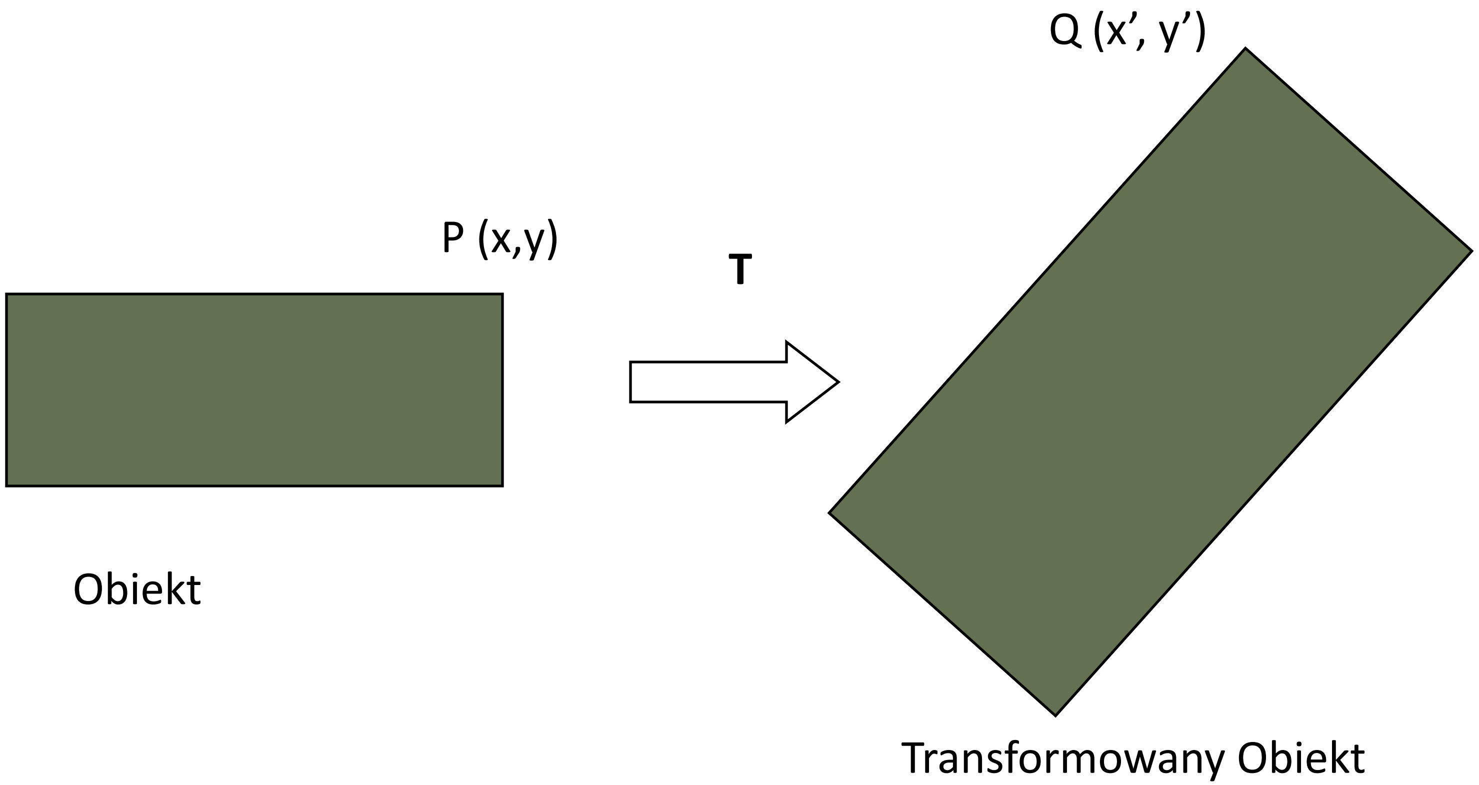
GRAFIKA KOMPUTEROWA

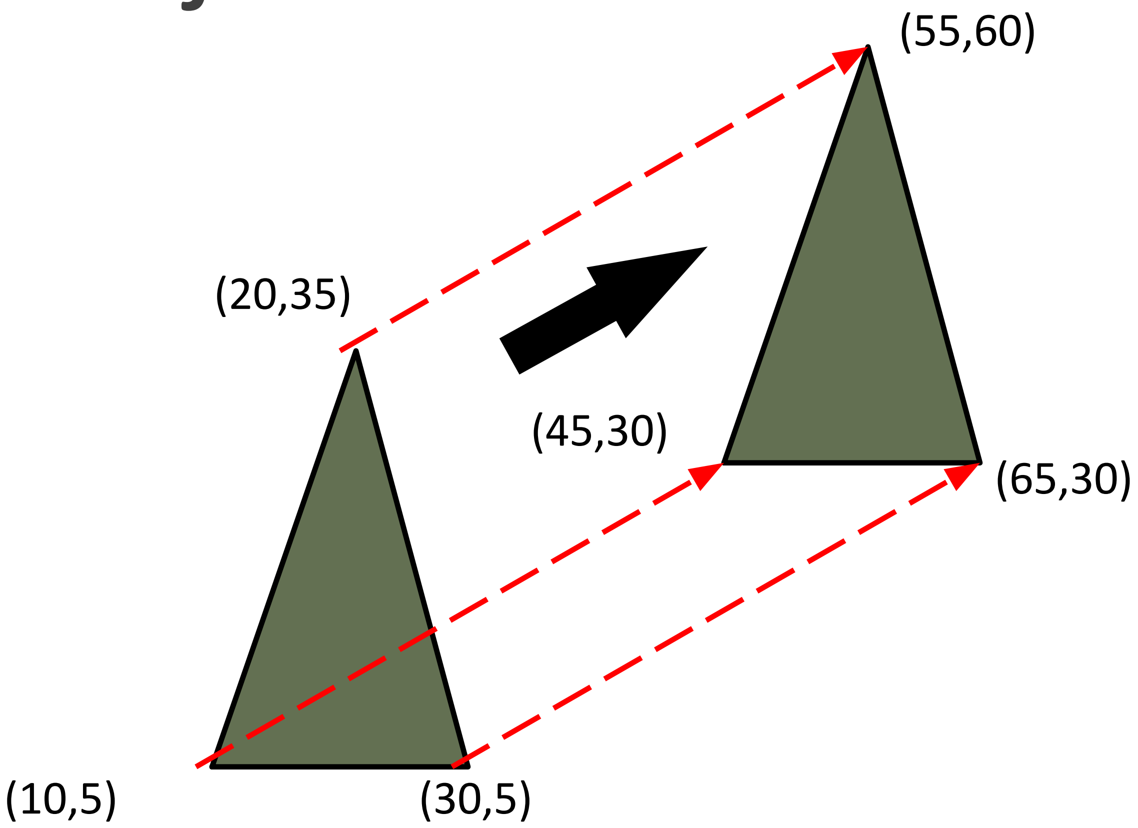
Transformacja



x	x’
y	y’

Punkt Q jest obrazem punktu P po transformacji T.

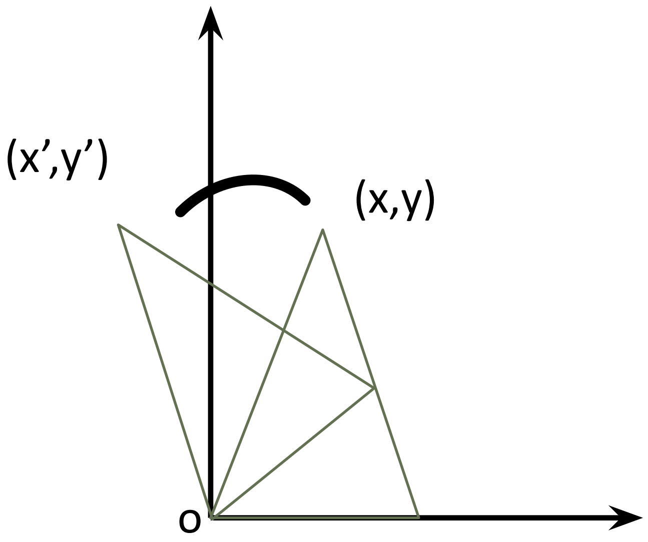
Translacja

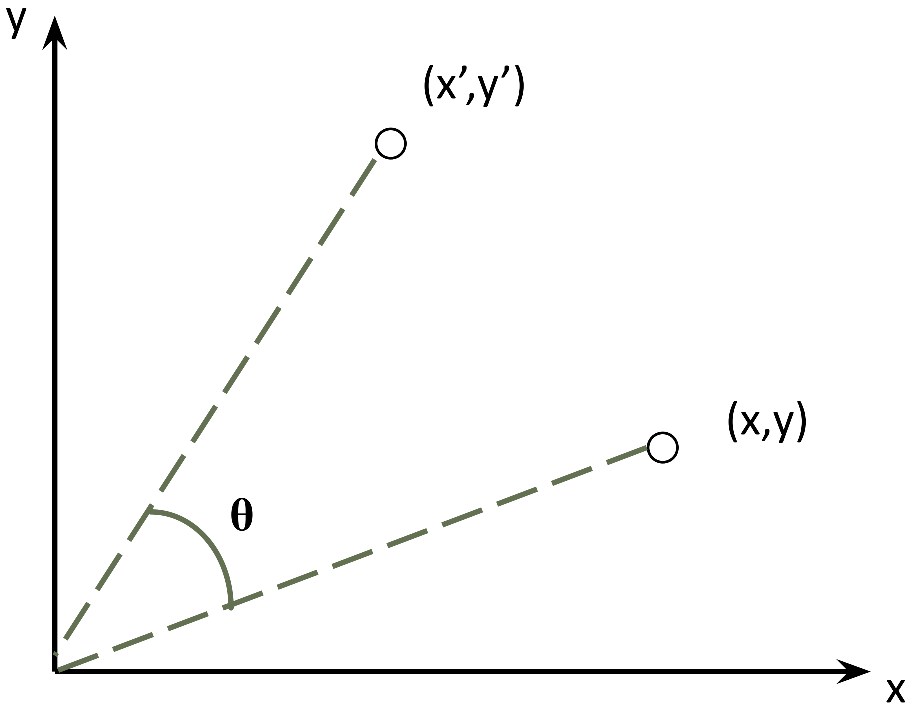


$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

Wektor (t_x, t_y) to wektor przesunięcia (translacji).

Obrót względem p.u.w

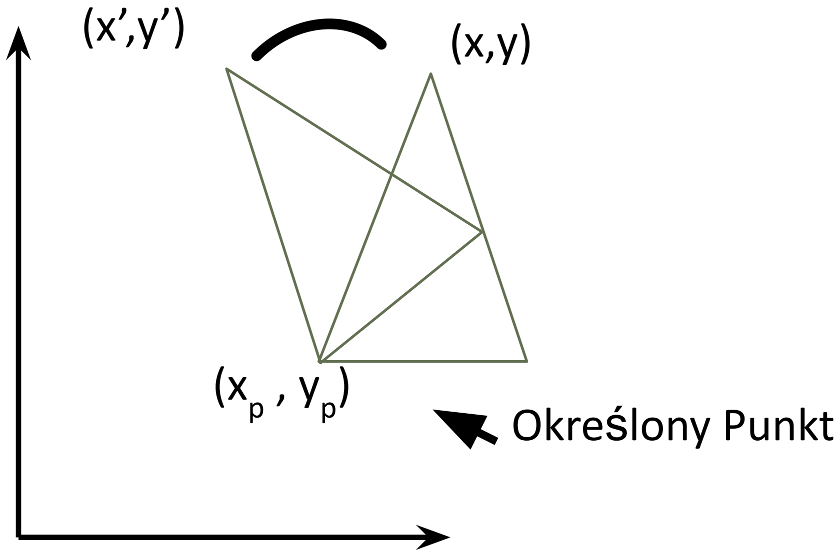




$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$

Obrót 2D oznacza obrót wokół osi-z (0,0,1) o kąt θ.

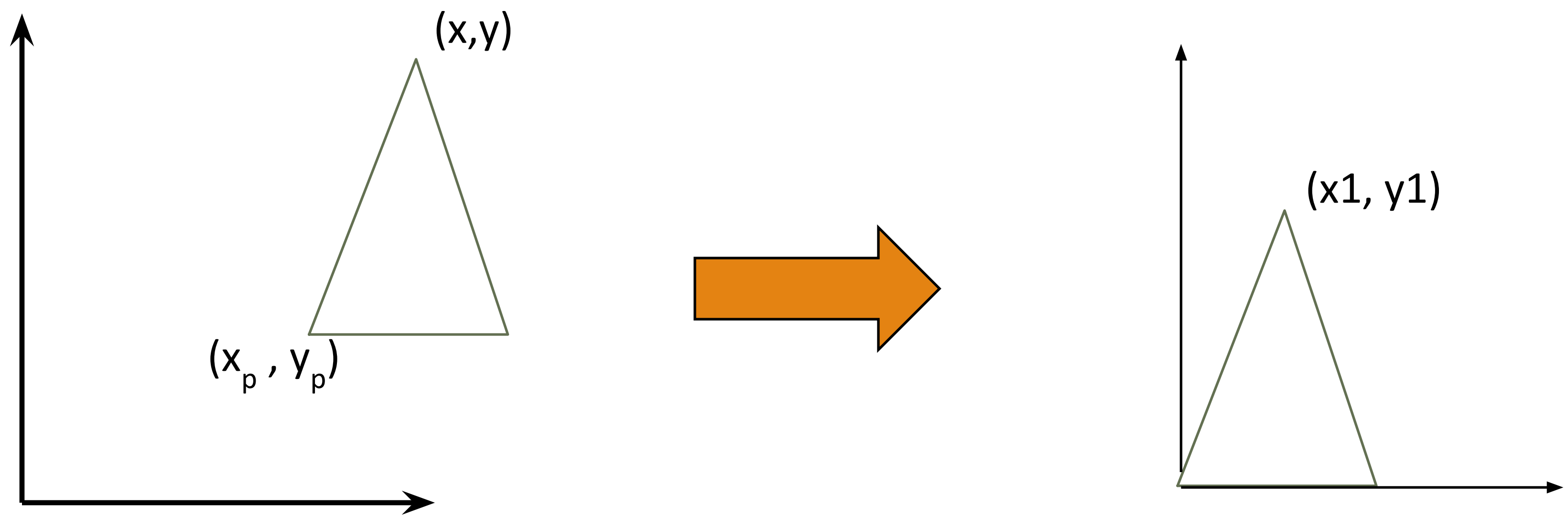
Obrót wokół określonego punktu



- Określony punkt jest punktem obrotu
- Okreslony punkt nie musi być punktem obiektu

Obrót wokół określonego punktu

Krok-1: Translacja punktu do p.u.w

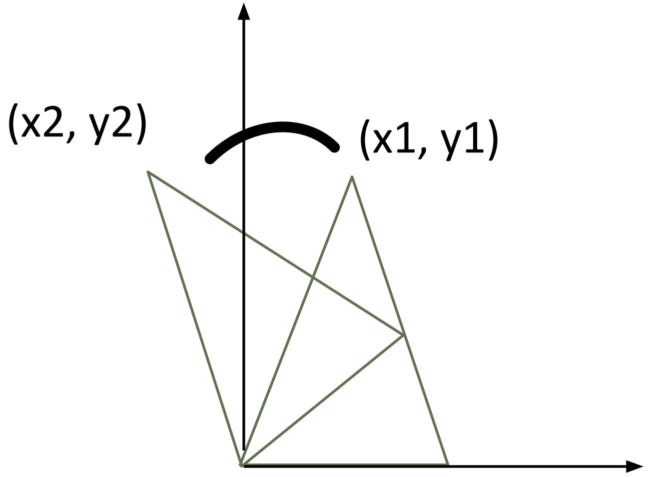


$$x1 = x - x_p$$

$$y1 = y - y_p$$

Obrót wokół określonego punktu

<u>Krok-2:</u> Obrót wzgl. p.u.w

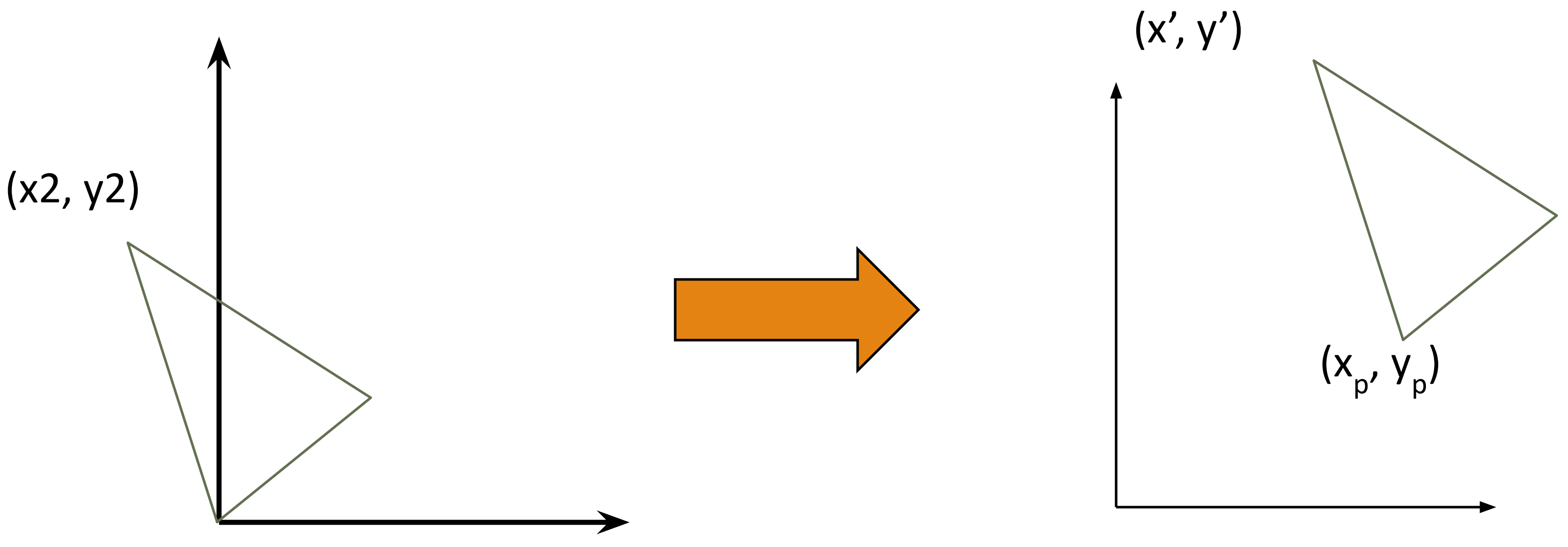


$$x2 = x1\cos\theta - y1\sin\theta$$

$$y2 = x1\sin\theta + y1\cos\theta$$

Obrót wokół określonego punktu

<u>Krok-3:</u> Translacja punktu do oryginalnego położenia



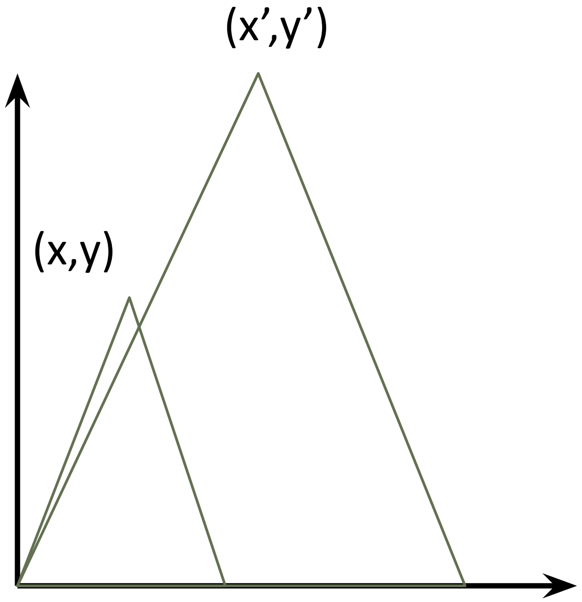
$$x' = x2 + x_p$$

$$y' = y2 + y_p$$

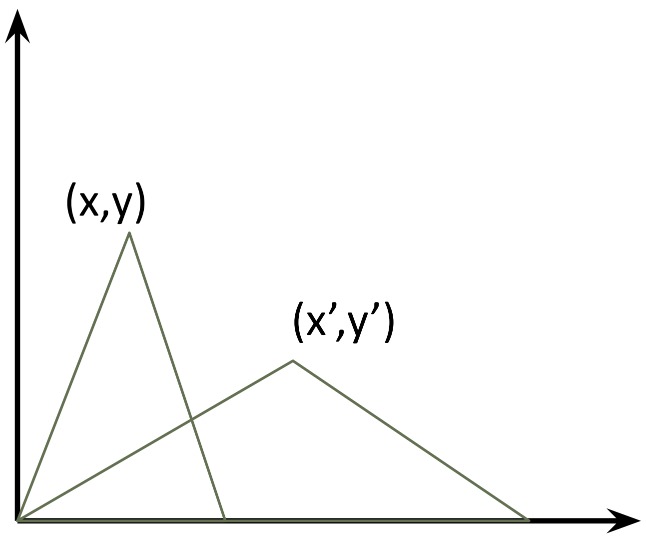
Obrót wokół określonego punktu

$$x' = (x - x_p)\cos\theta - (y - y_p)\sin\theta + x_p$$
$$y' = (x - x_p)\sin\theta + (y - y_p)\cos\theta + y_p$$

Skalowanie wzgl. p.u.w



$$s_x = s_y$$



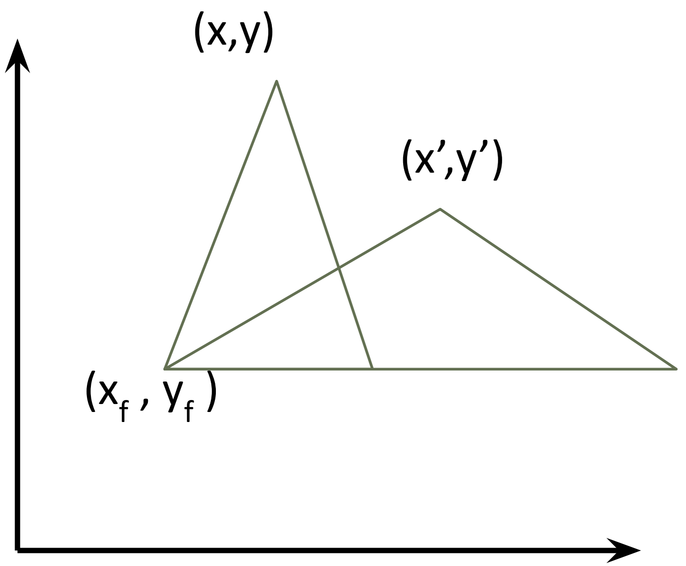
$$s_x \neq s_y$$

$$x' = x.s_x$$
$$y' = y.s_y$$

$$(s_x, s_y > 0)$$

Parametry s_x, s_y są *współczynnikami skalowania*.

Skalowanie wzgl. określonego punktu

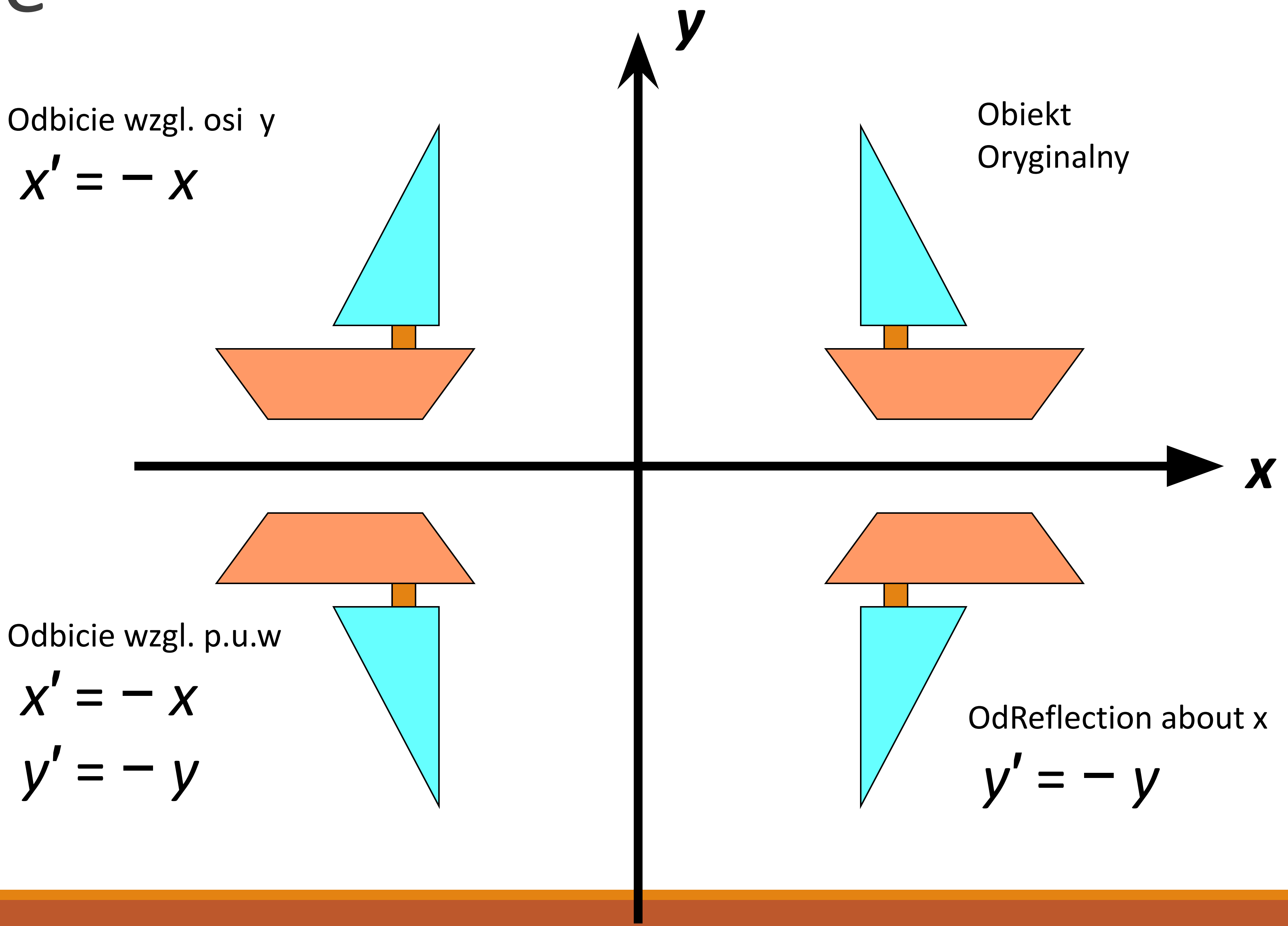


- Translacja punktu do p.u.w
- Skalowanie
- Translacja punktu do położenia oryginalnego.

$$x' = (x - x_f).s_x + x_f$$

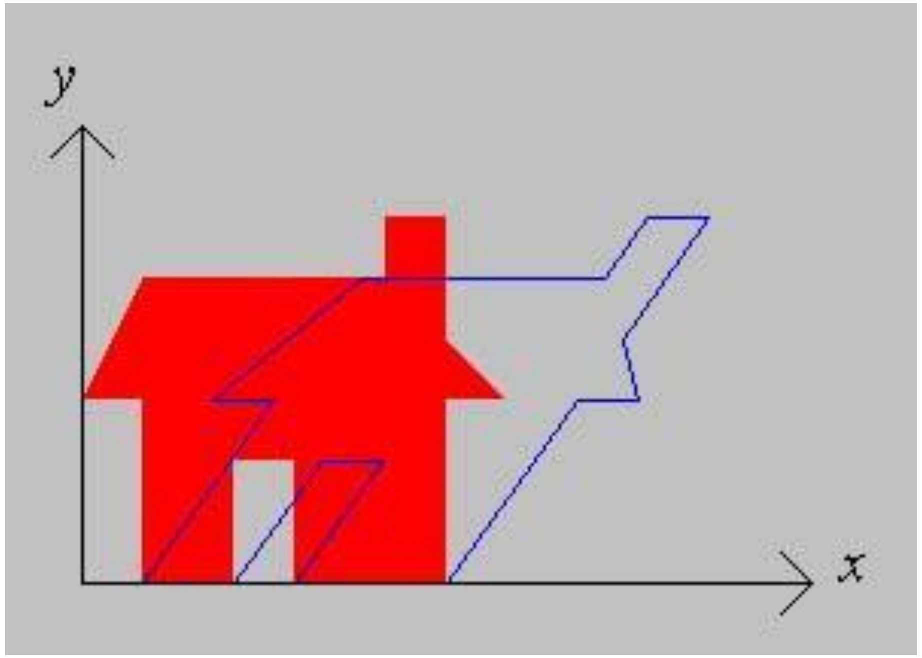
$$y' = (y - y_f).s_y + y_f$$

Odbicie



y
x
Odbicie wzgl. osi y
$x' = -x$
Obiekt
Oryginalny
Odbicie wzgl. p.u.w
$x' = -x$
$y' = -y$
OdReflection about x
$y' = -y$

Pochylenie



$$x' = x + h_x y$$
$$y' = y$$

- Pochylenie w osi-x (wzdłuż osi x) przesuwa punkty w kierunku-x proporcjonalnie do współrz. y.

Reprezentacja macierzowa

Translacja

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Obrót [wzgl. p.u.w]

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Skalowanie [wzgl. p.u.w]

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reprezentacja macierzowa

Odbicie wzgl. x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Odbicie wzgl. y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Odbicie wzgl. p.u.w

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Reprezentacja macierzowa

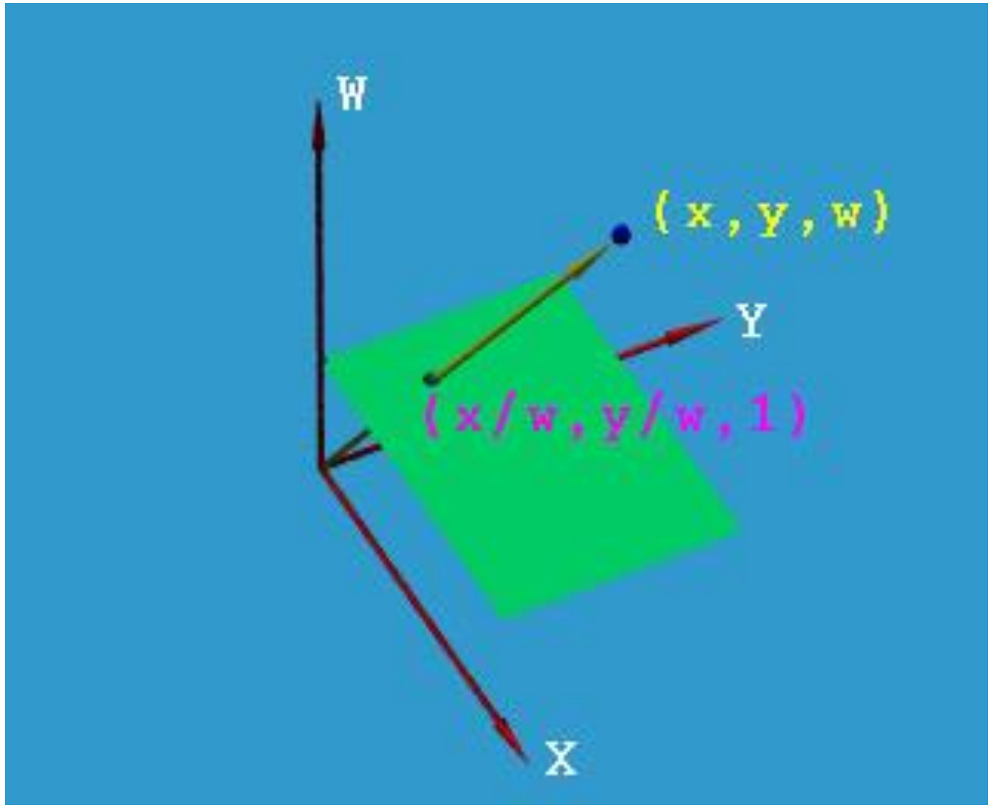
Pochylenie wzgl. x

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Pochylenie wzgl. y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Współrzędne jednorodne



Współrzędne jednorodne

$$(x, y) \longrightarrow (xh, yh, h), h \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) \longleftarrow (a, b, c), c \neq 0$$

<u>Kartezjańskie</u> Jednorodne

Ex.:	(5, 8)	→	(15, 24, 3)
	(x, y)		(x, y, 1)

Współrzędne jednorodne

Podstawowe Transformacje

Translacja
P'=TP

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obrót [p.u.w]
P'=RP

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skalowanie [p.u.w]
P'=SP

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Odwrotne transformacje

Jeżel
,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

wtedy
,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ex.:

$$T^{-1}(t_x, t_y) = T(-t_x, -t_y)$$

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$$

$$S^{-1}(s_x, s_y) = S\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}\right)$$

$$H_x^{-1}(h) = H_x(-h)$$

Reprezentacja macierzowa

Dodatkowe właściwości:

$$T(t_x, t_y)T(u_x, u_y) = T(t_x + u_x,\ t_y + u_y)$$

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\left|R(\theta)\right| = 1$$

$$S(s_x, s_y)S(w_x, w_y) = S(s_x w_x,\ s_y w_y)$$

Składanie transformacji

Transformacja T   następnie

Transformacja Q   nastepnie

Transformacja R:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = [R][Q][T] \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ex.: (Skalowanie wzgl. Określonego punktu)

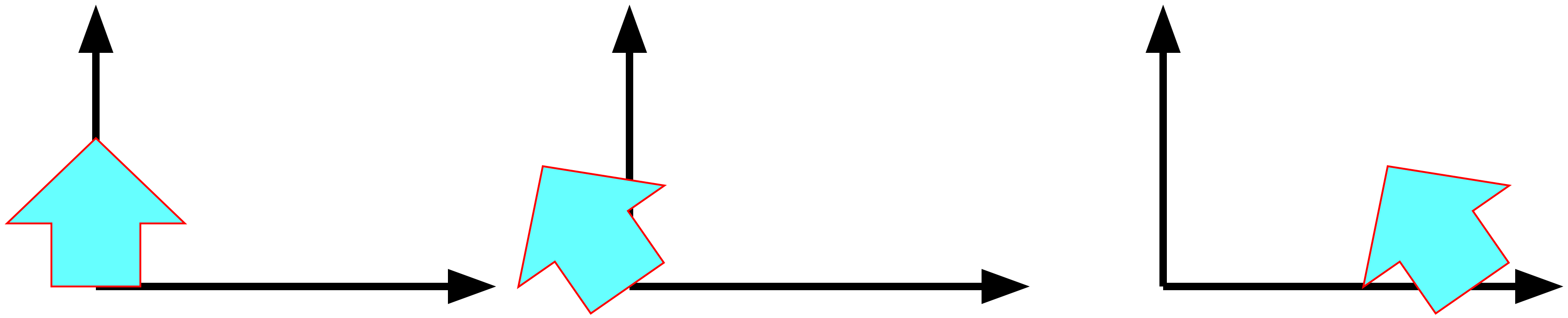
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Porządek   Transformacji

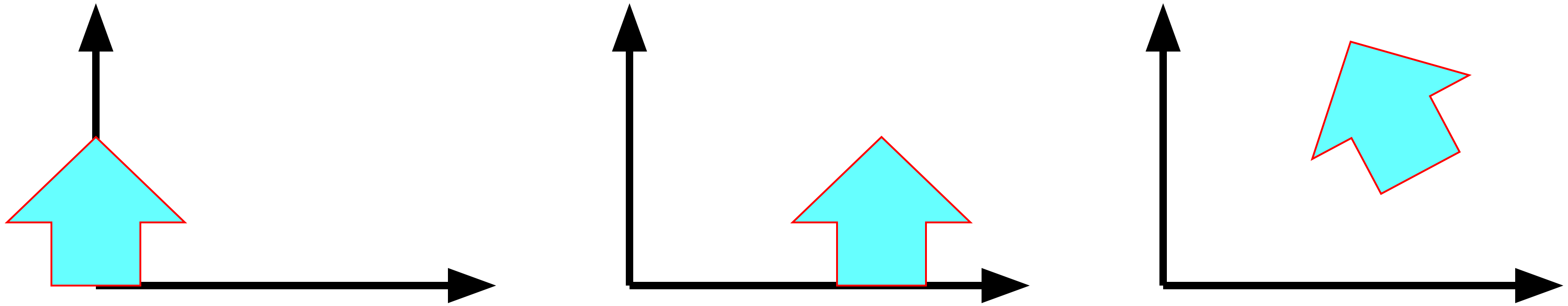
Kolejność transformacji

W składaniu transformacji, kolejność transformacji jest b. ważna.

Obrót następnie translacja:



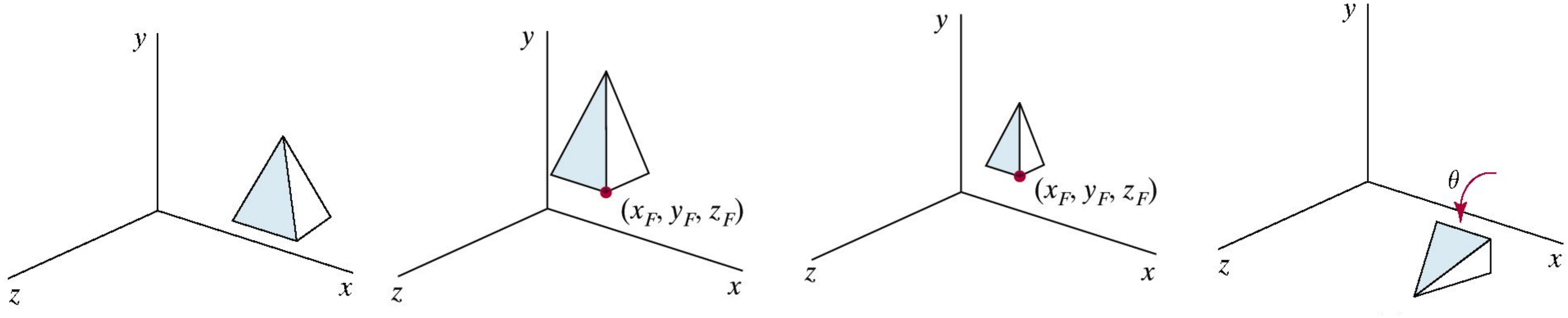
Translacja następnie obrót:

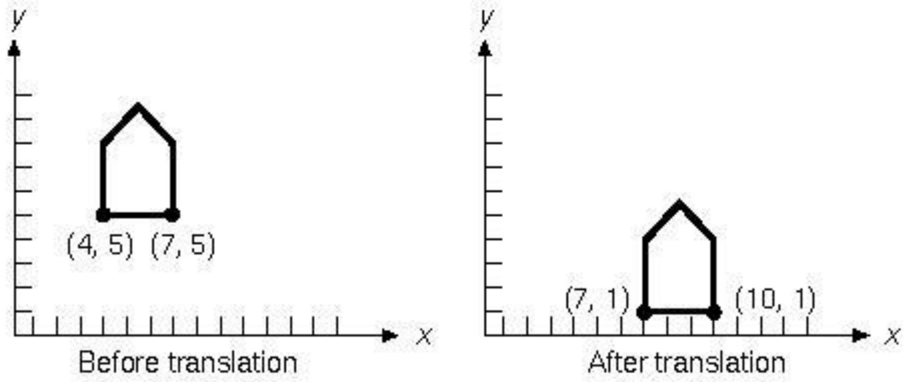


Geometryczne Transformacje

Podstawowe:

- Translacja
- Skalowanie
- Obrót




y
(4, 5) (7, 5)
x
Before translation
y
(7, 1)
(10, 1)
x
After translation

2D obrót

- Przejście do współrzędnych biegunowych

$$x = r\cos\phi \qquad\qquad y = y\sin\phi$$

- Nowe współrzędne

$$x' = r\cos(\phi+\theta) = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = r\sin(\phi+\theta) = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\sin\theta = x\sin\theta + y\cos\theta$$

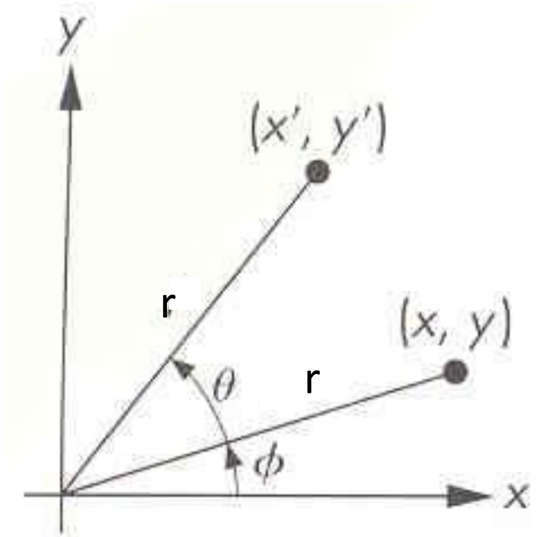
- W postaci macierzowej

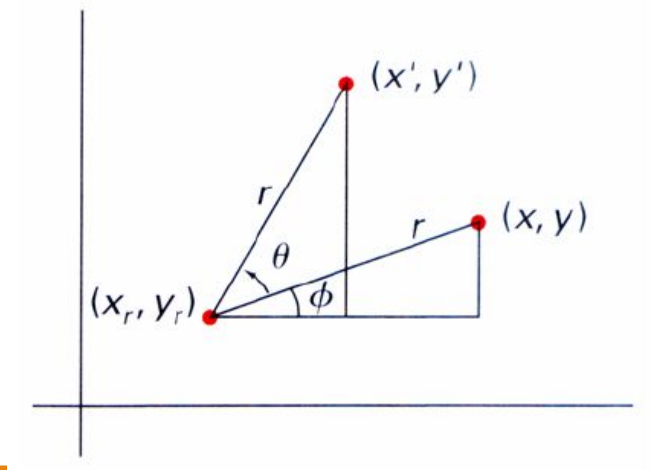
$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad P' = R \cdot P$$

- Obrót wzgl. punktu (x_r, y_r)

$$x' = x_r + (x - x_r)\cos\theta - (y - y_r)\sin\theta$$

$$y' = y_r + (x - x_r)\sin\theta + (y - y_r)\cos\theta$$





2D skalowanie

- Współczynniki skalowania s_x i s_y

$$x' = x \cdot s_x \qquad\qquad y = y \cdot s_y$$

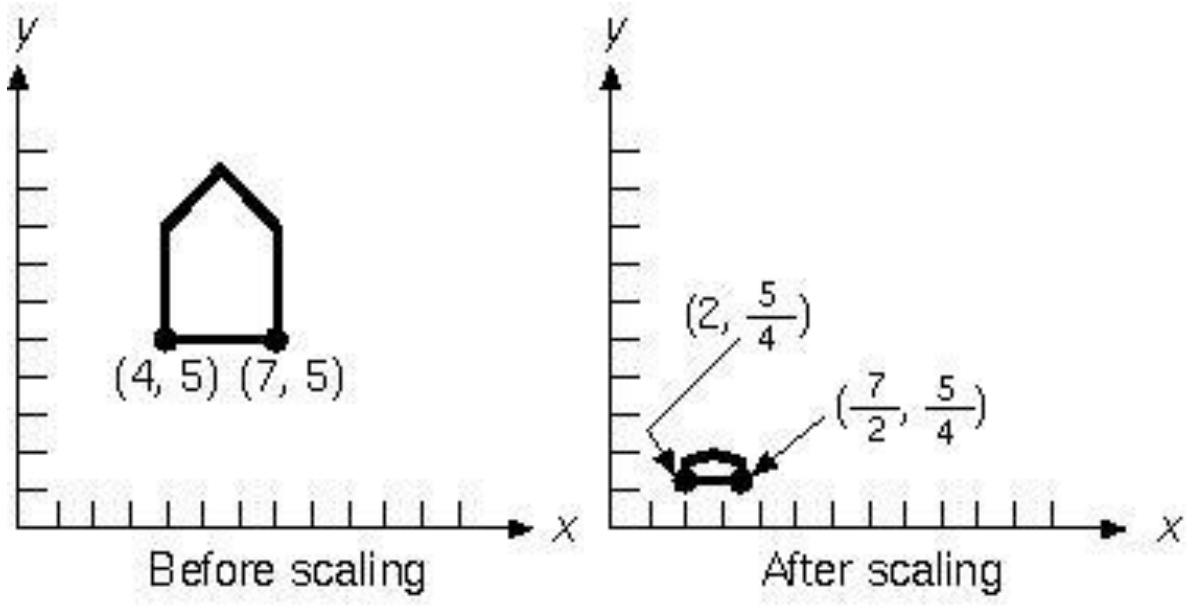
- Postać macierzowa

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad P' = S \cdot P$$

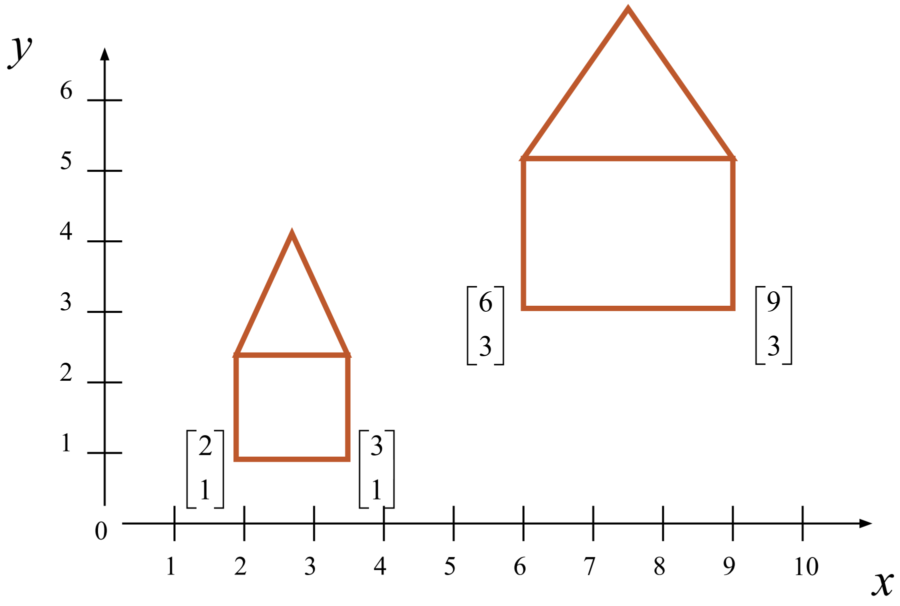
- Wybór punktu (x_f, y_f) jako środka skalowania

$$x' = x \cdot s_x + x_f(1 - s_x)$$
$$y' = y \cdot s_y + y_f(1 - s_y)$$

◦ 1/2 w x i 1/4 w y



Skalowanie



Współrzędne jednorodne

Punkt (x, y) zapisujemy we współrzędnych jednorodnych juak (x_h, y_h, h)

Parameter h jest nie-zerowy :

$$x = \frac{x_h}{h} \qquad y = \frac{y_h}{h}$$

Zapisujemy punkt (x, y) jak (hx, hy, h)

Zwykle $h = 1$ *więc mamy* (x, y) jak $(x, y, 1)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

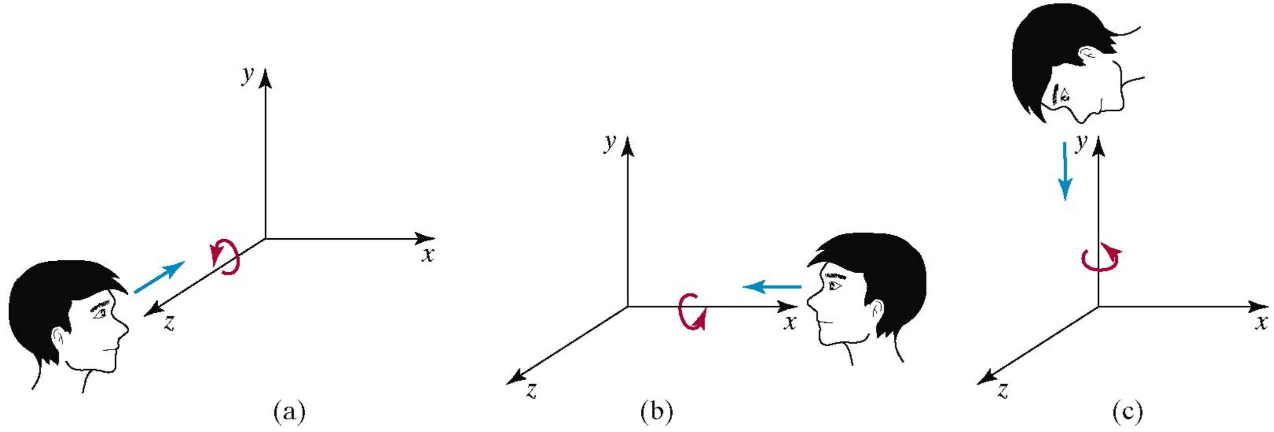
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Następny wykład

3D obrót



3D obrót

- Oś-Z obrót

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$z' = z$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R_z} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rów. Transformacji obrotu wokół dwóch innych współrzędnych otrzymujemy przez cykliczną permutację
  x y z x

- Obrór Oś-X

$$y' = y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z' = y\sin\theta + z\cos\theta$$
$$x' = x$$

$$R_x = R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Obrót os-Y

$$z' = z\cos\theta - x\sin\theta$$
$$x' = z\sin\theta + x\cos\theta$$
$$y' = y$$

$$R_y = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = T^{-1} \cdot R_x(\theta) \cdot T \cdot P$$
$$R(\theta) = T^{-1} \cdot R_x(\theta) \cdot T$$

Odwrotna macierz obrotu

$$R^{-1}(\theta) = R(-\theta)$$

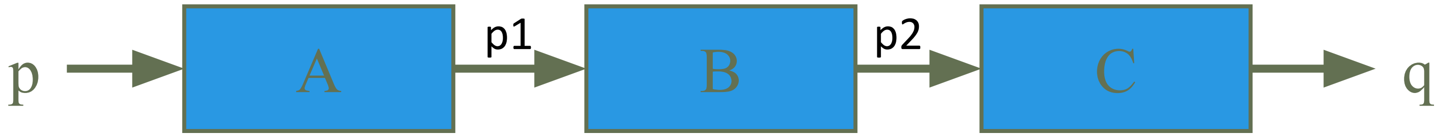
$$\cos(-\theta) = \cos\theta, \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$R_z^{-1}(\theta) = R_z(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{R^{-1} = R^T}$$

: *macierz ortogonalna*

Składanie Transformacji



p1 = Ap
p2 = Bp1
q = Cp2

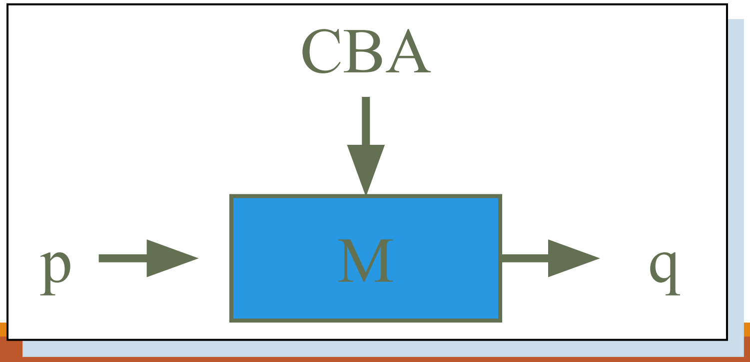
---

q = CBp1
q = CBAp

$$\Rightarrow \mathbf{q} = (\mathbf{C}(\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{p}))) = \mathbf{CBAp}$$

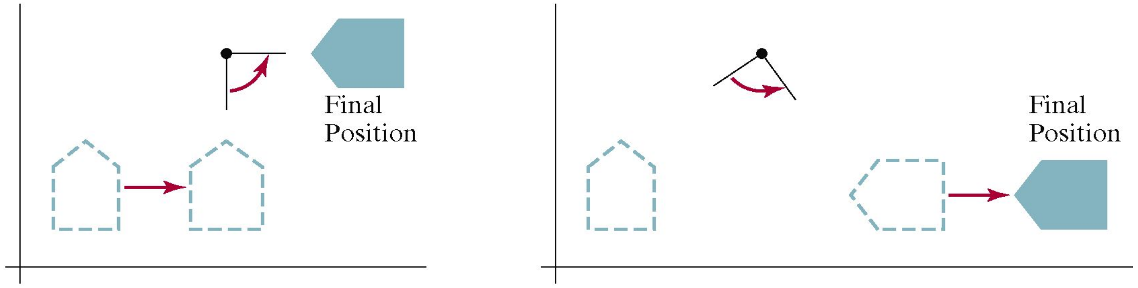
$$\mathbf{M} = \mathbf{CBA}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{Mp}$$

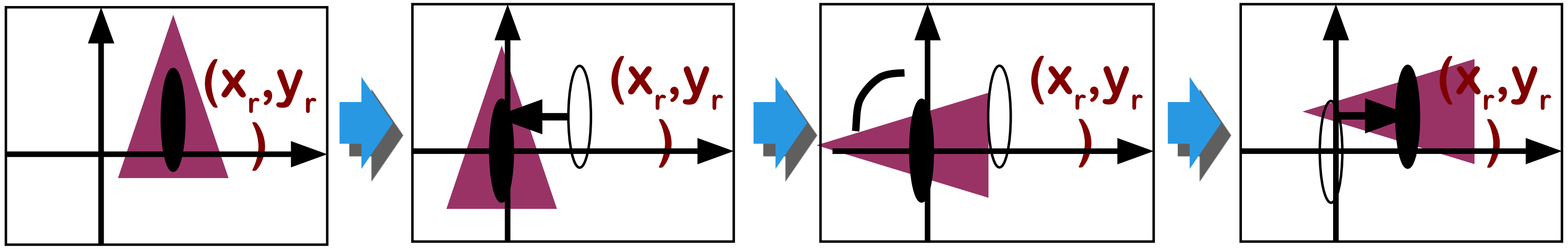


$$M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3) = (M_1 \cdot M_2) \cdot M_3$$

Transformacje nie są przemienne!!!!



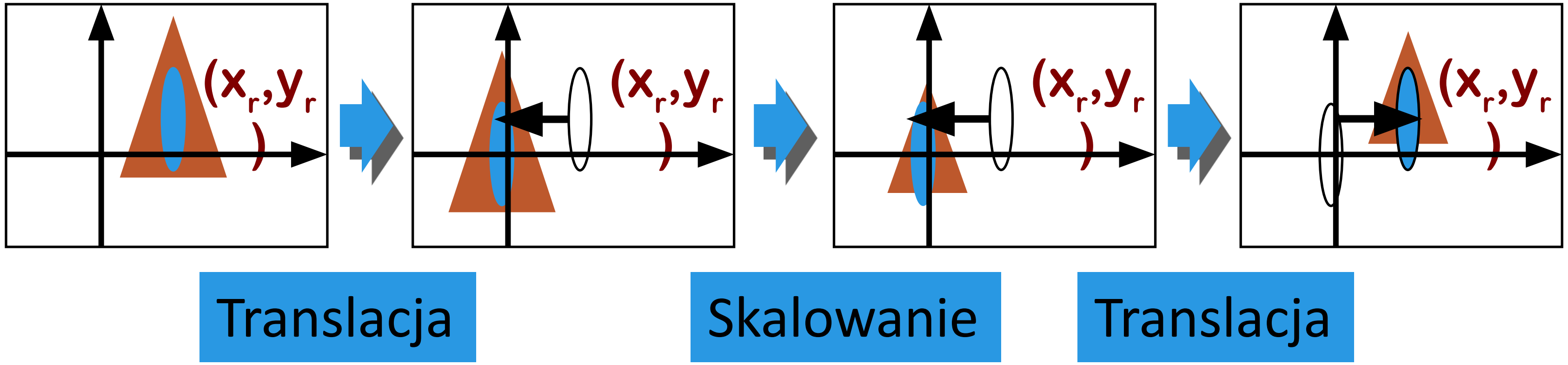
(a) (b)



Translacja Obrót Translacja

$$T(x_r, y_r) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_r, -y_r) = R(x_r, y_r, \theta)$$

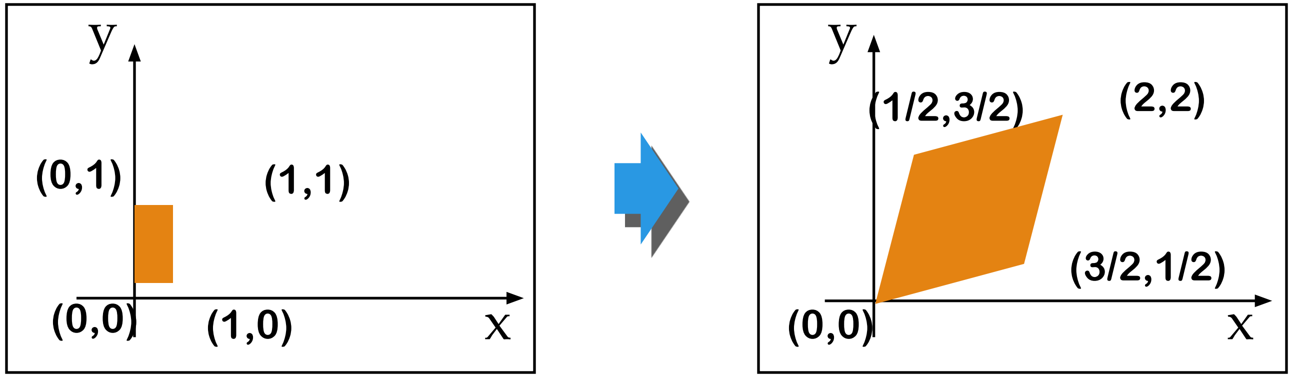
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r(1-\cos\theta) + y_r \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r(1-\cos\theta) - x_r \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$T(x_f, y_f)\cdot S(s_x, s_y)\cdot T(-x_f, -y_f) = S(x_f, y_f, s_x, s_y)$$

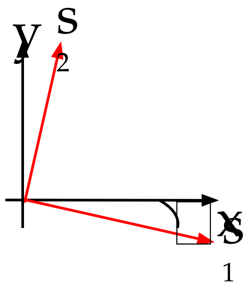
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1-s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1-s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skjalowanie w kierunku



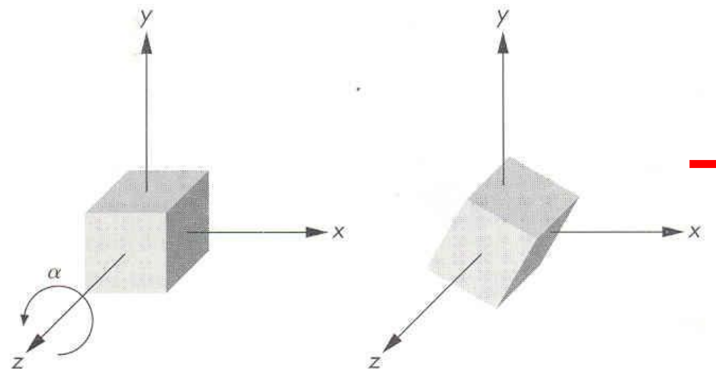
Skalowanie

$$R^{-1}(\theta)\cdot S(s_1,s_2)\cdot R(\theta)=\begin{bmatrix} s_1\cos^2\theta+s_2\sin^2\theta & (s_2-s_1)\cos\theta\sin\theta & 0 \\ (s_2-s_1)\cos\theta\sin\theta & s_1\sin^2\theta+s_2\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

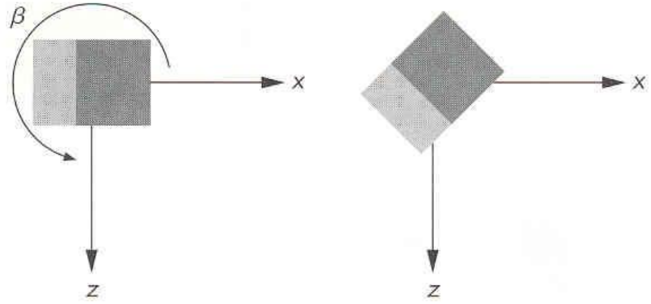


Obrót (1/2)

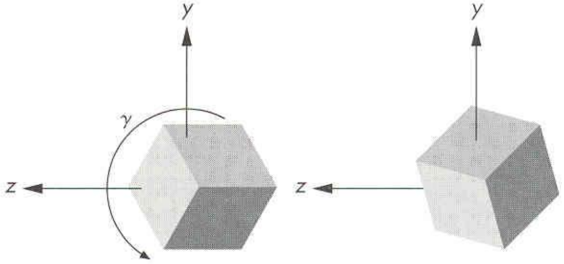
3 kolejne obroty wzgl. 3 osi



Obrót wzgl.osi z



Obrót wzgl.osi y



Obrót wzgl.osi xz

?

(2/2)

$$\mathbf{R} = R_x R_y R_z$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hierarchia współrzędnych