

# **Mößbauer-Effekt**

## **Fortgeschrittenen-Praktikum II**

Adrian Hauber      Samuel Kellerer

22. April 2016

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Übersicht</b>	<b>3</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1 Instabile Kerne . . . . .	3
2.2 Wechselwirkung von Gamma-Quanten mit Materie . . . . .	4
2.3 Resonanzabsorption . . . . .	5
2.3.1 Ursachen der Linienverbreiterung und -aufspaltung . . . . .	6
2.4 Der Mößbauer-Effekt . . . . .	8
2.5 Eigenschaften der verwendeten Präparate . . . . .	9
2.6 Funktionsweise eines Szintillationszählers . . . . .	10
<b>3 Versuchsaufbau</b>	<b>11</b>
<b>4 Durchführung</b>	<b>12</b>
<b>5 Auswertung</b>	<b>14</b>
5.1 Bestimmung der Untergrundzählrate . . . . .	14
5.2 Energieeichung . . . . .	16
5.3 Abschwächung durch das Plexiglasfenster . . . . .	17
5.4 Berechnung der effektiven Absorberdicke . . . . .	18
5.5 Mößbauer-Messung . . . . .	19
5.5.1 Einlinienabsorber: Edelstahl . . . . .	19
5.5.2 Sechslinienabsorber: Natureisen . . . . .	22
<b>6 Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>27</b>

# 1 Übersicht

Im Versuch gelang es, rückstoßfreie Absorption zu beobachten. Aus den Transmissionspektren eines Natureisen- und eines Edelstahlabsorbers wurden die natürlichen Linienbreite, die Lebensdauer, der Debye-Waller-Faktor, das magnetische Moment und das Magnetfeld am Kernort bestimmt.

# 2 Theoretische Grundlagen

## 2.1 Instabile Kerne

Die Bausteine der Atomkerne sind die Protonen und Neutronen. Die Stabilität eines Kerns hängt vom Verhältnis der Anzahl der Protonen und Neutronen ab, sodass nur ein kleiner Teil der möglichen Kernkonfigurationen stabil ist.

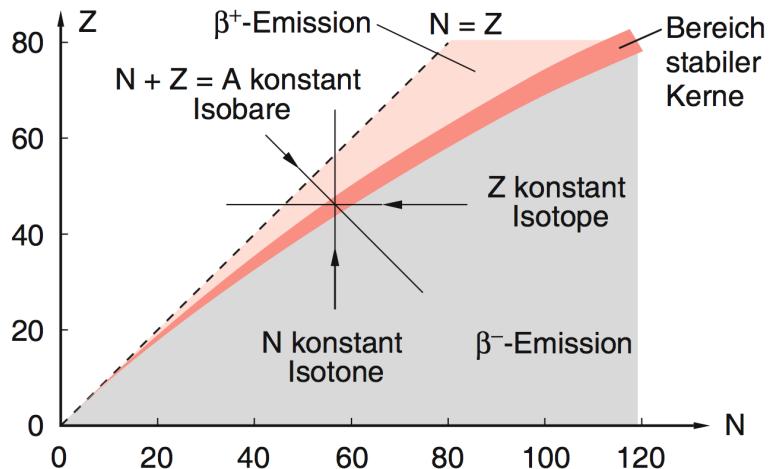


Abbildung 1: Bereich stabiler Kerne in rot. Aufgetragen ist die Protonenzahl gegen die Neutronenzahl. Aus [Dem13].

**Zerfallsgegesetz** Offenbar ist die Zerfallsrate  $\dot{N}$  zu jedem Zeitpunkt proportional zur Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne  $N$ , also

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t), \quad \lambda = \text{const.}, \quad (1)$$

sodass die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne einen exponentiellen Abfall beschreibt:

$$N(t) = N(0) \exp(-\lambda t) \quad (2)$$

**Zerfallsprozesse** Die Grundlegenden Zerfallsprozesse sind der  $\alpha$ -Zerfall, bei dem ein Heliumkern emittiert wird, der  $\beta^-$ -Zerfall, bei dem ein Elektron und ein Antielektronneutrino emittiert wird, sowie der  $\beta^+$ -Zerfall bei dem die entsprechenden Antiteilchen entstehen. Die genauen Einzelheiten dieser Zerfallsprozesse sollen hier nicht weiter erläutert werden.

Nach einem der oben genannten Zerfälle befindet sich der Kern im Allgemeinen in einem angeregten Zustand der Energie  $E^*$ . Durch Emission eines Photons kann der Kern in den Grundzustand  $E_0$  übergehen. Das Photon trägt damit die Energie

$$E_\gamma = E_a - E_g. \quad (3)$$

Man nennt das Photon dann auch  $\gamma$ -Quant.

## 2.2 Wechselwirkung von Gamma-Quanten mit Materie

Im Unterschied zu  $\alpha$ - und  $\beta$ - stellt  $\gamma$ -Strahlung eine elektromagnetische Welle dar, die nur indirekt nachgewiesen werden kann. Um die möglichen Methoden eines solchen Nachweises diskutieren zu können, muss zunächst geklärt werden, wie diese Teilchen überhaupt mit Materie wechselwirken.

**Photoeffekt** Trifft ein Photon der Energie  $h\nu$  auf ein gebundenes Elektron, kann es dieses aus dem Atom herausschlagen (falls  $h\nu > E_B$ , mit der Bindungsenergie  $E_B$ ). Das Elektron hat dann die Energie  $h\nu - E_B$  und dem Atom fehlt ein Elektron, es ist *ionisiert*. Ein Elektron aus den höheren Schalen kann nun auf den leeren Platz nachrücken und es kommt zur Emission von Röntgenstrahlung oder zum Auger-Effekt.

**Compton-Effekt** Nähert sich ein Photon einem Elektron, wird es an diesem gestreut, wobei es zu einer Energieübertragung kommt. Die Energie nach dem Stoß hängt nur vom Streuwinkel  $\theta$  ab:

$$h\nu_c = \frac{m_0 c^2}{1 - \cos \theta + m_0 c^2 / h\nu_0} \quad (4)$$

Dabei ist  $\nu_0$  die Frequenz des Photons vor dem Stoß. Man sieht leicht, dass das Maximum der Energie für  $\theta = \pi$  erreicht wird, also wenn das Photon gerade zurückgeworfen wird. Eine größere Energie kann also nicht durch Compton-Streuung übertragen werden. Die maximale Energie beträgt also:

$$E_{max} = \frac{E_\gamma}{1 + (2E_\gamma / m_0 c^2)} \quad (5)$$

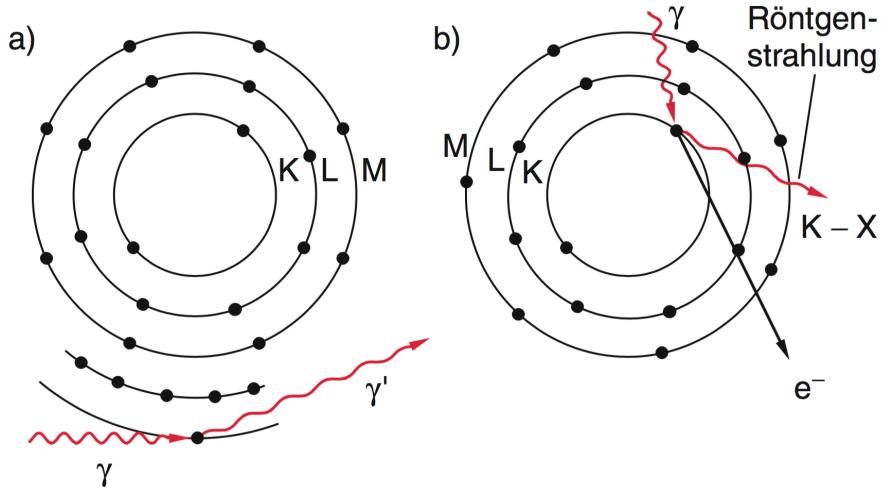


Abbildung 2: a) Compton-Streuung, b) Photoeffekt. Aus [Dem13].

**Paarbildung** Befindet sich ein  $\gamma$ -Quant im Feld eines Kerns, kann es spontan zu einer Paarbildung kommen: Aus dem  $\gamma$ -Quant entsteht ein Elektron-Positron-Paar. Eine einfache Energiebetrachtung zeigt, dass dieser Vorgang nur möglich ist, wenn die Energie des Quants die doppelte Ruheenergie eines Elektrons übersteigt. Das Positron wird jedoch schnell wieder von einem Elektron eingefangen und annihiliert mit diesem zu zwei oder drei  $\gamma$ -Quanten.

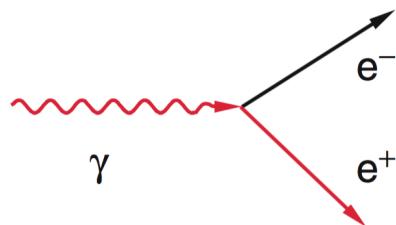


Abbildung 3: Feynman-Diagramm zum Prozess der Paarbildung. Aus [Dem13].

## 2.3 Resonanzabsorption

Betrachtet wird ein Atomkern in einem angeregten Zustand. Wie oben diskutiert, kann der Kern unter Aussendung eines  $\gamma$ -Quants entsprechender Energie in den Grundzustand gelangen. Wird nun ebendieses Quant von einem anderen Kern im Grundzustand absorbiert und damit dieser in den angeregten Zustand gehoben, spricht man von *Resonanzabsorption*.

**Freie Atome** Ein Photon trägt den Impuls  $p_\gamma = \hbar k$ , wobei  $k = |\mathbf{k}|$  den Betrag des Wellenvektors bezeichne. Ausgedrückt durch die Energie  $E = \hbar\omega$  erhält man mit der Dispersionsrelation  $\omega = ck$  einen Ausdruck für die Rückstoßenergie, also die Energie, die vom Kern bei der Emission eines Photons aufgenommen wird:

$$E_R = \frac{p_\gamma^2}{2m} = \frac{E_\gamma^2}{2mc^2} \quad (6)$$

Wird das Photon von einem anderen Kern absorbiert, so wird nochmals die Energie  $E_R$  übertragen. Insgesamt fehlt dem Photon also eine Energie von  $2E_R$ , sodass es nicht zu einer resonanten Absorption kommen sollte. Durch thermische Fluktuationen kann jedoch ein Kern gerade die richtige Energie für eine resonante Absorption besitzen.

Es bezeichne  $p_t$  die Komponente des durch thermische Bewegung verursachten Impulses in Emissionsrichtung. Dann folgt aus Energie- und Impulserhaltung:

$$E_0 + \frac{p_t^2}{2m} = E + \frac{(p_t - p)^2}{2m} \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \Delta E \equiv E_0 - E = \frac{p^2}{2m} - pv_t \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \Delta E = \frac{E^2}{2mc^2} - E \frac{v_t}{c} \quad (9)$$

Der erste Term in obiger Gleichung beschreibt die Rückstoßenergie, der zweite Term die Auswirkungen des Doppler-Effekts. Für breite Verteilungen von  $v_t$  hat dieses den Wert, der nötig ist, um die Rückstoßenergie gerade zu kompensieren, sodass  $\Delta E$  verschwindet. Es kommt dann zu Resonanzabsorption.

### 2.3.1 Ursachen der Linienverbreiterung und -aufspaltung

**Natürliche Linienbreite** Aus der Energie-Zeit-Unschärferelation  $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$  folgt für eine endliche Lebensdauer  $\tau$  des angeregten Zustands eine Linienbreite  $\Gamma$  von

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau}. \quad (10)$$

Man nennt diese auch *natürliche Linienbreite*. Durch die relative lange Lebensdauer der angeregten Kernzustände ist die natürliche Linienbreite verhältnismäßig klein.

**Doppler-Verbreiterung** Bisher wurde vorausgesetzt, dass Emitter- und Absorberatom relativ zueinander in Ruhe sind. Ist dies nicht der Fall, kommt der Doppler-Effekt zu tragen: Er verursacht eine Frequenzverschiebung, die wegen  $E = h\nu$  auch eine Energieverschiebung zur Folge hat. Es ergibt sich:

$$E = E_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (11)$$

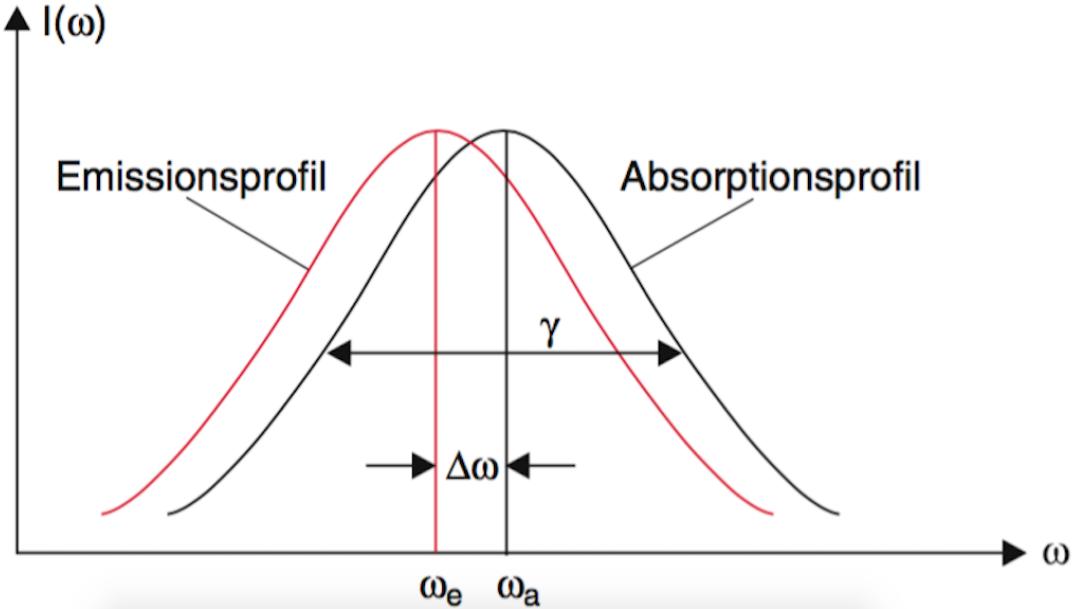


Abbildung 4: Überlappung von Emissions- und Absorptionslinie, aus [Dem13].

**Isomerie-Verschiebung** Die Ladungsdichte der Elektronenhülle überlagert sich mit derer des Kerns und erzeugt damit eine Verschiebung der Feldstärke am Kernort. Damit ändern sich auch die Energieniveaus des Kerns. Durch chemische Bindungen kann es zu Deformationen dieser Ladungsdichte kommen, wodurch die Energieniveaus verschoben werden. Sind nun die Atome in Emitter und Absorber an unterschiedlichen chemischen Bindungen beteiligt, so ist auch die Energieverschiebung eine andere. Diese Verschiebung heißt Isomerieverschiebung und liegt nach [MK02] etwa in der Größenordnung der natürlichen Linienbreite.

**Hyperfeinstrukturaufspaltung** Wird der Kern einem Magnetfeld ausgesetzt, ist die Entartung der Drehimpulszustände aufgehoben und jedes Energieniveau spaltet in  $2I + 1$  Unterniveaus auf. Die Energie eines Kerns im Magnetfeld lautet dann für ein Magnetfeld in  $z$ -Richtung ( $B_z \equiv B$ ):

$$E = -\frac{\mu_I m_I}{I} B \quad (12)$$

Dabei ist  $g_I$  der Kern-Lande-Faktor,  $\mu_K$  das Kernmagneton und  $m_I \in \{-I, \dots, +I\}$  die magnetische Quantenzahl. Aus dieser Aufspaltung der Energieniveaus (siehe auch Abbildung 5) resultiert also auch eine Aufspaltung der Absorptionslinien im Mößbauer-Spektrum.

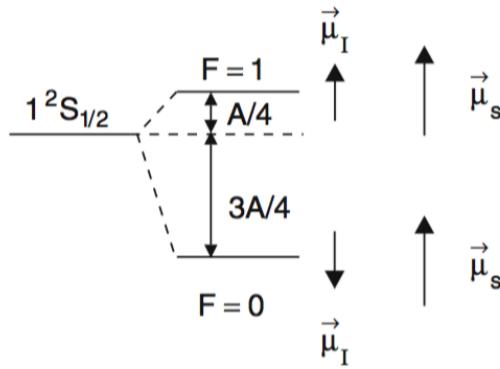


Abbildung 5: Hyperfeinstrukturaufspaltung des Wasserstoff-Grundzustands. Aus [Dem10]

## 2.4 Der Mößbauer-Effekt

Als Mößbauer-Effekt bezeichnet man die *rückstoßfreie Resonanzabsorption*. Um zu verstehen, wann es zu einer Absorption ohne Rückstoß kommen kann, müssen zunächst Modelle der Schwingungsnatur von Festkörpern diskutiert werden:

**Einstein-Modell** Jedes Atom im Kristall kann harmonische Schwingungen in allen drei Freiheitsgraden auszuführen. Im ganzen Kristall sei nur eine einzige Frequenz  $\omega$  erlaubt, sodass Energien nur dergestalt aufgenommen werden können, dass Vielfache eines Phonons der Energie  $\hbar\omega$  angeregt werden.

In Hinblick auf die Resonanzabsorption bedeutet dies, dass für die Rückstoßenergie nur ganz bestimmte Werte erlaubt sind. Für andere Energien kann lediglich eine Wahrscheinlichkeitsaussage darüber getroffen werden, ob ein Vielfaches von  $\hbar\omega$  oder keine Energie übertragen wird. Im zweiten Fall spricht man von *rückstoßfreier Emission*.

Nach diesem Modell sollte im Absorptionsspektrum also eine Linie bei der Übergangsentnergie des Emitters und um Vielfache von  $\hbar\omega$  verschobene Linien zu sehen sein. Dies spiegelt jedoch nicht die Beobachtungen wieder. Es liegt daher der Übergang zum genaueren Debye-Modell an:

**Debye-Modell** Im Gegensatz zum Einstein-Modell sagt das Debye-Modell Schwingungen mit allen Frequenzen bis zu einer Grenzfrequenz (Debye-Frequenz)  $\omega_D$  voraus (Langwellennäherung). Die Debye-Temperatur ist dann definiert als  $\Theta = \hbar\omega_D/k_B$ . Bei dieser Temperatur sind alle möglichen Schwingungsmoden angeregt.

Für den Bruchteil der rückstoßfreien Absorptionen, den sog. *Debye-Waller-Faktor*  $f$ , ergibt sich dann nach [MK02]:

$$f = \exp - \left[ \frac{3E_R}{2k\Theta} \left( 1 + \frac{4T^2}{\Theta^2} \int_0^{\Theta/2} \frac{x \mathrm{d}x}{e^x - 1} \right) \right] \quad (13)$$

Für Temperaturen  $T \ll \Theta$  ergibt sich:

$$f \approx \exp - \left[ \frac{E_R}{2k\Theta} \left( \frac{3}{2} + \frac{\pi^2 T^2}{\Theta^2} \right) \right] \quad (14)$$

Für die meisten Übergänge ist dieser Faktor schon für Temperaturen um 100K sehr klein, sodass rückstoßfreie Absorption schwer zu beobachten ist. Für den 14.4 keV-Übergang von  $^{57}\text{Fe}$  ist jedoch noch bei Zimmertemperatur  $f = 0,91$  [MK02], sodass hier keine Kühlung vonnöten ist.

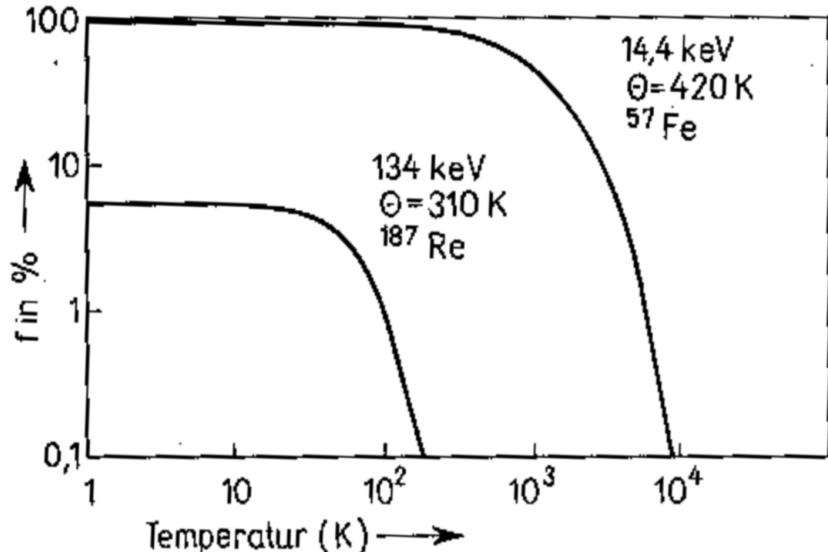
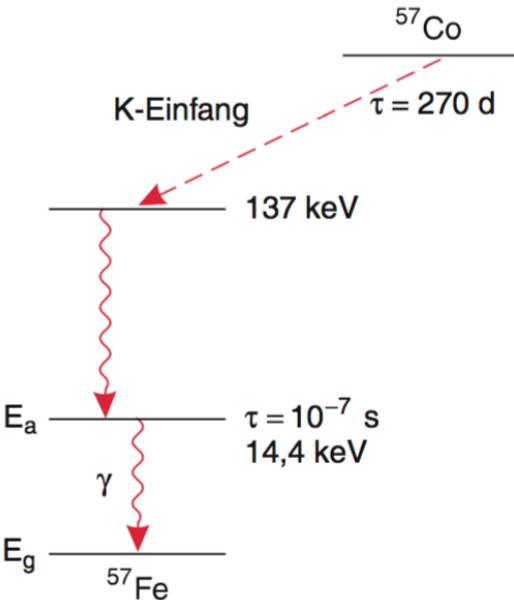


Abbildung 6: Debye-Waller-Faktor in Abhängigkeit der Temperatur, aus [MK02].

## 2.5 Eigenschaften der verwendeten Präparate

Im Versuch wird eine  $^{57}\text{Co}$ -Quelle verwendet. Wie Abbildung 7 zu entnehmen ist, zerfällt dieses zunächst durch Elektroneneinfang in den 137 keV-Zustand von  $^{57}\text{Fe}$ . Durch einen  $\gamma$ -Übergang entsteht nun der angeregte Zustand mit 14.4 keV. Von dort gehen die meisten Kerne über innere Konversion in den Grundzustand über. Lediglich etwa 10 % zerfallen durch Aussendung eines 14.4 keV-Photons.

Abbildung 7: Zerfallsschema von  $^{57}\text{Co}$ . Aus [Dem10]

## 2.6 Funktionsweise eines Szintillationszählers

Zur Detektion der transmittierten  $\gamma$ -Quanten wird im Versuch ein Szintillator (genauer: Szintillationszähler) verwendet. Dessen Funktionsweise soll im Folgenden kurz skizziert werden: Der Szintillationszähler besteht aus zwei Komponenten: Dem *Szintillator* zur Umwandlung der Strahlung (Teilchen oder energiereiche Photonen) in ein optisches Signal, und dem *Photomultiplier*, der das optische Signal in ein elektrisches umwandelt.

**Anorganische Szintillatoren**  $\gamma$ -Quanten können Elektronen aus dem Valenz- in das Leitungsband heben, oder - falls die Energie dafür nicht ausreicht - lose gebundene Elektron-Loch-Paare (Exzitonen) erzeugen. Sowohl die Elektronen im Leitungsband als auch die Exzitonen können sich frei durch das Kristall bewegen und rekombinieren bevorzugt an den sogenannten Aktivatorzentren (meist Dotierungsatome). Da diese anderen Energieniveaus besitzen als der restliche Kristall, erzeugen die dort rekombinierenden Elektronen und Exzitonen Photonen niedrigerer Energie als die einfallenden  $\gamma$ -Quanten. Die Wellenlänge der erzeugten Photonen liegt jetzt im sichtbaren oder nahen UV-Bereich. Verzichtete man auf die Dotierung, besäßen die erzeugten Photonen dieselbe Energie wie die einfallenden  $\gamma$ -Quanten und würden sofort wieder absorbiert werden; der Kristall wäre für sie undurchlässig.

**Organische Szintillatoren** In organischen Szintillatoren (z.B. Plastiksintillatoren) spielt sich ein ähnlicher Prozess in höheren Größenordnungen ab: Die  $\gamma$ -Quanten erzeugen geladene Teilchen im Szintillator, welche die Moleküle des Szintillator in einen angeregten Zustand versetzen. Bevorzugt an Molekülen der Aktivatorsubstanz (mit anderen Energieniveaus als die restlichen Moleküle) fallen diese zurück in den Grundzustand und emittieren Photonen, die wegen der geringen Dichte an Aktivatormolekülen nicht mehr reabsorbiert werden und den Szintillator verlassen können.

**Photomultiplier** Die Photonen treffen zunächst auf eine Kathode, wo sie wegen des Photoeffekts Elektronen auslösen können. Durch eine angelegte Spannung werden diese in Richtung einer weiteren Elektrode (Dynode) beschleunigt, wo weitere Elektronen herausgeschlagen werden. Bis zur dritten Dynode steigt das Potential weiter, sodass sich der Vorgang wiederholt. Es kommt zu einem kaskadenartigen Verhalten, bei dem immer mehr Elektronen auf die jeweils nächste Dynode treffen. Schließlich treffen die Elektronen auf die Anode, wo sie über einen Widerstand als Spannungsabfall detektiert werden können. Auf diese Weise lassen sich auch schwache optische Signale gut messbar machen.

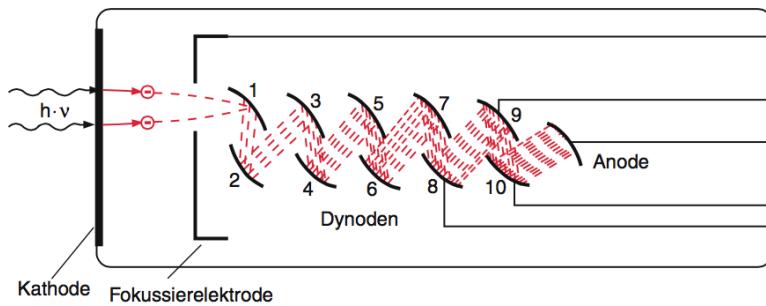


Abbildung 8: Schematische Darstellung eines Photomultipliers. Aus [Dem13]

### 3 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 9 schematisch gezeigt. Eine radioaktive Quelle sendet Photonen aus, die auf verschiedene Absorber treffen, die ihrerseits auf einem fahrbaren Schlitten befestigt sind. Der Schlitten kann mit einem Linearmotor in eine Bewegung konstanter Geschwindigkeit versetzt werden. Hinter dem Schlitten befindet sich ein Szintillator, der die ankommenden Photonen in elektrische Impulse umsetzt.

Das entstehende Signal wird nun zunächst auf den Hauptverstärker gegeben, um seine Amplitude zu erhöhen. Danach wird das Signal aufgeteilt: Ein Teil läuft in den Einkanal-analysator (SCA), der nur dann ein Signal ausgibt, wenn die Energie des registrierten Impulses in einem zuvor eingestellten Fenster liegt. Der andere Teil wird verzögert, sodass beide Signale zeitgleich am Gate ankommen. Dieses wird vom ersten Signal genau dann

geöffnet, wenn die Energie im gewünschten Bereich liegt. Das zweite Signal kann dann passieren und wird auf den Vielkanalanalysator (MCA) gegeben. Das Ergebnis kann an einem Computer analysiert werden.

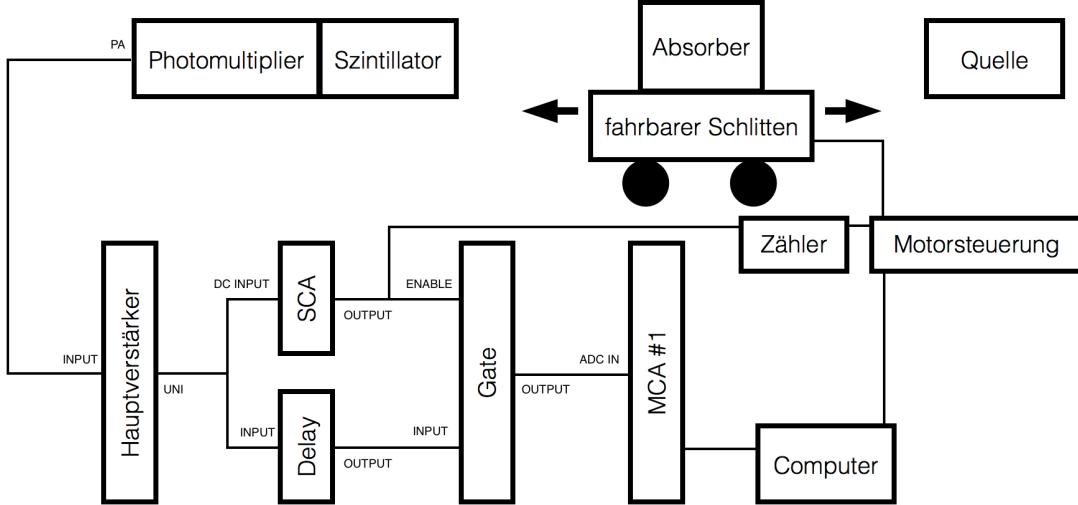


Abbildung 9: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus

## 4 Durchführung

**Aufbau der Schaltung** Als erstes wurde die Schaltung wie im obigen Kapitel beschrieben aufgebaut. Zur Vermeidung von Fehlern in späteren Versuchsteilen wurde mithilfe eines Oszilloskops das Signal nach jedem Bauteil kontrolliert (siehe Abbildung 10).

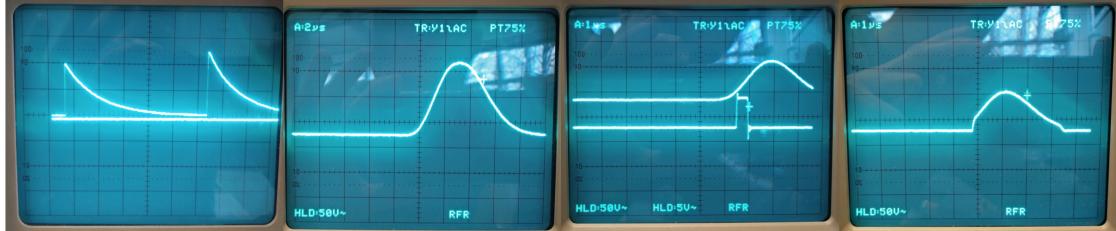


Abbildung 10: Ausgangssignal des Photomultipliers, des Hauptverstärker, Signale von SCA und Delay, Ausgangssignal des Gates (von links).

**Energieeichung** Um in den weiteren Versuchsteilen die Kanäle des Vielkanalanalysators den Energien zuordnen zu können, ist eine Energieeichung notwendig. Dazu wurden die  $K_{\alpha}$ -Linien der Metalle Rubidium, Molybdän, Silber, Barium und Terbium aufgenommen. Dazu stand eine Americiumquelle zur Verfügung, deren Target über einen

Drehmechanismus eingestellt werden konnte. Die Messungen wurden jeweils mit einer *live time* von 480 s durchgeführt.

**Einstellen des Fensterdiskriminators** Damit in den Mößbauer-Messungen nur Photonen der Energie 14.4 keV registriert werden, ist der Fensterdiskriminator auf diese Energie einzustellen. Dazu wurde zunächst das gesamte Eisenspektrum aufgenommen und die entsprechende Linie identifiziert. Das obere und das untere Niveau des Einkanalanalysators (Fensterdiskriminator) wurden dann solange variiert, bis nur noch der 14.4 keV-Peak zu sehen war. Dabei wurde versucht, den Nebenpeak mit leicht höherer Energie möglichst aus dem Fenster zu entfernen, weshalb der gewünschte 14.4 keV-Peak nicht ganz symmetrisch erscheint. Damit ergab sich die Einstellung von 0,9 für das untere, 1,1 für das obere Niveau und ein Delay von 1,0.

**Messung des Compton-Untergrunds** Um den Compton-Untergrund später berücksichtigen zu können, wurde eine eigene Messreihe durchgeführt. Dabei wurden Absorberbleche mit Dicken von 0.23 mm bis 7.95 mm vor den Szintillator gestellt und Anzahl der registrierten Zerfälle gemessen. Die Messzeit betrug dabei stets 250 s (*live time*).

**Messung der Abschwächung durch das Plexiglasfenster** Die Absorberproben sind in einer Plexiglasschicht eingeschlossen, welche eine zusätzlich Abschwächung bewirkt. Um diese zu bestimmen, war es notwendig, eine weitere Messung durchzuführen, in der ohne Absorber nur ein Plexiglasfenster zwischen Quelle und Szintillator eingebracht wurde.

**Messung des Untergrunds durch kosmische Strahlung** Um weiterhin Untergrundstrahlung aus anderen Quellen wie etwa kosmische Strahlung zu berücksichtigen, wurde eine Messung mit isolierter Quelle und einer Messdauer von 62 922 s (etwa 17.5 h) durchgeführt.

**Mößbauer-Messung** Zur Bestimmung der Linienbreite, der Isomerieverziehung, des Magnetfelds am Kernort, des magnetischen Moments und des Debye-Waller-Faktors dienen die Mößbauer-Messungen. Dabei wurde zunächst der Einlinienabsorber (Edelstahl) am fahrbaren Schlitten angebracht. Unter Variation der Geschwindigkeit, welche automatisch von der Motorsteuerung vorgenommen wurde, wurde die Zählrate gemessen. Es wurde dabei in der Geschwindigkeit ein Bereich von  $\pm 2 \text{ mm s}^{-1}$  abgedeckt.

Für den Sechslienabsorber (Natureisen) war ein anderes Vorgehen vonnöten. Da sich die Absorptionslinien im gesamten Bereich von etwa  $\pm 10 \text{ mm s}^{-1}$  erstreckten, wurde die Geschwindigkeit in diesem Bereich variiert.

In verschiedenen Messreihen wurde die Messzeit pro Geschwindigkeit auf bis zu 500 s erhöht, woraus Messzeiten von bis zu 23 h resultierten. Zum Problem wurde dabei die Instabilität des verwendeten *LabView*-Programms zur Motorsteuerung: Mehrmals kam es zu einem Programmabsturz, sodass die Messung neu gestartet werden musste. Auch war es bei den ersten Messungen nicht möglich, die ersten und letzten beiden Messpunkte in die Ausgabedatei aufzunehmen. Durch mehrfaches Neustarten des Programms konnte dieses Problem jedoch behoben werden.

## 5 Auswertung

### 5.1 Bestimmung der Untergrundzählrate

**Compton-Untergrund**  $\gamma$ -Quanten höherer Energie, können wegen des Compton-Effekts trotzdem in das eingestellte Fenster fallen. Um dieser Tatsache Sorge zu tragen, muss nun mit den Daten der entsprechenden Messreihe eine Compton-Untergrundrate bestimmt werden, die von den Mößbauer-Messungen abzuziehen ist. Dazu wurden die Ereignisse für jede Absorberdicke zu einer Ereigniszahl  $N$  aufsummiert, sodass für die Zählrate  $\dot{N}$  gilt<sup>1</sup>:

$$\dot{N} = \frac{N}{t} \quad s_{\dot{N}} = \sqrt{\frac{N}{t}} \quad (15)$$

Um die Zählrate bei einer Dicke  $x = 0$  zu bestimmen, ist die Zählrate gegen die Absorberdicke aufzutragen (siehe dazu Abbildung 11).

Es werden hier hauptsächlich Photonen der Energie  $E_1 = 14.4 \text{ keV}$  und  $E_2 = 122 \text{ keV}$  registriert, die durch die Aluminiumbleche unterschiedlich stark abgeschwächt werden. Daher ist es naheliegend, an die Messdaten die Überlagerung zweier Exponentialfunktionen anzupassen, also eine Funktion der Form

$$\dot{N}(x) = A_1 \exp(-x/t_1) + A_2 \exp(-x/t_2) + y_0, \quad (16)$$

mit  $t_1 < t_2$ . Der Term  $A_2 \exp(-x/t_2) + y_0$  beschreibt dann den Verlauf der Kurve der in der Messung unerwünschten Photonen höherer Energie. Extrapoliert man nun diesen Term auf  $x = 0$ , erhält man die bei der Mößbauer-Messung mitaufgenommene Compton-Zählrate  $\dot{U}_C$ :

$$\dot{U}_C = A_2 + y_0 \quad s_{\dot{U}_C} = \sqrt{s_{A_2}^2 + s_{y_0}^2} \quad (17)$$

Damit ergibt sich ein Zahlenwert von

$$\dot{U}_C = (16.08 \pm 1.18) \text{ 1/s.}$$

---

<sup>1</sup>Hierbei wird eine Poissonverteilung angenommen.

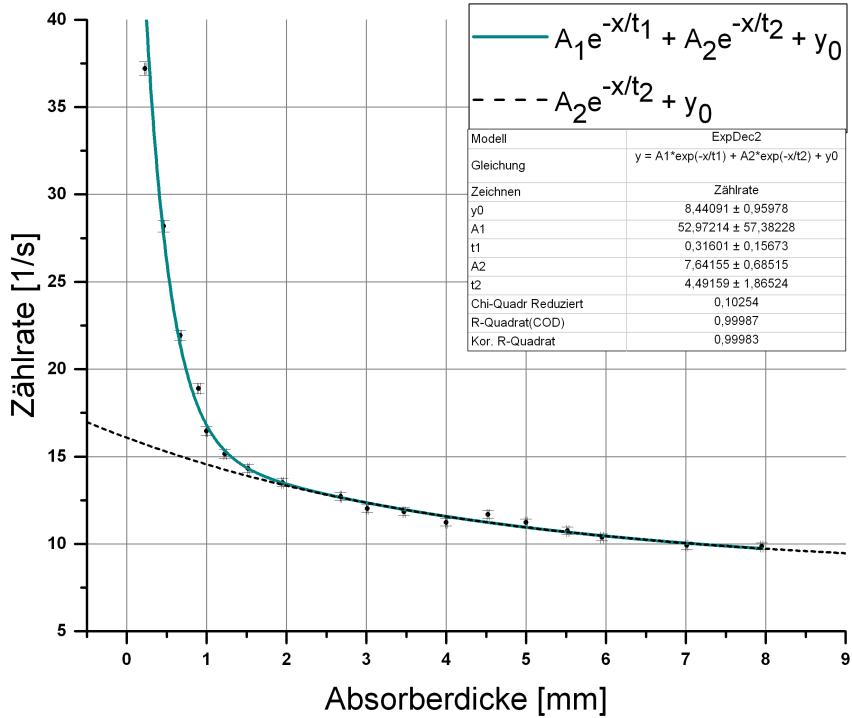


Abbildung 11: Anpassung einer Überlagerung zweier Exponentialfunktionen zur Bestimmung der Compton-Untergrundrate bei  $x = 0$ .

**Untergrund aus weiteren Quellen** Weitere vom Szintillator registrierte Ereignisse werden von kosmischer, terrestrischer Strahlung, etc. erzeugt. Um diese natürliche Untergrundzählrate  $\dot{U}_N$  zu subtrahieren, wurden die Ereignisse aller Kanäle des Vielkanalanalysators (bei aktiver Filterung durch den Fensterdiskriminator) zu einer Gesamt-Ereigniszahl  $N$  aufsummiert<sup>2</sup>, aus der sich die Untergrundzählrate über

$$\dot{U}_N = \frac{N}{t} \quad s_{\dot{U}_N} = \frac{\sqrt{N}}{t} \quad (18)$$

berechnet, mit einem Ergebnis von

$$\dot{U}_N = (0.097 \pm 0.001) \text{ 1/s.} \quad (19)$$

<sup>2</sup>Die Untergrundzählrate ergab sich als einigermaßen über die Kanäle gleichverteilt, was dieses Vorgehen rechtfertigt.

Somit lässt sich nun eine totale Untergrundrate  $\dot{U}$ , also die Summe der Compton- und der natürlichen Rate, bestimmen:

$$\dot{U} = \dot{U}_C + \dot{U}_N \quad s_{\dot{U}} = \sqrt{s_{\dot{U}_C}^2 + s_{\dot{U}_N}^2} \quad (20)$$

Damit ist nun die totale Untergrundrate gegeben, die von den Raten der Mößbauer-Messungen subtrahiert wird:

$$\dot{U} = (16.18 \pm 1.18) \text{ 1/s}$$

## 5.2 Energieeichung

Da die Messdaten in einem Kanal-Ereignisse-Histogramm vorliegen, müssen die Kanäle zunächst auf Energien umgerechnet werden. Es wird ein linearer Zusammenhang der Form

$$E(K) = a + bK \quad (21)$$

erwartet. Um die beiden Konstanten  $a$  und  $b$  zu erhalten, werden die bekannten  $K_\alpha$ -Linien von Rubidium, Molybdän, Silber, Barium und Terbium verwendet, einzusehen in Tabelle 1. Zur Bestimmung des Kanals einer Linie, wurde ein Gauß-Fit der Form

$$N(K) = N_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(K - \mu)^2}{\sigma^2}\right) \quad (22)$$

mit durchgeführt. Da die Fehler auf  $\mu$ , also die Position der Linien, extrem klein sind, wurde für diesen Fehler ein Wert von  $s_\mu = 4$  Kanälen abgeschätzt. Eine grafische Darstellung der Fits und deren Ergebnisse findet sich im Anhang. Deren Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle 1 eingetragen.

Target	$K_\alpha$ -Energie [keV]	zugeordneter Kanal
Rb	13,37	128,98
Mo	17,44	184,29
Ag	22,10	243,65
Ba	32,06	352,58
Tb	44,23	502,69

Tabelle 1: Energien der  $K_\alpha$ -Linien der verschiedenen Targets und zugordnete Kanäle

Trägt man nun diese Datenpunkte in einem  $K$ - $E$ -Diagramm auf, kann man durch einen linearen Fit die Parameter  $a$  und  $b$  erhalten (siehe Abbildung 12). Die Fitparameter lauten dann

$$\begin{aligned} a &= (2.216 \pm 1.107) \text{ keV}, \\ b &= (0.084 \pm 0.004) \text{ keV}. \end{aligned}$$

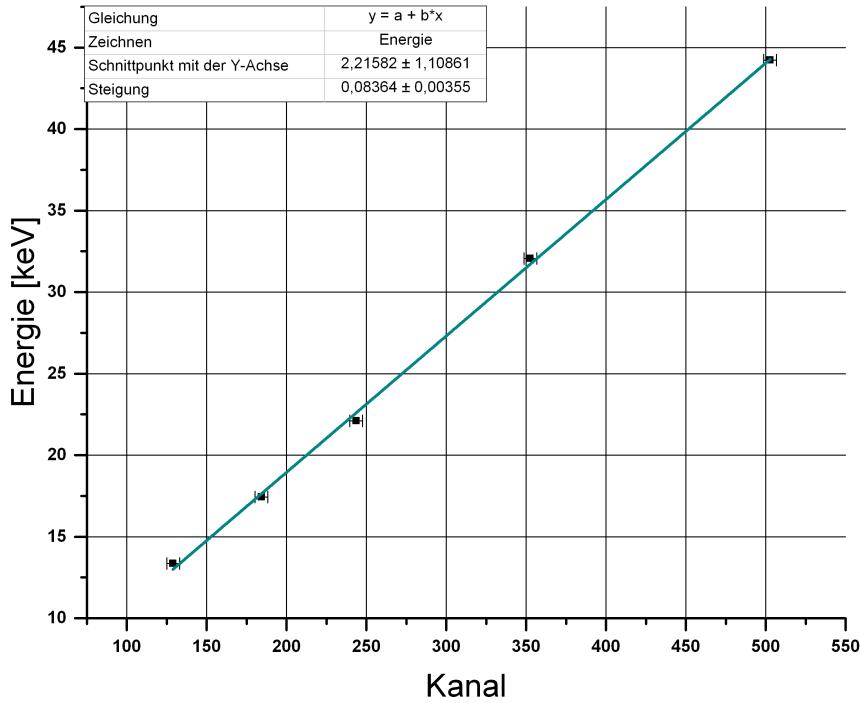


Abbildung 12: Fit für den linearen Kanal-Energie-Zusammenhang.

Für den Zusammenhang zwischen  $K$  und  $E$  gilt damit:

$$E(K) = 2.216 \text{ keV} + 0.084 \text{ keV} \cdot K \quad (23)$$

Der Fehler auf die Energie der Linien  $E$  berechnet sich dann zu:

$$s_E = \sqrt{s_a^2 + s_{bK}^2} = \sqrt{s_a^2 + b^2 s_K^2 + K^2 s_b^2} \quad (24)$$

### 5.3 Bestimmung der Abschwächung durch das Plexiglasfenster

Durch Vergleich der Anzahl der vom Szintillator mit und ohne Plexiglasfenster registrierten Ereignisse kann dessen Abschwächung berechnet werden. Sei  $N_{\text{PG}}$  die Anzahl der Ereignisse mit, und  $N$  die Anzahl der Ereignisse ohne Plexiglasfenster. Dann gilt für den Transmissionskoeffizienten:

$$T = \frac{N_{\text{PG}}}{N} \quad s_T = T \sqrt{\frac{1}{N_{\text{PG}}} + \frac{1}{N}} \quad (25)$$

Es ergibt sich also

$$T = 0.7604 \pm 0.0074.$$

Aus der Dicke  $d=2.0 \pm 0.1$ , der Dichte von  $1.19 \text{ g/cm}^3$  und dem Massenabschwächungskoeffizient  $\mu/\rho=1.101 \text{ cm}^2/\text{g}$  (bei einer Energie von 15 keV) lässt sich ebenso eine theoretische Vorhersage für diesen Wert treffen:

$$T = \exp\left(-\frac{\mu}{\rho}pd\right) \quad s_T = -\frac{\mu}{\rho}\rho \exp\left(-\frac{\mu}{\rho}pd\right) \quad (26)$$

$$T = 0.769 \pm 0.001$$

Der Massenabschwächungskoeffizient wurde dabei als fehlerlos angenommen, da die Energie im eingestellten Fenster nur wenig variiert. Der aus den Messdaten und der theoretisch berechnete Wert liegen im Bereich von zwei Standardabweichungen. Der ermittelte Wert erscheint also plausibel.

## 5.4 Berechnung der effektiven Absorberdicke

Der Zusammenhang aus [Heb68] für den effektiven Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_0 = \frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{2I_a + 1}{2I_g + 1} \frac{1}{1 + \alpha} \quad s_{\sigma_0} = \sigma_0 \frac{s_\alpha}{1 + \alpha}, \quad (27)$$

ergibt mit den Kernspinquantenzahlen  $I_a = 3/2$  und  $I_g = 1/2$ , dem Konversionskoeffizienten  $\alpha = 8.9 \pm 0.7$  und der Resonanzwellenlänge  $\lambda = c/\omega_0 = \hbar c/14.4 \text{ keV}$

$$\sigma_0 = (2.38 \pm 0.17) 10^{-22} \text{ m}^2.$$

Damit lässt sich nun die effektive Absorberdicke  $T_A$  berechnen. Die folgenden Größen wurden dabei verwendet:

Debye-Waller-Faktor (bei 20°C)	$f_A = 0.8$
Anzahl der Eisenatome pro $\text{cm}^3$	$n_A = (5.93 \pm 0.29) 10^{22}/\text{cm}^3$
Anteil von $\text{Fe}^{57}$	$\beta = 0.022$
Konversionskoeffizient	$\alpha = 8.9 \pm 0.7$
Absorberdicke	$d = 25 \mu\text{m}$

Die Zahl der Eisenatome pro Volumen wurde mit der atomaren Teilchendichte von Eisen aus [Lei13] über  $n_A = (0.70 \pm 0.05) \cdot 8.47 10^{22}/\text{cm}^3$  berechnet.

Die effektive Absorberdicke ergibt sich zu

$$T_A = f_A n_A \beta \sigma_0 d_A \quad s_{T_A} = T_A \sqrt{\left(\frac{s_{N_A}}{N_A}\right)^2 + \left(\frac{s_{\sigma_0}}{\sigma_0}\right)^2}, \quad (28)$$

mit einem Zahlenwert von

$$T_A = 6.22 \pm 0.54.$$

## 5.5 Mößbauer-Messung

Die Ergebnisse der Mößbauer-Messung wurden in den Abbildungen 13 und 14 geplottet. Die zuvor berechnete effektive Untergrundrate (abzüglich Abschwächung durch das Plexiglasfenster) ist dabei schon abgezogen. Die aufgetragenen Raten berechnen sich daher wie folgt:

$$\dot{N} = \dot{N}_{\text{mess}} - \dot{U} \quad s_{\dot{N}} = \sqrt{\dot{N}_{\text{mess}}/t^2 + s_{\dot{U}}^2} \quad (29)$$

### 5.5.1 Einlinienabsorber: Edelstahl

Die Zählraten wurden in Abbildung 13 gegen die Geschwindigkeiten aufgetragen. Zunächst wurde ein Fit mit einer Lorentz-Funktion durchgeführt. Auch durch Betrachtung mit dem bloßen Auge wird klar, dass das Voigt-Profil besser zu den Messdaten passt. Dieses Vorgehen ist außerdem zum einen in der von Null verschiedenen Quelldicke und zum anderen in Geschwindigkeitsschwankungen des Absorberschlittens begründet.

**Voigt-Fit** Zur Berechnung der natürlichen Linienbreite wird der Lorentz-Anteil der Breite  $w_L$  herangezogen. Man kann nun eine Quelldicke  $d_Q = 0$  annehmen, da der Einfluss dieser schon durch den Voigt-Fit berücksichtigt wurde. Nach Umrechnung in eine Energie mit  $\Gamma' = E_0 w_L / c$  kann man die natürliche Linienbreite durch

$$\Gamma = \frac{E_0 w_L}{2c} \quad s_{\Gamma} = \frac{E_0}{2c} s_{w_L} \quad (30)$$

berechnen. Die Umrechnung in Lebensdauern erfolgt nach Gleichung 10:

$$\tau = \hbar/\Gamma \quad s_{\tau} = \frac{\tau}{\Gamma} s_{\Gamma} \quad (31)$$

Die Ergebnisse lauten damit:

$$\begin{aligned} \Gamma &= (14.02 \pm 1.81) 10^{-9} \text{ eV} \\ \tau &= (46.94 \pm 6.06) \text{ ns} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Isomerieverschiebung ist die Lage des Voigt-Minimums  $x_c$  zu betrachten. Nach Umrechnung in eine Energieverschiebung mit  $\Delta E = E_0 v/c$  folgt:

$$\Delta E_{\text{iso}} = (1.0 \pm 0.1) \text{ eV} \quad (32)$$

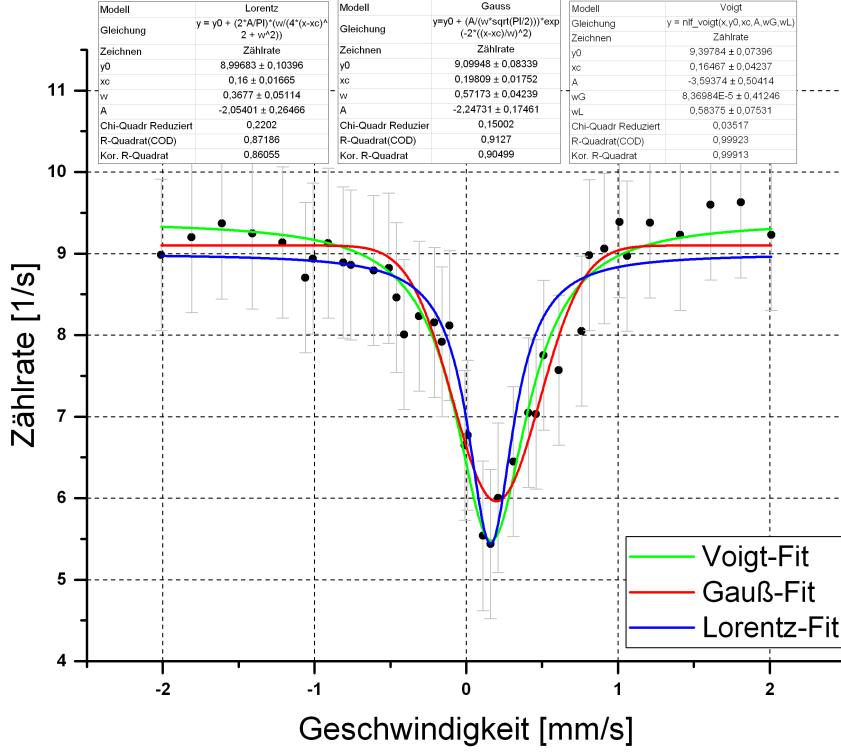


Abbildung 13: Fits des Transmissionsspektrums des Einlinienabsorbers

**Polynomielle Näherung nach Heberle** Nach [Heb68] lässt sich die Linienbreite auch als Polynom in der effektiven Absorberdicke  $T_A$  nähern. Damit erhält man:

$$\Gamma = \frac{w_L/2}{a + bT_A + cT_A^2 + dT_A^3 + eT_A^4} \quad (33)$$

$$s_\Gamma = \Gamma \sqrt{\left(\frac{s_{wL}}{w_L}\right)^2 + \frac{2\Gamma s_{T_A}^2 (b^2 + 4c^2 + 9d^2 + 16e^2)}{w_L}} \quad (34)$$

Dabei ist  $\Gamma'$  wieder die Breite  $w_L$  in Einheiten der Energie. Da der relative Fehler  $s_{T_A}/T_A \approx 9\%$  sehr viel größer ist als die von HEBERLE angegebene Ungenauigkeit von 0.14 %, ist diese nicht beitragend und wird daher vernachlässigt. Die Konstanten  $a, b, c,$

$d$  und  $e$  sind im Folgenden aufgeführt; sie wurden aus [Heb68] übernommen:

$$\begin{aligned}a &= 1 \\b &= 0.1288 \\c &= 4.733 \cdot 10^{-3} \\d &= -9.21 \cdot 10^{-4} \\e &= 3.63 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der folgende Wert für die natürliche Linienbreite:

$$\Gamma = (7.72 \pm 1.07) 10^{-9} \text{ eV}$$

**Berechnung nach Frauenfelder** Nach [MK11] lässt sich die Quelldicke  $d_Q$  mit einigen hundert Angström abschätzen. Die effektive Quelldicke  $T_Q$  berechnet sich dann analog zu  $T_A$  nach Gleichung 28. Da  $d_Q$  noch um den Faktor 1000 kleiner ist als  $d_A$ , erscheint die Näherung  $T_Q \approx 0$  gerechtfertigt.

Mit der Grafik aus [Fra63, p. 135] lässt sich direkt ein Wert für die relative Verbreiterung bestimmen. Als Fehler wurde die Ablesegenauigkeit herangezogen:

$$\zeta \equiv \frac{\Gamma'}{\Gamma} = 3.61 \pm 0.05$$

Über den Zusammenhang

$$\Gamma = \frac{\Gamma'}{\zeta} \quad s_\zeta = \zeta \sqrt{\left(\frac{s_{\Gamma'}}{\Gamma'}\right)^2 + \left(\frac{s_\zeta}{\zeta}\right)^2} \quad (35)$$

erhält man den Zahlenwert

$$\Gamma = (7.77 \pm 1.01) 10^{-9} \text{ eV.}$$

**Ergebnisse der Berechnungen der Linienbreite** In Tabelle 2 sind die Ergebnisse für Linienbreite  $\Gamma$  und Lebensdauer  $\tau$  aus den verschiedenen Methoden zur Berechnung derselben aufgeführt.

	Voigt-Fit	Polynomielle Näherung (nach J. Heberle)	Relative Verbreiterung (nach H. Frauenfelder)
Linienbreite $\Gamma/10^{-9} \text{ eV}$	$14.02 \pm 1.81$	$7.72 \pm 1.07$	$7.77 \pm 1.01$
Lebensdauer $\tau/\text{ns}$	$46.94 \pm 6.06$	$85.29 \pm 6.52$	$84.73 \pm 6.09$

Tabelle 2: Ergebnisse der Berechnungen der Linienbreite

**Berechnung des Debye-Waller-Faktors der Quelle** Unter Verwendung des Zusammenhangs

$$\frac{\dot{N}(\infty) - \dot{N}(v_{\text{iso}})}{\dot{N}(\infty)} = f_Q [1 - \exp(-T_A/2) J_0(iT_A/2)] \quad (36)$$

aus [SM] kann ein Ausdruck für  $f_Q$  aufgestellt werden. Die Zählrate im Unendlichen  $\dot{N}(\infty)$  entsprechen dann dem Fitparameter  $y_0$ ,  $J_0(x)$  ist die Besselfunktion nullter Ordnung. Man erhält mit der Abkürzung  $\dot{N}(v_{\text{iso}}) \equiv \dot{N}_{\text{iso}}$ :

$$f_Q = \frac{y_0 - \dot{N}_{\text{iso}}}{y_0(1 - \exp(-T_A/2) J_0(iT_A/2))} \quad (37)$$

Der Fehler berechnet sich dann wie folgt:

$$s_{f_Q} = \sqrt{\left(\frac{\partial f_Q}{\partial T_A} s_{T_A}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_Q}{\partial y_0} s_{y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_Q}{\partial \dot{N}_{\text{iso}}} s_{\dot{N}_{\text{iso}}}\right)^2} \quad (38)$$

Dabei gilt für die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f_Q}{\partial T_A} = -\frac{y_0(\dot{N}_{\text{iso}} + y_0) \left( e^{-\frac{T_A}{2}} J_0(iT_A/2)/2 - \frac{i}{4} e^{-\frac{T_A}{2}} (J_{-1}(iT_A/2) - J_1(iT_A/2)) \right)}{y_0^2 (1 - e^{-\frac{T_A}{2}} J_0(iT_A/2))^2} \quad (39)$$

$$\frac{\partial f_Q}{\partial y_0} = \frac{y_0(1 - e^{-\frac{T_A}{2}} J_0(iT_A/2)) - (y_0 - \dot{N}_{\text{iso}})(1 - e^{-\frac{T_A}{2}} J_0(iT_A/2))}{y_0^2 (1 - e^{-\frac{T_A}{2}} J_0(iT_A/2))^2} \quad (40)$$

$$\frac{\partial f_Q}{\partial \dot{N}_{\text{iso}}} = -\frac{1}{y_0(1 - e^{-\frac{T_A}{2}} J_0(iT_A/2))} \quad (41)$$

Für den Debye-Waller-Faktor und dessen Fehler ergibt sich

$$f_Q = 0.55 \pm 0.04.$$

### 5.5.2 Sechslinienabsorber: Natureisen

Die Messdaten für den Sechslinienabsorber Natureisen wurden - wie zuvor - zunächst mit einer sechsfachen Überlagerung der Voigt-Funktion gefittet. Das Ergebnis ist in Abbildung 20 im Anhang einzusehen. Bei Betrachtung der Fitparameter fallen jedoch deutliche Unterschiede zwischen den Lorentz-Weiten zweier Dips eines Paares auf. Begründet ist dies vermutlich in der starken Streuung der Messdaten.

In diesem Fall wurde daher auf einen Voigt-Fit verzichtet, und stattdessen die sechsfache Überlagerung einer Lorentz-Funktion angepasst (siehe Abbildung 14). In Anbetracht der großen Unsicherheiten der Messdaten sollte dies in Bezug auf die zu ermittelnden Größen zu keinen starken Abweichungen führen.

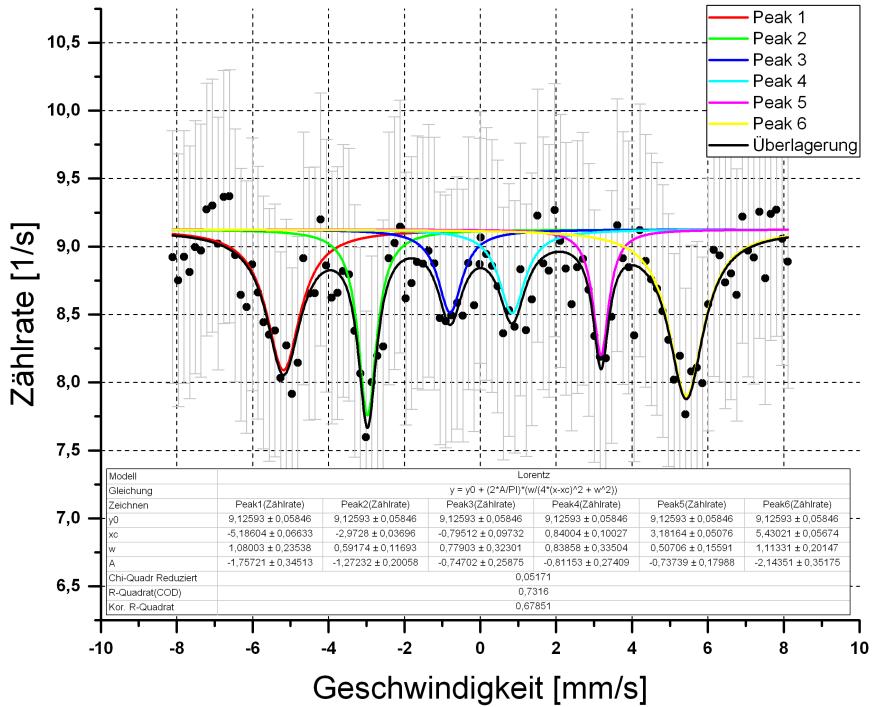


Abbildung 14: Fit des Transmissionsspektrums des Sechslinienabsorbers

**Berechnung der Linienbreiten** Mit der zuvor bestimmten relativen Verbreiterung von  $\zeta = 3.61 \pm 0.05$  lassen sich nun aus den Breiten der einzelnen Lorentz-Fits die natürlichen Linienbreiten und über den bekannten Zusammenhang die Lebensdauern bestimmen:

Dip	Linienbreite $\Gamma/10^{-9}\text{eV}$	Lebensdauer $\tau/\text{ns}$
1	$14.37 \pm 3.14$	$45.79 \pm 1.00$
2	$7.87 \pm 1.56$	$83.58 \pm 1.66$
3	$10.370 \pm 4.301$	$63.49 \pm 2.64$
4	$11.16 \pm 4.46$	$58.98 \pm 2.36$
5	$6.75 \pm 2.08$	$97.54 \pm 3.00$
6	$14.82 \pm 2.69$	$44.43 \pm 0.81$

Tabelle 3: Linienbreiten und Lebensdauer der Dips des Sechslinienabsorbers

Das gewichtete Mittel dieser Werte lautet

$$\bar{\Gamma} = (9.56 \pm 1.01) 10^{-9} \text{ eV} \quad \bar{\tau} = (52.48 \pm 5.47) \text{ ns.} \quad (42)$$

Für die Energien der Dips gilt nun

$$E_i = E_{\text{iso}} - E_{\text{HFS}} = E_{\text{iso}} - \left( \frac{\mu_a m_a^{(i)}}{I_a} - \frac{\mu_g m_g^{(i)}}{I_g} \right) B. \quad (43)$$

Mithilfe der Doppler-Verschiebung  $E = E_0(1 + v/c)$  lässt sich dieser Zusammenhang auch mit den Geschwindigkeiten  $v_i$  schreiben:

$$v_i = v_{\text{iso}} - \left( \frac{\mu_a m_a^{(i)}}{I_a} - \frac{\mu_g m_g^{(i)}}{I_g} \right) \frac{Bc}{E_0} \quad (44)$$

Für die Geschwindigkeiten und Energien ergaben sich mit  $\Delta E = E_0 \frac{v}{c}$  die folgenden Werte:

Dip	Übergang	Geschwindigkeit/mm·s <sup>-1</sup>	Energieverschiebung/10 <sup>-7</sup> eV
1	$+\frac{3}{2} \rightarrow +\frac{1}{2}$	$-5.19 \pm 0.07$	$-2.49 \pm 0.03$
2	$+\frac{1}{2} \rightarrow +\frac{1}{2}$	$-2.97 \pm 0.04$	$-1.43 \pm 0.02$
3	$-\frac{1}{2} \rightarrow +\frac{1}{2}$	$-0.80 \pm 0.10$	$-0.38 \pm 0.05$
4	$+\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$	$0.84 \pm 0.10$	$0.40 \pm 0.05$
5	$-\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$	$3.18 \pm 0.05$	$1.53 \pm 0.02$
6	$-\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}$	$5.43 \pm 0.06$	$2.61 \pm 0.03$

Tabelle 4: Dips mit zugeordneten Geschwindigkeiten

**Isomerieverziehung** Für je zwei Dips sind die Übergangsenergien betragsmäßig gleich. Aus Gleichung 44 folgt, dass durch Addition der Geschwindigkeiten zweier solcher Dips die Isomerieverziehung bestimmt werden kann:

$$v_{\text{iso}} = \frac{v_3 + v_4}{2} = \frac{v_2 + v_5}{2} = \frac{v_1 + v_6}{2} \quad (45)$$

Damit ergeben sich die folgenden Werte:

Dip-Paar	Geschwindigkeit $v_{\text{iso}}$ /mm·s <sup>-1</sup>	Energieverschiebung $\Delta E_{\text{iso}}$ /10 <sup>-9</sup> eV
3 und 4	$0.02 \pm 0.07$	$1.08 \pm 3.35$
2 und 5	$0.10 \pm 0.03$	$5.02 \pm 1.51$
1 und 6	$0.12 \pm 0.04$	$5.86 \pm 2.09$

Tabelle 5: Berechnete Isomerieverzessionen aus den Dip-Paaren

Der gewichtete Mittelwert lautet dann

$$\bar{v}_{\text{iso}} = (0.100 \pm 0.024) \text{ mm s}^{-1} \quad \Delta \bar{E}_{\text{iso}} = (4.81 \pm 1.15) 10^{-9} \text{ eV}.$$

**Magnetisches Moment und magnetische Feldstärke am Kernort** Subtrahiert man Gleichung 44 für die beiden Geschwindigkeiten eines Dip-Paares, erhält man für  $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\Delta v_i = -\frac{cB}{E_0} \left[ \frac{\mu_a}{I_a} (m_a^{(i)} - m_a^{(7-i)}) - \frac{\mu_g}{I_g} (m_g^{(i)} - m_g^{(7-i)}) \right]. \quad (46)$$

Durch Quotientenbildung geeigneter Gleichungen aus 46 erhält man Ausdrücke für das kernmagnetische Moment des angeregten Zustands:

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} \Rightarrow \mu_{a,12} = \mu_g \frac{\Delta v_2 - \Delta v_1}{\Delta v_2 - \Delta v_1/3} = (-0.1542 \pm 0.0042) \mu_N \quad (47)$$

$$\frac{\Delta v_2}{\Delta v_3} \Rightarrow \mu_{a,23} = 3\mu_g \frac{-\Delta v_2 + \Delta v_3}{\Delta v_2 + \Delta v_3} = (-0.1574 \pm 0.0056) \mu_N \quad (48)$$

$$\frac{\Delta v_3}{\Delta v_1} \Rightarrow \mu_{a,31} = \mu_g \frac{-\Delta v_1 + \Delta v_3}{\Delta v_1/3 + \Delta v_3} = (-0.1570 \pm 0.0034) \mu_N \quad (49)$$

wobei  $\mu_N = 3.152\,451\,66\,10^{-14} \text{ MeV/T}$  das Kernmagneton ist.

Der Fehler ergibt sich mit Gaußscher Fehlerfortpflanzung:

$$s_{\mu_{a,12}} = |\mu_{a,12}| \sqrt{\left(\frac{s_{\mu_g}}{\mu_g}\right)^2 + \frac{s_{\Delta v_1}^2 + s_{\Delta v_2}^2}{(\Delta v_2 - \Delta v_1)^2} + \frac{s_{\frac{1}{3}\Delta v_1}^2 + s_{\Delta v_2}^2}{(\Delta v_2 - \frac{1}{3}\Delta v_1)^2}} \quad (50)$$

$$s_{\mu_{a,23}} = |\mu_{a,23}| \sqrt{\left(\frac{s_{\mu_g}}{\mu_g}\right)^2 + \frac{s_{\Delta v_2}^2 + s_{\Delta v_3}^2}{(-\Delta v_2 + \Delta v_3)^2} + \frac{s_{\Delta v_2}^2 + s_{\Delta v_3}^2}{(\Delta v_2 + \Delta v_3)^2}} \quad (51)$$

$$s_{\mu_{a,31}} = |\mu_{a,31}| \sqrt{\left(\frac{s_{\mu_g}}{\mu_g}\right)^2 + \frac{s_{\Delta v_1}^2 + s_{\Delta v_3}^2}{(\Delta v_3 - \Delta v_1)^2} + \frac{s_{\frac{1}{3}\Delta v_1}^2 + s_{\Delta v_3}^2}{(\frac{1}{3}\Delta v_1 + \Delta v_3)^2}} \quad (52)$$

Das gewichtete Mittel dieser drei Werte erhält man über

$$\bar{\mu}_a = \frac{\sum \mu / s_\mu^2}{\sum 1 / s_\mu^2}, \quad (53)$$

wobei zu beachten ist, dass die  $\mu_i$  nicht unabhängig sind. Daher ist es nicht möglich, den Fehler über Gaußsche Fehlerfortpflanzung zu berechnen. Stattdessen wird der Maximalfehler  $\Delta \bar{\mu}$  angegeben. Dieser berechnet sich über

$$\Delta \bar{\mu} = \sum_i \left| \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \mu_i} s_{\mu_i} \right| = \left( \frac{1}{s_{\mu_{a,12}}} + \frac{1}{s_{\mu_{a,23}}} + \frac{1}{s_{\mu_{a,31}}} \right) / \left( \frac{1}{s_{\mu_{a,12}}^2} + \frac{1}{s_{\mu_{a,23}}^2} + \frac{1}{s_{\mu_{a,31}}^2} \right). \quad (54)$$

Damit erhält man

$$\bar{\mu}_a = -0.1562 \mu_N \quad \Delta\bar{\mu}_a = 0.0041 \mu_N.$$

Mit Gleichung 46 folgt für das Magnetfeld am Kernort

$$B_1 = \frac{\Delta v_1 E_0 / 2c}{-\mu_a + \mu_g} = (32.77 \pm 0.61) \text{ T} \quad (55)$$

$$B_2 = \frac{\Delta v_2 E_0 / 2c}{-\frac{1}{3}\mu_a + \mu_g} = (32.88 \pm 0.46) \text{ T} \quad (56)$$

$$B_3 = \frac{\Delta v_3 E_0 / 2c}{\frac{1}{3}\mu_a + \mu_g} = (32.43 \pm 3.00) \text{ T} \quad (57)$$

mit den Fehlern

$$s_{B_1} = |B_1| \sqrt{\left(\frac{s_{\Delta v_1}}{\Delta v_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{\mu_a}^2 + s_{\mu_g}^2}{(\mu_a + \mu_g)^2}\right)^2} \quad (58)$$

$$s_{B_2} = |B_2| \sqrt{\left(\frac{s_{\Delta v_2}}{\Delta v_2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{3}s_{\mu_a}^2 + s_{\mu_g}^2}{(-\frac{1}{3}\mu_a + \mu_g)^2}\right)^2} \quad (59)$$

$$s_{B_3} = |B_3| \sqrt{\left(\frac{s_{\Delta v_3}}{\Delta v_3}\right)^2 + \left(\frac{\frac{1}{3}s_{\mu_a}^2 + s_{\mu_g}^2}{(\frac{1}{3}\mu_a + \mu_g)^2}\right)^2}. \quad (60)$$

Damit bekommt man das gewichtete Mittel

$$\bar{B} = (32.83 \pm 0.28) \text{ T}.$$

**Berechnung des Debye-Waller-Faktors der Quelle** Aus dem Übergangsmatrixelement folgt, dass die Amplituden der Dips im Verhältnis 3 : 2 : 1 : 1 : 2 : 3 stehen müssten. Um festzustellen, welches Verhältnis in unseren Messdaten vorliegt, werden die Amplituden  $\hat{A}$  der einzelnen Lorentz-Dips aus den Fitparametern über

$$\hat{A} = \frac{2A}{x_c w} \quad s_{\hat{A}} = A \sqrt{\left(\frac{s_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{s_w}{w}\right)^2} \quad (61)$$

bestimmt, mit den folgenden Ergebnissen:

Dip	1	2	3	4	5	6
Amplitude	1.03	1.37	0.61	0.61	0.92	1.23

Damit ergibt sich ein Verhältnis von 1.69 : 2.24 : 1 : 1 : 1.51 : 2.01, was stark von der theoretischen Verhersage abweicht. Nichtsdestotrotz versuchen wir, unter Annahme des theoretisch erwarteten Verhältnisses, den Debye-Waller-Faktor zu berechnen.

Dazu ziehen wir zunächst den effektiven Wirkungsquerschnitt  $\sigma_0$  des Einlinienabsorbers heran und teilen ihn mit den aus dem obigen Verhältnis folgenden Gewichten auf die einzelnen Dips auf:

$$\sigma_i = g_i \sigma_0 \quad g_i \in \left\{ \frac{3}{12}, \frac{2}{12}, \frac{1}{12}, \dots, \frac{3}{12} \right\} \quad (62)$$

Mit den Angaben aus [MK11]

Debye-Waller-Faktor (bei 20°C)	$f_A = 0.8$
Anzahl der Eisenatome pro cm <sup>3</sup>	$n_A = (8.30 \pm 0.42) 10^{22}/\text{cm}^3$
Anteil von Fe <sup>57</sup>	$\beta = 0.022$
Absorberdicke	$d = 25 \mu\text{m}$

lässt sich die effektive Absorberdicke  $T_A$  mit Gleichung 28 für die sechs Dips bestimmen. Die Debye-Waller-Faktoren ergeben sich dann wieder über Gleichung 37:

Dip	$T_A$	$f_Q$
1	$1.552 \pm 0.134$	$0.24 \pm 0.21$
2	$1.035 \pm 0.080$	$0.41 \pm 0.32$
3	$0.517 \pm 0.045$	$0.31 \pm 0.67$
4	$0.517 \pm 0.045$	$0.31 \pm 0.66$
5	$1.035 \pm 0.090$	$0.28 \pm 0.33$
6	$1.552 \pm 0.134$	$0.29 \pm 0.21$

Das gewichtete Mittel der sechs Größen lautet

$$\bar{f}_Q = 0.29 \pm 0.12$$

## 6 Zusammenfassung und Diskussion

**Einlinienabsorber** Für den Einlinienabsorber Edelstahl wurden die natürliche Linienbreite  $\Gamma$  sowie die Lebensdauer  $\tau$  auf drei verschiedene Arten bestimmt:

- Durch Anpassen eines Voigt-Profil an die Messdaten und direkter Berechnung der Linienbreite aus dem Fitparameter
- Über die polynomische Näherung nach [Heb68] unter Verwendung der effektiven Absorberdicke
- Mithilfe der relativen Verbreiterung, die anhand der Grafik in [Fra63] bestimmt wurde.

Die Ergebnisse der einzelnen Methoden der Berechnung für  $\Gamma$  und damit  $\tau$  sind in der folgenden Tabelle zu finden:

	Voigt-Fit	Polynomielle Näherung (nach J. Heberle)	Relative Verbreiterung (nach H. Frauenfelder)
Linienbreite $\Gamma/10^{-9}\text{eV}$	$14.02 \pm 1.81$	$7.72 \pm 1.07$	$7.77 \pm 1.01$
Lebensdauer $\tau/\text{ns}$	$46.94 \pm 6.06$	$85.29 \pm 6.52$	$84.73 \pm 6.09$

Der Hersteller gibt im Datenblatt der Quelle einen Wert für die Linienbreite von  $0.103 \text{ mm s}^{-1}$  bei  $T=293 \text{ K}$  an. In Einheiten der Energie lautet der Wert dann

$$\Gamma_{\text{lit}} = 4.94 \cdot 10^{-9} \text{ eV}.$$

Weiterhin konnte die Isomerieverschiebung aus der Lage des Transmissionsdips bestimmt werden. Es ergab sich ein in Einheiten der Energie ein Zahlenwert von

$$\Delta E_{\text{iso}} = (1.0 \pm 0.1) \text{ eV}.$$

Schließlich wurde noch der Debye-Waller-Faktor der Quelle unter anderem aus der Höhe der Transmissionsdips bestimmt. Somit konnte ein Ergebnis von

$$f_Q = 0.55 \pm 0.04$$

erzielt werden. Im Datenblatt der Quelle war ein Literaturwert angegeben von

$$f_{Q,\text{Lit}} = 0.77.$$

Hier zeigt sich wieder eine deutliche Abweichung. Mögliche Gründe hierfür sind in der Fehldiskussion erläutert.

**Sechslinienabsorber** Insgesamt stimmen unsere bestimmten Werte in diesem Versuchsteil gut mit den Literaturwerten überein. Für die gemittelte Linienbreite aus den sechs Dips erhält man

$$\Gamma = (9.56 \pm 1.01) \cdot 10^{-9} \text{ eV}.$$

Für die Isomerieverschiebung beim Sechslinienabsorber ergab sich aus den gemessenen Geschwindigkeits-Dips

$$v_{\text{iso}} = (0.100 \pm 0.024) \text{ mm s}^{-1} \quad \Delta E_{\text{iso}} = (4.81 \pm 1.15) \cdot 10^{-9} \text{ eV}.$$

was im Rahmen der Fehler mit den Angaben des Herstellers für  $\alpha$ -Eisen übereinstimmt:

$$v_{\text{iso, Lit}} = 0.110 \text{ mm s}^{-1} \quad \Delta E_{\text{iso, Lit}} = 5.28 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$$

Der Debye-Waller-Faktor ergab sich zu

$$f_Q = 0.29 \pm 0.12,$$

was deutlich vom oben genannten Literaturwert abweicht. Der Grund dafür liegt vermutlich auch im abweichenden Amplitudenverhältnis der gemessenen Dips zum theoretisch erwarteten. In der Fehlerdiskussion werden weitere Gründe für die Abweichung erläutert. Das magnetische Moment des 14.4 km eV-Zustands wurde zu

$$\mu_a = (-0.1562 \pm 0.0024) \mu_N$$

bestimmt. Der Literaturwert beträgt nach [Stone]

$$\mu_{a,Lit} = (-0.1549 \pm 0.0002) \mu_N$$

und liegt wieder gut in den Fehlergrenzen. Mit diesem Ergebnis ergab sich für das Magnetfeld am Kernort

$$B = (32.83 \pm 0.28) \text{ T}$$

Hier stand kein genauer Literaturwert zur Verfügung, ungefähr sollte der Wert aber bei 33 T liegen.

**Fehlerdiskussion** Als größtes Problem in der Auswertung erwies sich zum einen die geringe Zählrate der Cobalt-Quelle. Hinzu kommt ein großer Fehler des Compton-Untergrunds, der im Verfahren zur Bestimmung desselben begründet ist: Es werden Datenpunkte nur in einem kleinen Bereich bezüglich auf die Abschwächung durch die Aluminiumbleche für die energiereichen Photonen aufgenommen. Daraus resultiert ein großer Fehler auf die Fitparameter  $A_2$  und  $y_0$ , sowie auf den Compton-Untergrund. Es ergaben sich daher große relative Fehler auf die Zählraten in den Transmissionsspektren.

Zudem sind durch die niedrige Zählrate die Dips in den Transmissionsspektren wenig ausgeprägt. Dadurch werden die Fits weniger genau, woraus sich teils sehr große Abweichungen zu den Literaturwerten erklären.

Auffällig ist, dass vor allem die Werte der Größen, die aus den Amplituden und Breiten der Dips berechnet wurden, stark von den Literaturangaben abweichen, während aus den Zentrumspositionen berechnete Größen eine höhere Übereinstimmung zeigen. Dies hat die folgenden Gründe:

- Die gemessenen Amplituden der Dips werden maßgeblich durch die gefahrenen Schrittweiten beeinflusst. So ist es bei einer großen Schrittweite möglich, das Minimum gerade zu verpassen und stattdessen zwei Punkte links und rechts davon aufzunehmen, deren  $y$ -Werte natürlich stark abweichen. Außerdem ist es möglich, dass der Einkanalanalysator während der Messung das eingestellte Fenster nicht konstant hält, wodurch sich die gemessene Zählrate verändert. Dies ändert wiederum die Tiefe der Dips.

- Betrachtet man die Transmissionsspektren, stellt man eine hohe Streuung der Datenpunkte fest. Der Grund hierfür liegt vermutlich in nicht-eliminierten Untergrundereignissen, die wegen der geringen Zählrate stark ins Gewicht fallen. Durch diese Streuung lässt sich allerdings nur noch wesentlich schwieriger die passende Funktion anpassen, sodass auch die Breite der Fitfunktionen nur eine begrenzte Aussagekraft besitzt.
- Auch bei großer Schrittweite und Streuung der Messpunkte kann wegen der Forderung der Symmetrie der verwendeten Lorentz- und Voigt-Kurven die Zentrumsposition noch akzeptabler Genauigkeit festgestellt werden. Die Untergrundereignisse können bei konstant erwarteter Zählrate durch Mittelung leicht eliminiert werden.

Eine weitere wichtige Fehlerquelle im Versuch sind Geschwindigkeitsschwankungen des Motors, welche als gaußverteilt angenommen werden können. Ändert der Motor während einer Messung seine Geschwindigkeit, so kommt es zu einer Verbreiterung der Linien. Betrachtet man die Ergebnisse der Linienbreite sowohl beim Einlinien-, wie auch beim Sechslinienabsorber, stellt man eine starke systematische Verschiebung hin zu größeren Werten fest. Diese könnte in genau solchen Geschwindigkeitsschwankungen begründet sein. Andererseits sollten durch das Anpassen eines Voigt-Profil, also einer Faltung einer Lorentz- und einer Gaußkurve, derartige Schwankungen bereits eliminiert sein. Aus vorher genannten Gründen sind jedoch die Breiten der Fits nicht sehr aussagekräftig.

Auch ist eine Beeinflussung durch externe Magnetfelder nicht auszuschließen. Dafür spricht die deutliche Abweichung der Diptiefen des Sechslinienabsorbers vom erwarteten Verhältnis. Es ist möglich, dass zweitgleich mit dieser Messung andere Experimente stattgefunden haben, die Magnetfelder erzeugen.

Schließlich sind noch Temperaturschwankungen zu berücksichtigen. Wie in Kapitel 2 erwähnt, ist der Debye-Waller-Faktor eine stark temperaturabhängige Größe, weshalb schon kleine Abweichungen von der Temperatur, bei der der Literaturwert bestimmt wurde, zu großen Änderungen in unserem Ergebnis führen können.

Auch der Literaturwert der Linienbreite wurde bei  $T \approx 20^\circ\text{C}$  bestimmt. Es ist wahrscheinlich, dass die Temperatur während der sechs Messtage von diesem Wert abgewichen ist.

## References

- [Dem10] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3 : Kern-, Teilchen- und Astrophysik*. 4. Auflage. Springer-Verlag (Berlin Heidelberg New York), 2010.
- [Dem13] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 4 : Atome, Moleküle und Festkörper*. 4. Auflage. Springer-Verlag (Berlin Heidelberg New York), 2013.
- [Fra63] Hans Frauenfelder. *The Mössbauer Effect - A Review, with a Collection of Reprints*. New York: Benjamin, 1963.
- [Heb68] J. Heberle. “Linewidth of Moessbauer Absorption”. In: *Nuclear Instruments and Methods* 58 (1968).
- [Lei13] Hans Jörg Leisi. *Klassische Physik - Band 2: Elektromagnetismus und Wärme*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013. ISBN: 978-3-034-88807-3.
- [MK02] Theo Mayer-Kuckuk. *Kernphysik - Eine Einführung*. 7. Auflage. Teubner Verlag (Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden), 2002.
- [MK11] A. Zwerger M. Köhli S. Winkelmann. *Der Moessbauer-Effekt*. Versuchsanleitung Fortgeschrittenen Praktikum - Teil 2. 2011.

## Tabellenverzeichnis

1	Energien der $K_{\alpha}$ -Linien . . . . .	16
2	Ergebnisse der Berechnungen der Linienbreite . . . . .	21
3	Linienbreiten und Lebensdauer der Dips des Sechslinienabsorbers . . . . .	23
4	Dips mit zugeordneten Geschwindigkeiten . . . . .	24
5	Berechnete Isomierieverschiebungen aus den Dip-Paaren . . . . .	24

## Abbildungsverzeichnis

1	Stabile Kerne . . . . .	3
2	Photo- und Compton-Effekt . . . . .	5
3	Paarbildung . . . . .	5
4	Linienüberlappung . . . . .	7
5	Hyperfeinstrukturaufspaltung . . . . .	8
6	Debye-Waller-Faktor . . . . .	9
7	Zerfallsschema von $^{57}\text{Co}$ . . . . .	10
8	Photomultiplier . . . . .	11
9	Aufbau . . . . .	12
10	Oszilloskopbilder . . . . .	12
11	Compton-Untergrund . . . . .	15

12	Eichfit . . . . .	17
13	Fit Einlinienabsorber . . . . .	20
14	Fit Sechslinienabsorber . . . . .	23
15	Silberspektrum . . . . .	33
16	Bariumspektrum . . . . .	34
17	Molybdänspektrum . . . . .	34
18	Rubidiumspektrum . . . . .	35
19	Terbiumspektrum . . . . .	35
20	Voigt-Fit des Sechslinienabsorbers . . . . .	36
21	Messprotokoll Teil 1 . . . . .	37
22	Messprotokoll Teil 2 . . . . .	38

## Anhang A: Weitere Fits

### $K_{\alpha}$ -Linien der Metalle

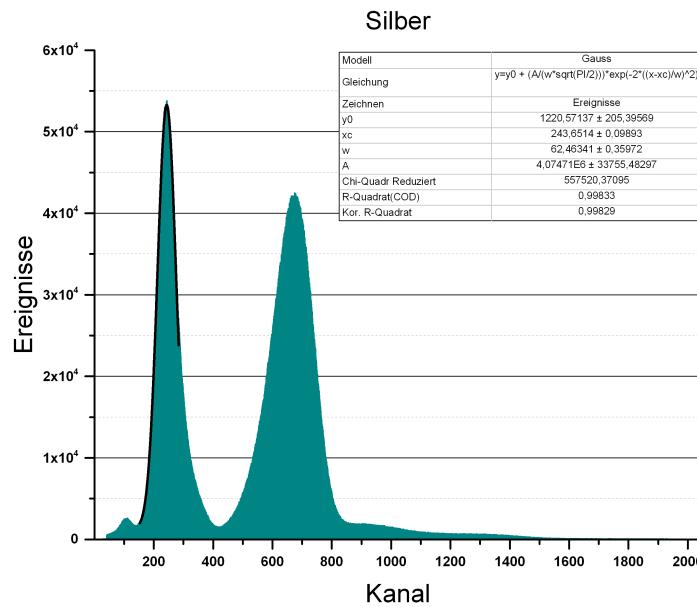


Abbildung 15: Silberspektrum

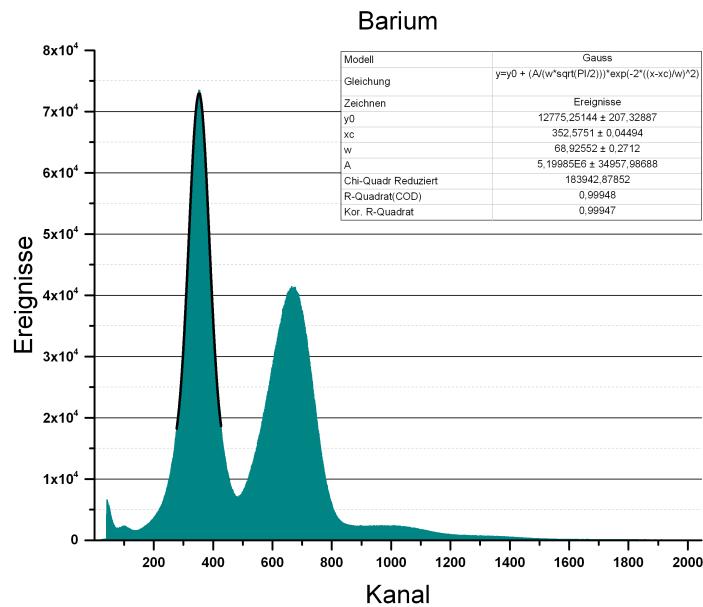


Abbildung 16: Bariumspektrum

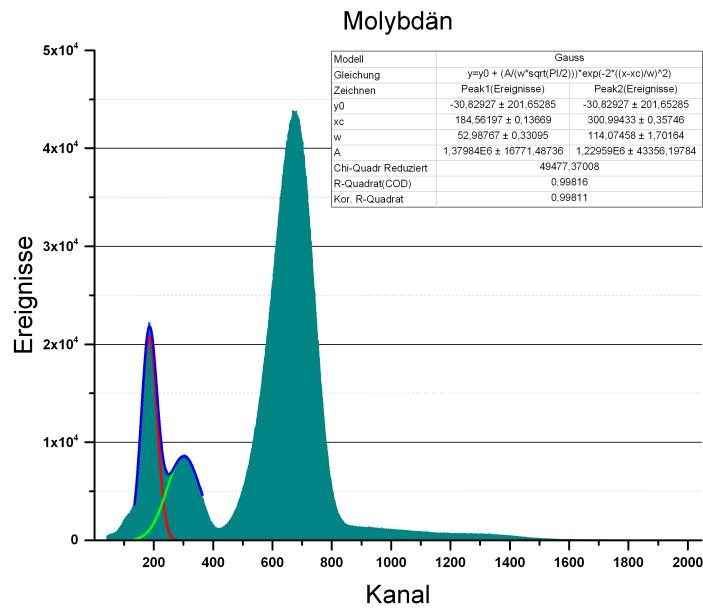


Abbildung 17: Molybdänspektrum

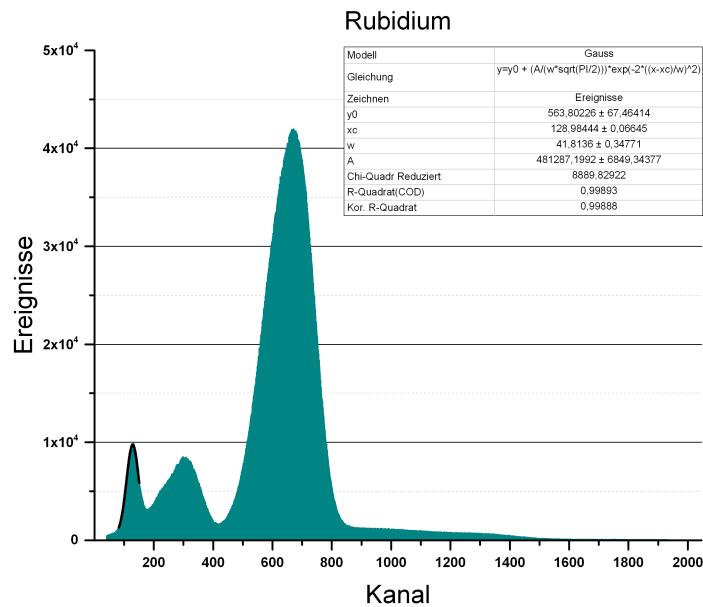


Abbildung 18: Rubidiumspektrum

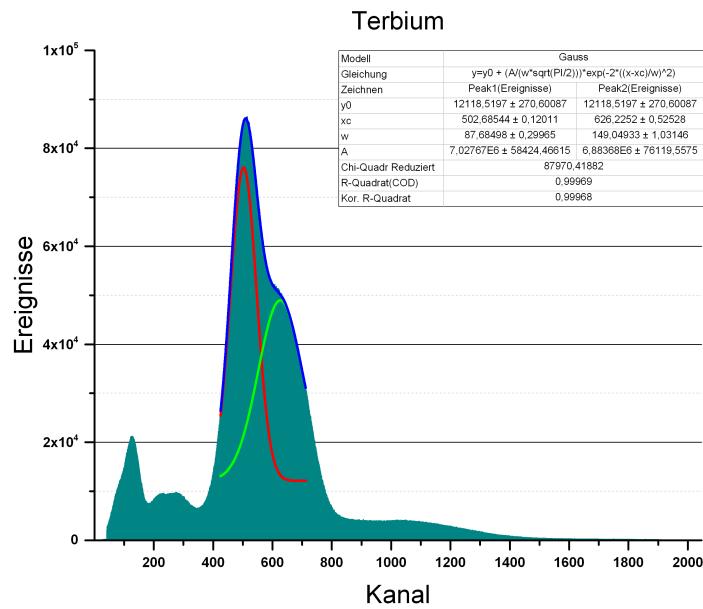


Abbildung 19: Terbiumspektrum

## Voigt-Fit des Sechslinienabsorbers

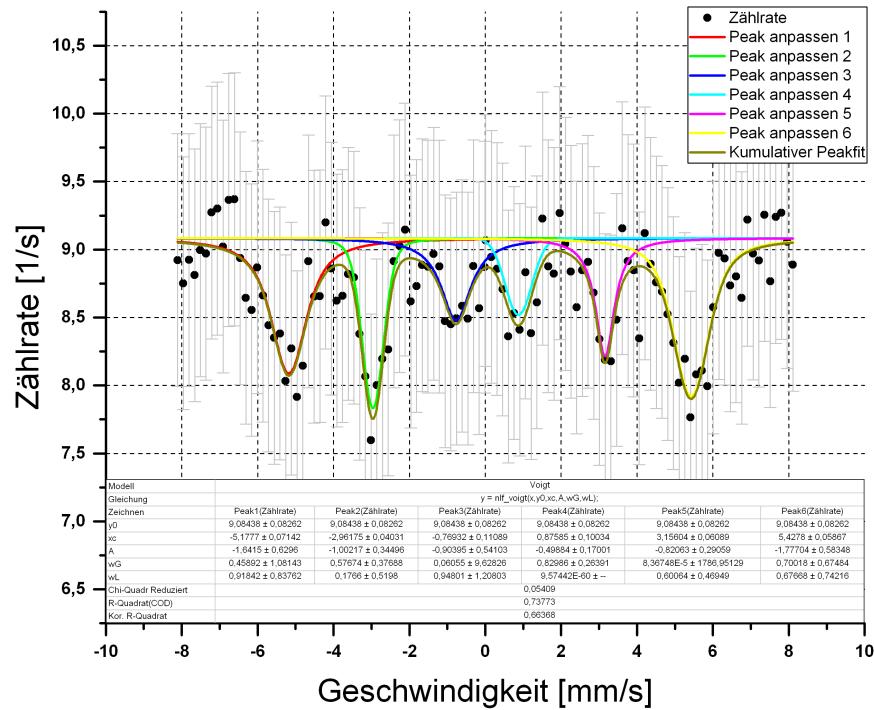


Abbildung 20: Voigt-Fit des Sechslinienabsorbers

## Messprotokoll

101483.jpg 20160327	Szintillator direkt	21.03.15 10:30											
103627.jpg (Kapaz.)	Nach Hauptverstärker (Gath 96 / Coarse Gath 50) Sleeping time 2ms /												
104027.jpg	SCA Pos (Upper 10, lower 0, Del. 1)												
105733.jpg	CH1: SCA Pos / CH2: Delay Out ( $2,75\mu s$ )												
110525.jpg	Output Gate												
<i>Energieschicht</i>		Hochspannung: 847V Kapazität pos.											
M1 Rubidium	480s												
M2 Molybdän	"												
M3 Ag-Silber	"												
M4 Barium	"												
M5 Tb	"												
		real time: <del>562,6225</del>											
		$\frac{\dot{N}}{R} = \frac{\sqrt{N}}{T}$											
<i>Feinstrukturstellen set</i>													
Upper: 1,1													
Lower: 0,9													
Delay 1,0													
<i>Compton-Integratordaten</i>													
Fehler <del>Altbildschirme</del> : $\delta = 0,01 \text{ mm}$	Messzeit live: 250s												
# Dicke		$r_{rel} = \frac{250}{250,009s}$											
Dicke mm	1   2   3   4   5   6   7   8   9   10   11   12   13												
# Platten	1   2   3   4   1   2   7   1   1   1   1   2   1   2												
14   15   16   17   18													
$1,0 + 4,0$	$1,52 + 4,0$	$2,1,55 + 4,0$	$4,0_0 + 3,0_1$	$4,0 + 3,0_5$									
2   2   2   2   2   2   2   2   2   2   2   2   2   2													

Abbildung 21: Messprotokoll Teil 1

<u>Mößkino - Messung: Edelstahl</u>			22.07.2016
v/mm	Counts	Time/s	
left 0,01	3385	200,005	
right 0,01	3382	200,006	
Dicke Plexiglasfenster:			
$d_{pl} = (2,0 \pm 0,01) \text{ mm}$			

Abbildung 22: Messprotokoll Teil 2