функан

дальневосточный федеральный университет
институт математики и компьютерных технологий.
6-й семестр, 2024-2025 учебный год.
лектор: чеботарёв александр юрьевич.

2025-02-28

метрическое пространство

определение

пусть X — некоторое множество.

если на этом множестве мы определим функцию $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ — аксиома тождества
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ — аксиома симметрии
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ — неравенство господина треугольника

пример

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases}$$

замечание

$$(1), (3) \Rightarrow (2)$$

определение

$$\{x_j\} \subset X,\ a \in X - \text{м.п.}$$

$$x_j \xrightarrow{X} a \ \Leftrightarrow\ \rho(x_j, a) \to 0$$

или просто записывают как $\lim_X x_j = a$.

утверждение

$$\begin{cases} x_j \to a \\ x_j \to b \end{cases} \Rightarrow a = b$$

определение

шар:

$$B(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$$

$$a \in X, r > 0$$

замкнутый шар:

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \rho(x, a) \leq r\}$$

определение

маша ограниченная, если её можно загнать в шар:

$$M \subset X - \text{ограничено}$$

$$\exists r > 0, a \in X$$

$$M \subset B(a, r)$$

определение

$$a \in X - \text{предельная точка } M \subset X, \text{если}$$

$$\exists x_j \in M,\ x_j \to a$$

определение

замыкание множества M:

$$\overline{M} = M \cup \{\text{предельные точки } M\}$$

определение

$$M - \text{замкнутое} \Leftrightarrow M = \overline{M}$$

определение

a — внутренняя точка:

$$\exists r > 0,\ B(a, r) \subset M$$

определение

множество открыто, если все его точки внутренние.

определение

$$M \text{ плотно в } N \Leftrightarrow M \subset N \subset \overline{M}$$

определение

$$M \text{ всюду плотно} \Leftrightarrow \overline{M} = X$$

определение

$$\text{точка } a - \text{граничная точка } M$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall r > 0\ \exists x \in M, y \neq M,\ x, y \in B(a, r)$$

определение

∂M — множество всех граничных точек M, называется границей M.

вспомним, что такое функция

$$f : X \to Y$$

$$\forall x \in X \xrightarrow{f} !\ y \in Y$$

$$\text{пусть } M \in X$$

$$f(M) = \{y \in Y : \exists x \in M, y = f(x)\} - \text{образ } M$$

$$\operatorname{Im} f = f(X) - \text{множество значений, образ } f, \text{ранг } f$$

определение

$$X, Y - \text{метрические пространства с метриками } \rho_x, \rho_y$$

$$a \in X, f : X \to Y$$

$$f \text{ непрерывна в точке } a \Leftrightarrow f(x_j) \xrightarrow{Y} f(a)\ \forall x_j \xrightarrow{X} a$$

определение

$$M \subset X\ f \text{ непрерывна на } M \text{ если } f \text{ непрерывна в любой точке } M$$

пример

$$f(x) = \rho(x, a), a \in X - \text{фиксирована}$$

$$f : X \to \mathbb{R}+ \quad \text{непр}$$

пусть $x_j \xrightarrow{X} x$, тогда (докажем) $\rho(x_j, a) \to \rho(x, a)$

$$\rho(x_j, a) \leq \rho(x_j, x) + \rho(x, a)$$

$$\rho(x_j, a) - \rho(x, a) \leq \rho(x_j, x) \to 0$$

$$\rho(x_j, a) - \rho(x, a) \leq 0$$

если записать неравенсвто в обратную сторону:

$$|\rho(x_j, a) - \rho(x, a)| \leq \rho(x_j, x) \to 0$$

определение

гомеоморфизм:

функция $f : X \to Y$ называется гомеоморфизмом

1. $f(X) = Y,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
   т.е. $\exists f^{-1}\ Y \to X$
2. f, f^{-1} – непрерывные.

примеры метрических пространств:

пример 1

$\mathbb{R} \qquad \rho(x, y) = |x - y|$

пример 2

$\mathbb{R}^N = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_j \in \mathbb{R} \right\} \qquad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_1^n \left(x_j - y_j\right)^2}$

в общем случае:

$$\rho_p(x, y) = \sum_1^n \left(\left|x_j - y_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} \left|x_j - y_j\right|$$

пример 3

$C[a, b] = \{x = x(t), t \in [a, b] \text{ непр}\}$

$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$

тут уже расстояние между функциями.

равномерная сходимость:

$x_j \xrightarrow{C[a,b]} x \ \Leftrightarrow\ \max_{[a,b]} \left|x_{j(t)} - x(t)\right| \to 0$

$x_{j(t)} \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} x(t)$

пример 4

$$L^p(a,b) = \left\{ x = x(t), t \in (a,b) : \int_a^b |x(t)|^p \, \mathrm{d}t < +\infty \right\}, p \geq 1$$

пространство лебега с p инт. функций

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}$$

полнота

определение

$\{x_j\} \subset X$ называется фундаментальной $\rho(x_j, x_k) \to 0,\ j,k \to \infty$

утверждение (теоремой называть сложно)

$\{x_j\}$ сходится $\Rightarrow$ $\{x_j\}$ фундаментальная

пусть $x_j \to a$

$$0 \leq \rho(x_j, x_k) \leq \rho(x_j, a) + \rho(x_k, a) \to 0$$

пример

фундаментальная, но нет предела:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$x_k := \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \in \mathbb{Q}$$

$$|x_k - x_j| \to,\ k,j \to \infty$$

потому что мы знаем, что эта последовательность сходится к ешке, но $e \notin \mathbb{Q}$.

определение

метрическое пространство X называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходистя.

например $\mathbb{Q}$ неполное, но существует процедура пополнения метрических пространств :)

$\mathbb{R}^n,\ C[a,b],\ L^p(a,b)$ — полные метрические пространства.

принцип сжимающих отображений или принцип банахова

X — пмп (полное метрическое пространство)

$K \subset X$

$A : K \to X$ — сжимающий оператор (сжатие)

$\forall x_1, x_2 \in K \quad \rho(Ax_1, Ax_2) \leq q\rho(x_1, x_2) \quad (q \in (0,1)$ не зависит от $x_1, x_2)$

теорема (принцип банахова)

X — полное, $\overline{K} = K \in X$

$A : K \to K$ — сжатие

тогда:

$\exists! x_* \in K \quad Ax_* = x_*$ — неподвижная точка

1) пусть $x_0 \in K,\ x_{k+1} = Ax_k, k = 0, 1, 2, ... \Rightarrow \{x_k\} \in K$ фундаментальная $\Rightarrow \exists x_* = K$

$x_* = Ax_*$

2) единственность:

$x = Ax, y = Ay$

$$0 \leq \rho(x,y) = \rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x,y) \Rightarrow \rho(x,y) = 0, x = y$$

компактность метрических пространств

рубрика «чебот держит в курсе»:

«чехособаки стырили золотой запас россии, а ещё они воюют против россии»

определение

множество $K \in X$ называют компактным множеством (компактом), если :

1)

$$\forall \{x_j\} \in K \ \exists x_{j'} \to a \in K$$

2)

$$M - \text{относительно компакт, если } \overline{M} - \text{компакт}$$

утверждение

пусть M — относительно компактное, тогда M ограничено.

от противного. $x_1 \in M$ окружаем шариком радиуса 1. либо всё множество попало в шарик, тогда оно ограничено. но мы то предполагаем противное, то есть неограниченное. значит есть $x_2 : \rho(x_1, x_2) > 1$. тогда сущестует $x_3 \in M, \rho(x_1, x_3) > 1, \rho(x_2, x_3) > 1$. получается, если множество неограничено, то получим последовательность:

$$\{x_k\} \subset M, \rho(x_j, x_k) > 1, j \neq k$$

существует подпоследовательность этого множества, которая сходится (не обязательно к элементу этого множества), а значит она фундаментальная.

$$\exists \{x_{j'}\} \subset M \Rightarrow \rho(x_{j'}, x_{k'}) \to 0$$

получили противоречие.

компакт $\Rightarrow$ ограничено $+$ замкнуто.

в обратную сторону не всегда. покажем в следующий раз.

2025-03-14

в качетсве пространства возьмём $X = \mathbb{R}^n$. $K \subset \mathbb{R}^n$. выясним, когда оно компактно.

оно компакто если и только если, если K ограничено + замкнуто.

в качестве второго примера, возьмём $X = C[0, 1]$, $\rho(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$ — метрика для функций.

$M = \{x \in C[0, 1] : x(0) = 0, x(1) = 1, |x(t)| \leq 1\}$

графически — это разные функции, значения которых не выходят за пределы [−1, 1]

но это не компактное множество (см. ниже).

непрерывные функции на компактах

теорема

пусть X, Y — метрические пространства. множество K(компакт) $\subset X$. $f : K \to Y$ (непрерывная).

тогда, образ непрерывный образ компакта будет компактом. то есть $f(K)$ — компакт в пространтсве Y.

доказательство несколько строчек. берём последовательность $\{y_j\} \subset f(K)$, то есть $\exists x_j \in K,\ y_j = f(x_j)$. отсюда вытекает, что $x_{j`} \to \hat{x} \in K$. тогда $f(x_{j`}) \to f(\hat{x})$. $y_{j`} \to f(\hat{x}) \in f(K)$.

следствие — теорема вейерштрасса

$Y = \mathbb{R}$, K — компактно в X. $f : K \to \mathbb{R}$ непрерывна.

было вякнуто, что (см. ниже). сейчас разберём.

пример. некомпактность большой маши M

определим $f(x)_{\forall x \in M} = \int_0^1 x^2(t)\, \mathrm{d}t \geq 0$

`ещё одна гейская шутка от чебота +1`

$\inf_M f = 0$, докажем это.

$M \ni x_n(t) = t^k,\ k = 1, 2, \ldots,\ t \in [0, 1]$

$f(x_k) = \int_0^1 t^{2k}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2k+1} \to 0$

но если M — компакт, тогда:

$$\exists x_{\min} \in M, f(x_{\min}) = 0$$

отсюда вытекает, что:

$$\forall t \in [0, 1]\ x_{\min}(t) = 0$$

$$\notin M$$

получили противоречие.

критерий компактности

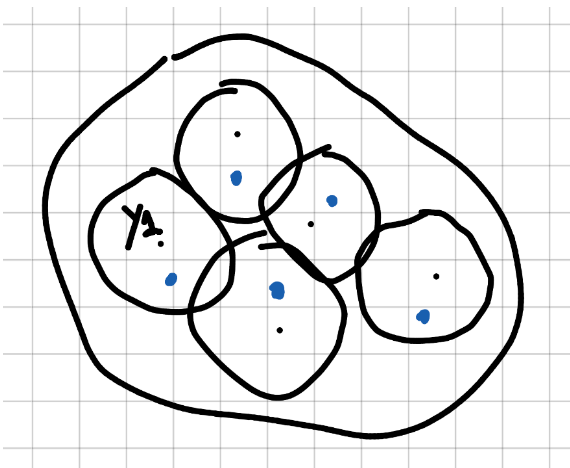
X - некоторое метрическое пространство.

определение

множество $N \subset X$ называется ε-сетью множества $M \subset X$:

если $\forall x \in M\ \exists y \in N\ \ \rho(x, y) < \varepsilon$

на рисунке это значит, что все синие точки должны попасть в сеть:



определение

множество M называется вполне ограниченным, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists$ конечная ε-сеть M.

теорема хаусдорфа

X — полное метрическое пространство.

$\overline{K}$ — компакт, если и только если K вполне ограничено.

$\Rightarrow$

$\overline{K}$ — компакт, берём $\forall\varepsilon > 0.$ $x_1 \in K,$ $x_2 \in K,$ $..., x_j \in K.$ $\{x_j\} \in K \exists x_{j`} \to \hat{x}.$

$$\varepsilon < \rho(x_{j`}, x_{k`}) \to 0,\ j`, k` \to \infty$$

следствие

$\forall\varepsilon$ $\exists$ компактная ε-сеть K, тогда $\overline{K}$ — компакт.

линейные нормированные пространства

примеры:

1. $\mathbb{R}^n,\ \dim\mathbb{R}^n = n.$
2. $C[a,b],\ \dim C[a,b] = \infty$

   $\{1, t, t^2, ..., t^{n-1}\}.$
3. $L^p(a,b) = \left\{x(t), t \in (a,b) : \int_a^b |x(t)|^p\, \mathrm{d}t < +\infty\right\}$

   $p \geq 1,\ \dim L^p(a,b) = +\infty.$

определение

пусть E — линейное пространство. $L \subset E$ — линейное многообразие, если

$$\forall x, y \in L,\ c_{1,2} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\ c_1 x + c_2 y \in L$$

определение

E — линейное пространство.

$\forall x \in E \mapsto \|x\| > 0$ (норма x).

1. $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$

тогда E называется линейным нормированным пространством.

оказывается, каждое нормированное пространство является метрическим, если определить расстояние (метрику) $\rho(x, y) = \|x - y\|$. аксиомы: неотрицательность, случай нуля, симметрия, неравенство треугольника.

поэтому все определения для метрических пространств годятся и для нормированных. в частности, определения шаров, определения сходимости:

$$x_j \xrightarrow{E} x \Leftrightarrow \|x_j - x\| \to 0$$

полное нормированное пространство по определению — банахово пространство.

примеры:

1. $E = \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ p \geq 1$$

неравенство юнга

$$\forall u, v > 0 \ \underline{uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q}, \ p > 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 (pq = p + 1)$$

неравенство гёльдера

$$\sum_{1}^{n} |a_j b_j| \leq \|a\|_p \|b\|_q, \ p > 1$$

неравенство минковского

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$$

2025-03-28

x_i, Δx,

t_n, Δt, $n = 0, 1, \ldots, N$

$$\frac{\partial C}{\partial t} \approx \frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t}$$

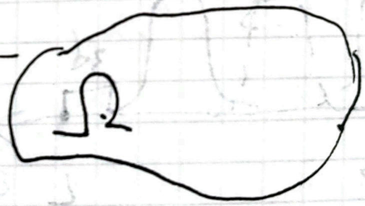
$$\frac{\partial C}{\partial x} \approx \frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{i+1}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$ ~ центральная разность

2025-03-28 | Чебот

пр-во непр. функций

$$C(\bar\Omega) = \{ f : \bar\Omega \to \mathbb{R} \text{ непр} \}$$



$$\|f\|_{C(\bar\Omega)} = \max_{x\in\bar\Omega} |f(x)|$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$

огр. обл.

$\bar\Omega = \Omega \cup \Gamma$

сходимость

$f_k \xrightarrow{C(\bar{\Omega})} f$ тоже самое $f_k \overset{\bar{\Omega}}{\rightrightarrows} f(x)$

$\|f_k - f\|_{C(\bar{\Omega})} \to 0$

$\dim C(\bar{\Omega}) = \infty$

пр-во лебега p-интегрируемых ф-й:

~~$P(\Omega)$~~ $L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R},$

$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \}.$

<u>лирическое отступление</u>

1) пусть $A \subset \mathbb{R}^d$

$\operatorname{meas} A = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ мн-во шаров B_j:

$A \subset \bigcup_j B_j \ \wedge \ \sum_j \operatorname{meas} B_j < \varepsilon$

$\operatorname{meas} \mathbb{Q} = 0$

~~пример~~

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

§ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НОРМ

<u>def</u> пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — нормы в л.п. $\underline{E}$. наз-ся эквивалентными, если ~~[illegible]~~ $\exists\, \alpha, \beta > 0$:

$$\alpha \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta \|x\|_1 \quad \forall x \in E.$$

~~в конечномерном~~

<u>Th</u> $\underline{E}$ — лин. норм. пр-во, $\dim \underline{E} = n < +\infty$

В пр-ве $\underline{E}$ все нормы эквивалентны

□ пусть $\{e_j\}_1^n$ — базис $\underline{E}$.

значит $\forall x \in E = \sum_{j=1}^{n} e_j c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

т.е. $x \leftrightarrow c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_c := \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

берём $\forall$ другую норму:

$\exists \|x\|$ - некоторая норма в E.

$$\|x\| = \| \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \| \leq \sum_{j=1}^{n} |c_j| \|e_j\| \leq$$

дальше К-Б:

$$\leq \underbrace{\sqrt{\sum_{1}^{n} |c_j|^2}}_{\|x\|_c} \underbrace{\sqrt{\sum_{1}^{n} \|e_j\|^2}}_{\beta \text{ (не зависит от } x)}$$

получим $\quad \|x\| \leq \beta \|x\|_c$

$\exists\, c \in \mathbb{R}^n, \quad \boxed{c_1^2 + \ldots + c_n^2 = 1}$

это сфера единичного радиуса

$$f(c) = \| \underbrace{\sum_1^n c_j e_j}_{:= x \in E} \|$$

f – непрерывна на компакте

$$\alpha := \inf \left\{ f(c) : c_1^2 + \ldots + c_n^2 = 1 \right\}$$

по <u>Th</u> Вейерштрасса

$$\alpha = f(c^{(0)})$$

$$c_1^{(0)2} + \ldots + c_n^{(0)2} = 1$$

очев, что $0 < \alpha$

$$\forall x \in E, \quad y := \frac{1}{\|x\|_c} x$$

$$\|y\|_c = 1$$

$$\alpha \le f(C^{(0)}) = \left\| \frac{1}{\|x\|_C} x \right\|$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \|x\|_C \le \|x\|$$

$\blacksquare$.

ПОДПРОСТРАНСТВА В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Подпространства в ЛНП.

def $\exists$ E – ЛНП. $L \subset E$ – лин. многообрази

L – наз-а подпр-вом, если $\overline{L} = L$

ex 1/ $E = C[0, 1]$

$$L_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} c_j t^j, \; t \in [0, 1] \right\}$$

$\dim L_n = n + 1$

оказывается $\overline{L_n} = L_n$ – подпр-во.

/ex 2/ $L = \{ \sum_{j=0}^{m} c_j t^j, \ t \in [0,1], m \in \mathbb{N} \}$

$\overline{L} \neq L$

контрпример

$$p_n(t) := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} t^j \xrightarrow{C[0,1]} \exp(t) \not\in L$$

<u>утв</u> Пусть L — л. многообразие в E, $\dim L < +\infty$.

тогда $\overline{L} = L$ — подпространство в E.

<u>def</u> $M \subset E$ л.н.п., $a \in E$

$$\rho(a, M) := \operatorname{dist}(a, M) = \inf_{x \in M} \|x - a\|$$

<u>утв</u> Пусть L — подпр-во в E.

$$\rho(x, L) = 0 \iff x \in L$$

L п/п в E,

def $y \in L : \|x-y\| = \rho(x, L)$

y – проекция x на L.

лемма о почти перпендикуляре

$$\underbrace{\begin{array}{l} E \text{ – л.н.п.} \\ L \neq E \text{ – п/п} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists z_\varepsilon \notin L :$

$\|z_\varepsilon\| = 1, \quad \|z_\varepsilon - x\| \geq 1 - \varepsilon \quad \forall x \in L.$

□ $\exists z \notin L, \ 0 < \mathrm{dist}(z, L) := d$

$d = \inf\limits_{x \in L} \|z - x\|$

$d \leq \|z - x_\varepsilon\| < d + \varepsilon d \ , \quad x_\varepsilon \in L$

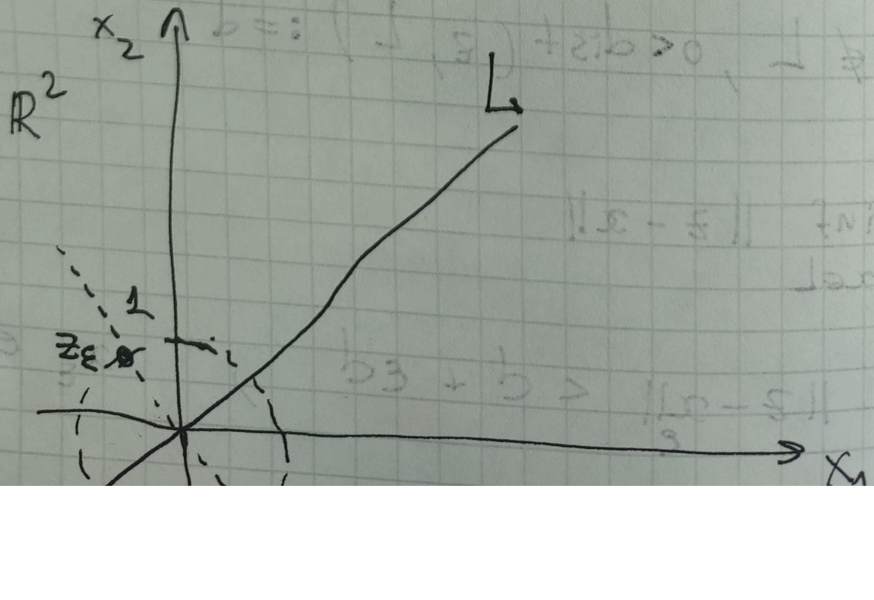
$$z_\varepsilon := \frac{z - x_\varepsilon}{\|z - x_\varepsilon\|}, \quad \|z_\varepsilon\| = 1$$

$$z_\varepsilon \notin L$$

$$\forall x \in L \quad \|z_\varepsilon - x\| = \left\| \frac{1}{\|z - x_\varepsilon\|}(z - x_\varepsilon) - x \right\| =$$

$$= \frac{1}{\|z - x_\varepsilon\|} \| z - \underbrace{\left(x_\varepsilon + \|z - x_\varepsilon\| \cancel{x}\right)}_{\in L} \| \geq$$

$$\geq \frac{d}{d + \varepsilon d} = \frac{1}{1+\varepsilon} > 1 - \varepsilon \quad \blacksquare$$



§ КОМПАКТНОСТЬ В НОРМ. ПР-ВАХ

def метрическое пр-во X наз-ся локально компактным, если

$\forall M \subset X$ - компакт.

огр + замкн

th E - л.н.п.

E - лок. компактно $\Leftrightarrow \dim E < +\infty$.

$\square$ $\Rightarrow$ $\exists x_1 \in E, \ \|x_1\| = 1$

$L_1 = \{t x_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$ $\dim L_1 = 1$

или L_1 совпал с E $\blacksquare$.

или нет:

$\exists x_2 \notin L_1, \ \|x_2\| = 1$

$\|x_1 - x_2\| > 1/2$ $(\varepsilon := \frac{1}{2})$

$L_2 = \{ c_1 x_1 + c_2 x_2 : c_{1,2} \in \mathbb{R} \}$, $\dim L_2 = 2$

или L_2 совпало ■ или нет:

$\Rightarrow \exists x_3 \notin L_2$

или мы либо когда-то упрёмся и ■.

или мы получим:

$\{x_1, x_2, \dots\} \subset E$ $\qquad \|x_j - x_k\| > \frac{1}{2}$, $j \neq k$

$\|x_k\| = 1$

$\exists\, x_{k'}$ сх. $\lightning$ ■

$\Leftarrow$ $\dim E = n \Rightarrow E \sim \mathbb{R}^n$

лемма Больцано ■

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ В ПР-ВЕ НЕПР Ф-Й

th (Арцела)

$K \subset C[a,b]$

$\overline{K}$ – компакт $\Leftrightarrow$

1) $\exists r > 0$ $\forall x \in K$ $\|x\| \le r$ (ограничен.)

2) ф-ии из K равностепенно непрерывны.

т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$, $|t_1 < t_2| < \delta_\varepsilon$ }

$\Rightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ $\forall x \in K$

<u>пример</u>

$K = \{ x \in C[a,b] : |x'(t)| \le \alpha \ \forall t \in [a,b],\ x(0) = 0 \}$

$\forall x \in K$: $x(t) = \int_0^t x'(s)\,ds$

$|x(t)| \le \alpha t \le \alpha b$

$\|x\| \le \alpha b$

роман выстрогорский любит девчонок всех типа вас