Zagadnienia z Obliczania

By Temus

Macierze

Macierz to dwuwymiarowa tablica prostokątna.

$$\begin{array}{cc} & \text{Kolumny} \\ \text{Wiersze} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\text{x}4} \end{array}$$

Wymiar: najpierw wypisujemy liczbę wierszy, potem liczbę kolumn.

- **Mnożenie macierzy** przez liczbę – Każdy element macierzy mnożymy przez daną liczbę i zapisujemy ją w macierzy wynikowej.

$$4 * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$$

- **Mnożenie macierzy** przez macierz – W takim mnożeniu mnożymy wiersze pierwszej macierzy przez kolumny drugiej macierzy, a elementy wymnożone dodajemy i sumę zapisujemy w macierzy wynikowej.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1) & 2) & 3) \\ 4) & 5) & 6) \\ 7) & 8) & 9) \end{bmatrix}$$

1) a*j + b*m + c*p
2) a*k + b*n + c*r
3) a*l + b*o + c*s
4) d*j + e*m + f*p
5) d*k + e*n + f*r
6) d*l + e*o + f*s
7) g*j + h*m + i*p
8) g*k + h*n + i*r
9) g*l + h*o + i*s

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1) & 2) & 3) \\ 4) & 5) & 6) \\ 7) & 8) & 9) \end{bmatrix}$$

1) a*j + b*m + c*p
2) a*k + b*n + c*r
3) a*l + b*o + c*s

Aby można było pomnożyć dwie macierze, liczba kolumn lewej macierzy musi być równa liczbie wierszy macierzy prawej.

Wyznaczanie Macierzy Początkowej

Aby wyznaczyć Macierz początkową najpierw musimy sobie uświadomić, że każda kolumna to tak naprawdę wektor i odpowiada zasadzie:

$$\begin{matrix} x = \ldots \\ y = \ldots \\ \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

A więc macierz 3x3 działa następująco:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

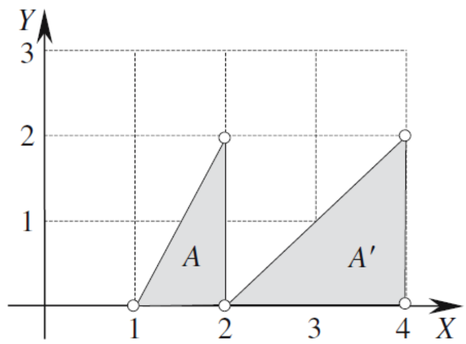
Współrzędne x i y to współrzędne jednego punktu, więc macierz 3x3 odpowiada trójkątowi w układzie współrzędnych, macierz 3x4 będzie odpowiadała kwadratowi, a macierz 3x5 pięciokątowi itd.

Aby wyznaczyć współrzędne punktów, poruszamy się po układzie współrzędnych algorytmem. Przykład:

Trójkąt A opisuje macierz:

$$A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Zaczynamy w punkcie (0, 0), przesuwamy się najpierw po osi X w prawo, aż wyznaczymy wszystkie punkty. Później poruszamy się po osi Y w górę od ostatniego punktu, który wyznaczyliśmy, jeżeli wyznaczymy wszystkie punkty idąc w górę, poruszamy się znów po osi X w lewo. Całość działa odwrotnie do ruchów wskazówek zegara zaczynając od punktu najbliższego początkowi układów współrzędnych (0, 0).

Jak obliczać transformacje?

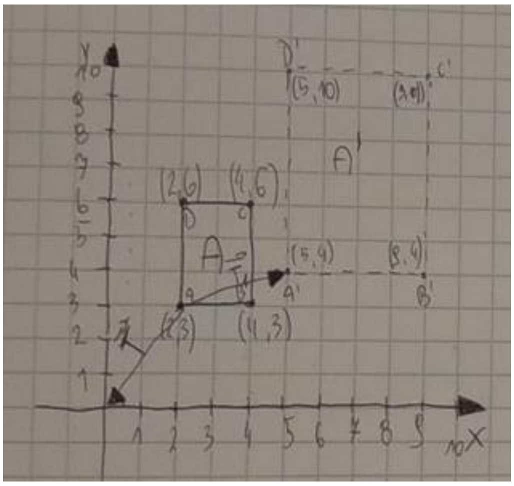
Przed rozpoczęciem obliczania czegokolwiek należy pamiętać o **trzech istotnych prawach** grafiki komputerowej:

1) Kolejność zapisu obliczeń jest odwrotna do wykonywanych, czyli następujący zapis:

$$P_{ABC} = ABCP = \begin{bmatrix}3\\4\\5\\1\end{bmatrix} * C * B * A = C * \begin{bmatrix}3\\4\\5\\1\end{bmatrix} = B * (C*P) = A * (B * (C*P))$$

Odnosi się do wyznaczonego punktu P, który ma zostać przekształcony przez macierze A, B, C. P_{ABC} to punkt po przekształceniach, a po znaku = przestawiony jest zapis wykonywanych obliczeń w kolejności odwrotnej. P oznacza punkt początkowy, C, B, A to macierze. A więc działanie musi wyglądać tak jak na zdjęciu powyżej. Zawsze mnożymy macierz przekształceń * macierz przekształcaną, więc aby wykonać poprawnie działanie P*C, musimy przeliczyć C*P. Następnie wykonać analogicznie, czyli B* wynik mnożenia C*P.

2) Zawsze, gdy chcemy przekształcić kształt lub figurę, musimy cofnąć ją do początku układu współrzędnych, czyli do punktu (0, 0) lub (0, 0, 0). Aby tego dokonać należy wyznaczyć macierz translacji (przeniesienia), na podstawie punktu najbliższego układowi współrzędnych. Przykładem niech będzie obrazek obok. Aby przenieść cały kształt do początku układu współrzędnych, punkt A musi mieć współrzędne (0, 0), a więc należy wyznaczyć macierz:

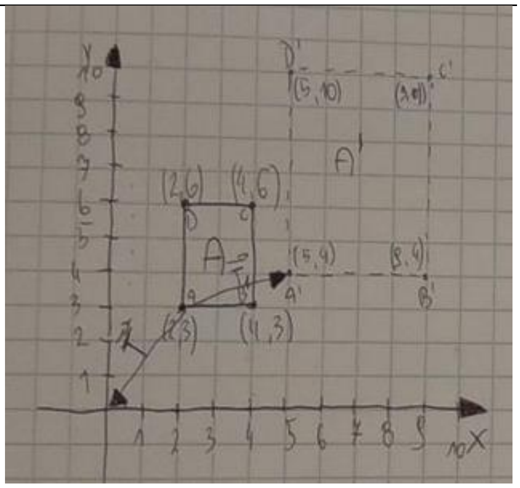


$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\0 & 1 & -3\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Czyli należy przenieść kształt o -2 punkty na osi X, oraz o -3 punkty na osi Y. Po wykonaniu przekształceń należy ponownie przenieść kształt do początkowego położenia, czyli wyznaczyć macierz translacji, która przeniesie kształt o 2 punkty na osi X i 3 punkty na osi Y. Jeżeli zadanie wymaga przeniesienia kształtu w inne miejsce niż początkowy, to po wykonaniu przekształceń wyznaczamy macierz o współrzędnych, w których ma się znaleźć punkt A, czyli macierz translacji, która przesunie kształt o 5 punktów na osi X i o 4 punkty na osi Y.

3) Wykonując obliczenia działamy na wektorach (obliczanie jest niżej). Chcąc przesunąć lub przeskalować kształt lub obiekt należy obliczyć wektor. Jeżeli chcemy dokonać skalowania, musimy obliczyć wektory (X, Y) pomiędzy dwoma punktami. Musimy obliczyć takie wektory dla obiektu obecnego (W) oraz dla obiektu przekształconego (V). A więc musimy odjąć od siebie współrzędne w danych kształtach / figurach. Należy pamiętać, że zawsze odejmujemy mniejsze od większych, inaczej wynik wyjdzie ujemny, a nie chcemy skalować ujemnie, tylko dodatnio.

Wracając do przykładu na obrazu obok, aby wyznaczyć wektor pomiędzy dwoma punktami należy wziąć współrzędne leżące po przekątnej danego kształtu. Dla kształtu A wektor będzie oznaczony W, a dla A’, będzie oznaczony V.



Dla A mamy więc:

X_w min = 2 X_v min = 5

X_w max = 4 X_v max = 9

Y_w min = 3 Y_v min = 4

Y_w max = 6 Y_v max = 10

Aby obliczyć współrzędne skalowania S_x i S_y, potrzebne nam przy wyznaczeniu macierzy skalowania należy zastosować się do następujących wzorów:

$$S_x = \frac{X_v\ max \;-\; X_v\ min}{X_w\ max \;-\; X_w\ min} \qquad S_y = \frac{Y_v\ max \;-\; Y_v\ min}{Y_w\ max \;-\; Y_w\ min}$$

Co w przykładzie da nam:

$$S_x = \frac{9 - 5}{4 - 2} \quad S_y = \frac{10 - 4}{6 - 3}$$

Co ostateczne da wynik:

$S_x = 2$ $S_y = 2$

Należy zwracać uwagę czego w danym zadaniu od nas wymagają. Nie zawsze wymagane jest przekształcenie kształtu / figury. Czasem należy po prostu wyznaczyć jedną macierz przekształceń!

Aby tego dokonać po prostu tworzymy macierz jednostkową (definicja jest niżej) i uzupełniamy jej pola wstawiając wartości w odpowiednie miejsce, np.

Mamy stworzyć macierz, która przesunie nasz obiekt o 3 punkty po osi X i 1 punkt o osi Y, oraz przeskaluje nasz obiekt 2 razy względem osi X i 2 razy względem osi Y, a więc macierz przekształceń będzie wyglądała następująco:

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & X \\ 0 & S_y & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zagadnienia z Obliczania

By Temus

Obliczenia z grafiki

Macierze I Wektory

Należy rozróżniać wektory *pionowe* i *poziome*. Na przykład działanie wektora pionowego:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Gdzie:

$$x' = ax + by$$
$$y' = cx + dy$$

Nie daje takich samych wyników jak działanie wektora poziomego:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Gdzie:

$$x' = ax + cy$$
$$y' = bx + dy$$

Aby osiągnąć rezultat jak w przykładzie pierwszym, w przykładzie drugim należy zmienić macierz:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Również mnożenie dwóch macierzy T_A oraz T_B nie jest przemienne.

$$T_A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad T_B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$T_A \times T_B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

$$T_B \times T_A = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + cf & be + df \\ ag + ch & bg + dh \end{bmatrix}$$

Przypomnienie

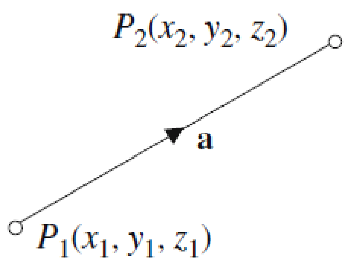
α	$0°$	$30°$	$36°$	$45°$	$54°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\sqrt{3}$	∞

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin^2\alpha$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$
$\cos^2\alpha$	$\frac{4}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{4}$

1.8 Wektory

1.8.1 Wektor pomiędzy dwoma punktami

Znane są punkty P1(x1, y1, z1) oraz P2 (x2, y2, z2), **a** to wektor z P1 do P2.



$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix}$$

- Przykład:

$$P_1(1,2,3) \quad \text{and} \quad P_2(4,6,8)$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

1.8.2 Skalowanie wektora

$$s\mathbf{a} = \begin{bmatrix} sx_a \\ sy_a \\ sz_a \end{bmatrix}$$

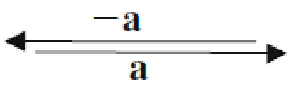
- Przykład:

Skalowanie przez 3

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$
$$3\mathbf{a} = 9\mathbf{i} + 12\mathbf{i} + 15\mathbf{k}$$

1.8.3 Odwracanie wektora

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \qquad -\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -x_a \\ -y_a \\ -z_a \end{bmatrix}$$

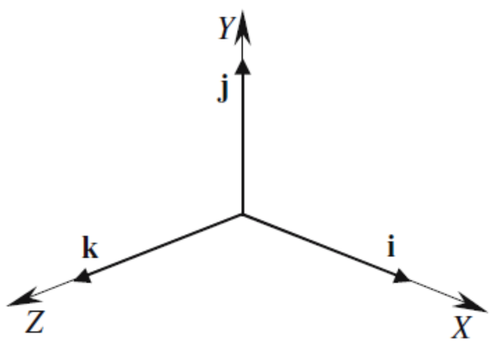


- Przykład:

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$
$$-\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

1.8.4 Jednostkowe wektory kartezjańskie

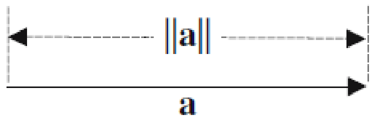
$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



1.8.5 Algebraiczny zapis wektora

$\mathbf{a} = x_a\mathbf{i} + y_a\mathbf{j} + z_a\mathbf{k}$

1.8.6 Wielkość wektora



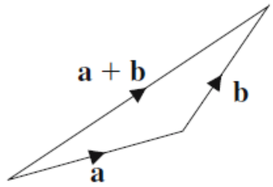
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$$

- Przykład:

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.071$$

1.8.8 Dodawanie/Odejmowanie wektorów

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_a \pm x_b \\ y_a \pm y_b \\ z_a \pm z_b \end{bmatrix}$$



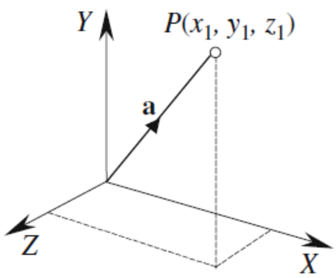
- Przykład:

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad \text{and} \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

1.8.10 Pozycja wektora

Punkt P1(x1, y1, z1) przyjmuje pozycję wektora **a.**

$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$



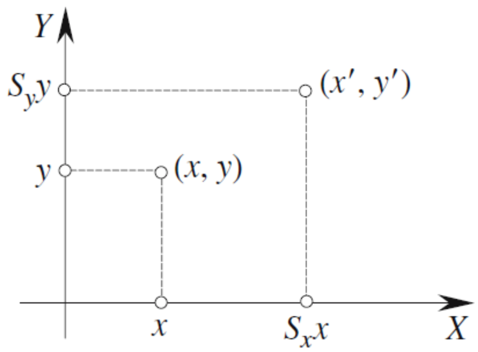
1.10 Transformacje

-------------------- PRZESTRZEŃ 2D --------------------

1.10.1 Skalowanie względem pochodzenia

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

S_x = współczynnik skalowania osi X
S_y = współczynnik skalowania osi Y



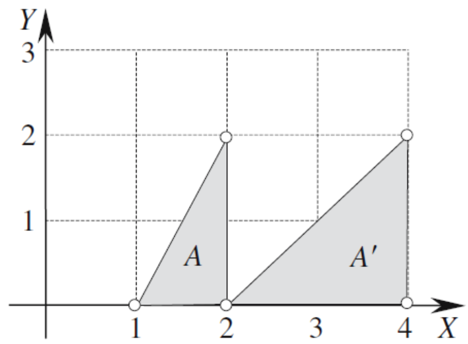
Punkt (x, y) jest skalowany względem pochodzenia przez współczynniki S_x i S_y na nową pozycję (x', y') przez:

$x' = S_x x$

$y' = S_y y$

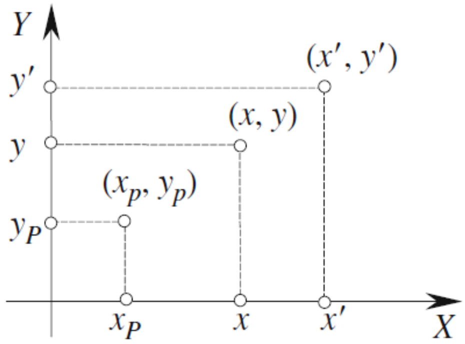
❖ Przykład:

Przeskaluj kształt A przez współczynnik 2 w kierunki x oraz 1 w kierunku y względem pochodzenia.



$$\underset{A'}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Transformacja}}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

1.10.2 Skalowanie względem punktu odniesienia



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & x_P(1-S_x) \\ 0 & S_y & y_P(1-S_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

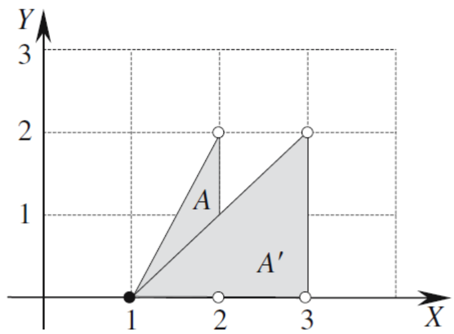
S_x = współczynnik skalowania osi X
S_y = współczynnik skalowania osi Y
(x_p, y_p) = punkt odniesienia

Punkt (x, y) jest skalowany względem punktu $P(x_P, y_P)$ przez współczynniki S_x i S_y na nową pozycje (x', y') w kolejnych krokach:

1. Przenieś (x, y) przez $(-x_P, -y_P)$.
2. Skaluj przeniesiony punkt przez S_x i S_y.
3. Przenieś przeskalowany punkt (x_P, y_P).

❖ Przykład:

Przeskaluj kształt A przez współczynnik 2 w kierunku x oraz 1 w kierunku y względem punktu (1, 0).

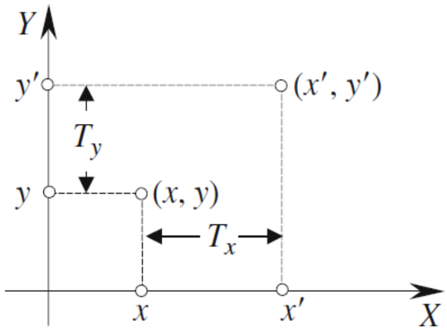


$$\underset{A'}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Tansformacja}}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Zagadnienia z Obliczania

By Temus

1.10.3 Przeniesienie (translacja)



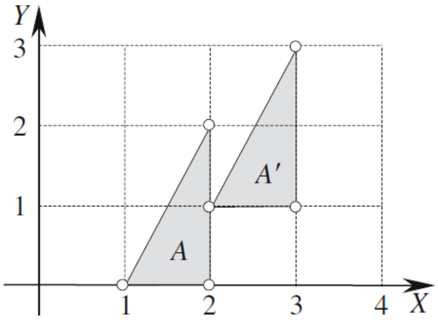
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

T_x = współczynnik przeniesienia osi X
T_y = współczynnik przeniesienia osi Y

- ❖ Przykład:

Przenieś kształt A 1 w kierunku x oraz 1 w kierunku y.

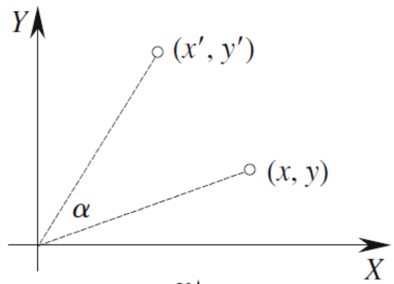
$$\underset{A'}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Transformacja}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.4 Obrót względem osi współrzędnych

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

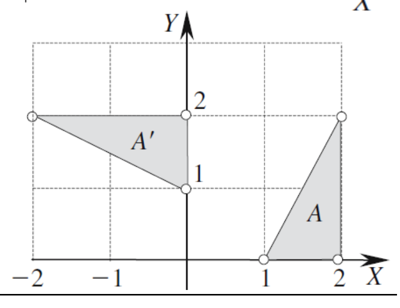
α = kąt obrotu



- ❖ Przykład:

Obróć kształt A o 90 stopni względem osi współrzędnych.

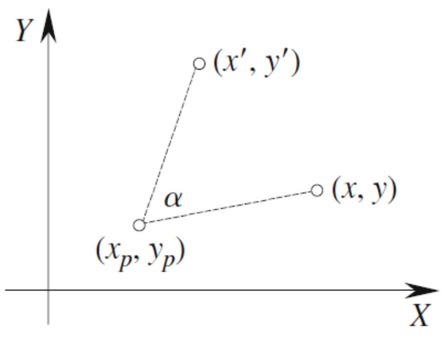
$$\underset{A'}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.5 Obrót względem punktu odniesienia

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & x_p(1-\cos\alpha) + y_p\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & y_p(1-\cos\alpha) - x_p\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

α = kąt obrotu
(x_p, y_p) = punkt odniesienia



Punkt (x, y) jest obracany względem punktu (x_P, y_P) przez kąt na nową pozycję (x', y') w następujących krokach:

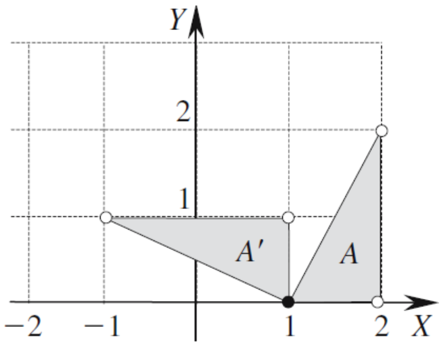
1. Przenieś (x, y) przez $(-x_P, -y_P)$.

2. Obróć przeniesiony punkt wokół pochodzenia przez kąt alfa.
3. Przenieś obrócony punkt przez (x_P, y_P).

❖ Przykład:

Obróć kształt A o 90 stopni względem punktu (1, 0).

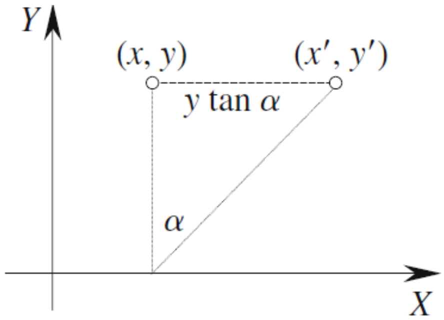
$$\overset{A'}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.6 Ścinanie (rozciąganie) wzdłuż osi X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

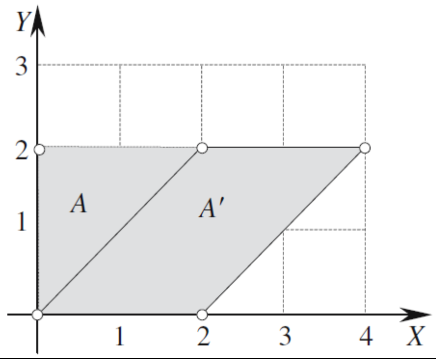
α = kąt ścinania



❖ Przykład:

Zetnij kształt A o 45 stopni wzdłuż osi X.

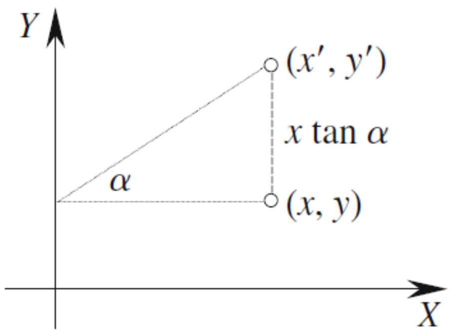
$$\overset{A'}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.7 *Ścinanie (rozciąganie) wzdłuż osi Y*

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

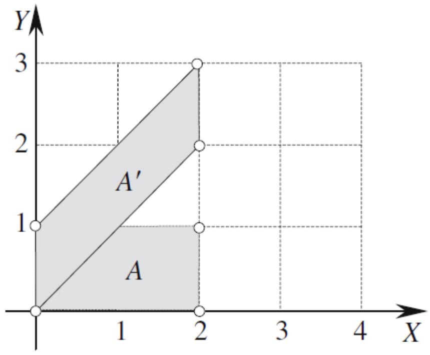
α = kąt ścinania



❖ Przykład:

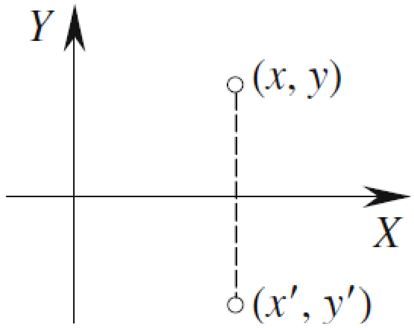
Zetnij kształt A o 45 stopni wzdłuż osi X.

$$\overset{A'}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.8 Odbicie wzdłuż osi X

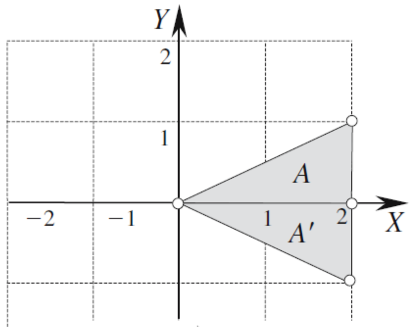
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



- ❖ Przykład:

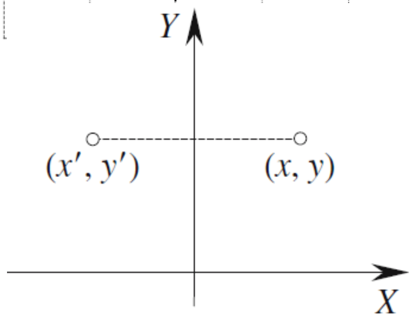
Odbij kształt A wzdłuż osi X.

$$\overset{A'}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.9 Odbicie wzdłuż osi Y

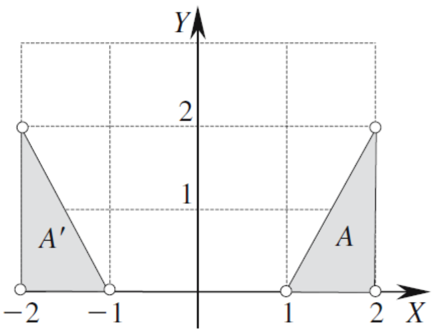
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



- ❖ Przykład:

Odbij kształt A wzdłuż osi Y.

$$\overset{A'}{\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

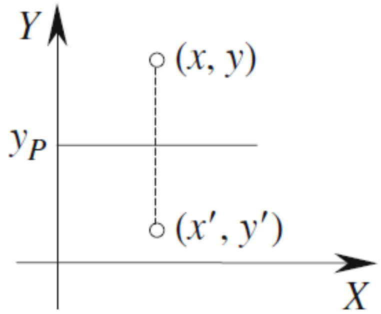


Zagadnienia z Obliczania

By Temus

1.10.10 Odbicie względem linii równoległej do osi Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2y_P \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

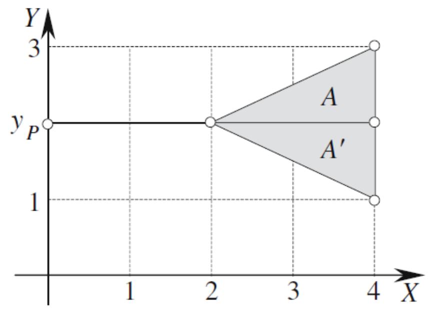


$y = y_p$ oś odbicia

- Przykład:

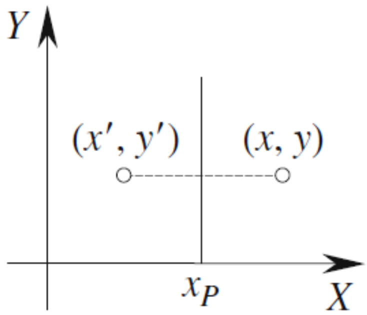
Odbij kształt A względem linii $y_p = 2$.

$$\underset{A'}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.11 Odbicie względem linii równoległej do osi X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2x_P \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

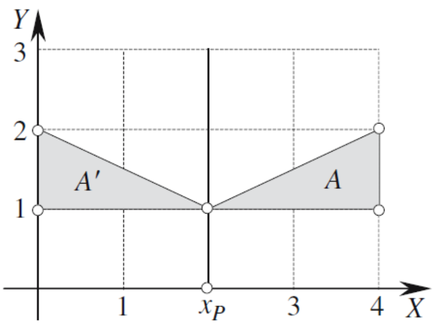


$x = x_p$ oś odbicia

- Przykład:

Odbij kształt A względem linii $x_p = 2$.

$$\underset{A'}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

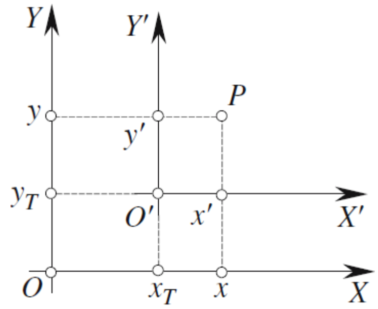


Zagadnienia z Obliczania

By Temus

1.10.12 Przeniesienie osi współrzędnych

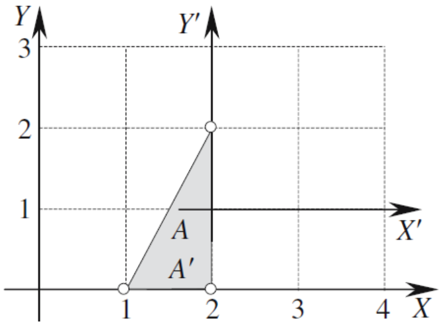
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_T \\ 0 & 1 & -y_T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



- Przykład:

Osie są podporządkowane przeniesieniu (2, 1).

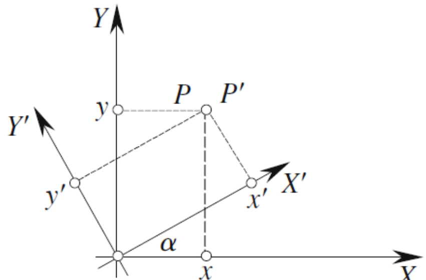
$$\begin{array}{ccccc} A' & & \text{Transform} & & A \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



1.10.13 Obrót osi współrzędnych

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

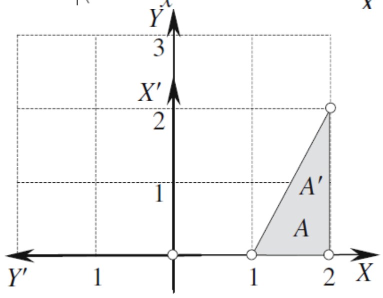
α = kąt obrotu



- Przykład:

  Obróć osie o 90 stopni.

$$\begin{array}{ccccc} A' & & \text{Transform} & & A \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



1.10.14 Macierz jednostkowa

Macierz jednostkowa, to taka macierz, która ma same jedynki w głównej przekątnej.

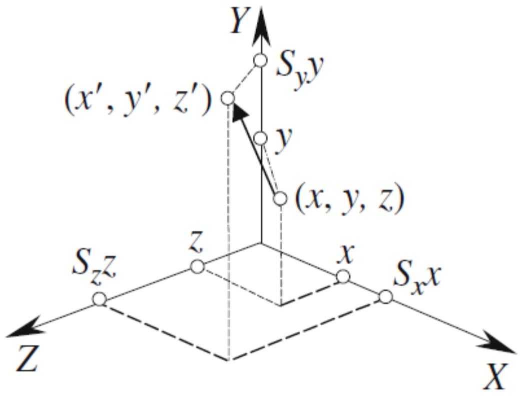
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zagadnienia z Obliczania

By Temus

1.10.15 Skalowanie względem początku układu współrzędnych

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



S_x – współczynnik skalowania osi x

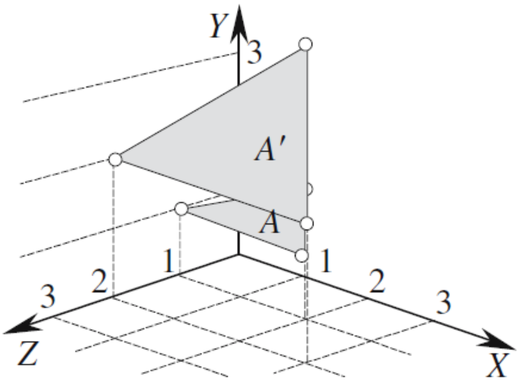
S_y – współczynnik skalowania osi y

S_z – współczynnik skalowania osi z

- Przykład:

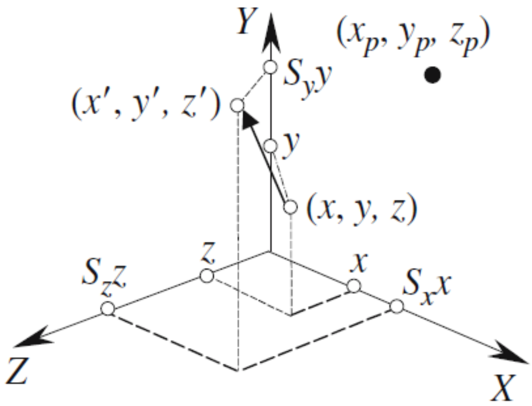
Przeskaluj kształt A o 1,5 w kierunku X, o 2 w kierunku Y i o 2 w kierunku Z.

$$\underset{A'}{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.16 Skalowanie względem punktu odniesienia

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & x_p(1-S_x) \\ 0 & S_y & 0 & y_p(1-S_y) \\ 0 & 0 & S_z & z_p(1-S_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



S_x – współczynnik skalowania osi x

S_y – współczynnik skalowania osi y

S_z – współczynnik skalowania osi z

(x_p, y_p, z_p) – współrzędne punktu odniesienia

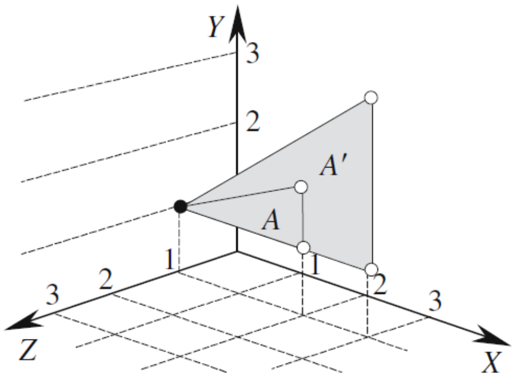
Zagadnienia z Obliczania

By Temus

- ❖ Przykład:

Przeskaluj kształt A o 1,5 w kierunku X, o 2 w kierunku Y i o 2 w kierunku Z względem punktu (0, 1, 1).

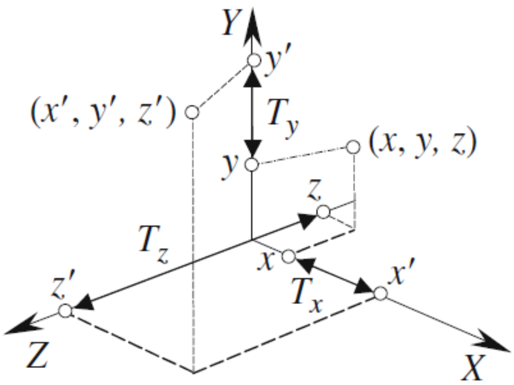
$$\overset{A'}{\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.17 Przeniesienie (translacja)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

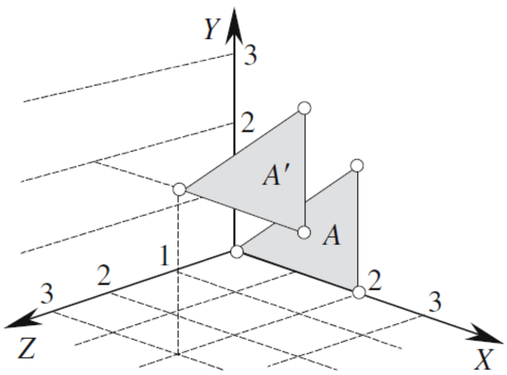
(T_x, T_y, T_z) – przeniesienie



- ❖ Przykład:

Przenieś kształt A o (2, 2, 3).

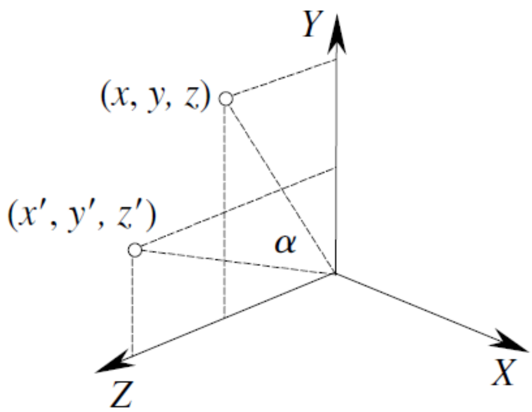
$$\overset{A'}{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.18 Obrót względem osi X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

α = kąt nachylenia względem osi x



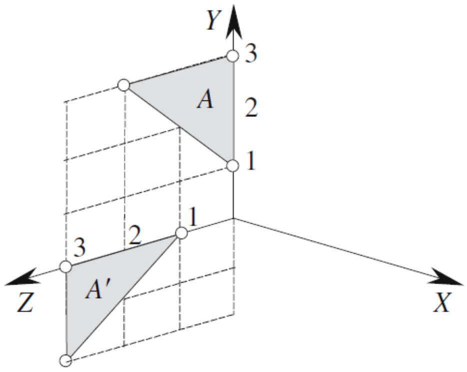
Zagadnienia z Obliczania

By Temus

❖ Przykład:

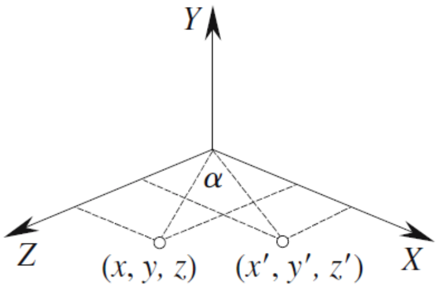
Obróć kształt A o 90 stopni względem osi X.

$$\underset{A'}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.18 Obrót względem osi Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

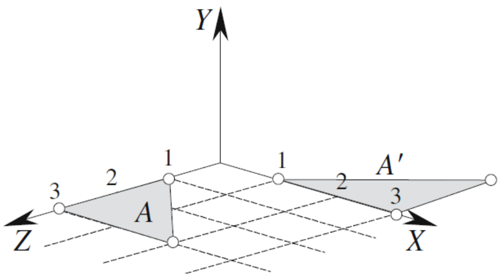


α = kąt nachylenia względem osi y

❖ Przykład:

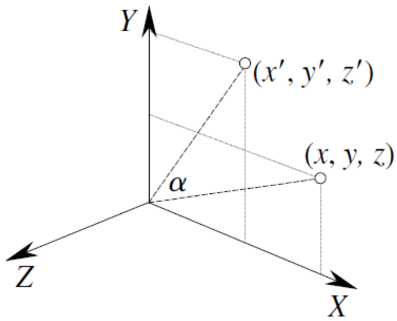
Obróć kształt A o 90 stopni względem osi Y.

$$\underset{A'}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$



1.10.19 Obrót względem osi Z

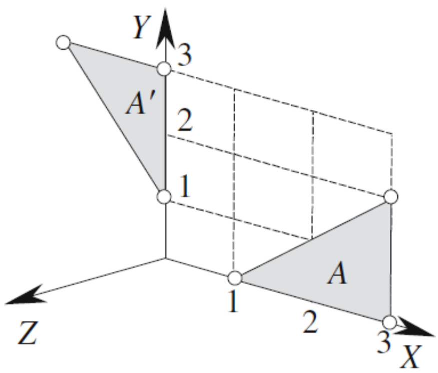
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



α = kąt nachylenia względem osi z

❖ Przykład:

Obróć kształt A o 90 stopni względem osi Z.

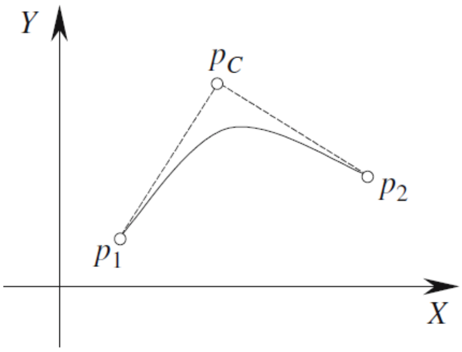


$$\underset{A'}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Transform}}{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

1.18.5 Kwadratowa krzywa Béziera

Biorąc pod uwagę punkty (x_1, y_1) and (x_2, y_2) oraz punkt kontrolny (x_C, y_C), kwadratowa krzywa Béziera ma postać:

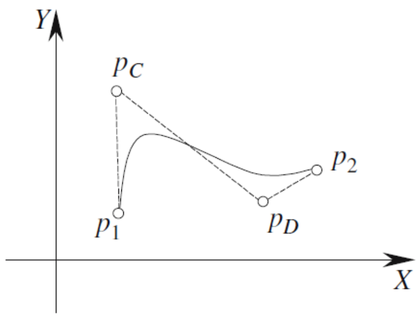
$$\mathbf{p}(t) = [t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_C \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}$$



1.18.6 Sześcienna krzywa Béziera

Biorąc pod uwagę punkty (x_1, y_1) and (x_2, y_2) oraz dwa punkty kontrolne (x_C, y_C) oraz (x_D, Y_D), kwadratowa krzywa Béziera ma postać:

$$\mathbf{p}(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_C \\ \mathbf{p}_D \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}$$



Algorytm Bresenhama – dla linii (od Pepe)

Korzysta tylko z arytmetyki liczb całkowitych.

Współrzędna **x** wrasta w każdym kroku, wzrost **y** zależy od wartości zmiennej kontrolnej **d**, która jest uaktualniana w każdym kroku.

Kąt nachylenia odcinka jest ograniczony do przedziału (0°, 45°).

▲y = y_k i y_p ← odległość punktu y_k od punktu y_p

▲x = x_k i x_p ← odległość punktu x_k od punktu x_p

X wzrasta zawsze

ZMIENNA DECYZYJNA określa czy Y wzrasta

Jej początkowa wartość:

d = P[i] = 2▲y i ▲x

- Jeżeli p[i] < 0, wtedy y nie wzrasta: (x[i+1], y[i]) i zmienna decyzyjna to p[i-1] = p[i] - 2▲y
- Jeżeli p[i] >= 0, wtedy y wzrasta (x[i+1], y[i+1]) i zmienna decyzyjna to p[i+1] = p[i] + 2▲y – 2▲x

Przykład

DLA ODCINKA (1, 1), (7, 4)

▲y = 4 – 1 = 3

▲x = 7 – 1 = 6

- p[1] = 2▲y – ▲x = 2 * 3 – 6 = 0 czyli p[i]>=0; (2, 2)
    - p[i+1] = p[i] + 2▲x = 6 – 12 = -6 czyli p[i+1] <0 ; (3,2)
    - p[i+1] = p[i] + 2▲y = -6 + 6 = 0 czyli p[i+1] >= 0; (4, 3)
    - p[i+1] = p[i] + 2▲y – 2▲x = -6 czyli p[i+1] < 0; (5, 3)
    - p[i+1] = p[i] + 2▲y = -6 + 6 = 0 czyli p[i+1] >= 0; (6, 4)
    - p[i+1] = p[i] + 2▲y – 2▲x = -6 czyli p[i+1] < 0; (7, 4)

Krok	X	Y
1	2	2
2	3	2
3	4	3
4	5	3
5	6	4
6	7	4

Algorytm Bresenhama – dla okręgu (od Pauliny)

Dla okręgu o środku (0, 0) i r = 5

1. Zaczynamy od x[0], y[5]

   P[0] = 5/4 – 5 = -3,75 <0 więc x[0+1], y[5]

   P[1] = P[0] + 2 * [0+1] + 1

   P[1] = -3,75 + 2 + 1 = -0,75
2. P[1] = -0,75 <0 więc x[1+1], y[5]

   P[2] = P[1] + 2 * [1+1] +1

   P[2] = -0,75 + 4 + 1 = 4,25
3. P[2] = 4,25 >0 więc x[x+1], y[5-1]

   P[3] = p[2] + 2 * [2+1] + 1 – 2 * y [5+1]

Opis

- Równanie okręgu $x^2 + y^2 = r^2$
- Zasada analogiczna jak dla odcinka, wartość **y** kolejnego piksela będzie równa wartości obecnej lub o 1 mniejsza.
- Kryterium wyboru jest to, czy punkt środkowy znajduje się wewnątrz $x^2 + y^2 - r^2 < 0$, czy na zewnątrz koła ($x^2 + y^2 = r^2 > 0$)
- Dla x = y wartość początkowa wynosi p[i] = 5/4 – r
- Dla p[i] < 0 wybieramy piksel (x[i+1], y[i]), a kryterium p[i+1] = p[i] + 2x[i+1] +1
- Dla p[i] ≥ 0 wybieramy piksel (x[i+1], y[i-1]), a kryterium p[i+1] = p[i] + 2x[i+1] + 1 – 2y[i+1]
- Kroki są powtarzane do momentu, gdy pozycja x > pozycji y