функан

дальневосточный федеральный университет
институт математики и компьютерных технологий.
6-й семестр, 2024-2025 учебный год.
лектор: чеботарёв александр юрьевич.

2025-02-28

метрическое пространство

определение

пусть X — некоторое множество.

если на этом множестве мы определим функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ — аксиома тождества
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ — аксиома симметрии
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ — неравенство господина треугольника

пример

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$$

замечание

$$(1), (3) \Rightarrow (2)$$

определение

$$\{x_j\} \subset X,\ a \in X - \text{м.п.}$$

$$x_j \xrightarrow{X} a \ \Leftrightarrow\ \rho(x_j, a) \to 0$$

или просто записывают как $\lim_X x_j = a$.

утверждение

$$\begin{cases} x_j \to a \\ x_j \to b \end{cases} \Rightarrow a = b$$

определение

шар:

$$B(a,r) = \{x \in X : \rho(x,a) < r\}$$

$$a \in X, r > 0$$

замкнутый шар:

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \rho(x,a) \le r\}$$

определение

маша ограниченная, если её можно загнать в шар:

$$M \subset X - \text{ограничено}$$

$$\exists r > 0, a \in X$$

$$M \subset B(a,r)$$

определение

$$a \in X - \text{предельная точка } M \subset X, \text{если}$$

$$\exists x_j \in M,\ x_j \to a$$

определение

замыкание множества M:

$$\overline{M} = M \cup \{\text{предельные точки } M\}$$

определение

$$M - \text{замкнутое} \Leftrightarrow M = \overline{M}$$

определение

a — внутренняя точка:

$$\exists r > 0,\ \ B(a, r) \subset M$$

определение

множество открыто, если все его точки внутренние.

определение

$$M \text{ плотно в } N \Leftrightarrow M \subset N \subset \overline{M}$$

определение

$$M \text{ всюду плотно} \Leftrightarrow \overline{M} = X$$

определение

$$\text{точка } a - \text{граничная точка } M$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall r > 0\ \exists x \in M, y \neq M,\ \ x, y \in B(a, r)$$

определение

∂M — множество всех граничных точек M, называется границей M.

вспомним, что такое функция

$$f : X \to Y$$

$$\forall x \in X \xrightarrow{f} !\ y \in Y$$

$$\text{пусть } M \in X$$

$$f(M) = \{y \in Y : \exists x \in M, y = f(x)\} - \text{образ } M$$

$$\operatorname{Im} f = f(X) - \text{множество значений, образ } f, \text{ранг } f$$

определение

$$X, Y - \text{метрические пространства с метриками } \rho_x, \rho_y$$

$$a \in X, f : X \to Y$$

$$f \text{ непрерывна в точке } a \Leftrightarrow f(x_j) \xrightarrow{Y} f(a)\ \forall x_j \xrightarrow{X} a$$

определение

$$M \subset X\ f \text{ непрерывна на } M \text{ если } f \text{ непрерывна в любой точке } M$$

пример

$$f(x) = \rho(x, a), a \in X - \text{фиксирована}$$

$$f : X \to \mathbb{R}+ \quad \text{непр}$$

пусть $x_j \xrightarrow{X} x$, тогда (докажем) $\rho(x_j, a) \to \rho(x, a)$

$$\rho(x_j, a) \leq \rho(x_j, x) + \rho(x, a)$$

$$\rho(x_j, a) - \rho(x, a) \leq \rho(x_j, x) \to 0$$

$$\rho(x_j, a) - \rho(x, a) \leq 0$$

если записать неравенсвто в обратную сторону:

$$\left|\rho(x_j, a) - \rho(x, a)\right| \leq \rho(x_j, x) \to 0$$

определение

гомеоморфизм:

функция $f : X \to Y$ называется гомеоморфизмом

1. $f(X) = Y,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   т.е. $\exists f^{-1}\ Y \to X$
2. f, f^{-1} – непрерывные.

примеры метрических пространств:

пример 1

$\mathbb{R} \qquad \rho(x, y) = |x - y|$

пример 2

$\mathbb{R}^N = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_j \in \mathbb{R} \right\} \qquad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_1^n \left(x_j - y_j\right)^2}$

в общем случае:

$$\rho_p(x, y) = \sum_1^n \left(\left|x_j - y_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} \left|x_j - y_j\right|$$

пример 3

$C[a, b] = \{x = x(t), t \in [a, b] \text{ непр}\}$

$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$

тут уже расстояние между функциями.

равномерная сходимость:

$x_j \overset{C[a,b]}{\longrightarrow} x \ \Leftrightarrow\ \max_{[a,b]} \left|x_{j(t)} - x(t)\right| \to 0$

$x_{j(t)} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} x(t)$

пример 4

$$L^p(a,b) = \left\{ x = x(t), t \in (a,b) : \int_a^b |x(t)|^p \,\mathrm{d}t < +\infty \right\}, p \geq 1$$

пространство лебега с p инт. функций

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}$$

полнота

определение

$\{x_j\} \subset X$ называется фундаментальной $\rho(x_j, x_k) \to 0,\ j,k \to \infty$

утверждение (теоремой называть сложно)

$\{x_j\}$ сходится $\Rightarrow$ $\{x_j\}$ фундаментальная

пусть $x_j \to a$

$$0 \leq \rho(x_j, x_k) \leq \rho(x_j, a) + \rho(x_k, a) \to 0$$

пример

фундаментальная, но нет предела:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$x_k \coloneqq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \in \mathbb{Q}$$

$$|x_k - x_j| \to,\ k, j \to \infty$$

потому что мы знаем, что эта последовательность сходится к ешке, но $e \notin \mathbb{Q}$.

определение

метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходистя.

например $\mathbb{Q}$ неполное, но существует процедура пополнения метрических пространств :)

$\mathbb{R}^n,\ C[a,b],\ L^p(a,b)$ – полные метрические пространства.

принцип сжимающих отображений или принцип банахова

X – пмп (полное метрическое пространство)

$K \subset X$

$A : K \to X$ – сжимающий оператор (сжатие)

$\forall x_1, x_2 \in K \quad \rho(Ax_1, Ax_2) \le q\rho(x_1, x_2) \quad (q \in (0,1)$ не зависит от $x_1, x_2)$

теорема (принцип банахова)

X – полное, $\overline{K} = K \in X$

$A : K \to K$ – сжатие

тогда:

$\exists! x_* \in K \quad Ax_* = x_*$ – неподвижная точка

1) пусть $x_0 \in K,\ x_{k+1} = Ax_k, k = 0, 1, 2, ... \Rightarrow \{x_k\} \in K$ фундаментальная $\Rightarrow \exists x_* = K$

$x_* = Ax_*$

2) единственность:

$x = Ax, y = Ay$

$$0 \le \rho(x,y) = \rho(Ax, Ay) \le q\rho(x,y) \Rightarrow \rho(x,y) = 0, x = y$$

компактность метрических пространств

рубрика «чебот держит в курсе»:
«чехособаки стырили золотой запас россии, а ещё они воюют против россии»

определение

множество $K \in X$ называют компактным множеством (компактом), если :

1)

$$\forall \{x_j\} \in K \ \exists x_{j'} \to a \in K$$

2)

$$M - \text{относительно компакт, если } \overline{M} - \text{компакт}$$

утверждение

пусть M — относительно компактное, тогда M ограничено.

от противного. $x_1 \in M$ окружаем шариком радиуса 1. либо всё множество попало в шарик, тогда оно ограничено. но мы то предполагаем противное, то есть неограниченное. значит есть $x_2 : \rho(x_1, x_2) > 1$. тогда сущестует $x_3 \in M, \rho(x_1, x_3) > 1, \rho(x_2, x_3) > 1$. получается, если множество неограничено, то получим последовательность:

$$\{x_k\} \subset M, \rho(x_j, x_k) > 1, j \neq k$$

существует подпоследовательность этого множества, которая сходится (не обязательно к элементу этого множества), а значит она фундаментальная.

$$\exists \{x_{j'}\} \subset M \Rightarrow \rho(x_{j'}, x_{k'}) \to 0$$

получили противоречие.

компакт $\Rightarrow$ ограничено $+$ замкнуто.

в обратную сторону не всегда. покажем в следующий раз.

2025-03-14

в качетсве пространства возьмём $X = \mathbb{R}^n$. $K \subset \mathbb{R}^n$. выясним, когда оно компактно.

оно компакто если и только если, если K ограничено + замкнуто.

в качестве второго примера, возьмём $X = C[0,1]$, $\rho(x,y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$ — метрика для функций.

$M = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0, x(1) = 1, |x(t)| \leq 1\}$

графически — это разные функции, значения которых не выходят за пределы [−1, 1]

но это не компактное множество (см. ниже).

непрерывные функции на компактах

теорема

пусть X, Y — метрические пространства. множество K(компакт) $\subset X$. $f : K \to Y$ (непрерывная).

тогда, образ непрерывный образ компакта будет компактом. то есть $f(K)$ — компакт в пространтсве Y.

доказательство несколько строчек. берём последовательность $\{y_j\} \subset f(K)$, то есть $\exists x_j \in K,\ y_j = f(x_j)$. отсюда вытекает, что $x_{j^`} \to \hat{x} \in K$. тогда $f(x_{j^`}) \to f(\hat{x})$. $y_{j^`} \to f(\hat{x}) \in f(K)$.

следствие — теорема вейерштрасса

$Y = \mathbb{R}$, K — компактно в X. $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна.

было вякнуто, что (см. ниже). сейчас разберём.

пример. некомпактность большой маши M

определим $f(x)_{\forall x \in M} = \int_0^1 x^2(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$

`ещё одна гейская шутка от чебота +1`

$\inf_M f = 0$, докажем это.

$M \ni x_n(t) = t^k,\ k = 1, 2, ...,\ t \in [0,1]$

$f(x_k) = \int_0^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1} \to 0$

но если M — компакт, тогда:

$$\exists x_{\min} \in M, f(x_{\min}) = 0$$

отсюда вытекает, что:

$$\forall t \in [0, 1]\ x_{\min}(t) = 0$$

$$\notin M$$

получили противоречие.

критерий компактности

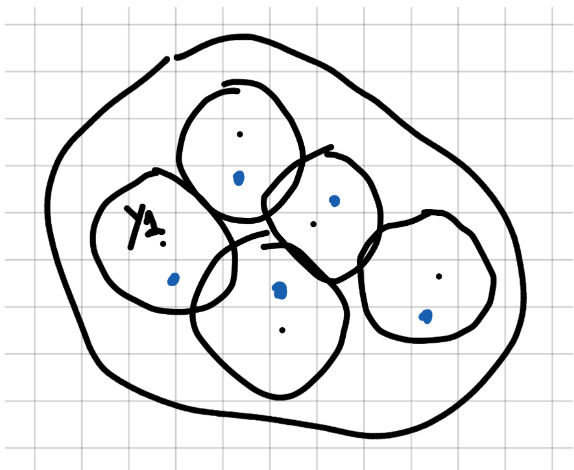
X - некоторое метрическое пространство.

определение

множество $N \subset X$ называется ε-сетью множества $M \subset X$:

если $\forall x \in M\ \exists y \in N\ \ \rho(x, y) < \varepsilon$

на рисунке это значит, что все синие точки должны попасть в сеть:



определение

множество M называется вполне ограниченным, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ конечная ε-сеть M.

теорема хаусдорфа

X — полное метрическое пространство.

$\overline{K}$ — компакт, если и только если K вполне ограничено.

$\Rightarrow$

$\overline{K}$ — компакт, берём $\forall \varepsilon > 0.\ x_1 \in K,\ x_2 \in K,\ ..., x_j \in K.\ \{x_j\} \in K \exists x_{j`} \to \hat{x}$.

$$\varepsilon < \rho\left(x_{j`}, x_{k`}\right) \to 0,\ j`, k` \to \infty$$

следствие

$\forall \varepsilon\ \exists$ компактная ε-сеть K, тогда $\overline{K}$ — компакт.

линейные нормированные пространства

примеры:

1. $\mathbb{R}^n,\ \ \dim \mathbb{R}^n = n$.
2. $C[a, b],\ \ \dim C[a, b] = \infty$

   $\{1, t, t^2, ..., t^{n-1}\}$.
3. $L^p(a, b) = \left\{x(t), t \in (a, b) : \int_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t < +\infty\right\}$

   $p \geq 1,\ \ \dim L^p(a, b) = +\infty$.

определение

пусть E — линейное пространство. $L \subset E$ — линейное многообразие, если

$$\forall x, y \in L,\ c_{1,2} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\ c_1 x + c_2 y \in L$$

определение

E — линейное пространство.

$\forall x \in E \mapsto \|x\| > 0$ (норма x).

1. $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$

тогда E называется линейным нормированным пространством.

оказывается, каждое нормированное пространство является метрическим, если определить расстояние (метрику) $\rho(x, y) = \|x - y\|$. аксиомы: неотрицательность, случай нуля, симметрия, неравенство треугольника.

поэтому все определения для метрических пространств годятся и для нормированных. в частности, определения шаров, определения сходимости:

$$x_j \overset{E}{\to} x \Leftrightarrow \|x_j - x\| \to 0$$

полное нормированное пространство по определению — банахово пространство.

примеры:

1. $E = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ p \geq 1$$

неравенство юнга

$$\forall u, v > 0 \ \underline{uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q}, \ p > 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 (pq = p + 1)$$

неравенство гёльдера

$$\sum_{1}^{n} |a_j b_j| \leq \|a\|_p \|b\|_q, \ p > 1$$

неравенство минковского

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_{1\leq j\leq n} \left|x_j\right|$$