

# Уравнения математической физики

Дальневосточный Федеральный Университет  
Институт математики и компьютерных технологий.

6-й семестр, 2024-2025 учебный год.

Лектор: Алексеев Геннадий Валентинович.

Литература: Г.В. Алексеев. Классические модели и методы математической физики.

## Сущность метода математического моделирования (МММ)

2025-02-19

Важную роль играет МММ, с помощью которого можно исследовать различные процессы, явления и объекты математическим методом. Этот метод возник сразу после великой отечественной войны. (???) Это было связано с тем, что в СССР была необходимость решения важнейшей государственной задачи, сформулированной АП и КП (атом-проект и космический проект).

1. 1945 г. — сброс двух атомных бомб на Японию.
2. 1945 г. август, 20 — создан специальный комитет по созданию атомных бомб. Во главе с Лаврентием Берией.
3. 1948 г. февраль.
4. 1949 г. август, 29 — успешное испытание первой атомной бомбы.
5. 1951 г. октябрь — успешное испытание второй атомной бомбы.
6. 1953 г. — успешное испытание первой водородной бомбы.
7. 1954 г. февраль, 19, — роковое решение. Передан Крым в Украину.
8. 1957 г. октябрь, 4 — запуск первого искусственного спутника Земли.
9. 1961 г. апрель, 12 — полет Ю.А. Гагарина, 108 минут.
10. 1961 г. октябрь, 10 — 58.6 мегатонн.

За 16 лет основные задачи атомного и космического проектов были решены. В этом заслуга физиков, химиков, инженеров, а также математиков. Почему? Потому что при создании этих высокотехнологичных изделий необходимо было решить огромное количество прикладных задач, возникающих при создании разных компонент этих изделий.

1. Выбираются причины  $u, v, \dots$  которые характеризуют изучаемый процесс.
2. На основании законов управляющих рассматриваемым процессом выводится система математических соотношений.
3. Добавляются некоторые условия (краевые, начальные).
4. Исследуется корректность краевой или начальной задачи. Корректность это:
  - существование решения,
  - единственность решения,
  - устойчивость решения.

Устойчивость относительно возмущений исходных данных.

5. Нахождение аналитически или численно решения.
6. Анализ полученных результатов.

Применение МММ в задаче распространения вирусов. Используя модели в виде ОДУ.

## Модель SIR

3 группы.  $S$  (чувствительные к вирусу),  $I$  (infected),  $R$  (recovered).

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N}, \quad \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Коэффициенты всегда положительны.

Рассмотрим теперь модель, в которой инфицированные могут опять заболеть.

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0$$

То есть количество всех особей не меняется (если конечно смертности нет)).

$$S + I + R = \text{const} = N - \text{первый интеграл}$$

## модель SIRS

$$\frac{dS}{dt} = -\beta \frac{SI}{N} + \alpha R, \quad \frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I - \alpha R$$

## модель WIRiv

$W$  — wild (здоровые),

$R$  — recovered,  $I, \nu, i$

$$\frac{dW}{dt} = \alpha_1 \nu W - \alpha_2 i W, \quad \frac{dI}{dt} = \alpha_1 \nu W - \mu_1 I, \quad \frac{dR}{dt} = \alpha_2 i W,$$

$$\frac{d\nu}{dt} = -\mu_\nu \nu + \alpha_\nu I - \alpha_\mu \nu W, \quad \frac{di}{dt} = \mu_i i + \alpha_i I - \alpha_3 i W$$

(с коэффициентами я что-то напутал)

2025-02-26

## математические модели механики материальной точки. второй закон ньютона. законы кеплера

условия задачи:

- камень моделируется точной
- земля плоская
- ускорение свободного падения  $g = \text{const}$

при этих условиях работает закон ньютона:

$$m\bar{a} = \bar{f}$$

запишем в виде диффура, чтобы можно было решить. нас интересует траектория движения камня.

$$\text{вводим } \bar{r} = \bar{r}(t) = x(t) \cdot \bar{i} + y(t) \bar{j}$$

выразим  $\bar{a}$  через  $\bar{r}$

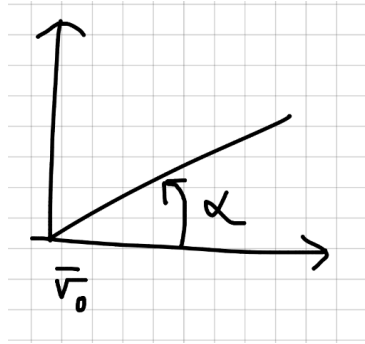
$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}(t) \bar{i} + \ddot{y}(t) \bar{j}$$

сила тяжести:

$$\bar{f} = m\bar{g} \Rightarrow \ddot{\bar{r}} = \ddot{x}(t) \bar{i} + \ddot{y}(t) \bar{j} = \bar{g} = -g \bar{i}$$

$$\ddot{x}(t), \quad \ddot{y}(t) = -g, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

начальная скорость  $v_0$ , бросаем под углом  $\alpha$



$$\bar{v}_0, v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha$$

условия на производные:

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(t) = v_0 \sin \alpha$$

## матмодели гравитационного и электростатического поля. уравнение лапласа

### закон всемирного тяготения (ньютон)

между любыми двумя телами в пространстве действует сила притяжения, пропорциональная их массе и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними

но почему? все думали почему? и больше всего думал лаплас. итак:

### гипотеза дальнего действия лапласа

наличие любого притягивающего (то есть с положительной массой) тела влечёт за собой возникновение во всём пространстве некоторой субстанции, интенсивность  $u(x)$  которой в точке пространства определяется формулой

$$u(\bar{x}) = \gamma \frac{m}{|\bar{x} - \bar{x}_0|}$$

гравитационная постоянная  $\gamma = 6.6732 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$

зная эту субстанцию, что можно определить? оказывается с помощью этой субстанции можно определить силу тяжести.

смысл субстанции  $u$  заключается в том, что её знание позволяет вычислить вектор силы притяжения, действующий со стороны тела на тело единичной массы по формуле:

$$\bar{f} = \nabla u \quad (3.3)$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k} \quad (3.4)$$

ну это в декартовой системе координат. конечно, можно и в других системах рассматривать координаты.

для силы притяжения справедливо принцип суперпозиции.

#### принцип суперпозиции

сила, создаваемая несколькими источниками

$$(\bar{x}_1, m), (\bar{x}_2, m_2), \dots, (\bar{x}_N, m_N)$$

равна сумме сил, создаваемых этими источниками.

$$u(x) = \gamma \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{|\bar{x} - \bar{x}_j|} \quad (3.5)$$

обычно  $u(x)$  называют **потенциалом гравитационного поля**.

чтобы найти диффур, надо дифференцировать  $u$ .

$$u_i(x) = \gamma m_i \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_i|}$$

$$r_i(x) := |\bar{x} - \bar{x}_i|$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{r_i}$$

$$\left( \frac{1}{r_i} \right)_x = -\frac{1}{r_i^2} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial x} = -\frac{1}{r_i^3} (x - x_i)$$

теперь найдём вторую производную:

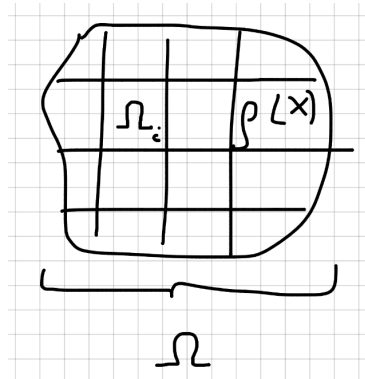
$$\left(\frac{1}{r_i}\right)_{xx} = \left(-\frac{1}{r_i^3}(x-x_i)\right)_x = -\frac{1}{r_i^3} + \frac{3}{r_i^4}\frac{\partial r_i}{\partial x}(x-x_i) = -\frac{1}{r_i^3} + \frac{3(x-x_i)^2}{r_i^5} \quad (3.7)$$

складывая эту и аналогичные вторые производные по  $y$  и  $z$ , мы получим:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.10)$$

это **математическая модель гравитационного поля**. это уравнение выполняется всюду, кроме той точки, где находится источник гравитационного поля.

применим схему матмоделирования.



$$\Omega_i, \Delta u_i, \bar{x}_i$$

$$u_{i(x)} = \gamma \frac{\rho(x_i) \Delta V_i}{|x - x_i|}$$

поле, создаваемое всеми кусочками:

$$u(x) = \gamma \sum_{i=1}^N \frac{\rho(x_i) \Delta V_i}{|x - x_i|}$$

предельный переход:

$$u(x) = \gamma \int_{\Omega} \frac{\rho(\bar{x}) d\bar{x}}{|x - x_i|}$$

## электростатика

$\varphi$  потенциал электростатического поля

$$E = -\nabla \varphi$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_{\varepsilon}}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

электрическа проницаемость

$$\Delta u = -4\pi\rho$$

уравнение пуассона

$$\operatorname{div} \overline{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \overline{E} = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)\overline{k}$$