda I) =$

$= (-1)^n \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$

это характеристический многочлен матрицы P

$$a_1 = (-1)^n \operatorname{tr}(P)$$

$$a_n = \det(P)$$

Определение

$P, Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ называются подобными $(P \sim Q)$, если

$\exists S, \det S \neq 0$

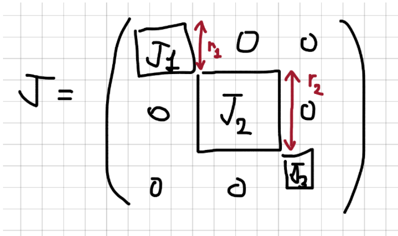
$Q = S^{-1} P S$ или $SQ = PS$

$$\det(Q - \lambda I) = \det\big(S^{-1}(P - \lambda I)S\big) = \det(P - \lambda I)$$

У подобных матриц одинаковы и следы и определители.

Пример

$$J = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, \ldots, J_k\}$$



$$J_m = \begin{pmatrix} \lambda_m & 1 & & & \\ & \lambda_m & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_m & 1 \\ & & & & \lambda_m \end{pmatrix} \text{ — клетка Жордана}$$

Теорема

$$A \sim J = \mathrm{diag}\left\{J_0, J_1, \ldots, J_q\right\}$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix} \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_{p+k} & 1 & & & \\ & \lambda_{p+k} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{p+k} & 1 \\ & & & & \lambda_{p+k} \end{pmatrix}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — простые собственные числа A

λ_{p+k} — кратные собственные числа A кратности r_k

$$n = p + q$$

Даже если матрица имеет элементы $\in \mathbb{R}$, её собственные числа могут $\in \mathbb{C}$.

$$A = SJS^{-1}, \det S \neq 0$$

$$A^k = SJ\underbrace{S^{-1} \cdot S}_{I}JS^{-1} \cdot \ldots \cdot SJS^{-1} = SJ^kS^{-1}$$

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(tA^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j SJ^jS^{-1} = Se^{tJ}S^{-1}$$

$$\Psi(t) := e^{tJ} = S^{-1}e^{tA}S$$

$$\dot{\Psi} = S^{-1}Ae^{tA}S$$

2.2.2. Экспонента Жордановской матрицы

Утверждение 1

$$J = \operatorname{diag}\left\{J_0, J_1, ..., J_q\right\} \Rightarrow$$

$$e^{tJ} = \operatorname{diag}\left\{e^{tJ_0}, e^{tJ_1}, ..., e^{tJ_q}\right\}$$

Утверждение 2

$$e^{tJ_0} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_p} \end{pmatrix}$$

$$B = \lambda I + H, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Утверждение 3

$$\text{Пусть } B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} r \text{ столбцов}$$

$$e^{tB} = e^{t\lambda I} e^{tH} = e^{\lambda t} I e^{tH} = e^{\lambda t} e^{tH}$$

$$e^{tH} = I + tH + \frac{1}{2!} t^2 H^2 + \ldots$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tB} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t & \ldots & \frac{1}{(r-1)!} t^{r-1} \\ & 1 & t & \ldots & \frac{1}{(r-2)!} t^{r-2} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема

$$J = \operatorname{diag}\left\{J_0, J_1, ..., J_q\right\}$$

$$\text{Тогда } e^{tJ} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_p} \end{pmatrix} & & \\ & e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t & ... & \frac{1}{(r-1)!}t^{r-1} \\ & 1 & t & ... & \frac{1}{(r-2)!}t^{r-2} \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

18 Октября 2024

$$\Phi(t) = e^{tA} = S \operatorname{diag}\left\{e^{tJ_0}, e^{tJ_1}, ..., e^{tJ_q}\right\} S^{-1}$$

$$e^{tJ_k} = e^{t\lambda_k} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & ... & \frac{t^{r_k-1}}{(r_k-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_k \text{ кратность собственных значений } \lambda_k$$

2.2.3. Метод Эйлера

Пусть λ собственное число A кратности r.

λ соответствует решение (1)

$$\boxed{x(t) = e^{\lambda t} Q(t), \quad Q - \text{многочлен, степени} \leq r - 1}$$

/1/

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 4x_1 - x_2 \\ \dot{x_2} = 5x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \pm 2i$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} e^{(3+2i)t}$$

$$(3+2i)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cancel{e^{\cdots}} = \begin{pmatrix} 4a - b \\ 5a + 2b \end{pmatrix}\cancel{e^{\cdots}} = A\varphi$$

$$a = 1, b = 1 - 2i$$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{3t}(\cos(2t) + i\sin(2t))$$

$$x(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + 2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t + \sin t \end{pmatrix}$$

Пример 2

$$\dot{x} = Ax,\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda - 2)^1(\lambda - 1)^2 = 0$$

1. $\lambda = 2$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b+c \\ -2a-c \\ 2a+b+2c \end{pmatrix}$$

$a = 1, c = 2, b = -2$

$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$

2. $\lambda = 1,\ r = 2$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \alpha_2 \\ \beta_1 t + \beta_2 \\ \gamma_1 t + \gamma_2 \end{pmatrix} e^{t}$$

Первая строчка:

$(\alpha_1 + (\alpha_1 t + \alpha_2))e^t = (2(\alpha_1 t + \alpha_2) + \beta_1 t + \beta_2 + \gamma_1 t + \gamma_2)e^t$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \\ \alpha_1 = 2\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \end{cases}$$

Вторая строчка:

$\beta_1 + \beta_1 t + \beta_2 = -2(\alpha_1 t + \alpha_2) - \gamma_1 t - \gamma_2$

Третья аналогично:

$\gamma_1 + \gamma_1 t + \gamma_2 = 2(\alpha_1 t + \alpha_2 + \beta_1 t + \beta_2 + 2(\gamma_1 t + \gamma_2))$

Решаем алгебру:

$\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = -\gamma_1,\ \beta_1 = -\alpha_2,\ \beta_2 = \beta_1 - \gamma_2$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = c_2 \\ \beta_1 = -c_2 \\ \beta_2 = -c_2 - c_3 \\ \gamma_1 = c_1 \\ \gamma_2 = c_3 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ -c_2 t - (c_2 + c_3) \\ c_2 t + c_3 \end{pmatrix} e^t =$$

$$= c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t - 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3. Неоднородные системы

$$(1_n) \quad \dot{x} = Ax + f(t)$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$x(t) = \hat{x}(t) + \Phi(t)c$$

$$c \in \mathbb{R}^n,\ \hat{x} - \text{частное решение},\ \Phi(t)c - \text{о.р.о.с.}$$

Замечание

$$\dot{x} = Ax + kf_1(t) + f_2(t),\ k = \text{const}$$

$$\dot{x}^{(1)} = Ax^{(1)} + f_1(t)$$

$$\dot{x}^{(2)} = Ax^{(2)} + f_2(t)$$

$$\Rightarrow x = kx^{(1)} + x^{(2)}$$

Неоднородность в виде квазимногочлена:

$$f(t) = e^{\mu t} P(t), \;\; \deg P = m, \;\; P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ \vdots \\ P_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\mu \in \mathbb{C}$$

Замечание

$$\text{Пусть } f(t) = \sin 3t \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\sim e^{3it} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

2.3.1. Нерезонансный случай

μ не является собственным значением A

$\dot{x} = Ax + e^{\mu t} P(t)$

$\hat{x}(t) = e^{\mu t} Q(t), \;\; \deg Q \leq m, \;\; Q(t) = \sum_{j=0}^{m} q_j t^j, \;\; q_j \in \mathbb{R}^n$

$\left(\mu Q + \dot{Q}\right)\cancel{e^{\mu t}} = A e^{\mu t} Q + \cancel{e^{\mu t}} P$

$\boxed{(\mu I - A) Q = P - \dot{Q}}$

$P(t) = \sum_{j=0}^{m} p_j t^j$

$t^m : (\mu I = A) q_m = p_m$

$q_m = (\mu I - A)^{-1} p_m$

$t^{m-1} : (\mu I - A) q_{m-1} = p_{m-1} - m q_m = p_{m-1} - m (\mu I - A)^{-1} p_m$

2.3.2. Резонансный случай

`25 Октября 2024`

$$\exists \lambda_k \text{ — собственное значение } A, \;\; \mu = \lambda_k$$

$$\hat{x}(t) = e^{\mu t} Q(t)$$

$\deg Q \leq m + l,\ l -$ максимальный размер Жордановской клетки, соответствуеющей λ_k

$$l \leq \text{кратности собственного значения}$$

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + e^{2t} \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$$

$$f(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ m = 0$$

$$\hat{x}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

Подставляем в задачу и получаем:

$$q = -1,\ p = \frac{2}{3}$$

$$\hat{x} = e^{2t}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a + b = a \\ 3a + 4b = b \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ — собственный вектор, соответсветсвтуеющий $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \sim \quad \lambda = 5$$

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Задача тов. Коши:

$$x(0) = 0$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$c_1 = -\frac{3}{4},\ c_2 = \frac{1}{12}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{4} e^t + \frac{1}{12} e^{5t} + \frac{2}{3} e^{2t} \\ x_2 = \frac{3}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{5t} - e^{2t} \end{cases}$$

Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon \sin t \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}, \quad t > 0$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

Можно решать при $\varepsilon = 1$, а потом домножать ответ.

$$\sin t = \mathrm{Im}\ e^{it}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x + e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$$

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$b = ia \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$x^{(0)} = c_1 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}(t) = e^{it} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix}$$

Теперь подставляем в задачу и находим четыре числа:

$$ie^{it} \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} + e^{it} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = e^{it} \begin{pmatrix} a_2 t + b_2 \\ -a_1 t - b_1 \end{pmatrix} + e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 t + b_2 \\ -a_1 t - b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t^1 : \; ia_1 = a_2, \; ia_2 = -a_1$$

$$t^0 : \; ib_1 + a_1 = b_2 + 1, \; ib_2 + a_2 = -b_1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \; a_2 = \frac{i}{2}, \; ib_1 = b_2 + \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \; a_2 = \frac{i}{2}, \; b_1 = 0, \; b_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\dot{x}(t) = e^{it}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{i}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x(t) = e^{it}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{i}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_1 e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$x(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -\frac{1}{2} + c_1 i - c_2 i = 0 \end{cases}$$

$$c_1 = -\frac{1}{4}i,\ c_2 = \frac{1}{4}i$$

$$x(t) = e^{it}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ \frac{i}{2}t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{4}i\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}e^{it} + \frac{1}{4}ie^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\ x(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t\sin t - \frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}\cos t \\ \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin t \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$x_1(t) = \frac{\varepsilon}{2}t\sin t$$

$$x_2(t) = \frac{\varepsilon}{2}(t\cos t - \sin t)$$

3. Устойчивость решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений

3.1. Определение устойчивости и простейшее применение

«Fur fier kein beer»

«Fur fier kein beer»

$$(1) \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \ t > 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Определение

Пусть $x = \varphi(t), \ t \geq 0$ – решение (1). Решение $\varphi(x)$ называется устойчивым по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \land \forall \text{ решения } x = \psi(t) \text{ системы } (1),$$

$$\exists \delta_\varepsilon > 0$$

$$\text{такого, что } |\varphi(0) - \psi(0)| < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon$$

$$\forall t > 0$$

Определение

Решение $x = \varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если к дополнению к этому,

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi(t) - \psi(t)| = 0$$

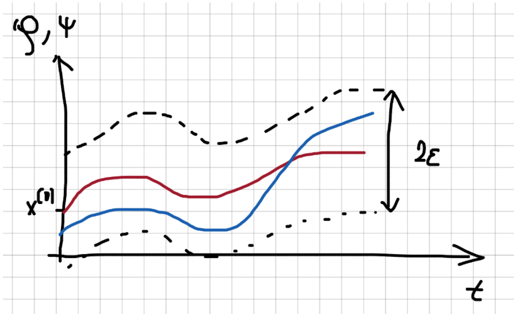
`1 Ноября 2024`

Мы рассматриваем систему вида:

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \text{ где } t > 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}$$

Предположим, что есть $x^{(0)} \in \mathbb{R}$. Существует единственное решение (1) при начальных условиях $\left|x(0) - x^{(0)}\right| \le r$

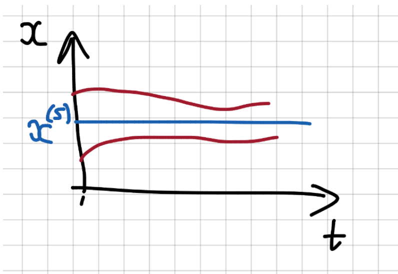


Замечание

Устойчивость стационарного решения:

$x^{(s)} = \text{const}$

$f\left(t, x^{(s)}\right) = 0$



Замечание

$y = x - \varphi$

(2) $\quad \dot{y} = f(t, y + \varphi) - f(t, \varphi)$

Устойчивость решения φ системы (1) $\Leftrightarrow$ устойчивость решения $y = 0$ системы (2).

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Ищем решение:

$$x(t) = u(t)e^t$$

$$\dot{x} = \dot{u}e^t + \cancel{ue^t} = \cancel{ue^t} - u^2e^{2t}$$

$$\dot{u} = -u^2e^t$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int e^t \,\mathrm{d}t$$

$$-\frac{1}{u} = -e^t + C$$

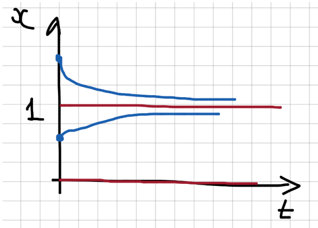
$$u = \frac{1}{e^t - C}$$

$$\frac{1}{1 - C} = x_0$$

$$C = 1 - \frac{1}{x_0}$$

$$x(t) = \frac{e^t}{e^t - 1 + \frac{1}{x_0}} = \frac{x_0e^t}{1 + x_0(e^t - 1)} = \frac{x_0e^{-t}}{e^{-2t} + x_0(e^{-t} - e^{-2t})} =$$

$$= \frac{x_0}{e^{-t} + x_0(1 - e^{-t})} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$$



Решение $x_0 = 1$ асимтотически устойчивое.

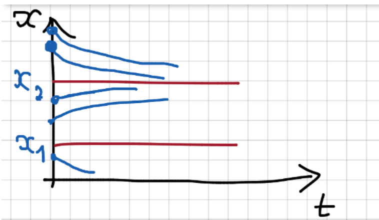
Решение $x_0 = 0$ неустойчивое, потому что если придать небольшую флуктуацию, то решение сольётся в экстазе с единичкой на бесконечности.

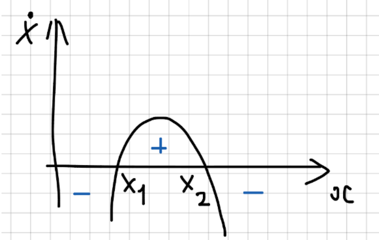
Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 - k, \;\; k = \text{const} > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Стационарное решение $x - x^2 - k = 0$. Дискриминант $1 - 4k$.

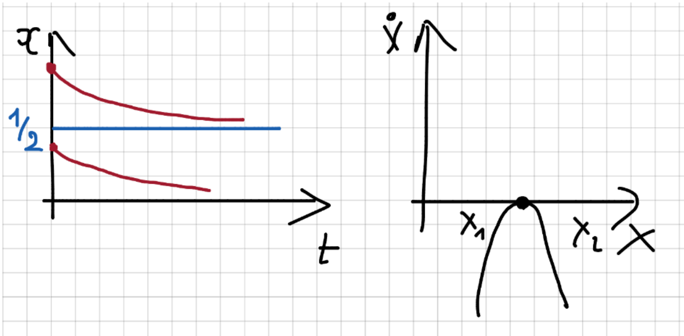
1. $0 < k < \frac{1}{4}$ $\quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$





x_2 устойчивое, x_1 неустойчивое.

2. $k = \frac{1}{4}$



Не устойчивое.

3. $k > \frac{1}{4}$

Тут производная будет отрицательна, поэтому решения не устойчивые.

3.2. Устойчивость решений однородных линейных систем с постоянными коэффициентами

Объектом изучения будет следующая система:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax$$

$$A \in R^{n \times n}$$

Стационарным решением (не зависящем от времени) будет:

$$x_s = 0 - \text{устойчиво или нет? будем изучать}$$

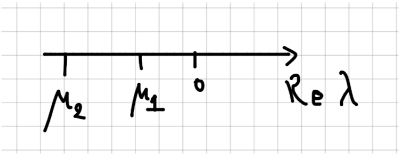
Пусть собственные значения A: $\lambda_i = \mu_j + i\nu_j, \ \mu_j = \mathrm{Re}\ \lambda_j$

Лемма 1

Пусть $\forall j \ \mathrm{Re}\ \lambda_j < 0$.

Тогда $\exists M, \alpha > 0$:

$|\varphi(t)| \le M e^{-\alpha t}\ \forall t > 0,$ где φ —решение(1)



$$\alpha := \frac{1}{2}|\mu_1| > 0$$

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\lambda_j t} P_j(t),\ \text{где } P_j \text{ — многочлен}$$

$$e^{\lambda_j t} = e^{\mu_j t} \cdot e^{i\nu_j t}$$

$$|\varphi(t)| \le \sum_{j=1}^{m} e^{\mu_j t}\left|P_j(t)\right|$$

$$|\varphi(t)|e^{\alpha t} \le \sum_{j=1}^{m} e^{(\alpha+\mu_j)t}\left|P_j(t)\right| \le \sum_{j=1}^{m} e^{-\frac{1}{2}\mu_1 t}\left|P_j(t)\right| \le M$$

Лемма 2

Пусть $\varphi = \varphi(t),\ t > 0$ — решение задачи Коши ($\dot{x} = Ax,\ x(0) = x^{(0)}$), $\operatorname{Re}\lambda_j > 0,\ j = 1, ..., m$.

Тогда $\exists M, \alpha > 0$:

$|\varphi(t)| \le M\left|x^{(0)}\right|e^{-\alpha t}$

$$\varphi(t) = \Phi(t)x^{(0)}$$

$$\Phi(t) = e^{tA} \quad \dot{\Phi} = A\Phi \quad \Phi(0) = I$$

$$|\varphi(t)| \le \|\Phi(t)\| \cdot \left|x^{(0)}\right|$$

$\|\Phi(t)\| \leq Me^{\alpha t}$ ■

Теорема об асимтотической устойчивости системы (1)

Решение $x(s) \equiv 0$ асимтотически устойчивое

$$\Leftrightarrow$$

$\text{Re }\lambda_j < 0,\ j = 1, ..., m$

$(\Leftarrow)$:

$$|\varphi(t)| \leq M\left|x^{(0)}\right|e^{-\alpha t}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M}$$

Если $\left|x^{(0)}\right| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow$

$|\varphi(t)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M}e^{-\alpha t} < \varepsilon \to 0$

$(\Rightarrow$:)

Предположим противное. Пусть $\text{Re }\lambda_1 = \mu_1 \geq 0$.

Тогда $\exists h \in \mathbb{C}^n \quad h = h^{(1)} + ih^{(2)}$

$Ah = \lambda_1 h$

$$x(t) = \text{Re }\left(he^{\lambda_1 t}\right) = \text{Re }\left(\left(h^{(1)} + ih^{(2)}\right)e^{(\mu_1 + \nu_1)t}\right) =$$
$$= e^{\mu_1 t}\left(h^{(1)}\cos\nu_1 t - h^{(2)}\sin\nu_1 t\right) \not\to 0,\ t \to +\infty$$

$$\forall c = \text{const} \quad \varphi(t) = c\hat{x}(t) - \text{решение}$$

$$|\varphi(0)| \leq c|\hat{x}(0)| - \text{сколь угодно малое при маленьких с}$$

$$\varphi(t) \not\to 0,\ t \to \infty$$

Получили противоречие.

Замечание

Решение $x_s \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову

$\Rightarrow$

$\text{Re}\ \lambda_j \leq 0,\ j = 1, ..., m$

8 Октября 2024

3.3. Функция Ляпунова

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x),\ t > 0$$

$$f(t, 0) = 0$$

$$x_s(t) = 0,\ t > 0 - \text{стационарное решение}$$

$$f : [0, +\infty] \times \{|x| \leq r\}$$

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \text{обычная Евклидова норма}$$

Определение

$$V(x),\ x \in B = \{|x| \leq r\} \subset \mathbb{R}^n$$

— функция Ляпунова, если:
1. $V \in C^1(B),\ V(x) \geq 0,\ V(0) = 0,\ V(x) > 0,\ x \neq 0$
2. $f(t, x) \cdot \nabla V(x) \leq 0,\ x \in B,\ t \geq 0$

Лемма Ляпунова

Пусть $\exists$ функция Ляпунова для системы (1).
Тогда решение $x_s \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову
Если дополнительно $\exists W(x),\ x \in B,\ W \in C(B),\ W(0) = 0$
$W(x) > 0,\ x \neq 0$ и при этом $f(x, t) \nabla V(x) \leq -W(x),\ x \in B$
Тогда x_s ещё и асимптотически устойчиво.

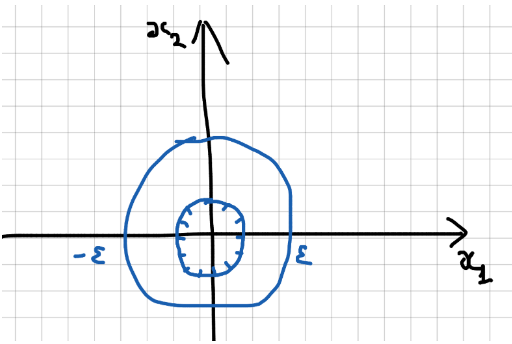
В данном случае устойчивость по Ляпунову для стационарного решения:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$$
$$\forall \text{ реш } (1), |x(0)| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon,\ t > 0$$

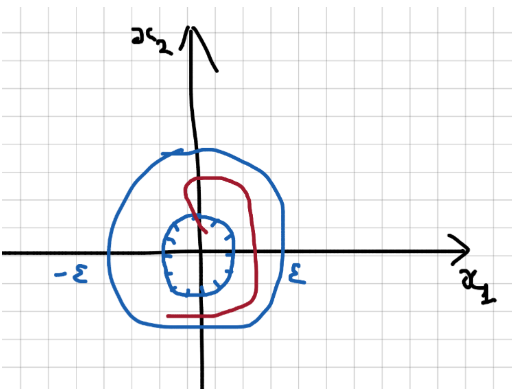
Асимптотическая устойчивость — добавляем:

$$\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0$$

Доказателство леммы Ляпунова. Для этого рассмотрим сферу радиуса ε. Пусть $\varepsilon \in (0, r), \delta_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \varepsilon\}, V_\varepsilon = \min_{x \in \delta_\varepsilon} V(x)$



Выбор δ_ε: $V(x) < V_\varepsilon$, если $|x| < \delta_\varepsilon$



Пусть $x := \varphi(t),\ t > 0$ — решение (1), $|x(0)| < \delta_\varepsilon$.

1. Решение $\varphi(t)$ действительно определено при $t > 0$

Предположим противное, тогда $\exists t_1 > 0,\ |\varphi(t)| \to +\infty,\ t \to t_1$. Отсюда вытекает, что $\exists t_0 > 0,\ |\varphi(t_0)| = \varepsilon$. В желудок Ляпунова затолкали решение:

$$\mu(t) = V(\varphi(t)),$$

$$\mu'(t) = \sum_1^n \frac{\partial V}{\partial x_j}\dot{\varphi}_j = f \cdot \nabla V \le 0 \Rightarrow \mu(t) \text{ не возрастает!}$$

$$V_\varepsilon > V(\varphi(0)) = \mu(0) \ge \mu(t_0) = V(\varphi(t_0)) \ge V_\varepsilon$$

Вот и получили противоречие.

2. $\nexists t_0 : |\varphi(t_0)| = \varepsilon \Rightarrow |\varphi(t)| < \varepsilon,\ t > 0$

Доказали устойчивость, теперь покажем, что предел решения на бесконечности равен нулю (асимптотическая устойчивость):

$$|\varphi(t)| \to 0,\ t \to 0$$

.

Утверждение

$$\lim_{t\to+\infty} V(\varphi(t)) = 0$$

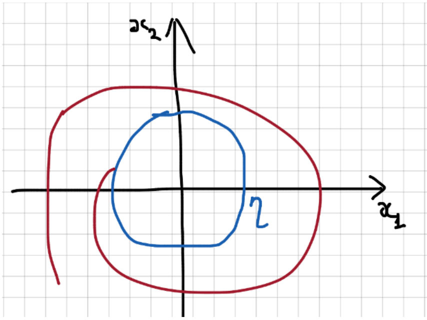
Воспользуемся этим утверждением. Предположим противное:

$$|\varphi(t)| \nrightarrow 0,\ t \to +\infty \Rightarrow \exists t_k \to +\infty\ |\varphi(t_k)| \ge \eta > 0$$

$$\beta = \min_{\eta<|x|<\beta} V(x)$$

$$V(\varphi(t_k)) \ge \beta > 0\ \forall k$$

$$t_k \to +\infty$$



Получили противоречие утверждению.

$$f \nabla V \leq -W$$

Теперь докажем само утверждение.

$$\lim_{t \to \infty} V(\varphi(t)) = 0$$

Предположим противное $\mu(t) = V(\varphi(t))$ не возрастающая. Тогда $\lim_{t \to +\infty} \mu(t) = \alpha > 0$.

$$\mu(t) \geq \alpha, \;\; t > 0$$

$$V(\varphi(t)) \geq \alpha > 0$$

$$0 < \sigma < |\varphi(t)| < \varepsilon$$

$$A := \min_{\sigma < |x| < \varepsilon} W(x)$$

Продифференцируем μ:

$$\mu'(t) = f \nabla V \leq -W \leq -A$$

$$\mu'(t) \leq -A$$

Если это неравенство проинтегрировать.

$$\mu(t) - \mu(t_*) \leq -A(t - t_*)$$

Если в этом неравенстве $t \to +\infty$, тогда $\mu(t) \to -\infty$. Но оно не может стремиться к $-\infty$, потому что она отрицательной быть не может. Мораль — получили противоречие.

Сейчас пойдут примеры.

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 \end{cases}$$

$x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ — стационарное решение, положение равновесия

Подобрать функцию — это искусство.

$$V(x) = x_1^2 + x_2^4$$

Проверим, будет ли она функцией Ляпунова или нет.

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0,\ x \neq 0$$

$$f \nabla V = x_1 x_2^4 \cdot 2x_1 + \left(-x_1^2 x_2 \cdot 4x_2^3\right) = -2x_1^2 x_2^4 \leq 0$$

$$\Rightarrow x_s = 0 \text{ устойчиво}$$

Пример 2

$$\dot{x} = -g(x),\ x = x(t) \in \mathbb{R},\ t > 0$$

$$g(0) = 0,\ xg(x) > 0,\ \forall x \neq 0,\ |x| \leq r,\ g - \text{липш.}$$

$$V(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$$

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0,\ x \neq 0 \text{ очев, подумайте}$$

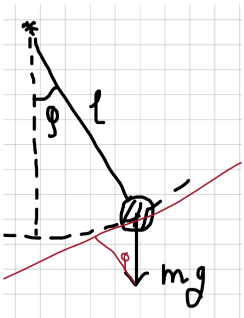
$$f\nabla V = -g^2(x) \leq 0$$

$$W(x) := g^2(x)$$

Тогда решение ещё и асимптотически устойчиво:

$$f\nabla V \leq -W$$

Пример (маятник)



$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin(\varphi)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi - b\dot{\varphi}$$

$$a = \frac{g}{l} = \omega^2$$

$$x_1 = \varphi,\ x_2 = \dot{\varphi}$$

$$a, b > 0,\ |x_1| < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a\sin x_1 - bx_2 \end{cases} \quad x_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ — стационарное решение}$$

1. $V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$

$V(0) = 0,\ V(x) > 0,\ x \neq 0$

$f\nabla V = x_2 a \sin x_1 + (-a \sin x_1 - bx_2)x_2 = -bx_2^2 \leq 0$

Должна быть асимтотическая устойчиовть (физическая чуйка). Определяется хитрая функция Ляпунова:

2. $V(x) = a(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}xPx$

   $P = \begin{pmatrix} \frac{b^2}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{pmatrix}$ — положительно определённая

   $f\nabla V = -\frac{1}{2}abx_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}bx_2^2 \leq 0$

   $-W(x) := -\frac{1}{2}abx_1 \sin x_1 - \frac{1}{2}bx_2^2$

   $f\nabla V \leq -W$

   x_s — асимптотически устойчивое решение.

15 Ноября 2024

3.4. Экспоненциальная устойчивость динамических систем

Речь идёт о следующей системе:

$$(1) \quad \dot{x} = f(x),\ t > 0$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Правая часть не зависит от t. Это динамическая (или автономная) система.

$$f(0) = 0 \quad x_s \equiv 0 \text{ — стационарное решение}$$

Пример 1

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 & | \cdot x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 & | \cdot x_2 \end{cases}$$

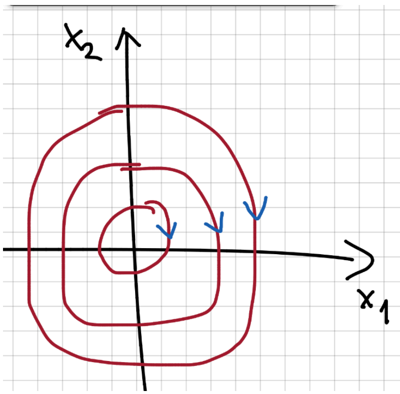
Изобразим фазовый портрет.

$$\dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^2 + x_2^2) = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = C = \mathrm{const}$$

Вот этот рисунок — фазовый портрет. Решения x_1, x_2 — фазовые переменные.



Решение устойчиво по Ляпунову, но не устойчиво асимптотически.

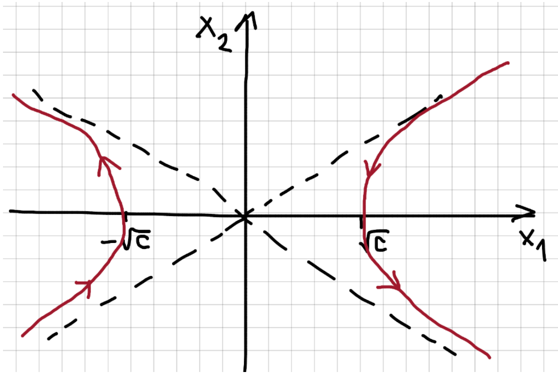
Пример 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 & | \cdot x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 & | \cdot x_2 \end{cases}$$

$$x_1 \dot{x}_1 - x_2 \dot{x}_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

$$x_1^2 - x_2^2 = C = \text{const}$$



Решение этой системы не устойчиво по Ляпунову.

Сформулируем теорему для экспоненциальной устойчивости нулевого решения.

Теорема

Пусть существует функция Ляпунова для системы (1),

$$f\nabla V \leq -\alpha V \quad (\alpha > 0)$$

И выполняется:

$$C_1|x|^2 \leq V(x) \leq C_2|x|^2$$

Тогда:
Существует константа $M > 0$, что

$$|x(t)| \leq Me^{-\frac{\alpha}{2}t}|x(0)|$$

Пусть

$$x = x(t),\ t \geq 0 - \text{решение } 1$$

$$\mu(t) = V(x(t))$$

$$\mu'(t) = \sum_{1}^{n} V'_{x_j} \dot{x}_j = f \nabla V \leq \alpha V(x(t))$$

$$\mu'(t) \leq \alpha \mu(t)$$

$$(\mu' + \alpha \mu) e^{\alpha t} \leq 0$$

$$\left(\mu(t) e^{\alpha t}\right)' \leq 0$$

$$\mu(t) e^{\alpha t} \leq \mu(0)$$

$$\mu(t) = V(x(t)) \leq \mu(0) = V(x(0)) e^{-\alpha t}$$

Теперь неравенство с C_1 и C_2 применяем:

$$C_1 |x(t)|^2 \leq \mu(t) = V(x(t)) \leq \mu(0) = V(x(0)) e^{-\alpha t} \leq C_2 |x(0)|^2 e^{-\alpha t}$$

Пример

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + g(x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + h(x_1) \end{cases}$$

$$|g(s)| \leq \frac{1}{2}|s|,\ |h(s)| \leq \frac{1}{2}|s|$$

Пусть $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}|x|^2$

$$f \nabla V = (-x_1 + g(x_2)) x_1 + (-x_2 + h(x_1)) x_2 \leq$$

$$\leq -(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}|x_1 x_2| + \frac{1}{2}|x_1 x_2| \leq$$

Пользуясь $|x_1 x_2| \leq \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

$$\leq -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = -V(x)$$

Решение является экспоненциально устойчивым.

$$V(x) \leq V(0)e^{-t}$$

3.5. Анализ устойчивости по первому приближению.

Есть такая замечательная формула:

$$f(x) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0)x + o(|x|)$$

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) = \left(\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(0)\right)\right)_{k,j=1,\ldots,n} \text{— матрица Якоби}$$

$$f(x) = Ax + g(x),\ g(x) = o(|x|)$$

$$f(0) = 0$$

$$(1) \quad \dot{x} = f(x)$$

$$f(0) = 0,\ x_s \equiv 0 \text{ — стационарное решение}$$

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + g(x)$$

Теорема

Пусть

$$\lambda_k,\ k = 1, \ldots, n \text{ — собственные числа}$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0), \quad \text{Re } \lambda_k < 0$$

$$\exists M, \alpha, r > 0$$

$$|g(x)| \leq M|x|^{1+\alpha},\ \ |x| \leq r$$

Тогда $x_s = 0$ асимптотически устойчиво.

Лемма Гроноулла

Пусть есть интегральное неравенство для неотрицательной функции:

$$0 \leq A(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s, \quad t, C_1, C_2 \geq 0$$

Тогда:

$$A(t) \leq C_1 e^{C_2 t}$$

$$W(t) := C_1 + C_2 \int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s$$

$$A(t) \leq W(t)$$

$$W'(t) = C_2 A(t) \leq C_2 W(t)$$

$$A(t) \leq W(t) \leq W(0) e^{C_2 t} = C_1 e^{C_2 t}$$

Следствие: $C_1 = 0 \ \Rightarrow\ A(t) = 0$

Доказываем теорему:

$$\dot{x} - Ax = g(x)$$

$$e^{-tA}(\dot{x} - Ax) = e^{-tA} g(x)$$

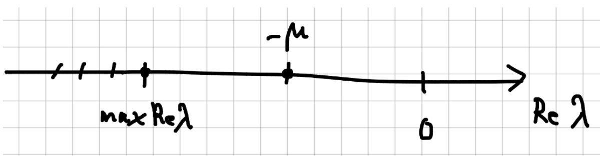
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{-tA} x(t)\big) = e(-tA) g(x(t))$$

$$e^{-tA}x(t) = x(0) = \int_0^t e^{-sA}g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

$$(2) \quad x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{-(s-t)A}g(x(s))\,\mathrm{d}s$$

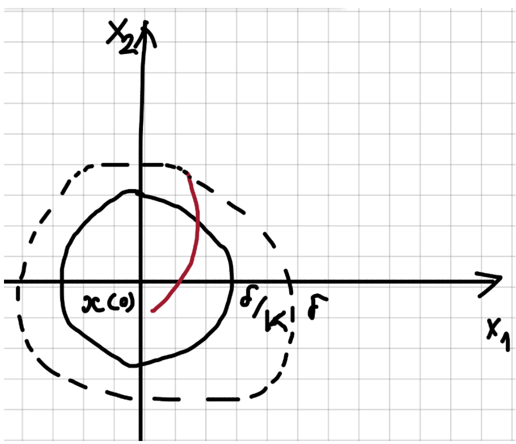
$$\mu > 0$$

$$\|e^{tA}\| \le Ke^{-\mu t}$$



Пусть $\delta > 0$, $|x(0)| < \frac{\delta}{k} \le \delta < r$

$$|x(t)| \le S,\ t \in [0, t_k]$$



$$|x(t_*)| = S$$

$$A(t) = e^{\mu t}|x(t)|$$

$$A(t) \leq Ke^{-\mu t}e^{\mu t}|x(0)| + \int_0^t M|x(s)|^{1+\alpha}KA(s)\,\mathrm{d}s$$

$$|x(0)| \leq \delta^{\alpha}$$

По лемме Гронуолла:

$$A(t) \leq K|x(0)|e^{MK\delta^{\alpha}t}$$

Выбираем $\delta : MK\delta^{\alpha} < \frac{\mu}{2}$

$$e^{\mu t}|x(t)| \leq K|x(0)|e^{-\frac{\mu}{2}t}$$

$$|x(t)| \leq K|x_0|e^{-\frac{\mu}{2}t}$$

Это неравенство доказывает асимптотическую устойчивость. Что и требовалось доказать.

Вопросы??? Перерыв.

`22 Ноября 2024`

3.6. Анализ точек покоя (стационарных точек) линейной системы в двумерном случае.

$$\dot{x} = Ax,\ x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},\ A \in \mathbb{R}^{2,2}$$

Собственные значения:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Получаем квадратное уравнение вида:

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A$$

Пусть λ_1, λ_2 — корни квадратного уравнения, то есть, собственные числа матрицы A.

Рассмотрим несколько случаев.

1. $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

Подобная матрица:

$$A = S^{-1}JS \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = S^{-1}JSx$$

Делаем замену переменной: $y := Sx$

$$\dot{y} = Jy$$

Рассмотрим как выглядят уравнения:

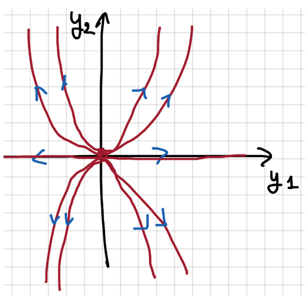
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

$$\left(\frac{y_1}{C_1}\right)^{\frac{1}{\lambda_1}} = \left(\frac{y_2}{C_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_2}}$$

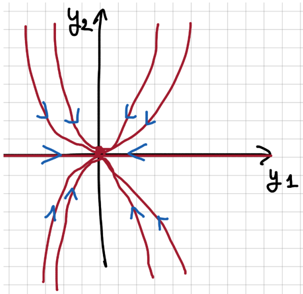
$$y_2 = C_2 \left(\frac{y_1}{C_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

1.a. Пусть $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$.



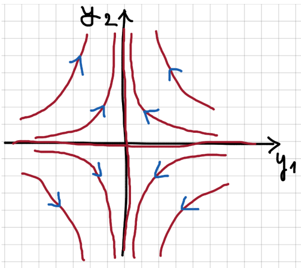
Неустойчивый узел.

1.б. Пусть $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$



Устойчивый узел

1.в. Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



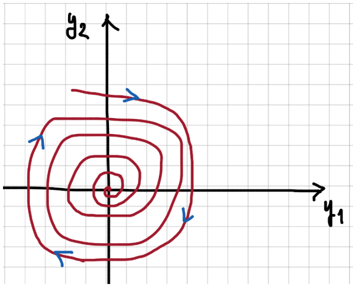
Седло (неустойчивое).

2. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t \\ y_2 = C_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \end{cases}$$

2.a. $\alpha < 0$

$$\left(\frac{y_1}{C_1}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{C_2}\right)^2 = e^{2\alpha t}$$



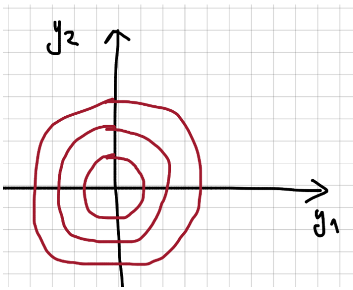
Устойчивая логарифмическая спираль.

2.б. $\alpha > 0$

Неустойчивая логарифмическая спираль.

2.в. $\alpha = 0$

$$\frac{y_1^2}{C_1^2} + \frac{y_2^2}{C_2^2} = 1$$



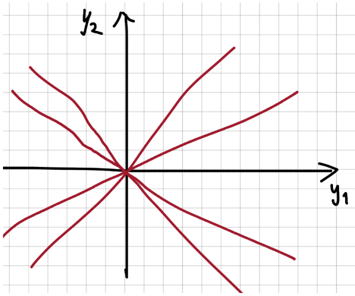
Центр. Устойчивость, но не асимптотическая.

3. $\lambda := \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

   3.а. $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1, & y_1 = C_1 e^{\lambda t} \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2, & y_2 = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{C_2}{C_1},\ y_2 = k y_1$$



Если $\lambda < 0$, то устойчивый узел

Если $\lambda > 0$, то неустойчивый узел

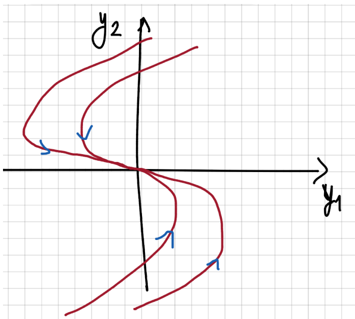
3.б. $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda y_1 + y_2 \\ \dot{y}_2 = \lambda y_2 \end{cases}$$

$$y_2 = C^2 e^{\lambda t}$$

$$y_1 = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

$$y_1 = \frac{C_1}{C_2} y_2 + C_2 \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_2}{C_2} \cdot \frac{y_2}{C_2}$$



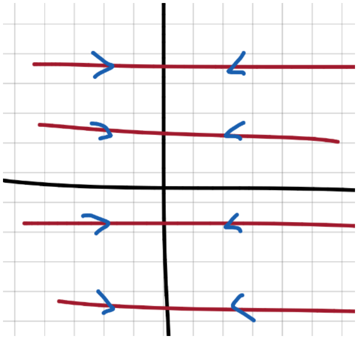
Устойчивый вырожденный узел.

4. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = 0 \end{cases}$$

$$y_2 = C_2, y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$$



Устойчивый, но не асимптотически.

4. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматриваем:

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x) - \text{система ОДУ}$$

$$(t, x) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Определение

Функция $v(t, x), (t, x) \in D$ называется первым интегралом системы (1), если

$$v(t, x(t)) = \text{const}, (t, x(t)) \in D$$

$$\forall \text{ решения } x \text{ системы } (1)$$

Пример. Равномерное движение в потенциальном поле

$$m\ddot{x} = -U'(x),\ t > 0$$

U — потенциал силы.

$$x_1 := x,\ x_2 := \dot{x}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{m}\dot{U}(x_1) \end{cases}$$

$$\dot{x}_1 x_2 = -\frac{1}{m}\dot{U}(x_1)x_2$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_2^2) = -\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U(x_1))$$

$$\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{m}U(x_1) = \mathrm{const}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E = \mathrm{const}$$

$$v(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{m}U(x_1)$$

Это первый интеграл системы.

Продифференцируем по t:

$$v_t + \sum_{j=1}^{n} v_{x_j}\dot{x}_j = 0$$

$$\dot{x}_j = f_j(t, x)$$

$$v_t + \sum_{1}^{n} v_{x_j} f_j = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + f \nabla v = 0$$

Определение

Первые интегралы системы (1) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ называются (функционально) независимыми, если

$$\operatorname{rank} \left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right)_{\substack{i=1,\ldots k \\ j=1,\ldots,n}} = k$$

`29 Ноября 2024`

Рассматриваем

$$(1) \quad \dot{x} = f(t, x), \ t > 0$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}$$

Определение

$$v(t, x), v \in C^1, \quad (t, x) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Называется первым интегралом, если

$$\forall \text{ решения } x(t) \Rightarrow v(t, x(t)) = \text{const}$$

Замечание

Если $\Phi \in C^1$?, то $\Phi(v(t, x))$ — первый интеграл.

Определение

Первые интегралы (1) $v_1, ..., v_k$ называются функционально линейно независимыми в области D, если

$$\operatorname{rank}\left(\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\right)_{\substack{i=1,...,k\\ j=1,...,n}} = k$$

Замечание

Линейная независимость $\not\Rightarrow$ Функциональная независимость

Пример:

$$v_1 = t - x_1 \qquad v_2 = (t - x_1)^2$$

Это линейно независимая система.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} -1 \\ -2(t - x_1)\end{pmatrix} = 1 < 2 \quad \text{функциональная зависимость}$$

Линейная зависимость $\Rightarrow$ функциональная зависимость

4.0.1. Теорема о неявной функции

Возьмём классический результат из математического анализа — теорема о неявной функции.

Теорема о неявной функции

Дана система уравнений:

$$(*) \quad \varphi_i(y, z) = 0,\ i = 1, ..., n,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Задача — найти y через z.

В векторном виде (без индексов):

$$(*)\quad \varphi(y,z)=0$$

Условия:

Пусть:

$$\varphi\left(y^{(0)},z^{(0)}\right)=0$$

$$\varphi\in C^1 \text{ в окрестности } M\left(y^{(0)},z^{(0)}\right)$$

$$\det\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\ |_M\neq 0$$

Тогда:

$$\exists \text{ окрестность точки } M,$$
$$\text{где система } (*) \text{ однозначно разрешима:}$$

$$\exists y=y(z)\in C^1$$

$$\varphi(y(z),z)\equiv 0$$

Теперь теорема, касающаяся уже первых интегралов.

Теорема 1

Пусть f непрерывна дифференцируема, ограничена в области D

$$N\left(t_0,x^{(0)}\right)\in D$$

Тогда, в окрестности точки N существуют n функционально независимых первых интегралов (1).

Опираться будем на теорему о неявной функции.

Берём точку $(t_0, c) \in D,\ t = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Рассматриваем задачу Коши:

$$\dot{x} = f(t, x)$$
$$x(t_0) = c$$

$$\exists x = \varphi(t, c) \in C^1,\ \varphi(t_0, c) = c$$

Рассмотрим систему (не дифференциальных) уравнений:

$$\varphi(t, c) - x = 0$$

Ищем c как функцию от t, x.

Найдём:

$$\frac{\partial(\varphi - x)}{\partial c}\ |_{t=t_0} = I$$

$$\det I = 1 \neq 0$$

Значит мы попадаем в условие теоремы о неявной функции:

$$\exists c_i = v_i(t, x),\ i = 1, ..., n,\ v_i \in C^1$$

$$\varphi(t, v(t, x)) = x$$

Как увидеть, что это первый интеграл?

1) v_i – первый интеграл (1)
Так как, если $x = \varphi\left(t, x^{(0)}\right)$ – решение (1), $x(t_0) = x^{(0)}$

$v_1\left(t, \varphi\left(t, x^{(0)}\right)\right) = c_1 = x_1^{(0)} = \text{const по t}$
$v_2 = ...$

2) $v_1, ..., v_n$ – линейно независимые, так как $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = n$

$$I = \frac{\partial \varphi(t, v(t, x))}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = I \Rightarrow \det\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0$$

Формулируем теорему número dos:

Теорема 2

Пусть $v_1, ..., v_n$ — функционально независимые первые интегралы (1) в окрестности точки $M_0\left(t_0, x^{(0)}\right)$, w — первый интеграл (1).

Тогда $\exists F \in C^1,\ w = F(v_1, ..., v_n)$

Пусть $M \in$ окрестность точки M_0.

$c_i = v_i(M)$

Рассмотрим систему уравнений:

$$v_i(t, x) = c_i,\ i = 1, ..., n$$

Первые интегралы функционально независимые, значит:

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = n$$

Поэтому:

$$\det\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \neq 0$$

Тогда:

$$\exists \varphi_j \in C^1,\ x_j = \varphi_j(t, c),\ j = 1, ..., n$$

$$v(t, \varphi(t, c)) = c$$

w — первый интеграл, а значит:

$$w(t, \varphi(t, c)) = \text{const} = w(t_0, \varphi(t_0, c)) :=$$
$$:= F(c) := F(c_1, ..., c_n),\ F \in C^1$$

$$w(t, x) = F(v_1(t, x), ..., v_n(t, x))$$

4.1. Первые интегралы автономных (динамических) систем

$$(a) \quad \dot{x} = f(x)$$

$f \in C^1 \Rightarrow \exists n$ функционально независимых первых интегралов (a) $v_i = v_i(t, x)$

Существуют ли первые интегралы (a), не зависимые от t?

Теорема 3

Пусть $f\big(x^{(0)}\big) \neq 0$ ($x^{(0)}$ называется неособой точкой (a)). В окрестности $x^{(0)}$ система (a) имеет $(n-1)$ функционально независимых первых интегралов вида $v_i = v_i(x)$, $i = 1, ..., n-1$

$$0 \neq f\big(x^{(0)}\big) = \begin{pmatrix} f_1\big(x^{(0)}\big) \\ \vdots \\ f_n\big(x^{(0)}\big) \end{pmatrix}$$

Пусть, к примеру,

$$f_n\big(x^{(0)}\big) \neq 0$$

Тогда:

$$f_n(x) \neq 0 \text{ в окрестности } x^{(0)}$$

(1) $\Rightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_n} = \frac{f_1(x)}{f_n(x)}, \ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_n} = \frac{f_2(x)}{f_n(x)}, \dots \frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}x_n} = \frac{f_{n-1}(x)}{f_n(x)},$$

Поэтому существуют $n-1$ функционально независимых интегралов системы (a.1)

$$v_j = v_j(x), \ j = 1, ..., n-1$$

Замечание

$\dot{x} = f(x)$ может быть записана в симметрической форме

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{f_2(x)} = ... = \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(x)} = M$$

6 Декабря 2024

5. Линейные уравнения первого порядка с частными производными

$$(1) \quad u = u(x)$$

$$x \in D \subset R^n$$

$$A_1(x)u_{x_1} + ...A_n(x)u_{x_n} = B(x)u(x) + f(x)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ ... \\ A_n \end{pmatrix} \quad A \neq 0$$

$$A(x) \cdot \nabla u(x) = B(x)u + f(x)$$

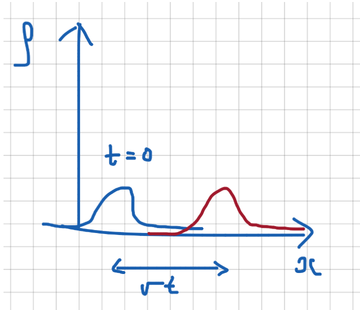
Производная u по направлению вектора A.

Пример

$$\rho = \rho(x,t) - \text{плотность среды}$$

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$$

$$n = 1,\ \vec{v} = v = \text{const}$$



$$\rho_t + v\rho_x = 0$$

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x)$$

Общее решение:

$$\rho(x,t) = f(x - vt),\ \ f \in C^1$$

$$\rho(x,t) = \rho_0(x - vt)$$

5.1. Однородное линейное уравнение

$$(1_0) \quad A_1(x)u_{x_1} + \ldots + A_n(x)u_{x_n} = 0,\ \ x \in D \subset R^n$$

$$A_j \in C^1,\ \ \sum_{j=1}^{n} A_j^2 \neq 0$$

5.1.1. Уравнение характеристик

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \ldots \\ A_n \end{pmatrix} \neq 0 \leftrightarrow \dot{x} = A(x) \leftrightarrow \underbrace{\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{A_n}}_{\substack{\text{симметрическая форма} \\ \text{динамической системы}}} \quad (2)$$

Определение

Интегральные кривые системы (2) есть характеристика системы (1_0).

Теорема 1

u есть решение системы $(1_0) \Leftrightarrow u$ — первый интеграл (2)

Пусть $x = x(t)$ — решение (2).

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mid \quad u(x(t)) = \mathrm{const}$$

$$\sum_1^n u_{x_j} \dot{x}_j = 0,\ \ \dot{x}_j = A_j(x)$$

$$\sum_1^n u_{x_j} A_j = 0 \ \leftrightarrow \ (1_0)$$

Теорема 2

Пусть $v_1(x), ..., v_{n-1}(x)$ функционально независимые первые интегралы системы (2).

Тогда общее решение (1_0) имеет вид:

$$(3) \quad u(x) = F(v_1(x), ..., v_{n-1}(x)),\ \ F \in C^1$$

Пусть $u(x)$ решение (1_0). Покажем, что оно представляется в виде (3). Так как $A \neq 0$, условимся, что $A_1(x) \neq 0$ в окрестности некоторой точки из D.

$$(2) \quad \frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}x_1} = \frac{A_j}{A_1},\ \ j = 2, ..., n$$

То есть существуют ровно $(n-1)$ функционально независимых интегралов.

Тогда по последней теореме в предыдущей лекции:

$$u(x) = F(v_1(x), ..., v_{n-1}(x))$$

Пример 1

$$x_1 =: x,\ \ x_2 := y$$

$$yu_x - xu_y = 0,\ \ u|_{y=0} = \sin|x|$$

$$A = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Характеристическая система:

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = -\frac{\mathrm{d}(y)}{x}$$

Что отсюда вытекает?

$$x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(x^2 + y^2) = 0$$

$$x^2 + y^2 = C^2$$

Характеристические линии здесь окружности с центром в начале координат.

$$u|_{x^2+y^2=C^2} = \mathrm{const}$$

$$u(x, y) = F(x^2 + y^2)$$

$$u(x, 0) = F(x^2) = \sin|x|$$

Получается:

$$F(x) = \sin\sqrt{x}$$

$$u(x, y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$$

Пример 2

Уравнение с постоянными коэффициентами.

$$a_1 u_x + a_2 u_y = 0$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \text{const}$$

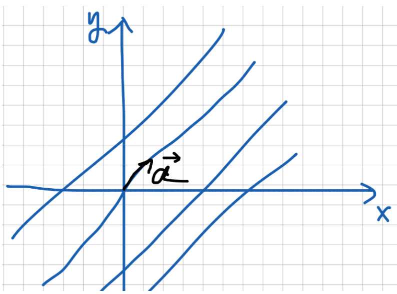
$$a_1^2 + s_2^2 = 1$$

Характеристическая система:

$$\frac{\mathrm{d}x}{a_1} = \frac{\mathrm{d}y}{a_2}$$

$$\mathrm{d}(a_2 x - a_1 y) = 0$$

$$a_2 x - a_1 y = C = \text{const}$$



Вектор нормали к траектории:

$$n = \begin{pmatrix} 2_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \perp a$$

Так как скалярное произведение равно нулю.

$$u(x, y) = F(a_2 x - a_1 y)$$

Пример 3

$$\rho_t + v\rho_x = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}t}{1} = \frac{\mathrm{d}x}{v}$$

Пример 4

$$xu_x - 2yu_y - zu_z = 0,\ \ u \mid_{x=1} = yz$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{-2y} = \frac{\mathrm{d}z}{-z}$$

Мы должны найти 2 функционально независимых первых интегралов.

Из первого равенства:

$$2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

$$\ln x^2 |y| = \ln |C|$$

$$x^2 y = C$$

$$v_1 = x^2 y$$

Из второго:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0$$

$$v_2 = xz$$

Матрица Якоби:

$$\begin{vmatrix} 2xy & x^2 \\ z & 0 \end{vmatrix} = -zx^2 \neq 0 \text{ в окрестности ненулевой точки}$$

Общее решение:

$$u(x, y, z) = F(x^2 y, xz)$$

$$u \mid_{x=1} = F(y, z) = yz$$

Ответ:

$$u = x^2 yz$$

Пример 5

$$xu_x + yu_y + xyu_z = 0$$

$$u|_{z=0} = x^2 + y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{xy}$$

$$1)\ \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y},\ y = Cx,\ \frac{y}{x} = C,\ \frac{x}{y} := C_1$$

$$2)\ \mathrm{d}y = \ \frac{\mathrm{d}z}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{C_1 y}$$

$$C_1 y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}z \quad \mathrm{d}\left(\frac{C_1}{2}y^2 - z\right) = 0$$

$$\frac{C_1}{2}y^2 - z = C_2 \quad xy - 2z = 2C_2$$

Воспользуемся начальным условием:

$$F\left(\frac{x}{y}, xy\right) = x^2 + y^2$$

$$\rho = \frac{x}{y},\ q = xy$$

$$x^2 = pq, \quad y^2 = \frac{q}{p}$$

$$F(p, q) = F\left(\frac{x}{y}, xy - 2z\right)$$

$$u = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)(xy - 2z)$$

Правило равных дробей

Есть целая куча равенств дробей:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_m}{b_m}$$

Тогда, можно взять линейную комбинацию числителей и линейную комбинацию знаменателей и ... будет тоже самое:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m}{\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m}$$

Очев:

$$d := \frac{a_1}{b_1}$$

$$\lambda_j a_j = d b_j \lambda_j$$

$$\sum \lambda_j a_j = d \sum b_j \lambda_j$$

Пример 6

$$(x+z)u_x + (y+z)y_y + (x+y)u_z = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x+z} = \frac{\mathrm{d}y}{y+z} = \frac{\mathrm{d}z}{x+y}$$

$$1)\ \frac{\mathrm{d}(x-z)}{z-y} = \frac{\mathrm{d}(y-z)}{z-x}$$

$$(z-x)\,\mathrm{d}(z-x) = (z-y)\,\mathrm{d}(z-y)$$

$$\mathrm{d}\big((z-x)^2 - (z-y)^2\big) = 0$$

$$2)\ \int \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \int \frac{\mathrm{d}(x-y)}{x-y}$$

$$\frac{x+y+z}{(x-y)^2} = \mathrm{const}$$

$$v_2 = \frac{x+y+z}{(x-y)^2}$$

Общее решение:

$$u = F\left((z-x)^2 - (z-y)^2, \frac{x+y+z}{(x-y)^2}\right)$$