# Уравнения математической физики

Дальневосточный Федеральный Университет
Институт математики и компьютерных технологий.
6-й семестр, 2024-2025 учебный год.
Лектор: Алексеев Геннадий Валентинович.

Литература: Г.В. Алексеев. Классические модели и методы математической физики.

## Сущность метода математического моделирования (МММ)

2025-02-19

Важную роль играет МММ, с помощью которого можно исследовать различные процессы, явления и объекты математическим методом. Этот метод возник сразу после великой отечественной войны. (???) Это было связано с тем, что в СССР была необходимость решения важнейшей государственной задачи, сформулированной АП и КП (атом-проект и космический проект).

1. 1945 г. — сброс двух атомных бомб на Японию.
2. 1945 г. август, 20 — создан специальный коммитет по созданию атомных бомб. Во главе с Лаврентием Берией.
3. 1948 г. февраль.
4. 1949 г. август, 29 — успешное испытание первой атомной бомбы.
5. 1951 г. октябрь — успешное испытание второый атомной бомбы.
6. 1953 г. — успешной испытание первой водородной бомбы.
7. 1954 г. февраль, 19, — роковое решение. Передан Крым в Украину.
8. 1957 г. октябрь, 4 — запуск первого искусственного спутника Земли.
9. 1961 г. апрель, 12 — полет Ю.А. Гагарина, 108 минут.
10. 1961 г. октябрь, 10 — 58.6 мегатонн.

За 16 лет основные задачи атомного и космического проектов были решены. В этом заслуга физиков, химиков, инженеров, а также математиков. Почему? Потому что при создании этих высокотехнологичных изделий необходимо было решить огромное количество прикладных задач, возникающих при создании разных компонент этих изделий.

1. Выбираются причины $u, v, \ldots$ которые характеризуют изучаемый процесс.
2. На основании законов управляющих рассматриваемым процессом выводится система математических соотношений.
3. Добавляются некоторые условия (краевые, начальные).
4. Исследуется корректность краевой или начально задачи. Корректность это:
   - существование решения,
   - единственность решения,
   - устойчивость решения.

   Устойчивость относительно возмущений исходных данных.
5. Нахождение аналитически или численно решения.
6. Анализ полученных результатов.

Применениее МММ в задаче распространения вирусов. Использую модели в виде ОДУ.

## Модель SIR

3 группы. $S$ (чувствительные к вирусу), $I$ (infected), $R$ (recovered).

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta\frac{SI}{N}, \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta\frac{SI}{N} - \gamma I, \qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I$$

Коэффициенты всегда положительны.

Рассмотрим теперь модель, в которой инфицированные могут опять заболеть.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S + I + R) = 0$$

То есть количество всех особей не меняется (если конечно смертности нет))).

$$S + I + R = \mathrm{const} = N - \text{первый интеграл}$$

## модель SIRS

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta\frac{SI}{N} + \alpha R, \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta\frac{SI}{N} - \gamma I, \qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - \alpha R$$

**модель WIRiv**

$W$ — wild (здоровые),

$R$ — recovered, $I, \nu, i$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \alpha_1 \nu W - \alpha_2 i W, \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \alpha_1 \nu W - \mu_1 I, \qquad \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \alpha_2 i W,$$

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} = -\mu_\nu \nu + \alpha_\nu I - \alpha_\mu \nu W, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \mu_i i + \alpha_i I - \alpha_3 i W$$

(с коэффициентыми я что-то напутал)

`2025-02-26`

## математические модели механики материальной точки. второй закон ньютона. законы кеплера

условия задачи:

- камень моделируется точной
- земля плоская
- ускорение свободного падения $g = \mathrm{const}$

при этих условиях работает закон ньютона:

$$m\overline{a} = \overline{f}$$

запишем в виде диффура, чтобы можно было решить. нас интересует траектория движения камня.

вводим $\overline{r} = \overline{r}(t) = x(t) \cdot \overline{i} + y(t)\overline{j}$

выразим $\overline{a}$ через $\overline{r}$

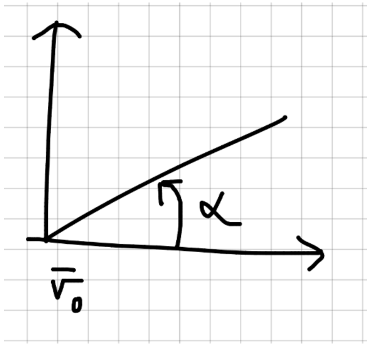
$$\overline{a} = \ddot{\overline{r}} = \ddot{x}(t)\overline{i} + \ddot{y}\overline{j}$$

сила тяжести:

$$\overline{f} = m\overline{g} \Rightarrow \ddot{r} = \ddot{x}(t)\overline{t} + \ddot{y}(t)\overline{j} = \overline{g} = -g\overline{i}$$

$$\ddot{x}(t), \quad \ddot{y}(t) = -g, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0$$

начальная скорость $v_0$, бросаем под углом $\alpha$




$$\overline{v}_0, \ v_0 \cos\alpha, \ v_0 \sin\alpha$$

условия на проивзодные:

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha, \qquad \dot{y}(t) = v_0 \sin\alpha$$

## матмодели гравитационного и электростатического поля. уравнение лапласа

**закон всемирного тяготения (ньютон)**

между любыми двумя телами в пространстве действует сила притяжения, пропорцианальная их массе и обратно пропорциональная квадрту расстояния между ними

но почему? все думали почему? и больше всего думал лаплас. итак:

**гипотеза дальнодействия лапласа**

наличие любого притягивающего (то есть с положительной массой) тела влечёт за собой возникновение во всём пространстве некоторой субстанции, интенсивность $u(x)$ которой в точке пространства определяется формулой

$$u(\overline{x}) = \gamma \frac{m}{|\overline{x} - \overline{x}_0|}$$

гравитационная постоянная $\gamma = 6.6732 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$

зная эту субстанцию, что можно определить? оказывается с помощью этой субстанции можно определить силу тяжести.

смысл субстанции $u$ заключается в том, что её знание позволяет вычислить вектор силы притяжения, действующий со стороны тело на тело единичной массы по формуле:

$$\overline{f} = \nabla u \qquad (3.3)$$

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k} \qquad (3.4)$$

ну это в декартовой системе координат. конечно, можно и в других системах рассматривать координаты.

для силы притяжения справебыдло принцип суперпозиции.

**принцип суперпозиции**

сила, создававаемая несколькими источниками

$$(\overline{x}_1, m), (\overline{x}_2, m_2), ..., (\overline{x}_N, m_N)$$

равна сумме сил, создаваемых этими источниками.

$$u(x) = \gamma \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{|\overline{x} - \overline{x}_j|} \qquad (3.5)$$

обычно $u(x)$ называют потенциалом гравитационного поля.

чтобы найти диффур, надо дифференцировать $u$.

$$u_i(x) = \gamma m_i \frac{1}{|\overline{x} - \overline{x}_i|}$$

$$r_i(x) := |\overline{x} - \overline{x}_i|$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{r_i}$$

$$\left(\frac{1}{r_i}\right)_x = -\frac{1}{r_i^2} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial x} = -\frac{1}{r_i^3}(x - x_i)$$

теперь найдём вторую производную:

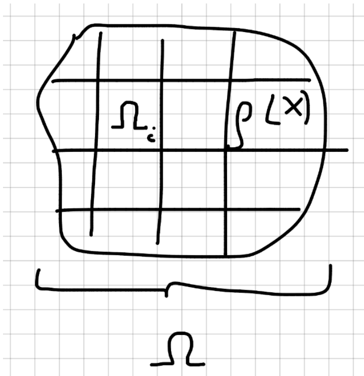
$$\left(\frac{1}{r_i}\right)_{xx} = \left(-\frac{1}{r_i^3}(x-x_i)\right)_x = -\frac{1}{r_i^3} + \frac{3}{r_i^4}\frac{\partial r_i}{\partial x}(x-x_i) = -\frac{1}{r_i^3} + \frac{3(x-x_i)^2}{r_i^5} \qquad (3.7)$$

складывая эту и аналогичные вторые производные по $y$ и $z$, мы получим:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (3.10)$$

это математическая модель гравитационного поля. это уравнение выполняется всюду, кроме той точки, где находится источник гравитационного поля.

применим схему матмоделирования.




$$\Omega_i, \Delta u_i, \overline{x}_i$$

$$u_{i(x)} = \gamma \frac{\rho(x_i)\Delta V_i}{|x-x_i|}$$

поле, создаваемое всеми кусочками:

$$u(x) = \gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{\rho(x_i)\Delta V_i}{|x-x_i|}$$

предельный переход:

$$u(x) = \gamma \int_{\Omega} \frac{\rho(\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x}}{|x-x_i|}$$

## электростатика

$\varphi$ потенциал электростатического поля

$$E = -\nabla\varphi$$

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_\varepsilon}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

электрическа проницаемость

$$\Delta u = -4\pi\rho$$

уравнение пуассона

$$\operatorname{div} \overline{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \overline{E} = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y}\right)\overline{k}$$

2025-03-05

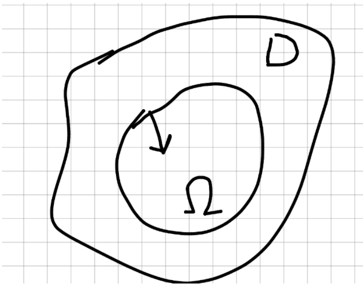
что-то про уравнение пуассо [я не успел записать]

## модели процессов переноса тепла и диффузии

матмодель распространения тепла, учитывающую диффузионный (за счёт движения молекул) и конвективный (за счёт простого движения жидкости) механизм.

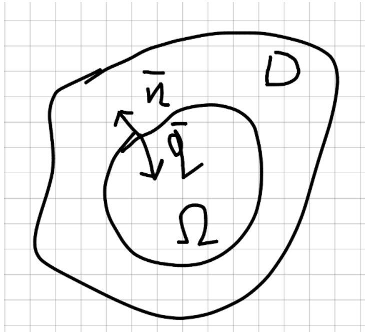
«не хватит камня горячего, чтобы пельмени сварить».

предоположим, что среда занимает область $D$ в нашем любимом пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором мы живём, существуем и так далее. за $\Omega$ обозначим огрниченную подобласть $D$. $\overline{q}(\overline{x}, t)$ — вектор потока тепла.




физический смысл в том, что с его помощью можно определить количество $Q_1$ тепла, вносимое в область $\Omega$ извне за время от $t_1$ до $t_2$.

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_\Gamma \overline{q} \cdot \overline{n} \,\mathrm{d}S \qquad (4.1)$$




нам в школе говорили, что мерой тепла является температура. но как связать вектор потока тепла $\overline{q}$ с температурой? первым был фурье, он предложил вот такую формулу:

$$\overline{q} = -k\nabla T \qquad (4.2)$$

$k$ — коэффициент теплопроводности.

**определение**

среда однородная, если её свойства не меняются в разных точках.

**определение**

среда изотропна в точке $x$, если её свойства одинаковы по всем направлениям, выходящим из $x$. в противном случае антизотропной.

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{\Gamma} \nabla T \cdot \overline{n} \, \mathrm{d}S$$

по формуле гаусса-остроградского:

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{\Omega} \operatorname{div} k\nabla T \, \mathrm{d}x \qquad (4.4)$$

предположим, что есть внутренние источники тепла с плотностью $F$:

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_{\Omega} F \, \mathrm{d}x \qquad (4.5a)$$

по закону сохранения тепла:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$Q_1$ за счёт диффузинного механизма, $Q_2$ — от источника.

тепло, которое необходимо для нагревания среды, занимающей $\Omega$, имеющую температуру $T_1$ в момент времени $t_1$ до температуры $T_2$ в момент времени $t_2$:

$$Q = \int_\Omega \rho c(T_2(x) - T_1(x))\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \rho c \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_\Omega \rho c \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}x \qquad (4.5)$$

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_\Omega \rho c \frac{\partial T}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int_\Omega (\operatorname{div} k\nabla T + F)\,\mathrm{d}x \qquad (4.6)$$

отсюда в силу произвольности области $\Omega$ мы получаем

$$\rho c \frac{\partial(T)}{\partial(t)} = \operatorname{div}(k\nabla T) + F \qquad (4.7)$$

это и есть искомая математическая модель распространения тепла.

**лемма**

пусть $\psi \in C(D) \mid \int_\Omega \psi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ \forall \Omega \subset D \ \Rightarrow \ \psi = 0$

модель мы вывели. в декартовой системе координат (дск) уравнение принимает вид:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial T}{\partial z}\right) + F \qquad (4.8)$$

если среда однородна, то:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f, \quad a^2 = \frac{k}{\rho c}, \quad f = \frac{F}{\rho c} \qquad (4.9)$$

это уравнение теплопроводности.

однородное уравнение теплопроводности $(F = 0)$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T \qquad (4.10)$$

выведем теперь модель, учитывающую и конвективный механизм переноса тепла. введём скорость $\overline{u}$

$$-T\overline{u}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}S$$

количество жидкости, протекающее в единицу времени через площадку $\mathrm{d}S$. тогда количество тепла, переносимое вот этой вот жидкостью за время от $t_1$ до $t_2$:

$$Q_3 = -\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int_{\Gamma}T\overline{u}\cdot\overline{n}\,\mathrm{d}S$$

закон сохранения энергии:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

теперь наш закон будет учитывать три (3) механизма.

мы должны взять уравнение, которое уже вывели и добавить ещё слагаемое:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k\nabla T) - \operatorname{div}(T\overline{u}) + F \qquad (4.19)$$

$$T = T_0(\overline{x}),\ x\in\Omega$$

$$T = g \text{ на } \Gamma, \text{либо } \frac{\partial T}{\partial n} = g \text{ на } \Gamma$$

но! есть ещё один механизм, в котором используются те же самые законы. это распространение различного рода загрязняющих веществ.

$$[C] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

закон фика. похож на закон фурье.

$$\overline{J} = -\eta\nabla C$$