台科大圖書

since 1997

Digital Logic Design

數位邏輯設計 全

第 4 章 布林代數化簡

4-1 布林代數式的表示法

4-2 代數演算法

4-3 卡諾圖法

4-4 組合邏輯電路化簡

第 4 章 布林代數化簡

通常在設計數位邏輯電路時，為了減少邏輯閘使用的數量與降低成本，我們會將布林代數式予以化簡，而化簡布林代數式的方法很多，常用的化簡方法有代數演算法與卡諾圖法，本章將針對這兩種化簡法做詳細的說明。

在說明這兩種化簡法之前，我們先介紹布林代數式的表示法。

4-1 布林代數式的表示法

布林代數式的表示法有積之和（sum of product；簡稱SOP）與和之積（product of sum；簡稱POS）兩種，分別說明如下。

一 積之和（SOP）

在介紹積之和之前，我們先說明下列專有名詞：

（一）積項

在布林代數式中，二個或多個變數執行AND 運算稱為乘積項或簡稱為積項（product），例如AB、$\overline{A}C$ 、$A\overline{B}C$ 都稱為積項。

4-1 布林代數式的表示法

(二) 標準積項

若一個積項中包含所有的輸入變數，則這個積項稱為標準積項（**standard product**）或最小項（**minterm**）。例如三個輸入變數為A、B、C 時，則$\bar{A}B\bar{C}$、$\bar{A}BC$、$A\bar{B}C$、ABC 等包含所有輸入變數的積項，都稱為標準積項或最小項。

通常以「$\boldsymbol{m_i}$」表示標準積項或最小項，其中i 為相對應的十進位數，例如二進位的$000_{(2)} = \bar{A}\bar{B}\bar{C} = m_0$、$001_{(2)} = \bar{A}\bar{B}C = m_1$、$010_{(2)} = \bar{A}B\bar{C} = m_2$、…、$111_{(2)} = ABC = m_7$，如表4-1 所示，列出三個輸入變數的標準積項（或最小項）表示法，共有$2^3 = 8$ 種輸入情況，其中A 為最高有效位元（MSB），C 為最低有效位元（LSB），若$A = 0$ 以補數 $\bar{A}$ 表示；若$A = 1$ 以A 表示，其他以此類推。

4-1 布林代數式的表示法

▼ 表 4-1　三個輸入變數的標準積項（或最小項）表示法

十進制值	輸入變數			標準積項（或最小項）表示法	
	A	B	C	布林代數	m_i
0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0
1	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C$	m_1
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2
3	0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3
4	1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}$	m_4
5	1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5
6	1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6
7	1	1	1	ABC	m_7

4-1 布林代數式的表示法

（三）標準積之和（SSOP）

將數個「標準積項」以OR 運算相加起來，稱為標準積之和（**standard sum of product**；簡稱**SSOP**）或最小項之和。例如4-1式即為標準積之和或最小項之和的布林代數式。

標準積之和或最小項之和通常以數學符號「Σ」表示，稱為標準積之和或最小項之和的簡易式。例如4-2 式即為標準積之和或最小項之和的簡易式。

4-1 布林代數式的表示法

$$F(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$$

4-1 式

$$\begin{array}{ccccl} \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \\ \underbrace{0\ 0\ 1} & \underbrace{0\ 1\ 1} & \underbrace{1\ 0\ 1} & \underbrace{1\ 1\ 1} & \longleftarrow \text{二進位數} \\ 1 & 3 & 5 & 7 & \longleftarrow \text{對應的十進位數} \\ = m_1 \ + & m_3 \ + & m_5 \ + & m_7 & \longleftarrow \text{最小項之和} \end{array}$$

$$= \Sigma(1, 3, 5, 7)$$

4-2 式

其中 F 表示輸出函數，而A、B、C 為其輸入變數，且A 為MSB、C 為LSB。

4-1 布林代數式的表示法

（四）積之和（SOP）

將數個「積項」以OR 運算相加起來，稱為積之和（sum of product；簡稱SOP）。例如4-3 式即為積之和的布林代數式。

$$F(A, B, C) = AB + \overline{A}BC + A\overline{B}C \quad \text{4-3 式}$$

其中F 表示輸出函數， 而A、B、C 為其輸入變數， 且A 為MSB、C 為LSB。4-3 式中的積項AB 缺少了C 變數。

4-1 布林代數式的表示法

（五）積之和轉換成標準積之和（SOP → SSOP）

欲將積之和轉換成標準積之和，只要補充積之和的每一個積項中欠缺的變數即可，補充的方法為「將有欠缺的變數本身加上其補數，乘上原有積項」。

例如三個輸入變數為 A、B、C 時，欲將積項 $A\overline{B}$ 轉換成標準積項，因為少了變數 C，所以 $A\overline{B} = A\overline{B}\cdot 1 = A\overline{B}\cdot(C+\overline{C}) = A\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C}$，即可將積項 $A\overline{B}$ 轉換成標準積項 $A\overline{B}C$ 與 $A\overline{B}\,\overline{C}$。

4-1 布林代數式的表示法

例題 4-1　**SOP 轉換成SSOP**

將積之和 $F(A,B,C)=A\overline{B}+AB\overline{C}$ 轉換成標準積之和的布林代數式與簡易式。

解

1. 標準積之和（SSOP）的布林代數式：

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= A\overline{B}+AB\overline{C} \\
&= A\overline{B}\cdot 1+AB\overline{C} && （\because \text{乘法一致定理 } A\cdot 1=A） \\
&= A\overline{B}\cdot(C+\overline{C})+AB\overline{C} && （\because \text{加法補數定理 } C+\overline{C}=1\ ） \\
&= A\overline{B}C+A\overline{BC}+AB\overline{C} && （\because \text{乘法分配律 } A(B+C)=AB+AC）
\end{aligned}
$$

4-1 布林代數式的表示法

2. 標準積之和（SSOP）的簡易式：

$$F(A,B,C)=\underbrace{\overset{\downarrow\downarrow\downarrow}{A\overline{B}C}}_{101 \to 5}+\underbrace{\overset{\downarrow\downarrow\downarrow}{A\overline{B}\,\overline{C}}}_{100 \to 4}+\underbrace{\overset{\downarrow\downarrow\downarrow}{AB\overline{C}}}_{110 \to 6}$$

$1\,0\,1 \quad 1\,0\,0 \quad 1\,1\,0$	← 二進位數
$5 \quad 4 \quad 6$	← 對應的十進位數
$= m_4 + m_5 + m_6$	← 最小項之和
$=\Sigma(4,5,6)$	← 標準積之和的簡易式

4-1 布林代數式的表示法

或快速解法：將積之和布林代數式中，每個積項的變數原形以1、補數以0、缺項以×表示。

即

$$F(A,B,C) = A\overline{B} + AB\overline{C}$$

$$= 10\times + 110$$

$$\begin{cases} 100 \\ 101 \end{cases} \qquad \leftarrow \text{二進位數}$$

$$= m_4 + m_5 + m_6 \qquad \leftarrow \text{最小項之和}$$

$$= \sum(4,5,6) \qquad \leftarrow \text{標準積之和的簡易式}$$

4-1 布林代數式的表示法

演練 1

將積之和 $F(A,B,C)=\overline{C}+ABC$ 轉換成標準積之和的布林代數式與簡易式。

4-1 布林代數式的表示法

二 和之積（POS）

在介紹和之積之前，我們先說明下列專有名詞：

（一）和項

在布林代數式中，二個或多個變數執行OR 運算稱為和項，例如$A+B$、$A+\overline{C}$、$A+\overline{B}+C$ 都稱為和項（sum）。

(二) 標準和項

若一個和項包含所有的輸入變數，則這個和項稱為標準和項（**standard sum**）或最大項（**maxterm**）。例如三個輸入變數為A、B、C 時，則$A+B+C$、$A+\overline{B}+C$、$\overline{A}+B+\overline{C}$、$\overline{A}+\overline{B}+C$ 等包含所有輸入變數的和項，都稱為標準和項或最大項。

4-1 布林代數式的表示法

通常以「$\boldsymbol{M_i}$」表示標準和項或最大項，其中i為相對應的十進位數，例如二進位的 $000_{(2)} = A + B + C = M_0$、$001_{(2)} = A + B + \overline{C} = M_1$、$010_{(2)} = A + \overline{B} + C = M_2$、……、$111_{(2)} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = M_7$，如表 4-3 所示，列出三個輸入變數的標準和項（或最大項）表示法，共有$2^3 = 8$ 種輸入情況，其中A為MSB，C為LSB，若$A = 0$ 以A表示；若$A = 1$ 以補數$\overline{A}$表示，其他以此類推。

4-1 布林代數式的表示法

▼ 表 4-2　三個輸入變數的標準和項（或最大項）表示法

十進制值	輸入變數			標準和項（最大項）表示法	
	A	**B**	**C**	布林代數	M_i
0	0	0	0	$A+B+C$	M_0
1	0	0	1	$A+B+\overline{C}$	M_1
2	0	1	0	$A+\overline{B}+C$	M_2
3	0	1	1	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
4	1	0	0	$\overline{A}+B+C$	M_4
5	1	0	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
6	1	1	0	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
7	1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

4-1 布林代數式的表示法

(三)標準和之積(SPOS)

將數個「標準和項」以AND 運算相乘起來,稱為標準和之積(standard product of sum;簡稱SPOS)或最大項之積。例如4-4 式即為標準和之積或最大項之積的布林代數式。

標準和之積或最大項之積通常以數學符號「Π」表示,稱為標準和之積或最大項之積的簡易式。例如4-5 式即為標準和之積或最大項之積的簡易式。

4-1 布林代數式的表示法

$$F(A, B, C) = (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C) \quad \text{4-4 式}$$

$$\begin{array}{ccccl}
\downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \\
\underbrace{0\ 0\ 0} & \underbrace{0\ 1\ 0} & \underbrace{1\ 0\ 0} & \underbrace{1\ 1\ 0} & \leftarrow \text{二進位數} \\
0 & 2 & 4 & 6 & \leftarrow \text{對應的十進位數} \\
= M_0 \bullet & M_2 \bullet & M_4 \bullet & M_6 & \leftarrow \text{最大項之積}
\end{array}$$

$$= \Pi\,(0, 2, 4, 6) \quad \text{4-5 式}$$

其中 F 表示輸出函數，而 A、B、C 為其輸入變數，且 A 為MSB、C 為LSB。

4-1 布林代數式的表示法

（四）和之積

將數個「和項」以AND 運算相乘起來， 稱為和之積（product of sum；簡稱POS）。例如4-6 式即為和之積的布林代數式。

$$F(A,B,C)=(A+B)(\overline{A}+B+C)(A+\overline{B}+C)$$

4-6 式

其中F 表示輸出函數， 而A、B、C 為其輸入變數， 且A 為MSB、C 為LSB。4-6 式中的和項A + B 缺少了C 變數。

4-1 布林代數式的表示法

（五）和之積轉換成標準和之積（POS → SPOS）

欲將和之積轉換成標準和之積，只要補充和之積的每一個和項中欠缺的變數即可，補充的方法為「將有欠缺的變數本身乘上其補數，加上原有和項」。

例如三個輸入變數為 A、B、C 時，欲將和項 $\overline{A}+B$ 轉換成標準和項，因為少了變數C，所以

$$\overline{A}+B=\overline{A}+B+0=\overline{A}+B+C\cdot\overline{C}=(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

，即可將和項 $\overline{A}+B$ 轉換成標準和項 $(\overline{A}+B+C)$與 $(\overline{A}+B+\overline{C})$ 。

4-1 布林代數式的表示法

例題 4-2　**POS 轉換成SPOS**

將和之積$F(A,B,C)=(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B}+C)$ 轉換成標準和之積的布林代數式與簡易式。

解　1. 標準和之積（SPOS）的布林代數式：

$$\begin{aligned}
F(A,B,C) &= (A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B}+C) \\
&= (A+\overline{B}+0)(\overline{A}+\overline{B}+C) \quad (\because \text{加法一致定理 } A+0=A) \\
&= (A+\overline{B}+C\cdot\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C) \quad (\because \text{乘法補數定理 } C\cdot\overline{C}=0) \\
&= (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)
\end{aligned}$$

（$\because$加法分配律$A+BC=(A+B)(A+C)$）

4-1 布林代數式的表示法

2. 標準和之積（SPOS）的簡易式：

$$F(A,B,C)=(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
\underbrace{0 \quad 1 \quad 0} & & & \underbrace{0 \quad 1 \quad 1} & & & \underbrace{1 \quad 1 \quad 0} & & & \leftarrow & \text{二進位數} \\
2 & & & 3 & & & 6 & & & \leftarrow & \text{對應的十進位數} \\
= M_2 & \bullet & & M_3 & \bullet & & M_6 & & & \leftarrow & \text{最大項之積} \\
= \Pi(2,3,6) & & & & & & & & & \leftarrow & \text{標準和之積的簡易式}
\end{array}$$

或快速解法：將和之積布林代數式中，每個和項的變數原形以0、補數以1、缺項以 × 表示。

4-1 布林代數式的表示法

即

$$F(A,B,C)=(A+\overline{B})+(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$=10\times\cdot 110$$

$$\begin{cases}010\\011\end{cases}$$ ←二進位數

$$=M_2\cdot M_3\cdot M_6$$ ←最大項之積

$$=\Pi(2,3,6)$$ ←標準和之積的簡易式

4-1 布林代數式的表示法

演練 2

將和之積 $F(A,B,C)=\overline{A}(A+\overline{B}+C)$ 轉換成標準和之積的布林代數式與簡易式。

4-1 布林代數式的表示法

三 標準積之和與標準和之積的互換

根據表4-3 所示之真值表，可以寫出標準積之和與標準和之積的布林代數式，並且比較標準積之和與標準和之積的關係。

表 4-3 真值表

輸入		輸出
A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

4-1 布林代數式的表示法

（一）標準積之和布林代數式

$$F(A,B)=\Sigma(0,2)=m_0+m_2$$

$$=\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}$$

$$=B(\overline{A}+A)$$ （∵乘法分配律 $A(B+C)=AB+AC$）

$$=\overline{B}\cdot 1$$ （∵加法補數定理 $A+\overline{A}=1$ ）

$$=\overline{B}$$ （∵乘法一致定理 $A\cdot 1=A$）

4-1 布林代數式的表示法

（二）標準和之積布林代數式

$$
\begin{aligned}
F(A,B) &= \Pi(1,3) = M_1 \cdot M_3 \\
&= (A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B}) \\
&= (\overline{B}+A)(\overline{B}+\overline{A}) && (\because \text{加法交換律 } A+B=B+A) \\
&= \overline{B}+A\cdot\overline{A} && (\because \text{加法分配律 } A+BC=(A+B)(A+C)) \\
&= \overline{B}+0 && (\because \text{乘法補數定理 } A\cdot\overline{A}=1) \\
&= \overline{B} && (\because \text{加法一致定理 } A+0=A)
\end{aligned}
$$

4-1 布林代數式的表示法

（三）標準積之和（SSOP）與標準和之積（SPOS）的互換

由以上的證明得知 $F(A, B) = \Sigma(0, 2) = \Pi(1, 3)$，因此標準積之和與標準和之積互換時，只要將標準積之和的簡易式中未出現的數字，填入標準和之積的簡易式中即可，反之亦然。

4-2 代數演算法

「代數演算法」是利用第三章的「布林定理」來化簡複雜的布林代數式，但是對於初學者來說並不容易，需要對布林定理非常熟悉，加上經驗累積與靈活運用，才能將布林代數式化簡成為最簡的布林代數式。現在我們舉一些實例來說明如何運用布林定理進行化簡，讓學生更加瞭解與熟練布林代數演算法化簡的技巧。

4-2 代數演算法

例題 4-3　　布林定理化簡

化簡布林代數式 $F(A,B,C)=A\overline{BC}+A\overline{B}C+ABC+\overline{A}BC$ 。

解

$$\begin{aligned}
F(A,B,C) &= A\overline{BC}+A\overline{B}C+ABC+\overline{A}BC && \text{（提出公因數）}\\
&= A\overline{B}(\overline{C}+C)+BC(A+\overline{A}) && \text{（}\because\text{乘法分配律 } A(B+C)=AB+AC\text{）}\\
&= A\overline{B}\cdot 1+BC\cdot 1 && \text{（}\because\text{加法補數定理 } C+\overline{C}=1\text{）}\\
&= A\overline{B}+BC && \text{（}\because\text{乘法一致定理 } A\cdot 1=A\text{）}
\end{aligned}$$

演練 3

化簡布林代數式 $F(A,B,C)=A+A\overline{C}+A\overline{B}+\overline{A}BC$。

4-2 代數演算法

例題 4-4　布林定理化簡

化簡布林代數式 $F(A,B,C) = C + A(\overline{B+C}) + A\overline{C}$ 。

解　若函數非積之和的布林代數式，則應用第摩根定理轉換成積之和，再利用布林定理來化簡。

4-2 代數演算法

$$F(A,B,C) = C + A(\overline{B+C}) + A\overline{C}$$

$$= C + A(\overline{B}\cdot\overline{C}) + A\overline{C}$$ （∵第摩根第一定理 $\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B}$ ）

$$= C + A\overline{C}(\overline{B}+1)$$ （∵乘法分配律 $A(B+C) = AB + AC$）

$$= C + A\overline{C}\cdot 1$$ （∵加法空元素定理 $\overline{B}+1=1$ ）

$$= C + A\overline{C}$$ （∵乘法一致定理 $A \cdot 1 = A$）

$$= (C + A)(C + \overline{C})$$ （∵加法分配律 $A + BC = (A+B)(A+C)$）

$$= (C + A)\cdot 1$$ （∵加法補數定理 $C + \overline{C} = 1$ ）

$$= C + A$$ （∵乘法一致定理 $A \cdot 1 = A$）

4-2 代數演算法

演練 4

化簡布林代數式 $F(A,B,C)=\overline{BC}+A\overline{(\overline{A}+B)}$ 。

4-2 代數演算法

例題 4-5　布林定理化簡

化簡布林代數式 $F(A,B)=(A+B)(\overline{A}+A\overline{B})$ 。

解

$F(A,B)=(A+B)(\overline{A}+A\overline{B})$ （展開）

$=A\overline{A}+AA\overline{B}+B\overline{A}+BA\overline{B}$ （$\because$乘法分配律 $A(B+C)=AB+AC$）

$=0+A\overline{B}+B\overline{A}+0$ （$\because$乘法補數定理 $A\overline{A}=0$）

（$\because$乘法全等定理 $A\cdot A=A$）

$=A\overline{B}+A\overline{B}$ （$\because$加法一致定理 $A+0=A$）

（$\because$乘法交換律 $A\cdot B=B\cdot A$）

4-2 代數演算法

演練 5

化簡布林代數式 $F(A,B)=(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})$ 。

4-3 卡諾圖法

上一節所介紹的代數演算法化簡，除了需要經驗的累積之外，尚無一定的標準法則可依循，且難以確定所得結果是否為最簡式，在實際應用上並不方便，所以本節將說明另外一種較簡單的卡諾圖法。

卡諾圖是由美國貝爾實驗室的電機工程師卡諾（Karnaugh）所發展出來的，它是利用方格圖形來化簡複雜的布林代數式，常應用於兩個、三個或四個變數的布林代數式化簡，至於五個或五個以上變數的布林代數化簡，其化簡的步驟較複雜，所以較少使用。

4-3 卡諾圖法

一 卡諾圖法化簡的步驟

卡諾圖法是利用方格圖形來化簡複雜的布林代數式，卡諾圖中每一個方格代表一個標準積項或標準和項，它可以用來表示輸出函數的標準積之和或標準和之積布林代數式。現在我們將卡諾圖化簡結果為最簡積之和（SOP）與最簡和之積（POS）布林代數式的步驟說明如下：

（一）化簡結果為最簡積之和（SOP）布林代數式

若原始的布林代數式為積之和、標準積之和或真值表的輸出函數為1 時，則用1 化簡，經過卡諾圖化簡後，所得結果為最簡積之和的布林代數式。

4-3 卡諾圖法

1. 根據輸入變數的個數，畫出卡諾圖。

若有n 個輸入變數，則必須畫出2^n 個方格的卡諾圖，每一個方格代表一個標準積項（或最小項）。例如4 個輸入變數，必須畫出$2^4 = 16$ 個方格，如圖4-1 所示為四變數之卡諾圖，其中A 為MSB，D 為LSB，且相鄰兩格之間僅有一個輸入變數不同，其中AB 兩變數依序為00、01、11、10，CD 兩變數依序為00、01、11、10。例如左上角方格表示輸入變數$ABCD$ 為$0000_{(2)}$，以標準積項$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$表示，其他以此類推。

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

▲ 圖 4-1　4 變數之卡諾圖

4-3 卡諾圖法

2. 在對應的方格中填入1（即對號入座）。

　　將真值表輸出函數為1 或布林代數式的標準積項填入卡諾圖相對應的方格中。

3. 將相鄰的2^n 個1 圈起來。

　　如圖4-1 所示，卡諾圖中除了上下左右為相鄰之外，特別注意的是最左與最右、最上與最下皆為相鄰項，所以四個角落亦為相鄰項。

　　將相鄰的16 個、8 個、4 個或2 個1 所組成的矩形圈起來，其圈選的範圍越大越好，如此才能消掉更多的輸入變數，且圈選數越少越好，使化簡所得的積項為最少，以得到最簡的積之和布林代數式，而且卡諾圖中的每一個1 都要圈選起來。另外因為加法全等定理$A + A = A$，所以1 可以重複圈選。

4-3 卡諾圖法

4. 若**2*ⁿ*** 個**1** 圈起來，可以消去***n*** 個變數。

如圖4-1 所示， 例如$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 與$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ 二個1 圈起來（∵ 2 =2^1），可以消去一個變數D；$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$、 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$、$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ 與 $\bar{A}B\bar{C}D$ 四個1 圈起來（∵ 4 = 2^2），可以消去二個變數B 與D，其他以此類推。若只有單獨一個1，仍需個別圈起來，只是無法消去任何變數。

5. 將每個圈起來經化簡後的積項進行**OR** 運算，即可得到最簡的積之和布林代數式。

4-3 卡諾圖法

(二) 化簡結果為最簡和之積（POS）布林代數式

若原始的布林代數式為和之積、標準和之積或真值表的輸出函數為0 時，則用**0** 化簡，經過卡諾圖化簡後，所得結果為最簡和之積的布林代數式。

1. 根據輸入變數的個數，畫出卡諾圖。

若有n 個輸入變數，則必須畫出2^n 個方格的卡諾圖，每一個方格代表一個標準和項（或最大項）。例如4 個輸入變數，必須畫出$2^4 = 16$ 個方格，如圖4-2 所示為四變數之卡諾圖，其中A 為MSB，D 為LSB，且相鄰兩格之間僅有一個輸入變數不同，其中AB 兩變數依序為00、01、11、10，CD 兩變數依序為00、01、11、10。例如左上角方格表示輸入變數$ABCD$ 為$0000_{(2)}$，以標準和項$A + B + C + D$ 表示，其他以此類推。

4-3 卡諾圖法

AB \ CD	00	01	11	10
00	$A+B+C+D$	$A+B+C+\overline{D}$	$A+B+\overline{C}+\overline{D}$	$A+B+\overline{C}+D$
01	$A+\overline{B}+C+D$	$A+\overline{B}+C+\overline{D}$	$A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	$A+\overline{B}+\overline{C}+D$
11	$\overline{A}+\overline{B}+C+D$	$\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D$
10	$\overline{A}+B+C+D$	$\overline{A}+B+C+\overline{D}$	$\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}$	$\overline{A}+B+\overline{C}+D$

▲ 圖 4-2　4 變數之卡諾圖

4-3 卡諾圖法

2. 在對應的方格中填入0（即對號入座）。

將真值表輸出函數為0 或布林代數式的標準和項填入卡諾圖相對應的方格中。

3. 將相鄰的2^n 個0 圈起來。

如圖4-2 所示，卡諾圖中除了上下左右為相鄰之外，特別注意的是最左與最右、最上與最下皆為相鄰項，所以四個角落亦為相鄰項。

將相鄰的16 個、8 個、4 個或2 個0 所組成的矩形圈起來，其圈選的範圍越大越好，如此才能消掉更多的輸入變數，且圈選數越少越好，使化簡所得的和項為最少，以得到最簡的和之積布林代數式，而且卡諾圖中的每一個0 都要圈選起來。另外因為乘法全等定理$A \cdot A = A$，所以0可以重複圈選。

4-3 卡諾圖法

4. 若2^n個0圈起來，可以消去n個變數。

如圖 4-2 所示，例如$A+B+C+D$與$A+B+C+\overline{D}$二個0圈起來（$\because 2=2^1$），可以消去一個變數D；$A+B+C+D$、$A+B+C+\overline{D}$、$A+\overline{B}+C+D$與$A+\overline{B}+C+\overline{D}$四個0圈起來（$\because 4=2^2$），可以消去二個變數$B$與$D$，其他以此類推。若只有單獨一個0，仍需個別圈起來，只是無法消去任何變數。

5. 將每個圈起來經化簡後的和項進行AND 運算，即可得到最簡的和之積布林代數式。

4-3 卡諾圖法

二 二變數卡諾圖法

若有2 個輸入變數，則必須畫出$2^2 = 4$ 個方格的卡諾圖，如圖4-3(a) 所示為二變數的標準積項與標準和項表示法，其中A 為MSB，B 為LSB。圖4-3(b) 卡諾圖內的數字就是對應的十進位值。

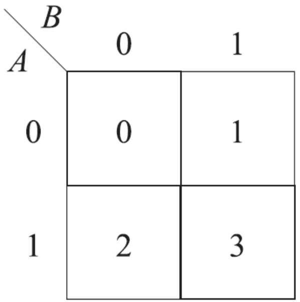
圖4-3(c) 為二變數卡諾圖所對應的標準積項，在卡諾圖中左方的0代表輸入變數$\overline{A}$，左方的1 代表輸入變數A，上方的0 代表輸入變數$\overline{B}$，上方的1 代表輸入變數B。例如**0** 號方格表示輸入變數AB為$00_{(2)}$，以標準積項$\overline{A}\,\overline{B}$ 表示，其他以此類推。

圖4-3(d) 為二變數卡諾圖所對應的標準和項，在卡諾圖中左方的0代表輸入變數A，左方的1 代表輸入變數 $\overline{A}$，上方的0 代表輸入變數B，上方的1 代表輸入變數 $\overline{B}$。例如**0** 號方格表示輸入變數AB為$00_{(2)}$，以標準和項$\boldsymbol{A + B}$ 表示，其他以此類推。

4-3 卡諾圖法

十進位值	輸入		標準積項與標準和項表示法	
	A	B	標準積項	標準和項
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B} = m_0$	$A + B = M_0$
1	0	1	$\overline{A}B = m_1$	$A + \overline{B} = M_1$
2	1	0	$A\overline{B} = m_2$	$\overline{A} + B = M_2$
3	1	1	$AB = m_3$	$\overline{A} + \overline{B} = M_3$

(a) 二變數的標準積項與標準和項表示法



(b) 卡諾圖的方格編號

4-3 卡諾圖法

A \ B	0	1
0	$\overline{A}\,\overline{B}$	$\overline{A}B$
1	$A\overline{B}$	AB

(c) 二變數標準積項

A \ B	0	1
0	$A+B$	$A+\overline{B}$
1	$\overline{A}+B$	$\overline{A}+\overline{B}$

(d) 二變數標準和項

▲ 圖 4-3　二變數卡諾圖

現在我們舉一些實例說明如何運用二變數卡諾圖進行化簡，來更加瞭解與熟練卡諾圖法化簡的技巧。

4-3 卡諾圖法

輸入		輸出
A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

例題 4-6　二變數卡諾圖化簡

化簡右表所示真值表之輸出函數$F(A, B)$ 為

1. 最簡積之和。
2. 最簡和之積。

解

1. 最簡積之和（**SOP**）：用**1** 化簡

   根據真值表寫出標準積之和布林代數式為

   $$F(A,B) = \overline{A}\overline{B} + A\overline{B} = m_0 + m_2 = \Sigma(0,2)$$

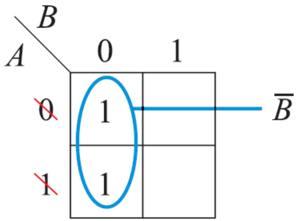
   (1) 畫出$2^2 = 4$ 格卡諾圖。

4-3 卡諾圖法

(2) 在對應的方格中填入1：在0、2 號方格中填入1。

(3) 將相鄰的二個1 圈起來。

(4) 消去變數



【$\because \overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}=\overline{B}(\overline{A}+A)=\overline{B}\bullet 1=\overline{B}$】

【$\therefore$相鄰二個1圈起來，可消去一個變數A】

(5) 將所有積項進行OR 運算，即為最簡的積之和布林代數式

$$F(A,B)=\overline{B}$$

4-3 卡諾圖法

2. 最簡和之積（POS）：用0 化簡

根據真值表寫出標準和之積布林代數式為

$$F(A,B)=(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})=M_1+M_3=\Pi(1,3)$$

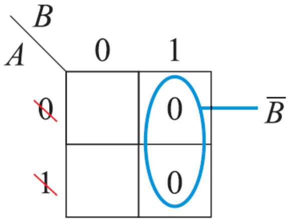
（1）畫出2^2 = 4 格卡諾圖。

（2）在對應的方格中填入0：在1、3 號方格中填入0。

（3）將相鄰的二個0 圈起來。

4-3 卡諾圖法

（4） 消去變數：



【∵ $(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})=(\overline{B}+A)(\overline{B}+\overline{A})=\overline{B}+A\cdot\overline{A}=\overline{B}+0=\overline{B}$】

【∴相鄰二個0圈起來，可消去一個變數A】

（5） 將所有和項進行AND 運算，即為最簡的和之積布林代數式

$$F(A,B)=\overline{B}$$

演練 6

化簡右表所示真值表之輸出函數$F(A, B)$ 為

1. 最簡積之和。2. 最簡和之積

輸入		輸出
A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

4-3 卡諾圖法

例題 4-7　二變數卡諾圖化簡

化簡布林代數式$F(A, B) = \Sigma(0, 2, 3)$ 為：1. 最簡積之和。2. 最簡和之積。

解

1. 最簡積之和（SOP）：用1 化簡

(1) 畫出$2^2 = 4$ 格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入1：在0、2、3 號方格中填入1。

(3) 將相鄰的二個1 圈起來。

4-3 卡諾圖法

（4）消去變數：

$A \backslash B$	0	1
0	1	
1	1	1

$\overline{B}$ 【∴相鄰二個1圈起來，可消去一個變數A】

A 【∴相鄰二個1圈起來，可消去一個變數B】

（5）將所有積項進行OR 運算，即為最簡的積之和布林代數式

$$F(A,B)=A+\overline{B}$$

4-3 卡諾圖法

2. 最簡和之積（POS）：用0 化簡

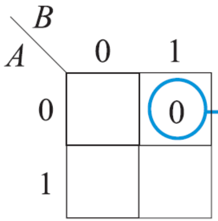
$F(A, B) = \Sigma(0, 2, 3) = \Pi(1)$

(1) 畫出22 = 4 格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入0：在1 號方格中填入0。

(3) 將單獨的一個0 圈起來。

(4) 消去變數：



$A+\overline{B}$【∴單獨一個0圈起來，無法消去變數】

4-3 卡諾圖法

(5) 將所有和項進行AND 運算，即為最簡的和之積布林代數式

$$F(A,B)=A+\overline{B}$$

演練 7

化簡布林代數式$F(A, B)=\Sigma(0, 3)$ 為：1. 最簡積之和。2. 最簡和之積。

4-3 卡諾圖法

三 三變數卡諾圖法

若有**3** 個輸入變數，則必須畫出**$2^3 = 8$** 個方格的卡諾圖，如圖4-4(a) 所示為三變數的標準積項與標準和項表示法，其中A 為MSB，C 為LSB。圖4-4(b) 卡諾圖內的數字就是對應的十進位值。

圖4-4(c) 為三變數卡諾圖所對應的標準積項，在卡諾圖中左方的0 代表輸入變數 $\overline{A}$ ，左方的1 代表輸入變數A，上方的00 代表輸入變數 $\overline{BC}$ ，上方的01 表輸入變數 $\overline{B}C$ ，其他以此類推。例如**0** 號方格表示輸入變數ABC 為$000_{(2)}$，以標準積項 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 表示，其他以此類推。

4-3 卡諾圖法

圖4-4(d) 為三變數卡諾圖所對應的標準和項，在卡諾圖中左方的0 代表輸入變數A，左方的1 代表輸入變數 $\overline{A}$ ，上方的00 代表輸入變數$B + C$，上方的01 表輸入變數 $B + \overline{C}$ ，其他以此類推。例如**0** 號方格表示輸入變數 ABC 為 $000_{(2)}$，以標準和項$\boldsymbol{A + B + C}$ 表示，其他以此類推。

4-3 卡諾圖法

十進位值	輸入			標準積項與標準和項表示法	
	A	B	C	標準積項	標準和項
0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=m_0$	$A+B+C=M_0$
1	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}C=m_1$	$A+B+\overline{C}=M_1$
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}=m_2$	$A+\overline{B}+C=M_2$
3	0	1	1	$\overline{A}BC=m_3$	$A+\overline{B}+\overline{C}=M_3$
4	1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}=m_4$	$\overline{A}+B+C=M_4$
5	1	0	1	$A\overline{B}C=m_5$	$\overline{A}+B+\overline{C}=M_5$
6	1	1	0	$AB\overline{C}=m_6$	$\overline{A}+\overline{B}+C=M_6$
7	1	1	1	$ABC=m_7$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=M_7$

(a) 三變數的標準積項與標準和項表示法

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

(b) 卡諾圖的方格編號

A \ BC	00	01	11	10
0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}BC$	$\overline{A}B\overline{C}$
1	$A\overline{B}\,\overline{C}$	$A\overline{B}C$	ABC	$AB\overline{C}$

(c) 三變數標準積項

A \ BC	00	01	11	10
0	$A+B+C$	$A+B+\overline{C}$	$A+\overline{B}+\overline{C}$	$A+\overline{B}+C$
1	$\overline{A}+B+C$	$\overline{A}+B+\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	$\overline{A}+\overline{B}+C$

(d) 三變數標準和項

▲ 圖 4-4　三變數卡諾圖

4-3 卡諾圖法

現在我們舉一些實例說明如何運用三變數卡諾圖進行化簡，來更加瞭解與熟練卡諾圖法化簡的技巧。

4-3 卡諾圖法

例題 4-8　　三變數卡諾圖化簡

化簡布林代數式 $F(A,B,C) = A\overline{BC} + A\overline{B}C + ABC + \overline{A}BC$ 為

1. 最簡積之和，觀察是否與例題4-3 的代數演算法化簡結果相同？
2. 最簡和之積。

解

1. 最簡積之和（**SOP**）：用**1** 化簡

(1) 畫出$2^3 = 8$ 格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入1：例如 $A\overline{BC}$ 是在$A = 1$、$B = 0$ 且$C = 0$ 的方格中填入 1，其他以此類推。

(3) 將相鄰的二個1 圈起來。

4-3 卡諾圖法

(4) 消去變數：

A \ BC	00	01	11	10
0			1	
1	1	1	1	

BC【∴相鄰二個 1 圈起來，可消去一個變數 A】

$A\overline{B}$【∴相鄰二個 1 圈起來，可消去一個變數C】

(5) 將所有積項進行OR 運算，即為最簡的積之和布林代數式

$$F(A,B)=A\overline{B}+BC$$

所以卡諾圖化簡結果與例題 4-3 的代數演算法化簡結果相同。

4-3 卡諾圖法

2. 最簡和之積（POS）：用0 化簡

$$\because F(A,B,C) = A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + ABC + \overline{A}BC = m_3 + m_4 + m_5 + m_7$$
$$= \Sigma(3,4,5,7)$$
$$= \Pi(0,1,2,6)$$

(1) 畫出2^3 = 8 格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入0：在0、1、2、6 號方格中填入0。

(3) 將相鄰的二個0 圈起來。

4-3 卡諾圖法

(4) 消去變數：

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0		0
1				0

$\overline{B}+C$【∴相鄰二個 0 圈起來，可消去一個變數 A】

$A+B$【∴相鄰二個 0 圈起來，可消去一個變數 C】

(5) 將所有和項進行AND 運算，即為最簡的和之積布林代數式

$$F(A,B,C)=(A+B)(\overline{B}+C)$$

演練 8

化簡布林代數式 $F(A,B,C)=A\overline{BC}+AB\overline{C}+ABC$ 為：1. 最簡積之和。2. 最簡和之積。

4-3 卡諾圖法

例題 4-9　三變數卡諾圖化簡

化簡布林代數式 $F(A,B,C)=(B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$ 為1. 最簡和之積。2. 最簡積之和。

解

1. 最簡和之積（POS）：用0 化簡

(1) 畫出2^3 = 8 格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入 0：例如 $B+C$ 是在 B = 0 且 C = 1 的方格中填入 0，其他以此類推。

(3) 將相鄰二個0 圈起來。

4-3 卡諾圖法

（4）消去變數：

$A \backslash BC$	00	01	11	10
0		0		
1	0	0	0	

$B+\overline{C}$ 【∴相鄰二個 0 圈起來，可消去一個變數A】

$\overline{A}+\overline{C}$ 【∴相鄰二個 0 圈起來，可消去一個變數B】

$\overline{A}+B$ 【∴相鄰二個 0 圈起來，可消去一個變數C】

（5）將所有和項進行AND 運算，即為最簡的和之積布林代數式

$$F(A,B,C)=(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{C})(B+\overline{C})$$

4-3 卡諾圖法

2. 最簡積之和（SOP）：用1 化簡

由以上的卡諾圖可得知

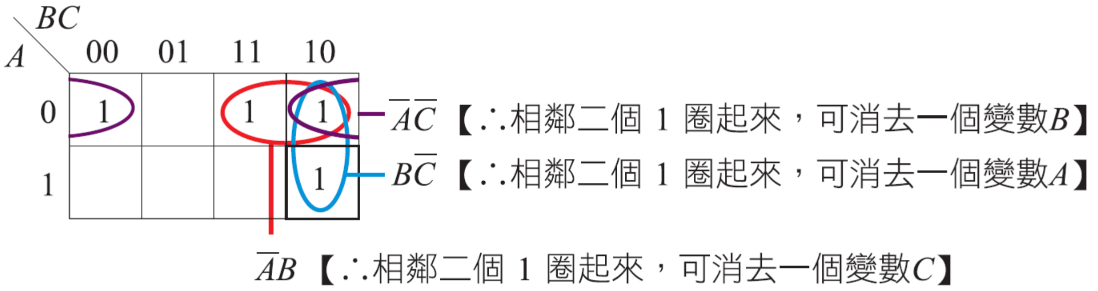
$$F(A,B,C)=(B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$$
$$=\Pi(1,4,5,7)=\Sigma(0,2,3,6)$$

（1）畫出2^3 = 8 格卡諾圖。

（2）在對應的方格中填入1：在0、2、3、6 號方格中填入1。

（3）將相鄰的二個1 圈起來。

（4）消去變數：



4-3 卡諾圖法

(5) 將所有積項進行OR 運算，即為最簡的積之和布林代數式

$$F(A,B,C)=\overline{A}B+B\overline{C}+\overline{AC}$$

演練 9

化簡布林代數式$F(A,B,C)=(A+B)(B+\overline{C})(A+\overline{B}+\overline{C})$ 為：1. 最簡和之積。2. 最簡積之和。

4-3 卡諾圖法

四 四變數卡諾圖法

若有4 個輸入變數，則必須畫出$2^4 = 16$ 個方格的卡諾圖，如圖4-5(a) 所示為四變數的標準積項與標準和項表示法，其中A為MSB，D 為LSB。圖4-5(b) 卡諾圖內的數字就是對應的十進位值。

圖4-5(c) 為四變數卡諾圖所對應的標準積項，在卡諾圖中左方的00 代表輸入變數$\overline{A}\,\overline{B}$ ，左方的01 代表輸入變數 $\overline{A}B$ ，上方的00 代表輸入變數 $\overline{C}\,\overline{D}$，上方的01 代表輸入變數 $\overline{C}D$ ，其他以此類推。例如0 號方格表示輸入變數$ABCD$ 為$0000_{(2)}$，以標準積項$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$表示，其他以此類推。

4-3 卡諾圖法

圖4-5(d) 為四變數卡諾圖所對應的標準和項，在卡諾圖中左方的00 代表輸入變數 $A+B$，左方的 01 代表輸入變數 $A+\overline{B}$，上方的00 代表輸入變數 $C+D$，上方的01 代表輸入變數 $C+\overline{D}$ ，其他以此類推。例如 **0** 號方格表示輸入變數 $ABCD$ 為$0000_{(2)}$，以標準和項$\boldsymbol{A+B+C+D}$ 表示，其他以此類推。

十進位值	輸入				標準積項與標準和項表示法	
	A	B	C	D	標準積項	標準和項
0	0	0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}=m_0$	$A+B+C+D=M_0$
1	0	0	0	1	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D=m_1$	$A+B+C+\overline{D}=M_1$
2	0	0	1	0	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}=m_2$	$A+B+\overline{C}+D=M_2$
3	0	0	1	1	$\overline{A}\overline{B}CD=m_3$	$A+B+\overline{C}+\overline{D}=M_3$

4-3 卡諾圖法

4	0	1	0	0	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}=m_4$	$A+\overline{B}+C+D=M_4$
5	0	1	0	1	$\overline{A}B\overline{C}D=m_5$	$A+\overline{B}+C+\overline{D}=M_5$
6	0	1	1	0	$\overline{A}BC\overline{D}=m_6$	$A+\overline{B}+\overline{C}+D=M_6$
7	0	1	1	1	$\overline{A}BCD=m_7$	$A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}=M_7$
8	1	0	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}=m_8$	$\overline{A}+B+C+D=M_8$
9	1	0	0	1	$A\overline{B}\,\overline{C}D=m_9$	$\overline{A}+B+C+\overline{D}=M_9$
10	1	0	1	0	$A\overline{B}C\overline{D}=m_{10}$	$\overline{A}+B+\overline{C}+D=M_{10}$
11	1	0	1	1	$A\overline{B}CD=m_{11}$	$\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}=M_{11}$
12	1	1	0	0	$AB\overline{C}\,\overline{D}=m_{12}$	$\overline{A}+\overline{B}+C+D=M_{12}$

4-3 卡諾圖法

13	1	1	0	1	$AB\overline{C}D = m_{13}$	$\overline{A} + \overline{B} + C + \overline{D} = M_{13}$
14	1	1	1	0	$ABC\overline{D} = m_{14}$	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + D = M_{14}$
15	1	1	1	1	$ABCD = m_{15}$	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} = M_{15}$

(a) 四變數的標準積項與標準和項表示法

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

(b) 卡諾圖的方格編號

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D$	$\overline{A}\overline{B}CD$	$\overline{A}\overline{B}C\overline{D}$
01	$\overline{A}B\overline{C}\overline{D}$	$\overline{A}B\overline{C}D$	$\overline{A}BCD$	$\overline{A}BC\overline{D}$
11	$AB\overline{C}\overline{D}$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$ABC\overline{D}$
10	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	$A\overline{B}\overline{C}D$	$A\overline{B}CD$	$A\overline{B}C\overline{D}$

(c) 四變數標準積項

▲ 圖 4-5　四變數卡諾圖

4-3 卡諾圖法

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	$A+B+C+D$	$A+B+C+\overline{D}$	$A+B+\overline{C}+\overline{D}$	$A+B+\overline{C}+D$
01	$A+\overline{B}+C+D$	$A+\overline{B}+C+\overline{D}$	$A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	$A+\overline{B}+\overline{C}+D$
11	$\overline{A}+\overline{B}+C+D$	$\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D}$	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+D$
10	$\overline{A}+B+C+D$	$\overline{A}+B+C+\overline{D}$	$\overline{A}+B+\overline{C}+\overline{D}$	$\overline{A}+B+\overline{C}+D$

(d) 四變數標準和項

▲ 圖 4-5　四變數卡諾圖（續）

現在我們舉一些實例說明如何運用四變數卡諾圖進行化簡，來更加瞭解與熟練卡諾圖法化簡的技巧。

4-3 卡諾圖法

例題 4-10　四變數卡諾圖化簡

化簡布林代數式$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10)$ 為

1. 最簡積之和。2. 最簡和之積。

解

1. 最簡積之和（**SOP**）：用**1** 化簡

(1) 畫出$2^4 = 16$ 格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入1：在0、1、2、3、4、5、6、7、8、10 號方格中填入1。

(3) 將相鄰的八個或四個1 圈起來。

4-3 卡諾圖法

（4） 消去變數：

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11				
10	1			1

$\overline{A}$【∴相鄰八個 1 圈起來，可消去三個變數 B、C、D】

$\overline{BD}$【∴相鄰四個 1 圈起來，可消去二個變數 A、C】

（5） 將所有積項進行OR 運算，即為最簡的積之和布林代數式

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}+\overline{BD}$$

4-3 卡諾圖法

2. 最簡和之積（**POS**）：用**0** 化簡

$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10) = \Pi(9, 11, 12, 13, 14, 15)$

(1) 畫出24 = 16 格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入0：在9、11、12、13、14、15 號方格中填入0。

(3) 將相鄰的四個0 圈起來。

4-3 卡諾圖法

(4) 消去變數：

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00				
01				
11	0	0	0	0
10		0	0	

$\overline{A}+\overline{B}$【∴相鄰四個 0 圈起來，可消去二個變數$C$、$D$】

$\overline{A}+\overline{D}$【∴相鄰四個 0 圈起來，可消去二個變數$B$、$C$】

(5) 將所有和項進行AND 運算，即為最簡的和之積布林代數式

$$F(A,B,C,D)=(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+\overline{D})$$

演練 10

化簡布林代數式$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 13)$ 為 1. 最簡積之和。2. 最簡和之積。

4-3 卡諾圖法

例題 4-11　四變數卡諾圖化簡

化簡布林代數式 $F(A,B,C,D)=(\overline{A}+B)(A+B+C)$ 為

1. 最簡和之積。2. 最簡積之和。

解

1. 最簡和之積（POS）：用0 化簡

(1) 畫出2^4 = 16 格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入 0：例如$\overline{A}+B$是在 $A=1$ 且 $B=0$ 的方格中填入 0，其他以此類推。

(3) 將相鄰的四個0 圈起來。

4-3 卡諾圖法

(4) 消去變數：

AB\CD	00	01	11	10
00	0	0		
01				
11				
10	0	0	0	0

$B+C$【∴相鄰四個0圈起來，可消去二個變數A、D】

$\overline{A}+B$【∴相鄰四個0圈起來，可消去二個變數C、D】

(5) 將所有和項進行AND 運算，即為最簡的和之積布林代數式

$$F(A,B,C,D)=(\overline{A}+B)(B+C)$$

4-3 卡諾圖法

2. 最簡積之和（SOP）：用1 化簡

由以上的卡諾圖可得知

$$F(A,B,C,D)=(\overline{A}+B)(A+B+C)=\Pi(0,1,8,9,10,11)$$
$$=\Sigma(2,3,4,5,6,7,12,13,14,15)$$

（1）畫出2^4 = 16 格卡諾圖。

（2）在對應的方格中填入1：在2、3、4、5、6、7、12、13、14、15 號方格中填入 1。

（3）將相鄰的八個或四個1 圈起來。

4-3 卡諾圖法

(4) 消去變數：

AB \ CD	00	01	11	10
00			1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

$\overline{A}C$【∴相鄰四個 1 圈起來，可消去二個變數 B、D】

B【∴相鄰八個 1 圈起來，可消去三個變數 A、C、D】

(5) 將所有積項進行OR 運算，即為最簡的積之和布林代數式

$$F(A,B,C,D)=B+\overline{A}C$$

演練 11

化簡布林代數式 $F(A,B,C,D)=(A+\overline{B})(\overline{A}+\overline{B})(\overline{C}+D)$ 為

1. 最簡和之積。2. 最簡積之和。

4-3 卡諾圖法

五 隨意條件

在數位邏輯電路中，並非所有的輸入狀態都會發生，那麼部分不可能發生的輸入狀態，其輸出狀態是0 或1 並不會影響電路的功能，這種情形我們稱為隨意條件（don’t care），在卡諾圖中以「×」或「φ」表示。

當我們利用卡諾圖化簡布林代數式時，可以將隨意條件「×」視為0 或1，甚至不使用皆可以，以得到最簡的布林代數式。現在我們舉一些實例說明如何運用隨意條件來進行卡諾圖化簡。

4-3 卡諾圖法

例題 4-12　SOP 與隨意條件

化簡布林代數式$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 2, 4, 6, 7, 9, 13) + d(1, 3, 5, 10, 15)$ 為（其中 d 表示don't care）

1. 最簡積之和。2. 最簡和之積。

解

1. 最簡積之和（**SOP**）：用**1** 化簡

(1) 畫出$2^4 = 16$ 格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入1：在0、2、4、6、7、9、13 號方格中填入1，在 1、3、5、10、15 號方格中填入×。

(3) 將相鄰的八個、四個1 或× 圈起來，將圈內的× 視為1。

4-3 卡諾圖法

（4）消去變數：

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	1	×	×	1
01	1	×	1	1
11		1	×	
10		1		×

$\overline{A}$【∴相鄰八個1圈起來，可消去三個變數B、C、D】

$\overline{C}D$【∴相鄰四個1圈起來，可消去二個變數A、B】

（5）將所有積項進行OR 運算，即為最簡的積之和布林代數式

$$F(A,B,C,D)=\overline{A}+\overline{C}D$$

4-3 卡諾圖法

2. 最簡和之積（POS）：用0 化簡

$$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 2, 4, 6, 7, 9, 13) + d(1, 3, 5, 10, 15)$$

$$= \Pi(8, 11, 12, 14) + d(1, 3, 5, 10, 15))$$

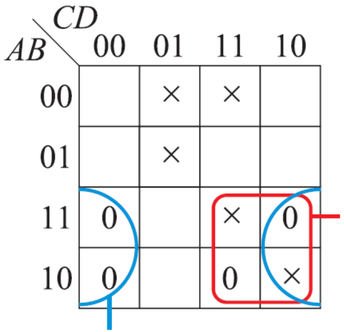
（1） 畫出2^4 = 16 格卡諾圖。

（2） 在對應的方格中填入0：在8、11、12、14 號方格中填入0，在1、3、5、10、15 號方格中填入×。

（3） 將相鄰的四個0 或× 圈起來，將圈內的× 視為 0。

4-3 卡諾圖法

（4）消去變數：



$\overline{A}+\overline{C}$【∴相鄰四個 0 圈起來，可消去二個變數 B、D】

$\overline{A}+D$【∴相鄰四個 0 圈起來，可消去二個變數 B、C】

（5）將所有和項進行AND 運算，即為最簡的和之積布林代數式

$$F(A,B,C,D)=(\overline{A}+D)(\overline{A}+\overline{C})$$

4-3 卡諾圖法

演練 12

將布林代數式$F(A, B, C, D) = \Sigma(0, 5, 8, 10, 15) + d(2, 7, 13, 14)$ 化簡為（其中 d 表示don't care）

1. 最簡積之和。

2. 最簡和之積。

4-3 卡諾圖法

例題 4-13　POS 與隨意條件

化簡布林代數式$F(A, B, C, D) = \Pi(1, 2, 6, 8, 10, 11, 12) + d(0, 7, 13)$為（其中$d$表示don't care）

1. 最簡和之積。2. 最簡積之和。

解

1. 最簡和之積（**POS**）：用**0**化簡

(1) 畫出$2^4 = 16$格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入0：在1、2、6、8、10、11、12號方格中填入0，在0、7、13號方格中填入×。

(3) 將相鄰的二個0或×圈起來，將圈內的×視為0。

4-3 卡諾圖法

（4）消去變數：

AB \ CD	00	01	11	10
00	×	0		0
01			×	0
11	0	×		
10	0		0	0

$A+B+C$【∴相鄰二個0圈起來，可消去一個變數D】

$A+\overline{C}+D$【∴相鄰二個0圈起來，可消去一個變數B】

$\overline{A}+B+\overline{C}$【∴相鄰二個0圈起來，可消去一個變數$D$】

$\overline{A}+C+D$【∴相鄰二個0圈起來，可消去一個變數B】

（5）將所有和項進行AND 運算，即為最簡的和之積布林代數式

$$F(A,B,C,D)=(\overline{A}+C+D)(\overline{A}+B+\overline{C})(A+\overline{C}+D)(A+B+C)$$

4-3 卡諾圖法

2. 最簡積之和（SOP）：用1 化簡

$F(A, B, C, D) = \Pi(1, 2, 6, 8, 10, 11, 12) + d(0, 7, 13)$

$= \Sigma(3, 4, 5, 9, 14, 15) + d(0, 7, 13)$

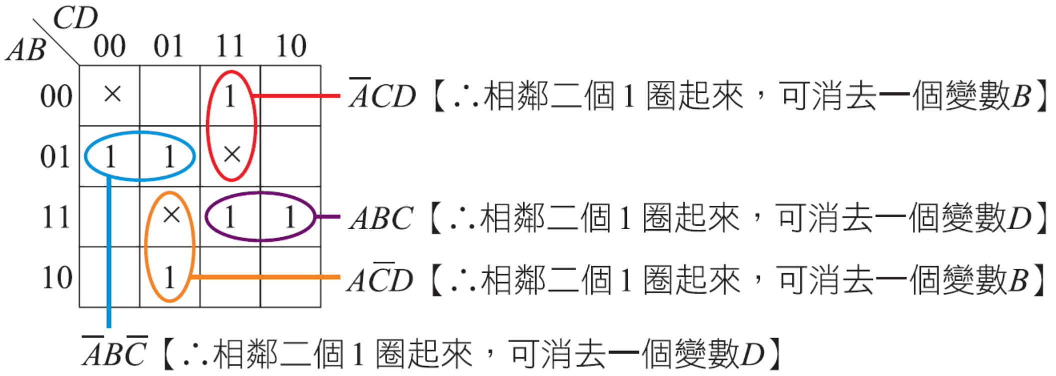
(1) 畫出$2^4 = 16$ 格卡諾圖。

(2) 在對應的方格中填入1：在3、4、5、9、14、15 號方格中填入1，在0、7、13 號方格中填入×。

(3) 將相鄰的二個1 或× 圈起來，將圈內的× 視為 1。

4-3 卡諾圖法

(4) 消去變數：



(5) 將所有積項進行OR 運算，即為最簡的積之和布林代數式

$$F(A,B,C,D)=\bar{A}B\bar{C}+A\bar{C}D+ABC+\bar{A}CD$$

4-3 卡諾圖法

演練 13

化簡布林代數式$F(A, B, C, D) = \Pi(0, 2, 3, 8, 10, 12) + d(4, 11, 13, 15)$為（其中$d$ 表示don't care）

1. 最簡和之積。

2. 最簡積之和。

4-4 組合邏輯電路化簡

組合邏輯電路化簡的方法，除了第三章3-5-5 節所介紹的多層NAND 或NOR 電路分析化簡的方法之外，也可以利用布林代數演算法或卡諾圖法化簡，以得到最簡的布林代數式。以下將針對AND-OR 電路、OR-AND 電路與各種邏輯閘組成的電路說明化簡的方法。

一 AND-OR 閘邏輯電路之化簡

由AND-OR 閘結構所組成的邏輯電路，其化簡的步驟為：

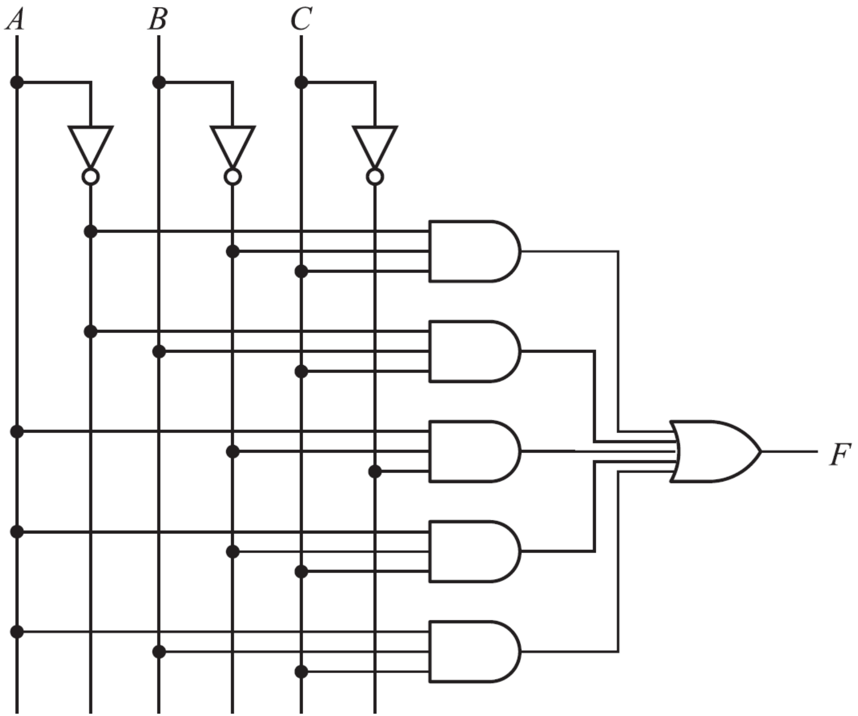
（一）從輸入端開始，由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出的布林代數式，直到寫出輸出端的標準積之和（SSOP）或積之和（SOP）布林代數式。

（二）再利用卡諾圖以1 化簡，以得到輸出端的最簡積之和（SOP）布林代數式。

4-4 組合邏輯電路化簡

例題 4-14　**AND-OR** 閘邏輯電路化簡

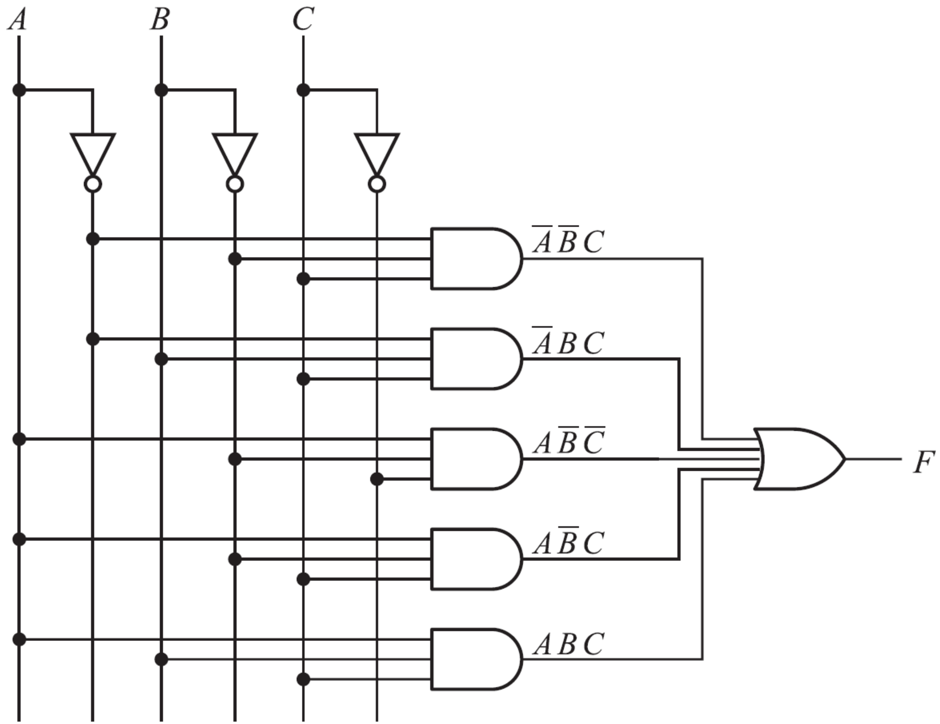
化簡下圖的邏輯電路，並寫出輸出端$F(A, B, C)$的最簡SOP布林代數式。



4-4 組合邏輯電路化簡

解

1. 從輸入端開始，由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出的布林代數式。

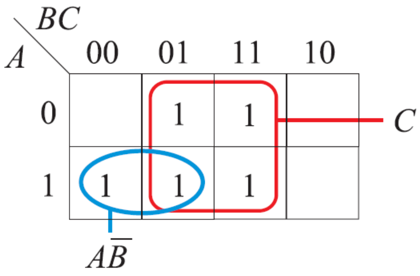


所以輸出端的標準積之和（SSOP）布林代數式為

$$F(A,B,C)=\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}C+ABC$$

4-4 組合邏輯電路化簡

2. 利用卡諾圖：以1 化簡



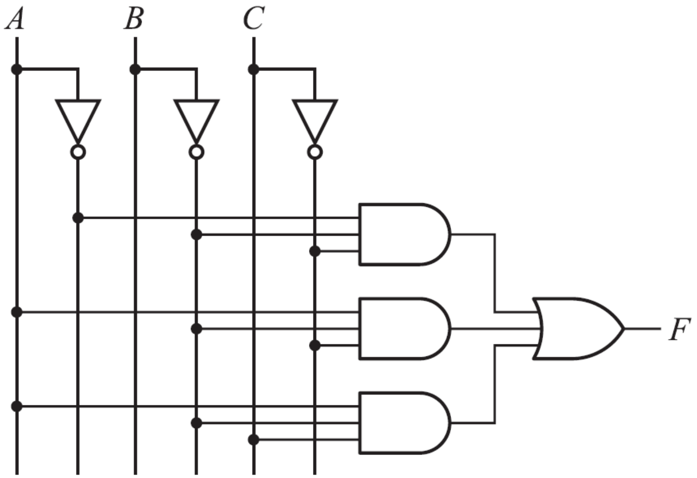
所以輸出端的最簡積之和（SOP）布林代數式為

$$F(A,B,C)=A\overline{B}+C$$

4-4 組合邏輯電路化簡

演練 14

化簡下圖的邏輯電路，並寫出輸出端$F(A, B, C)$ 的最簡SOP 布林代數式。



4-4 組合邏輯電路化簡

二 OR-AND 閘邏輯電路之化簡

由OR-AND 閘結構所組成的邏輯電路，其化簡的步驟為：

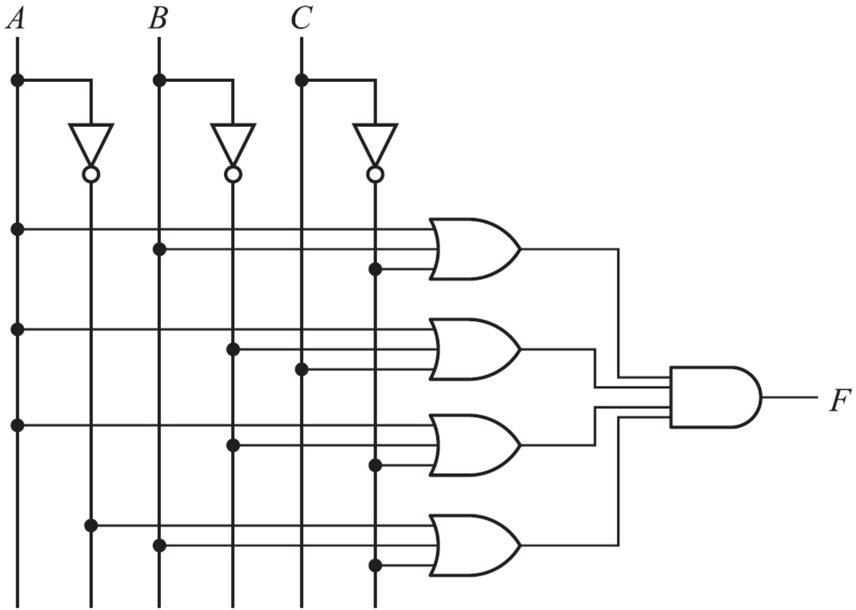
（一）從輸入端開始，由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出的布林代數式，直到寫出輸出端的標準和之積（SPOS）或和之積（POS）布林代數式。

（二）再利用卡諾圖以0 化簡，以得到輸出端的最簡和之積（POS）布林代數式。

4-4 組合邏輯電路化簡

例題 4-15　**OR-AND** 閘邏輯電路化簡

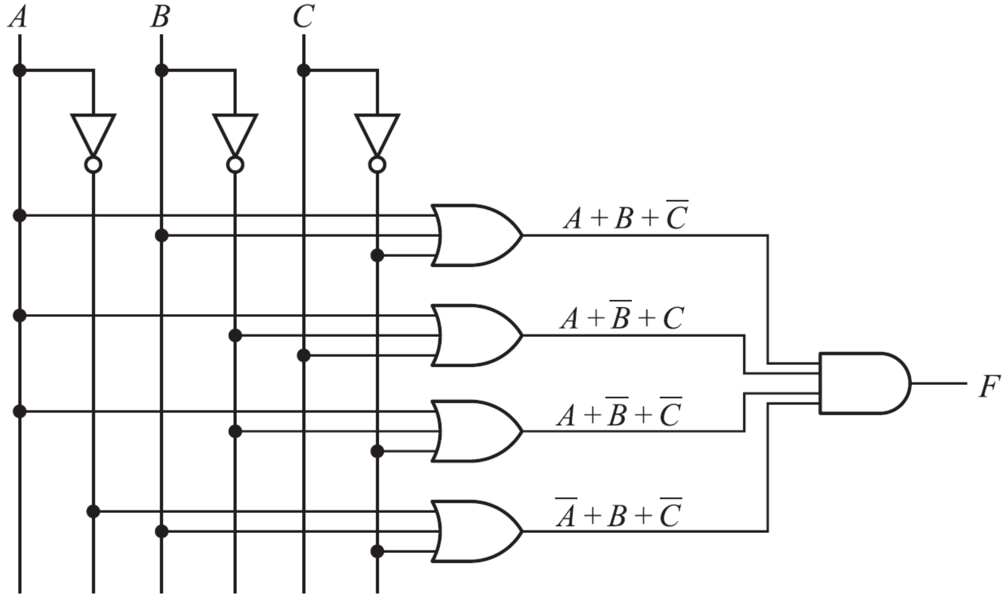
化簡下圖的邏輯電路，並寫出輸出端$F(A, B, C)$的最簡POS 布林代數式。



4-4 組合邏輯電路化簡

解

1. 從輸入端開始，由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出的布林代數式。

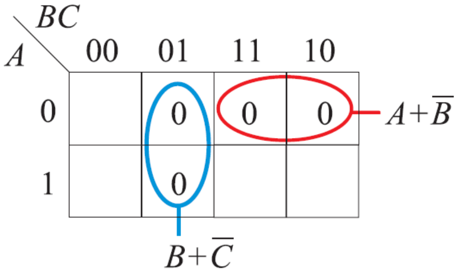


4-4 組合邏輯電路化簡

所以輸出端的標準和之積（SPOS）布林代數式為

$$F(A,B,C)=(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+\overline{C})$$

2. 利用卡諾圖：以0 化簡



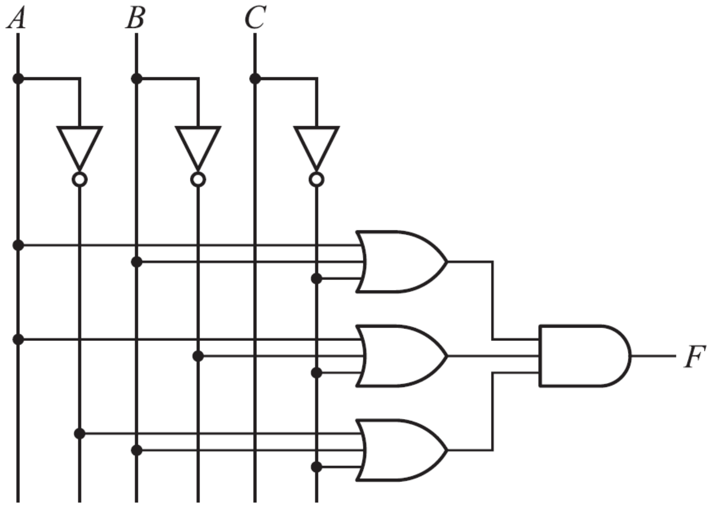
所以輸出端的最簡和之積（POS）布林代數式為

$$F(A,B,C)=(A+\overline{B})(B+\overline{C})$$

4-4 組合邏輯電路化簡

演練 15

化簡下圖的邏輯電路，並寫出輸出端$F(A, B, C)$的最簡POS 布林代數式。



4-4 組合邏輯電路化簡

三 各種邏輯閘組成的邏輯電路之化簡

由各種邏輯閘所組成的邏輯電路，其化簡的步驟為：

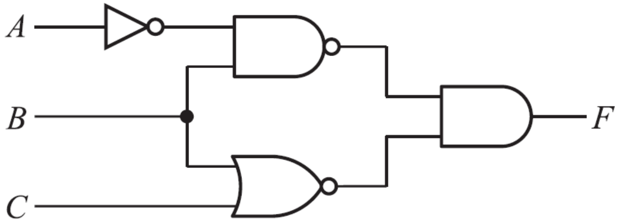
（一）從輸入端開始，由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出的布林代數式，直到寫出輸出端的布林代數式。

（二）再利用布林代數演算法或卡諾圖法化簡，以得到輸出端的最簡布林代數式。

4-4 組合邏輯電路化簡

例題 4-16　　邏輯電路化簡

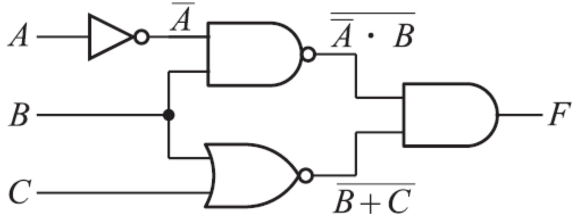
化簡下圖的邏輯電路，並寫出輸出端$F(A, B, C)$ 的最簡SOP 布林代數式。



4-4 組合邏輯電路化簡

解

1. 從輸入端開始，由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出的布林代數式。



所以輸出端的布林代數式為

$$F(A,B,C) = \overline{\overline{A}B} \cdot \overline{B+C}$$

4-4 組合邏輯電路化簡

2. 利用布林代數演算法化簡：

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= \overline{\overline{A}B}\cdot\overline{B+C} \\
&= (A+\overline{B})\cdot(\overline{B}\cdot\overline{C}) && (\because \text{第摩根第二定理}\ \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}) \\
& && (\because \text{第摩根第一定理}\ \overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}) \\
&= A\overline{BC}+\overline{BBC} && (\because \text{乘法分配律}\ A(B+C)=AB+AC) \\
&= A\overline{BC}+\overline{BC} && (\because \text{乘法全等定理}\ A\cdot A=A) \\
&= \overline{BC}(A+1) && (\because \text{乘法分配律}\ A(B+C)=AB+AC) \\
&= \overline{BC}\cdot 1 && (\because \text{加法空元素定理}\ A+1=1) \\
&= \overline{BC} && (\because \text{乘法一致定理}\ A\cdot 1=A)
\end{aligned}
$$

4-4 組合邏輯電路化簡

所以輸出端的最簡布林代數式為

$$F(A,B,C)=\overline{BC}$$

演練 16

化簡右圖的邏輯電路。

1. 寫出輸出端F(A, B)的最簡布林代數式。
2. 其輸出端F(A, B) = 1 的情況有幾種？