

Уравнения математической физики

Дальневосточный Федеральный Университет
Институт математики и компьютерных технологий.

6-й семестр, 2024-2025 учебный год.

Лектор: Алексеев Геннадий Валентинович.

Литература: Г.Б. Алексеев. Классические модели и методы математической физики.

Сущность метода математического моделирования (МММ)

2025-02-19

Важную роль играет МММ, с помощью которого можно исследовать различные процессы, явления и объекты математическим методом. Этот метод возник сразу после великой отечественной войны. (???) Это было связано с тем, что в СССР была необходимость решения важнейшей государственной задачи, сформулированной АП и КП (атом-проект и космический проект).

1. 1945 г. — сброс двух атомных бомб на Японию.
2. 1945 г. август, 20 — создан специальный комитет по созданию атомных бомб. Во главе с Лаврентием Берией.
3. 1948 г. февраль.
4. 1949 г. август, 29 — успешное испытание первой атомной бомбы.
5. 1951 г. октябрь — успешное испытание второй атомной бомбы.
6. 1953 г. — успешное испытание первой водородной бомбы.
7. 1954 г. февраль, 19, — роковое решение. Передан Крым в Украину.
8. 1957 г. октябрь, 4 — запуск первого искусственного спутника Земли.
9. 1961 г. апрель, 12 — полет Ю.А. Гагарина, 108 минут.
10. 1961 г. октябрь, 10 — 58.6 мегатонн.

За 16 лет основные задачи атомного и космического проектов были решены. В этом заслуга физиков, химиков, инженеров, а также математиков. Почему? Потому что при создании этих высокотехнологичных изделий необходимо было решить огромное количество прикладных задач, возникающих при создании разных компонент этих изделий.

1. Выбираются причины u, v, \dots которые характеризуют изучаемый процесс.
2. На основании законов управляющих рассматриваемым процессом выводится система математических соотношений.
3. Добавляются некоторые условия (краевые, начальные).
4. Исследуется корректность краевой или начальной задачи. Корректность это:
 - существование решения,
 - единственность решения,
 - устойчивость решения.

Устойчивость относительно возмущений исходных данных.

5. Нахождение аналитически или численно решения.
6. Анализ полученных результатов.

Применение МММ в задаче распространения вирусов. Используя модели в виде ОДУ.

Модель SIR

3 группы. S (чувствительные к вирусу), I (infected), R (recovered).

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Коэффициенты всегда положительны.

Рассмотрим теперь модель, в которой инфицированные могут опять заболеть.

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0$$

То есть количество всех особей не меняется (если конечно смертности нет)).

$$S + I + R = \text{const} = N - \text{первый интеграл}$$

модель SIRS

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} + \alpha R, \quad \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I - \alpha R$$

модель WIRiv

W — wild (здоровые),

R — recovered, I, ν, i

$$\frac{dW}{dt} = \alpha_1 \nu W - \alpha_2 i W, \quad \frac{dI}{dt} = \alpha_1 \nu W - \mu_1 I, \quad \frac{dR}{dt} = \alpha_2 i W,$$

$$\frac{d\nu}{dt} = -\mu_\nu \nu + \alpha_\nu I - \alpha_\mu \nu W, \quad \frac{di}{dt} = \mu_i i + \alpha_i I - \alpha_3 i W$$

(с коэффициентами я что-то напутал)

2025-02-26

математические модели механики материальной точки. второй закон ньютона. законы кеплера

условия задачи:

- камень моделируется точной
- земля плоская
- ускорение свободного падения $g = \text{const}$

при этих условиях работает закон ньютона:

$$m\bar{a} = \bar{f}$$

запишем в виде диффура, чтобы можно было решить. нас интересует траектория движения камня.

$$\text{вводим } \bar{r} = \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \bar{j}$$

выразим \bar{a} через \bar{r}

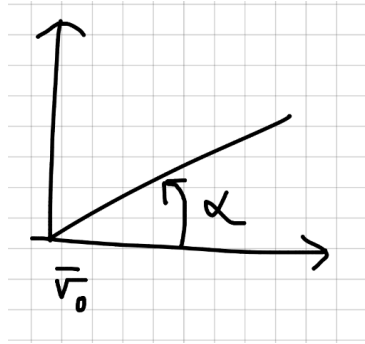
$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}(t) \bar{i} + \ddot{y}(t) \bar{j}$$

сила тяжести:

$$\bar{f} = m\bar{g} \Rightarrow \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}(t) \bar{i} + \ddot{y}(t) \bar{j} = \bar{g} = -g \bar{i}$$

$$\ddot{x}(t), \quad \ddot{y}(t) = -g, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

начальная скорость v_0 , бросаем под углом α



$$\bar{v}_0, v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha$$

условия на производные:

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(t) = v_0 \sin \alpha$$

матмодели гравитационного и электростатического поля. уравнение лапласа

закон всемирного тяготения (ньютон)

между любыми двумя телами в пространстве действует сила притяжения, пропорциональная их массе и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними

но почему? все думали почему? и больше всего думал лаплас. итак:

гипотеза дальнего действия лапласа

наличие любого притягивающего (то есть с положительной массой) тела влечёт за собой возникновение во всём пространстве некоторой субстанции, интенсивность $u(x)$ которой в точке пространства определяется формулой

$$u(\bar{x}) = \gamma \frac{m}{|\bar{x} - \bar{x}_0|}$$

гравитационная постоянная $\gamma = 6.6732 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$

зная эту субстанцию, что можно определить? оказывается с помощью этой субстанции можно определить силу тяжести.

смысл субстанции u заключается в том, что её знание позволяет вычислить вектор силы притяжения, действующий со стороны тела на тело единичной массы по формуле:

$$\bar{f} = \nabla u \quad (3.3)$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \quad (3.4)$$

ну это в декартовой системе координат. конечно, можно и в других системах рассматривать координаты.

для силы притяжения справедливо принцип суперпозиции.

принцип суперпозиции

сила, создаваемая несколькими источниками

$$(\bar{x}_1, m), (\bar{x}_2, m_2), \dots, (\bar{x}_N, m_N)$$

равна сумме сил, создаваемых этими источниками.

$$u(x) = \gamma \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{|\bar{x} - \bar{x}_j|} \quad (3.5)$$

обычно $u(x)$ называют **потенциалом гравитационного поля**.

чтобы найти диффур, надо дифференцировать u .

$$u_i(x) = \gamma m_i \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_i|}$$

$$r_i(x) := |\bar{x} - \bar{x}_i|$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{r_i}$$

$$\left(\frac{1}{r_i} \right)_x = -\frac{1}{r_i^2} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial x} = -\frac{1}{r_i^3} (x - x_i)$$

теперь найдём вторую производную:

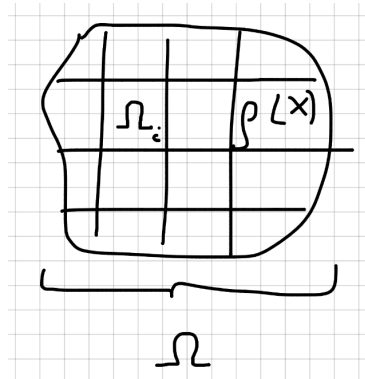
$$\left(\frac{1}{r_i}\right)_{xx} = \left(-\frac{1}{r_i^3}(x-x_i)\right)_x = -\frac{1}{r_i^3} + \frac{3}{r_i^4}\frac{\partial r_i}{\partial x}(x-x_i) = -\frac{1}{r_i^3} + \frac{3(x-x_i)^2}{r_i^5} \quad (3.7)$$

складывая эту и аналогичные вторые производные по y и z , мы получим:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.10)$$

это **математическая модель гравитационного поля**. это уравнение выполняется всюду, кроме той точки, где находится источник гравитационного поля.

применим схему матмоделирования.



$$\Omega_i, \Delta u_i, \bar{x}_i$$

$$u_{i(x)} = \gamma \frac{\rho(x_i) \Delta V_i}{|x - x_i|}$$

поле, создаваемое всеми кусочками:

$$u(x) = \gamma \sum_{i=1}^N \frac{\rho(x_i) \Delta V_i}{|x - x_i|}$$

предельный переход:

$$u(x) = \gamma \int_{\Omega} \frac{\rho(\bar{x}) d\bar{x}}{|x - x_i|}$$

электростатика

φ потенциал электростатического поля

$$E = -\nabla \varphi$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{\varepsilon}}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

электрическа проницаемость

$$\Delta u = -4\pi\rho$$

уравнение пуассона

$$\operatorname{div} \overline{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \overline{E} = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)\overline{k}$$