функан

дальневосточный федеральный университет
институт математики и компьютерных технологий.
6-й семестр, 2024-2025 учебный год.
лектор: чеботарёв александр юрьевич.

2025-02-28

метрическое пространство

определение

пусть X — некоторое множество.

если на этом множестве мы определим функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ — аксиома тождества
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ — аксиома симметрии
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ — неравенство господина треугольника

пример

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$$

замечание

$$(1), (3) \Rightarrow (2)$$

определение

$$\{x_j\} \subset X,\ a \in X - \text{м.п.}$$

$$x_j \overset{X}{\to} a \ \Leftrightarrow\ \rho(x_j, a) \to 0$$

или просто записывают как $\lim_X x_j = a$.

утверждение

$$\begin{cases} x_j \to a \\ x_j \to b \end{cases} \Rightarrow a = b$$

определение

шар:

$$B(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$$

$$a \in X, r > 0$$

замкнутый шар:

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$$

определение

маша ограниченная, если её можно загнать в шар:

$$M \subset X - \text{ограничено}$$

$$\exists r > 0, a \in X$$

$$M \subset B(a, r)$$

определение

$$a \in X - \text{предельная точка } M \subset X, \text{если}$$

$$\exists x_j \in M,\ x_j \to a$$

определение

замыкание множества M:

$$\overline{M} = M \cup \{\text{предельные точки } M\}$$

определение

$$M \text{ — замкнутое} \Leftrightarrow M = \overline{M}$$

определение

a — внутренняя точка:

$$\exists r > 0,\ \ B(a, r) \subset M$$

определение

множество открыто, если все его точки внутренние.

определение

$$M \text{ плотно в } N \Leftrightarrow M \subset N \subset \overline{M}$$

определение

$$M \text{ всюду плотно} \Leftrightarrow \overline{M} = X$$

определение

$$\text{точка } a \text{ — граничная точка } M$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall r > 0\ \exists x \in M, y \neq M,\ \ x, y \in B(a, r)$$

определение

∂M — множество всех граничных точек M, называется границей M.

вспомним, что такое функция

$$f : X \to Y$$

$$\forall x \in X \xrightarrow{f} !\ y \in Y$$

$$\text{пусть } M \in X$$

$$f(M) = \{y \in Y : \exists x \in M, y = f(x)\} - \text{образ } M$$

$$\operatorname{Im} f = f(X) - \text{множество значений, образ } f, \text{ранг } f$$

определение

$$X, Y - \text{метрические пространства с метриками } \rho_x, \rho_y$$

$$a \in X, f : X \to Y$$

$$f \text{ непрерывна в точке } a \Leftrightarrow f(x_j) \xrightarrow{Y} f(a)\ \forall x_j \xrightarrow{X} a$$

определение

$$M \subset X\ f \text{ непрерывна на } M \text{ если } f \text{ непрерывна в любой точке } M$$

пример

$$f(x) = \rho(x, a), a \in X - \text{фиксирована}$$

$$f : X \to \mathbb{R}+ \quad \text{непр}$$

пусть $x_j \xrightarrow{X} x$, тогда (докажем) $\rho(x_j, a) \to \rho(x, a)$

$$\rho(x_j, a) \leq \rho(x_j, x) + \rho(x, a)$$

$$\rho(x_j, a) - \rho(x, a) \leq \rho(x_j, x) \to 0$$

$$\rho(x_j, a) - \rho(x, a) \leq 0$$

если записать неравенсвто в обратную сторону:

$$\left|\rho(x_j, a) - \rho(x, a)\right| \leq \rho(x_j, x) \to 0$$

определение

гомеоморфизм:

функция $f : X \to Y$ называется гомеоморфизмом

1. $f(X) = Y, \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   т.е. $\exists f^{-1} \ Y \to X$
2. f, f^{-1} – непрерывные.

примеры метрических пространств:

пример 1

$\mathbb{R} \qquad \rho(x, y) = |x - y|$

пример 2

$\mathbb{R}^N = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_j \in \mathbb{R} \right\} \qquad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_1^n \left(x_j - y_j\right)^2}$

в общем случае:

$$\rho_p(x, y) = \sum_1^n \left(\left|x_j - y_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} \left|x_j - y_j\right|$$

пример 3

$C[a, b] = \{x = x(t), t \in [a, b] \text{ непр}\}$

$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$

тут уже расстояние между функциями.

равномерная сходимость:

$x_j \overset{C[a,b]}{\longrightarrow} x \ \Leftrightarrow \ \max_{[a,b]} \left|x_{j(t)} - x(t)\right| \to 0$

$x_{j(t)} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} x(t)$

пример 4

$$L^p(a,b) = \left\{ x = x(t), t \in (a,b) : \int_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t < +\infty \right\}, p \geq 1$$

пространство лебега с p инт. функций

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}$$

полнота

определение

$\{x_j\} \subset X$ называется фундаментальной $\rho(x_j, x_k) \to 0,\ j, k \to \infty$

утверждение (теоремой называть сложно)

$\{x_j\}$ сходится $\Rightarrow$ $\{x_j\}$ фундаментальная

пусть $x_j \to a$

$$0 \leq \rho(x_j, x_k) \leq \rho(x_j, a) + \rho(x_k, a) \to 0$$

пример

фундаментальная, но нет предела:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$x_k \coloneqq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \in \mathbb{Q}$$

$$|x_k - x_j| \to,\ k, j \to \infty$$

потому что мы знаем, что эта последовательность сходится к ешке, но $e \notin \mathbb{Q}$.

определение

метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходистя.

например $\mathbb{Q}$ неполное, но существует процедура пополнения метрических пространств :)

$\mathbb{R}^n,\ C[a,b],\ L^p(a,b)$ — полные метрические пространства.

принцип сжимающих отображений или принцип банахова

X — пмп (полное метрическое пространство)

$K \subset X$

$A : K \to X$ — сжимающий оператор (сжатие)

$\forall x_1, x_2 \in K \quad \rho(Ax_1, Ax_2) \leq q\rho(x_1, x_2) \quad (q \in (0,1)$ не зависит от $x_1, x_2)$

теорема (принцип банахова)

X — полное, $\overline{K} = K \in X$

$A : K \to K$ — сжатие

тогда:

$\exists! x_* \in K \quad Ax_* = x_*$ — неподвижная точка

1) пусть $x_0 \in K,\ x_{k+1} = Ax_k, k = 0, 1, 2, ... \Rightarrow \{x_k\} \in K$ фундаментальная $\Rightarrow \exists x_* = K$

$x_* = Ax_*$

2) единственность:

$x = Ax, y = Ay$

$$0 \leq \rho(x,y) = \rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x,y) \Rightarrow \rho(x,y) = 0, x = y$$

компактность метрических пространств

рубрика «чебот держит в курсе»:
«чехособаки стырили золотой запас россии, а ещё они воюют против россии»

определение

множество $K \in X$ называют компактным множеством (компактом), если :

1)

$$\forall \{x_j\} \in K \ \exists x_{j'} \to a \in K$$

2)

$$M - \text{относительно компакт, если } \overline{M} - \text{компакт}$$

утверждение

пусть M — относительно компактное, тогда M ограничено.

от противного. $x_1 \in M$ окружаем шариком радиуса 1. либо всё множество попало в шарик, тогда оно ограничено. но мы то предполагаем противное, то есть неограниченное. значит есть $x_2 : \rho(x_1, x_2) > 1$. тогда сущестует $x_3 \in M, \rho(x_1, x_3) > 1, \rho(x_2, x_3) > 1$. получается, если множество неограничено, то получим последовательность:

$$\{x_k\} \subset M, \rho(x_j, x_k) > 1, j \neq k$$

существует подпоследовательность этого множества, которая сходится (не обязательно к элементу этого множества), а значит она фундаментальная.

$$\exists \{x_{j'}\} \subset M \Rightarrow \rho(x_{j'}, x_{k'}) \to 0$$

получили противоречие.

компакт $\Rightarrow$ ограничено $+$ замкнуто.

в обратную сторону не всегда. покажем в следующий раз.