第 3 章 布林代數及第摩根定理

第 3 章 布林代數及第摩根定理

布林代數（Boolean algebra） 是由英國數學家喬治布林（George Boole） 於1854 年發表，用來分析與處理邏輯運算的代數式，在數位邏輯電路中可以用來表示輸出變數與輸入變數的關係式。本章將針對布林代數與第摩根定理做詳細的說明。

3-1 布林代數之特質

布林代數不同於一般的數學代數，因為在布林代數中的常數或變數，不是代表數量的大小，而是代表兩種不同的狀態，例如開（ON）或關（OFF）電視、事件為真（true）或假（false）、高（high）電位或低（low）電位等情形，都只有兩種狀態，相當於數位邏輯中的「1」或「0」，其中的「1」代表「高電位」，「0」代表「低電位」，所以布林代數是一種二維的代數系統。

布林代數式中有常數項與變數項，常數項不是「0」就是「1」，而變數項則以英文字母「A、B、C…X、Y、Z」來表示，布林代數式除了可以用來表示數位邏輯電路中輸出變數與輸入變數的關係式之外，也可以透過各種不同的方法來化簡布林代數式，以降低電路中使用的IC 個數與節省成本。

3-2 布林代數基本運算

布林代數的基本運算有三種，即反相（**NOT**）運算、邏輯加法（**OR**）運算與邏輯乘法（**AND**）運算。針對這三種基本運算的特性說明如下：

一 反相（NOT）運算

NOT 運算又稱為補數運算，通常在變數上方畫一橫線「 ¯ 」來表示。

例如變數A 執行NOT 運算時：

（一）布林代數式為$F=\overline{A}$（唸 A bar）。

（二）特性：「0 的反相為1，1 的反相為0」。

（三）真值表：如表3-1 所示。

（四）結論：NOT 運算$\overline{0}=1$，$\overline{1}=0$，與二進位 1的補數運算相同（1 的補數運算將在第五章介紹）。

▼ 表 3-1　NOT 運算真值表

輸入	輸出
A	F
0	1
1	0

3-2 布林代數基本運算

二 邏輯加法（OR）運算

OR 運算又稱為或運算，通常以加法符號「＋」來表示。

例如兩個變數A、B 執行OR 運算時：

（一）布林代數式為 $F = A + B$。

（二）特性：「只要A 或B 其中有任何一個輸入為1，輸出F 即為1」；或者「A 與B 皆為0 時，輸出F 才為0」。

（三）真值表：如表3-2 所示。

（四）結論：OR 運算與二進位加法運算類似，唯一的差異為1 + 1 = 1（二進位加法運算將在第五章介紹）。

表 3-2　OR 運算真值表

輸入		輸出
A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3-2 布林代數基本運算

三 邏輯乘法（AND）運算

AND 運算又稱為及運算，通常以乘法符號「 · 」或不加任何運算子來表示。

例如兩個變數A、B 執行AND 運算時：

（一）布林代數式為 $F = A \cdot B = AB$。

（二）特性：「只要A 或B 其中有任何一個輸入為0，輸出F 即為0」； 或者「A 與B 皆為1 時，輸出F 才為1」。

（三）真值表，如表3-3 所示。

（四）結論： AND 運算與二進位乘法運算相同。

▼ 表 3-3 AND 運算真值表

輸入		輸出
A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3-2 布林代數基本運算

例題 3-1　　邏輯加法（OR）運算

寫出布林代數式 $F=0\cdot 1+1+\overline{0}\cdot 1$ 的運算結果。

解

$$F=0\cdot 1+1+\overline{0}\cdot 1=0+1+1\cdot 1=0+1+1=1$$

演練 1

寫出布林代數 $F=\overline{0}+1\cdot 0+\overline{0}\cdot 1$ 的運算結果。

3-3 布林代數基本定理

根據布林代數基本運算原理整理而得的布林恆等式就是布林代數基本定理與定律，簡稱布林定理（Boolean theorems），我們可以利用這些布林定理來化簡複雜的布林代數式，以得到最簡的布林代數式。表3-4 是布林代數基本定理與定律，現在我們逐一說明如下：

3-3 布林代數基本定理

表 3-4　布林代數基本定理與定律

基本定理與定律		加法運算	乘法運算
單變數定理	一致定理	$A+0=A$	$A\cdot 1=A$
	空元素定理	$A+1=1$	$A\cdot 0=0$
	全等定理	$A+A=A$	$A\cdot A=A$
	補數定理	$A+\overline{A}=1$	$A\cdot\overline{A}=0$
	自補定理	$\overline{\overline{A}}=A$	
多變數定理	交換律	$A+B=B+A$	$AB=BA$
	結合律	$A+(B+C)=(A+B)+C$	$A(BC)=(AB)C$
	分配律	$A+BC=(A+B)(A+C)$	$A(B+C)=AB+AC$
	吸收定理	$A+AB=A$	$A(A+B)=A$
	第摩根定理	$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

3-3 布林代數基本定理

一 單變數定理

單變數的布林定理是用來表示單一個變數（例如A）與常數位元（1 或0）之間的邏輯運算結果。

(一）一致定理（identity theorem）：或稱為同質定理，其布林恆等式與口訣，如表3-5 所示。

▼ 表 3-5　一致定理

定理 / 項目	加法一致定理	乘法一致定理
布林恆等式	$A+0=A$	$A\cdot 1=A$
口訣	任何變數 + 0 = 任何變數	任何變數 · 1 = 任何變數

3-3 布林代數基本定理

（二）空元素定理（null element theorem）：其布林恆等式與口訣，如表3-6 所示。

表 3-6　空元素定理

定理 / 項目	加法空元素定理	乘法空元素定理
布林恆等式	$A+1=1$	$A\cdot 0=0$
口訣	任何變數 $+1=1$	任何變數 $\cdot 0=0$

3-3 布林代數基本定理

（三）全等定理（equal theorem）：其布林恆等式與口訣，如表 3-7 所示。

▼ 表 3-7　全等定理

定理 / 項目	加法全等定理	乘法全等定理
布林恆等式	$A + A = A$	$A \cdot A = A$
口訣	本身 + 本身 = 本身	本身 · 本身 = 本身

3-3 布林代數基本定理

（四）補數定理（complementary theorem）：其布林恆等式與口訣，如表3-8 所示。

表 3-8　補數定理

定理／項目	加法補數定理	乘法補數定理
布林恆等式	$A+\overline{A}=1$	$A\cdot\overline{A}=0$
口訣	本身＋本身的補數＝1	本身·本身的補數＝0

3-3 布林代數基本定理

（五）自補定理（involution theorem）：其布林恆等式與口訣，如表3-9 所示。

表 3-9　自補定理

定理 / 項目	自補定理
布林恆等式	$\overline{\overline{A}} = A$
口訣	本身的補數再補數 = 本身（∵負負得正）

3-3 布林代數基本定理

例題 3-2　單變數定理

化簡布林代數式 $F(A,B)=A+\overline{A}+\overline{B}+\overline{A}B$

解 $F(A,B)=A+\overline{A}+\overline{B}+\overline{A}B$

$=1+\overline{B}+\overline{A}B$　（∵加法補數定理 $A+\overline{A}=1$）

$=1$　（∵加法空元素定理 $A+1=1$）

演練 2

化簡布林代數式 $F(A,B)=\overline{A}+B+A\overline{B}+\overline{B}$

3-3 布林代數基本定理

二 多變數定理

具有兩個或兩個以上變數（例如A、B、C）的布林定理稱為多變數布林定理。

（一）交換律（commutative laws）：其布林恆等式與結論，如表 3-10 所示。

表 3-10 交換律

項目 \ 定理	加法交換律	乘法交換律
布林恆等式	$A+B=B+A$	$AB=BA$
結論	加法交換律與一般的數學代數交換律相同。	乘法交換律與一般的數學代數交換律相同。

3-3 布林代數基本定理

（二）結合律（associative laws）：其布林恆等式與結論，如表 3-11 所示。

表 3-11　結合律

定理 / 項目	加法結合律	乘法結合律
布林恆等式	$A + (B + C) = (A + B) + C$	$A(BC) = (AB)C$
結論	加法結合律與一般的數學代數結合律相同。	乘法結合律與一般的數學代數結合律相同。

3-3 布林代數基本定理

（三）分配律（distributive laws）：其布林恆等式與結論，如表3-12 所示。

表 3-12　分配律

項目＼定理	加法分配律	乘法分配律
布林恆等式	$A + BC = (A + B)(A + C)$	$A(B + C) = AB + AC$
結論	**加法分配律與一般的數學代數分配律不同**，所以需多注意。	乘法分配律與一般的數學代數分配律相同。

3-3 布林代數基本定理

（四）吸收定理（absorption theorem）：其布林恆等式與證明，如表3-13 所示。

▼ 表 3-13　吸收定理

項目＼定理	加法吸收定理	乘法吸收定理
布林恆等式	$A + AB = A$	$A(A + B) = A$
證明	$A + AB = A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A$	$A(A + B) = AA + AB = A + AB$ $= A(1 + B) = A \cdot 1 = A$

3-3 布林代數基本定理

例題 3-3　加法分配律

化簡布林代數式$F(A,B)=A+\overline{A}B$ 。

解

$$
\begin{aligned}
F(A,B) &= A+\overline{A}B \\
&= (A+\overline{A})(A+B) && (\because \text{加法分配律 } A+BC=(A+B)(A+C)) \\
&= 1\cdot(A+B) && (\because \text{加法補數定理 } A+\overline{A}=1) \\
&= A+B && (\because \text{乘法一致定理 } A\cdot 1=A)
\end{aligned}
$$

演練 3

化簡布林代數式 $F(A,B)=A(\overline{A}+B)$ 。

3-3 布林代數基本定理

例題 3-4　乘法分配律

化簡布林代數式 $F(A,B)=(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$。

解

$F(A,B)=(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$

$=A\overline{A}+A\overline{B}+B\overline{A}+B+\overline{B}$（∵乘法分配律 $A(B+C)=AB+AC$）

$=0+A\overline{B}+\overline{A}B+0$（∵乘法補數定理 $A\cdot\overline{A}=0$ 與乘法交換律 $AB=BA$）

$=A\overline{B}+\overline{A}B$（∵加法一致定理 $A+0=A$）

$=A\oplus B$（XOR 閘）

演練 4

化簡布林代數式 $F(A,B)=(A+\overline{B})(\overline{A}+B)$。

3-3 布林代數基本定理

例題 3-5　　多變數定理

化簡布林代數式 $F(A,B,C)=AB\overline{C}+ABC+\overline{B}$ 。

解 $F(A,B,C)=AB\overline{C}+ABC+\overline{B}$

$$=AB(\overline{C}+C)+\overline{B}$$ （∵乘法分配律 $A(B+C)=AB+AC$）

$$=AB\cdot 1+\overline{B}$$ （∵加法補數定理$C+C=1$）

$$=AB+\overline{B}$$ （∵乘法一致定理 $A\cdot 1=A$）

$$=(A+\overline{B})(B+\overline{B})$$ （∵加法分配律 $A+BC=(A+B)(A+C)$）

$$=(A+\overline{B})\cdot 1$$ （∵加法補數定理 $B+B=1$）

$$=A+\overline{B}$$ （∵乘法一致定理 $A\cdot 1=A$）

3-3 布林代數基本定理

演練 5

化簡布林代數式 $F(A,B,C)=\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+A\overline{C}+\overline{AC}$ 。

3-4 第摩根定理

第摩根定理（Demorgan's theorem）是由數學家第摩根（Demorgan）所提出來的兩個重要定理，其中第摩根第一定理就是加法第摩根定理（即 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ ），第摩根第二定理就是乘法第摩根定理（即 $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$），通常應用在布林代數的化簡中，分別說明如下：

3-4 第摩根定理

一 第摩根第一定理

第摩根第一定理：其布林恆等式、等效閘與結論，如表3-14 所示。

▼ 表 3-14　第摩根第一定理

定理 / 項目	第摩根第一定理
布林恆等式	$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
等效閘	
結論	1. 兩個變數第摩根第一定理：$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ 即兩變數相加後再反相，等於兩變數先反相後再相乘。 2. 同理可證，多變數第摩根第一定理： $\overline{A+B+C+\cdots+Z}=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\ \cdots\ \cdot\overline{Z}$ 即各變數相加後再反相，等於各變數先反相後再相乘。

3-4 第摩根定理

例題 3-6　第摩根第一定理

化簡布林代數式 $F(A,B)=A(\overline{A+B})$ 。

解

$$F(A,B)=A(\overline{A+B})$$

$$=A(\overline{A}\cdot\overline{B}) \qquad (\because 第摩根第一定理\ \overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B})$$

$$=0 \qquad (\because 乘法補數定理\ A\cdot\overline{A}=0\ )$$

演練 6

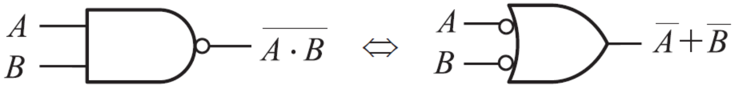
化簡布林代數式 $F(A,B)=\overline{\overline{A}+B}$。

3-4 第摩根定理

二 第摩根第二定理

第摩根第二定理：其布林恆等式、等效閘與結論，如表3-15 所示。

表 3-15 第摩根第二定理

定理 \ 項目	第摩根第二定理
布林恆等式	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$
等效閘	
結論	1. 兩個變數第摩根第二定理：$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ 即兩變數相乘後再反相，等於兩變數先反相後再相加。 2. 同理可證，多變數第摩根第二定理： $\overline{A\cdot B\cdot C\cdot\ \cdots\ \cdot Z}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\cdots+\overline{Z}$ 即各變數相乘後再反相，等於各變數先反相後再相加。

3-4 第摩根定理

例題 3-7　　第摩根第二定理

化簡布林代數式 $F(A,B)=\overline{\overline{A}B}$。

解

$$
\begin{aligned}
F(A,B) &= \overline{\overline{A}B} \\
&= \overline{\overline{A}}+\overline{B} \quad (\because \text{第摩根第二定理 } \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}) \\
&= A+\overline{B} \quad (\because \text{自補定理 } \overline{\overline{A}}=A)
\end{aligned}
$$

演練 7

化簡布林代數式 $F(A,B)=\overline{A\overline{B}}+B$。

3-5 邏輯閘互換

一般而言，在邏輯電路中，有時會依據電路圖分析輸出端的布林代數式，或是依據布林代數式來設計電路。因此，我們必須先學會這兩種方法，進而將其運用在邏輯閘的互換，以減少使用邏輯閘的種類，達到節省成本的目的。

一 邏輯電路與布林代數式的轉換

（一） 邏輯電路分析

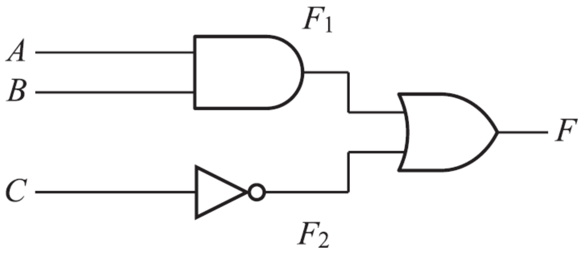
已知邏輯電路時，依照以下的步驟可以寫出輸出端的布林代數式：

1. 從輸入端開始，由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出端的布林代數式。
2. 重複上述步驟，即可寫出邏輯電路輸出端的布林代數式。

3-5 邏輯閘互換

例題 3-8　　邏輯電路分析

如右圖所示之邏輯電路，其輸出端F 的布林代數式為何？當輸入端A = 0、B = 1、C = 0 時，其輸出端F 的狀態為何？



3-5 邏輯閘互換

解

1. 寫出輸出端F的布林代數式：

(1) 輸入端A、B接至AND閘，其輸出端F_1的布林代數式為$F_1 = AB$。

(2) 輸入端C接至NOT閘，其輸出端F_2的布林代數式為$F_2 = \overline{C}$

(3) F_1與F_2接至OR閘，其輸出端F的布林代數式

$$F = F_1 + F_2 = AB + \overline{C}$$

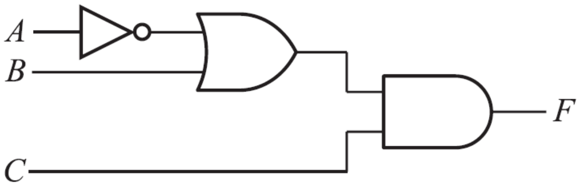
2. 當輸入端$A = 0$、$B = 1$、$C = 0$時，輸出端F的狀態為

$$F = AB + \overline{C} = 0 \cdot 1 + \overline{0} = 0 + 1 = 1$$

3-5 邏輯閘互換

演練 8

如右圖所示之邏輯電路，其輸出端F 的布林代數式為何？輸出端F 為1 的情況有幾種？



3-5 邏輯閘互換

（二）布林代數的實現

已知輸出端的布林代數式時，依照以下的步驟可以畫出邏輯電路：

1. 從括弧內的布林代數式開始，由內而外或由左而右依序畫出NOT、AND與OR 等邏輯閘的邏輯電路。
2. 重複上述步驟，即可畫出完整的邏輯電路。

3-5 邏輯閘互換

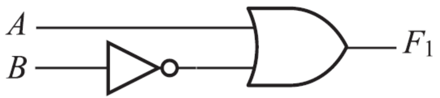
例題 3-9　已知布林代數式，畫邏輯電路

畫出布林代數式為 $F(A,B,C)=(A+\overline{B})\cdot(\overline{A}+C)$ 的邏輯電路。

解

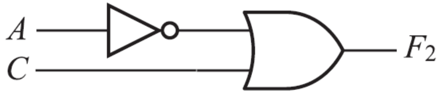
1. 從括弧內的布林代數式開始，由內而外依序畫出每一個邏輯閘的邏輯電路：

(1) $F_1=(A+\overline{B})$，其邏輯電路如下圖所示。



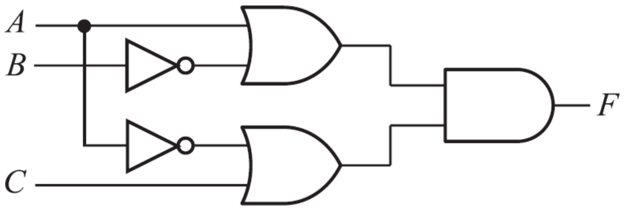
3-5 邏輯閘互換

(2) $F_2 = (\overline{A} + C)$，其邏輯電路如下圖所示。



2. 畫出完整的邏輯電路。

$F = F_1 \cdot F_2 = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + C)$，其完整的邏輯電路如下圖所示。



演練 9

畫出布林代數式為 $F(A,B,C) = A\overline{B} + BC$ 的邏輯電路。

3-5 邏輯閘互換

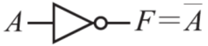
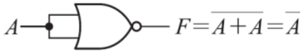
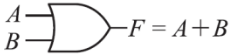
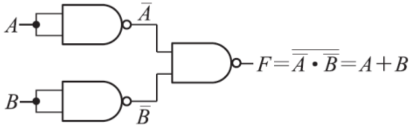
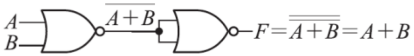
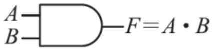
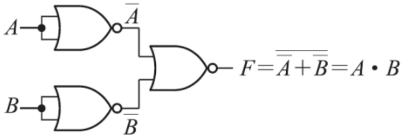
二 邏輯閘互換

運用第摩根第一定理與第二定理，我們可以將NOT、AND、OR等基本邏輯閘以NAND 閘或NOR 閘來取代，所以**NAND** 與**NOR** 閘又稱為萬用邏輯閘（**universal gate**）。如此一來，在實際的數位邏輯電路中，可以減少邏輯閘使用的種類，進而降低IC 的數量，達到節省成本的目的。

表3-16 是以NAND 閘與NOR 閘來取代基本邏輯閘，其取代的方法是應用第摩根定理，將其原來的布林代數式取 2 次反相（即加上$=$，因為自補定理 $\overline{\overline{A}}=A$ ），使其中的「OR」運算以「AND」運算取代，或者是「AND」運算以「OR」運算取代，如表3-16 中套色所示。

3-5 邏輯閘互換

▼ 表 3-16　以 NAND 閘與 NOR 閘來取代基本邏輯閘（以兩輸入為例）

基本邏輯閘		以 NAND 閘取代	以 NOR 閘取代
名稱	符號		
NOT 閘		$F=\overline{A}=\overline{A\cdot A}$（1 個 NAND 閘） 	$F=\overline{A}=\overline{A+A}$（1 個 NOR 閘） 
OR 閘		$F=A+B=\overline{\overline{A+B}}=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$ （3 個 NAND 閘） 	$F=A+B=\overline{\overline{A+B}}$（2 個 NOR 閘） 
AND 閘		$F=A\cdot B=\overline{\overline{A\cdot B}}$（2 個 NAND 閘） 	$F=A\cdot B=\overline{\overline{A\cdot B}}=\overline{\overline{A}+\overline{B}}$ （3 個 NOR 閘） 

3-5 邏輯閘互換

例題 3-10　**NAND 閘與NOR 閘互換**

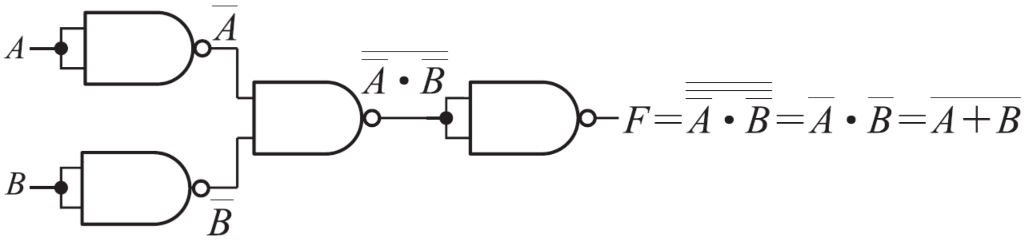
試以兩輸入的NAND 來取代兩輸入的NOR 閘。

解

1. 應用第摩根定理，將NOR 閘的布林代數式取2 次反相。

$$F=\overline{A+B}=\overline{\overline{\overline{A+B}}}=\overline{\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}}$$　（4 個 NAND 閘）

2. 畫出完整的邏輯電路。



3-5 邏輯閘互換

演練 10

試以兩輸入的NOR 來取代兩輸入的NAND 閘。

3-5 邏輯閘互換

三　將AND-OR 電路轉換成全NAND 電路

若邏輯電路為AND-OR 閘結構時，我們可以全部以NAND 閘取代原電路，其轉換的方法有兩種，分別說明如下：

(一) 作圖法

1. 畫出AND-OR 閘的邏輯電路，並且從輸入端的AND 閘開始依序標示階層編號。
2. 將偶數層的OR 閘以反相輸入的NAND 閘取代 (∵ 第摩根定理 $A+B=\overline{\overline{A+B}}=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$)。
3. 再將偶數層NAND 閘輸入端的補數" ○ " 移至奇數層AND 閘輸出端，即形成NAND 閘。
4. 若有NOT 閘，直接以NAND 閘取代。

3-5 邏輯閘互換

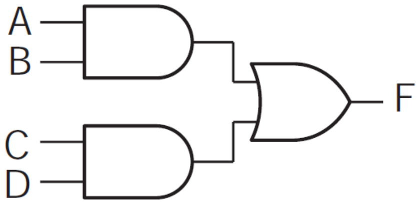
（二）布林代數式法

1. 寫出輸出端的布林代數式。
2. 應用第摩根定理，將原來的布林代數式取2 次反相（即加上$\overline{\overline{\ }}$，因為自補定理 $\overline{\overline{A}}=A$ ），使其中的「OR」運算以「AND」運算取代。

3-5 邏輯閘互換

例題 3-11　　轉換成全**NAND** 電路

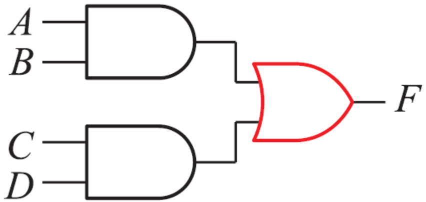
如右圖所示之邏輯電路，請全部以NAND 閘取代原電路。



解

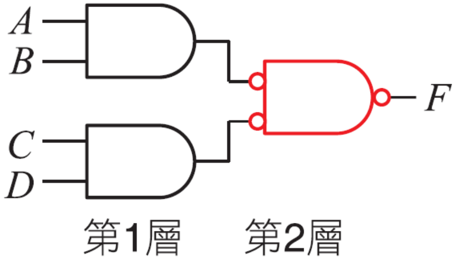
1. 作圖法：

(1) 畫出AND-OR 閘的邏輯電路，並且從輸入端的AND 閘開始依序標示階層編號。

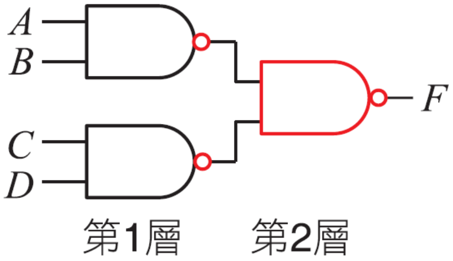


3-5 邏輯閘互換

(2) 將偶數層的OR 閘以反相輸入的NAND 閘取代。
（∵第摩根定理 $A+B=\overline{\overline{A+B}}=\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$ ）。



(3) 再將偶數層NAND 閘輸入端的補數" ○ "移至奇數層AND 閘輸出端，即形成 NAND 閘。



3-5 邏輯閘互換

2. 布林代數式法

(1) 寫出輸出端的布林代數式。

$$F = AB + CD$$

(2) 應用第摩根定理，將原來的布林代數式取2 次反相。

$F = AB + CD = \overline{\overline{AB + CD}} + \overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$，共有 3 個 NAND 閘，如上圖所示。

3. 結論：

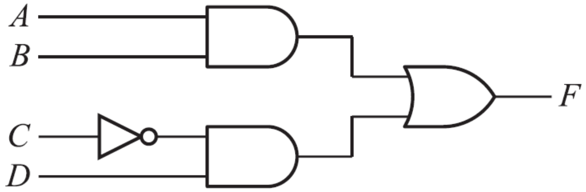
(1) 原圖的邏輯電路有2 個AND 閘、1 個OR 閘，共需要二顆IC。

(2) 經轉換成全NAND 閘後，有3 個NAND 閘，只需要一顆IC。

3-5 邏輯閘互換

演練 11

如右圖所示之邏輯電路，請全部以NAND閘取代原電路。



3-5 邏輯閘互換

四 將OR-AND 電路轉換成全NOR 電路

若邏輯電路為OR-AND 閘結構時，我們可以全部以NOR 閘取代原電路，其轉換的方法有兩種，分別說明如下：

(一) 作圖法

1. 畫出OR-AND 閘的邏輯電路，並且從輸入端的OR 閘開始依序標示階層編號。
2. 將偶數層的AND 閘以反相輸入的NOR 閘取代（∵第摩根定理 $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ ）。
3. 再將偶數層NOR 閘輸入端的補數" ○ " 移至奇數層OR 閘輸出端，即形成 NOR 閘。
4. 若有NOT 閘，直接以NOR 閘取代。

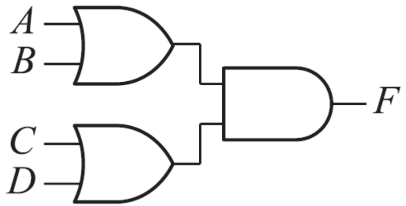
3-5 邏輯閘互換

（二）布林代數式法：

1. 寫出輸出端的布林代數式。
2. 應用第摩根定理，將原來的布林代數式取2 次反相（即加上$=$，因為自補定理 $\overline{\overline{A}}=A$ ），使其中的「AND」運算以「OR」運算取代。

3-5 邏輯閘互換

例題 3-12　轉換成全NOR 電路

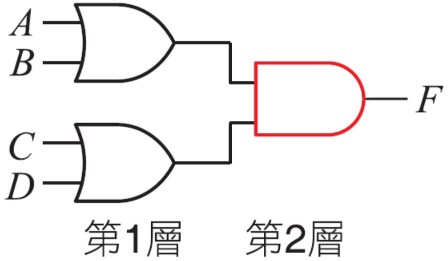


如右圖所示之邏輯電路，請全部以NOR 閘取代原電路。

解

1. 作圖法：

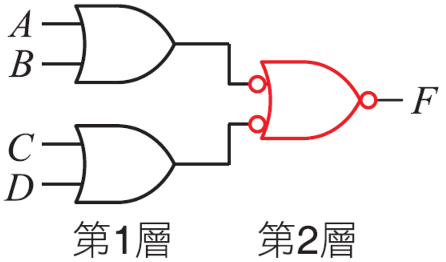
(1) 畫出OR-AND 閘的邏輯電路， 並且從輸入端的OR 閘開始依序標示階層編號。



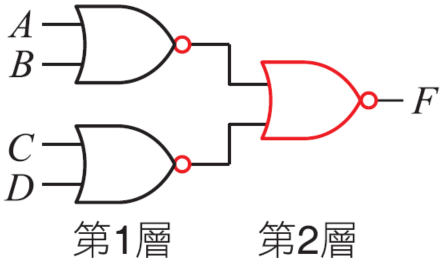
3-5 邏輯閘互換

(2) 將偶數層的AND 閘以反相輸入的NOR 閘取代。

（∵第摩根定理 $A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$ ）



(3) 再將偶數層NOR 閘輸入端的補數" ○ "移至奇數層OR 閘輸出端，即形成NOR 閘。



3-5 邏輯閘互換

2. 布林代數式法：

(1) 寫出輸出端的布林代數式。

$$F=(A+B)(C+D)$$

(2) 應用第摩根定理，將原來的布林代數式取2 次反相。

$$F(A+B)(C+D)=\overline{\overline{(A+B)\cdot(C+D)}}=\overline{\overline{A+B}+\overline{C+D}}$$

，共有 3 個 NOR 閘，如上圖所示。

3. 結論：

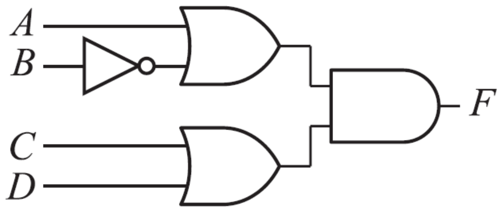
(1) 原圖的邏輯電路有2 個OR 閘、1 個AND 閘，共需要二顆IC。

(2) 經轉換成全NOR 閘後，有3 個NOR 閘，只需要一顆IC。

3-5 邏輯閘互換

演練 12

如右圖所示之邏輯電路，請全部以NOR 閘取代原電路。



3-5 邏輯閘互換

五 多層NAND 或NOR 電路分析

由於NAND 與NOR 閘又稱為萬用邏輯閘，所以有許多邏輯電路完全由NAND或NOR 閘所組成。因此以多層NAND 或NOR 電路分析為例，說明如何有效地化簡電路的複雜度，進而快速得到輸出布林代數式。

3-5 邏輯閘互換

(一) 多層NAND 電路分析

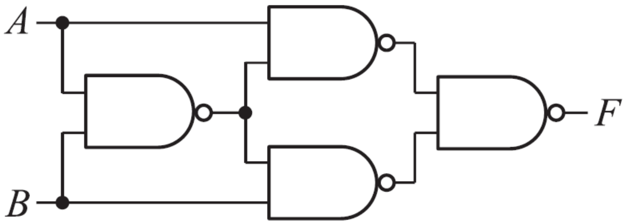
邏輯電路若是由多層的NAND 閘所組成，其分析的方法如下。

1. 從輸出端的邏輯閘依序往輸入端標示階層編號。
2. 將奇數層的NAND閘以反相輸入的OR閘取代
   (∵第摩根定理 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$)。
3. 將偶數層的輸出端補數" ○ " 與奇數層的輸入端補數" ○ " 相互抵銷。
4. 由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出端的布林代數式。

3-5 邏輯閘互換

例題 3-13　多層NAND 電路分析

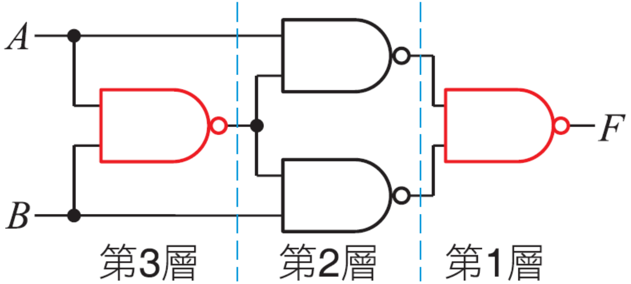
如下圖所示之邏輯電路，其輸出端F 的布林代數式為何？此電路相當於何種閘？



3-5 邏輯閘互換

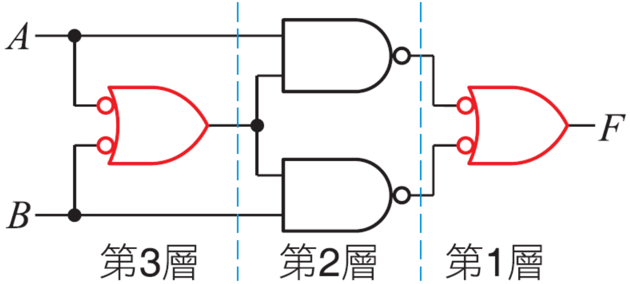
解1. 化簡的步驟：

(1) 從輸出端的邏輯閘依序往輸入端標示階層編號。



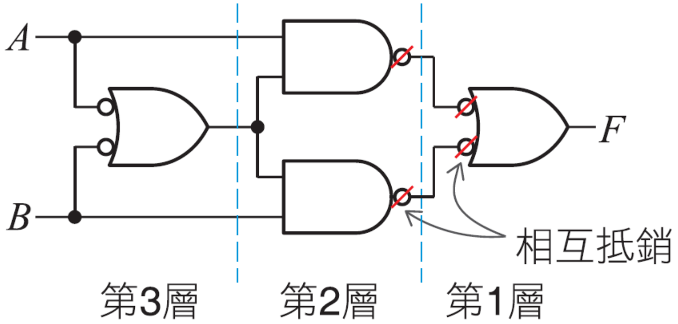
(2) 將奇數層的NAND 閘以反相輸入的OR閘取代。

（∵第摩根定理 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ ）

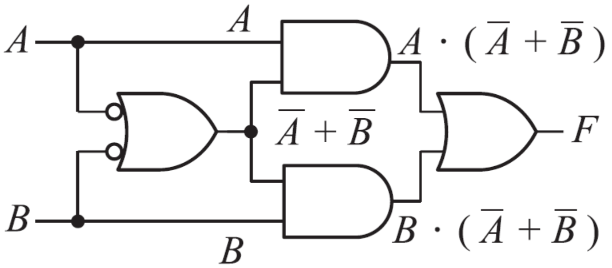


3-5 邏輯閘互換

(3) 將偶數層的輸出端補數" ○ "
與奇數層的輸入端補數" ○ "
相互抵銷。



(4) 由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出端的布林代數式。



所以

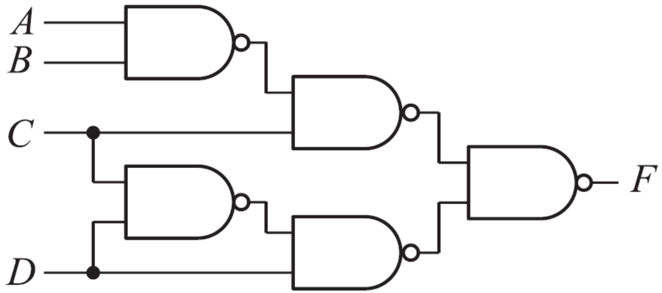
$$F = A(\overline{A}+\overline{B})+B(\overline{A}+\overline{B}) = A\overline{A}+A\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B} = A\overline{B}+\overline{A}B = A\oplus B$$

2. 此電路相當於XOR 閘。

3-5 邏輯閘互換

演練 13

如下圖所示之邏輯電路，其輸出端F 的布林代數式為何？



3-5 邏輯閘互換

（二）多層NOR 電路分析

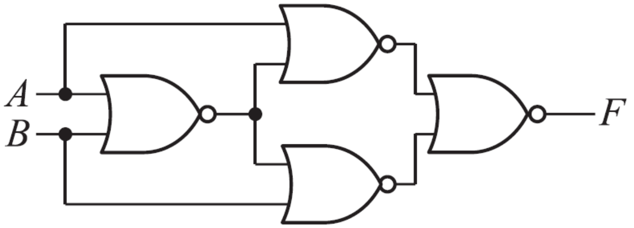
邏輯電路若是由多層的NOR 閘所組成，其分析方法如下。

1. 從輸出端的邏輯閘依序往輸入端標示階層編號。
2. 將奇數層的NOR閘以反相輸入的AND閘取代（∵第摩根定理 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$）。
3. 將偶數層的輸出端補數"○"與奇數層的輸入端補數"○"相互抵銷。
4. 由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出端的布林代數式。

3-5 邏輯閘互換

例題 3-14　多層NOR 電路分析

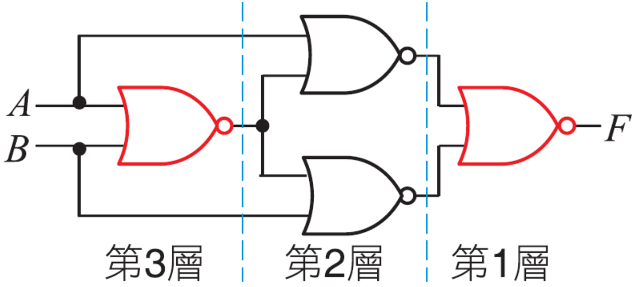
如下圖所示之邏輯電路，其輸出端F 的布林代數式為何？此電路相當於何種閘？



解

1. 化簡的步驟：

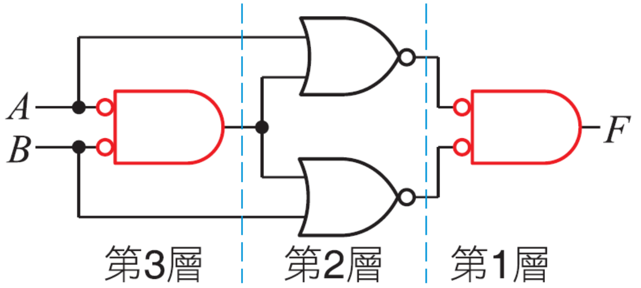
(1) 從輸出端的邏輯閘依序往輸入端標示階層編號。



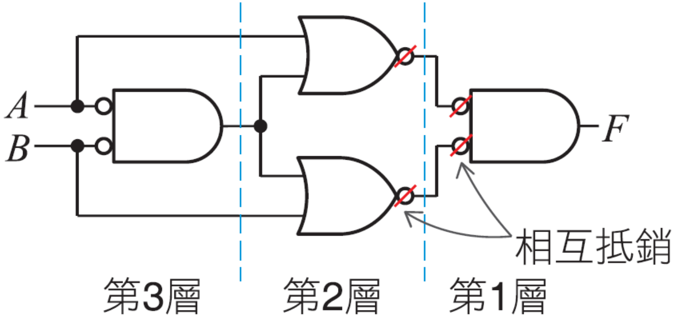
3-5 邏輯閘互換

(2) 將奇數層的NOR 閘以反相輸入的AND 閘取代。

(∵第摩根定理 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$)

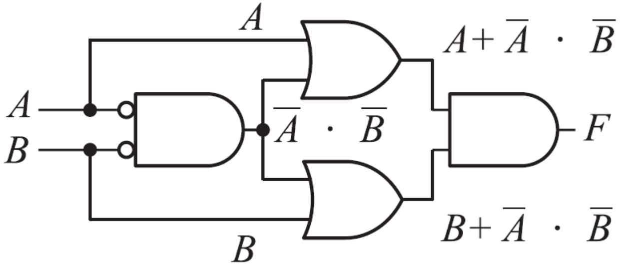


(3) 將偶數層的輸出端補數" ○ " 與奇數層的輸入端補數" ○ " 相互抵銷。



3-5 邏輯閘互換

(4) 由左而右依序寫出每一個邏輯閘輸出端的布林代數式。



所以 $F=(A+\overline{A}\cdot\overline{B})(B+\overline{A}\cdot\overline{B})$

$$=AB+A\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot\overline{B}B+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}$$

$$=AB+\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{A\oplus B}=A\odot B$$

2. 此電路相當於XNOR 閘。

3-5 邏輯閘互換

演練 14

如下圖所示之邏輯電路，其輸出端F 的布林代數式為何？此電路相當於何種閘？