	INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ELIÉCER GAITÁN			
	Área	Matemáticas	Asignatura	Estadística
	Docente	Carlos Andrés Montenegro	Grupo	9-1 y 9-2
	No. Celular	3165270550	Correo electrónico	<a href="mailto:carandres78@gmail.com">carandres78@gmail.com</a>
	No. de clases	3	Fecha de desarrollo	1 de Octubre al 3 de Noviembre

### GUÍA DIDÁCTICA No. 5

## TÉCNICAS DE CONTEO

Las técnicas de conteo son estrategias matemáticas usadas en probabilidad y estadística que permiten determinar el número total de resultados que puede haber a partir de hacer combinaciones dentro de un conjunto o conjunto de objetos.

### Combinatoria.

Es una rama de las matemáticas que estudia los diferentes **métodos** para **contar** las distintas **agrupaciones** o formas de **ordenar** un determinado número de elementos.

**Por ejemplo**, se quiere ordenar 3 bolas de diferentes colores; hay **6 formas diferentes** de ordenar esos 3 elementos como se observa en la siguiente imagen:



A continuación, vamos a ver unos conceptos que se van a tener en cuenta en el siguiente ejemplo:

- En el grado décimo hay 30 estudiantes, se desea elegir al presidente y vicepresidente del salón. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?, en este ejemplo vamos a ver los siguientes conceptos claves:

**Población (n):** El total de elementos es **30**

**Muestra (r):** Es el número de elementos que se van agrupar o de cuántos se van agrupar. En este caso, se van a seleccionar **2** de los 30 elementos (presidente y vicepresidente).

**¿Importa el orden?:** En este caso **SI** importa el orden porque no es lo mismo ser presidente que vicepresidente.

**¿Se puede repetir?:** En este caso **NO** se puede repetir porque un estudiante no puede ocupar los dos cargos.

Las respuestas de las preguntas anteriores se irán entendiendo con los ejemplos que iremos desarrollando.

- Vamos a responder las preguntas anteriores en el ejemplo de las 3 bolas de colores:

**Población (n):** El total de elementos es **3** (se tienen e bolas)

**Muestra (r):** **3**, porque se van agrupar esas 3 bolas

**¿Importa el orden?:** Si importa el orden porque no eso mismo como estén ordenadas las bolas

**¿Se puede repetir?:** No. Porque solo son 3 elementos diferentes. Si se coloca una bola de primera, ya no se la puede colocar en otra posición.

3. De un grupo de 10 estudiantes se quiere seleccionar un comité de 3 estudiantes. ¿De cuántas formas diferentes se puede seleccionar el comité?

**Población (n):** 10 porque es el número total de elementos.

**Muestra (r):** 3 porque se van agrupar 3 de los 10 elementos.

**¿Importa el orden?:** No. No importa el orden como se ordenen los 3 estudiantes porque los 3 van hacer lo mismo, van a pertenecer al comité.

**¿Se puede repetir?:** Si, porque se pueden pedir dos bolas del mismo sabor.

**FACTORIAL DE UN NÚMERO Y SUS PROPIEDADES**

El número factorial de un número entero positivo es el producto de todos los enteros positivos desde 1 hasta él. Se representa con el signo de exclamación “!” detrás del número.

**Ejemplo.**

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

También se los puede escribir en forma descendente, lo cual se recomienda:

$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$

Se establece que  $0! = 1$  y que  $1!=1$ .

Los números factoriales se utilizan para calcular combinaciones y permutaciones. A través de la combinatoria, los factoriales también se suelen utilizar para calcular probabilidades.

Calculemos  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

El resultado anterior significa el número de combinaciones que tendría un grupo de 3 elementos, si tenemos en cuenta el primer ejemplo que se realizó con las bolas de colores, las diferentes combinaciones que se realizaron con las 3 bolas fueron 6.

Observemos los siguientes factoriales:

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$2! = 2 \cdot 1$

$1! = 1$

Podemos representar de diferentes maneras:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$       ó

$6! = 6 \cdot 5!$       ó

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4!$       Etc.

De manera general, lo anterior se expresa de la siguiente manera:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

### Operaciones con números factoriales.

1. Reducir a factorial:
  - a)  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$
  - b)  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$
  - c)  $10 \cdot 9! = 10!$
  - d)  $11! \cdot 12 = 12 \cdot 11! = 12!$
2. Resolver:
  - a)  $\frac{7!}{6!} = \frac{7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 7$
  - b)  $\frac{15!}{13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot \cancel{13!}}{\cancel{13!}} = 15 \cdot 14 = 210$
  - c)  $\frac{10! \cdot 6!}{9! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot \cancel{9!} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{9!} \cdot \cancel{4!}} = 10 \cdot 6 \cdot 5 = 300$

**Experimentos Aleatorios:** Son aquellos experimentos en los que no se puede predecir el resultado.  
**Por ejemplo:**

- ✓ Lanzar una moneda, puede caer cara o sello.
- ✓ Lanzar un dado. Puede caer de 1 a 6, por lo tanto, no sabemos el resultado.
- ✓ Seleccionar una carta de una baraja.
- ✓ Extraer de una bolsa una bola de cierto color.

**Espacio Muestral:** Se designa con la letra **S** o con el símbolo omega ( $\Omega$ ). Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Vamos a ver los ejemplos con los experimentos aleatorios descritos:

- ✓ Lanzar una moneda:  $S = \{\text{Cara, Sello}\} = \{C, S\}$
- ✓ Lanzar un dado:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- ✓ Seleccionar una carta de una baraja:  
 $S = \{1C, 2C, 3C, \dots, rC, RC, 1P, 2P, \dots, RP, 1d, \dots, Rd, 1t, 2t, \dots, Rt\}$
- ✓ Extraer de una bolsa una bola de cierto color (2 blancas, 3 azules, 4 rojas):  
 $S = \{b1, b2, a1, a2, a3, r1, r2, r3, r4\}$

**Evento o Suceso:** Es uno o varios de los posibles resultados. Generalmente se escriben con letras mayúsculas. **Ejemplos:**

- ✓ Lanzar una moneda:  
 $A = \text{Que caiga cara (este es un evento) } \text{ó } A = \{cara\}$
- ✓ Lanzar un dado:  
 $B = \text{Que caiga un múltiplo de 2 } \text{ó } B = \{2, 4, 6\}$
- ✓ Seleccionar una carta de una baraja:  
 $C = \text{Que la carta sea de picas (como hay 10 cartas de picas, el evento tendría 10 elementos)}$
- ✓ Extraer de una bolsa una bola de cierto color:  
 $D = \text{Que salga una bola roja (el evento tendría 4 elementos porque hay 4 bolas rojas)}$

**Ejemplo:** En el siguiente experimento determinar el espacio muestral y un evento.

- Lanzar dos monedas. C= Cara y S= Sello

Espacio muestral  $S = \{CC, SS, CS, SC\}$   
Evento  $A = \text{La primera sea cara}$        $A = \{CC, CS\}$

- Lanzar una moneda y un dado. C= Cara y S= Sello  
 $A = \{\text{La moneda caiga en Cara}\}$

**Solución**  
 $S = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6, S1, S2, S3, S4, S5, S6\}$   
 $A = \{C1, C2, C3, C4, C5, C6\}$

**Principio fundamental de conteo ó Principio de la multiplicación**

Si un evento **A** puede ocurrir de **m** maneras diferentes y otro evento **B** puede ocurrir de **n** formas diferentes, entonces, el número total de formas en que ambos pueden ocurrir es de **m · n** maneras.

**Ejemplos.**

1. Si se lanza un dado y una moneda. ¿De cuántas maneras diferentes pueden caer?

**Solución.** Ocurren los dos eventos.

1 Dado	1 Moneda
6 maneras	2 maneras

Para saber de cuántas maneras pueden caer, se Aplica el principio de la multiplicación:  $6 \cdot 2 = 12$ .  
Por lo tanto, pueden caer de 12 maneras diferentes.

2. Tengo 3 pantalones y 4 camisas. ¿De cuántas maneras diferentes me puedo vestir?

**Solución.** 3P y 4C. En este caso deben ocurrir los dos eventos, ya que se debe vestir con pantalón “Y” camisa. Entonces, para saber de cuantas maneras me debo vestir se realiza la multiplicación:  
 **$3 \cdot 4 = 12$**

Por lo tanto, me puedo vestir de 12 maneras distintas con 3 pantalones y 4 camisas.

En resumen, con cada pantalón me puedo vestir de 4 maneras diferentes.

3. Claudia para ir de la casa al colegio, tiene las siguientes opciones: 2 bicicletas, 3 rutas de bus, 4 carros de amigos o caminando. ¿De cuántas formas diferentes se puede ir al colegio Claudia?

**Solución.** Si se analiza, Claudia no puede utilizar los cuatro medios simultáneamente, Se tiene que elegir alguna de las bicicletas “O” alguna ruta de bus “O” en algún carro de un amigo “O” caminando.

<b>Bicicletas</b>	<b>Bus</b>	<b>Carro</b>	<b>Caminando</b>
<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>1</b>

Para resolver los ejercicios, se debe tener en cuenta las palabras “**claves**” “**Y**” (Incluyente) y “**O**” (excluyente).

Cuando se utiliza la palabra “**O**” se realiza la operación de la **suma (principio de la suma)**.

$2+3+4+1 = 10$

Por lo tanto, Claudia tiene 10 formas diferentes para poder ir al colegio.

## Combinación, Permutación y Variación

Sirven para encontrar el número de elementos del espacio muestral cuando se están ordenando elementos.

- **Combinación.** Es un arreglo de números cuyo orden no es importante o no cambia el resultado final.

$$nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- **Permutación.** Hay un arreglo de varios elementos en los que sí importa tener en cuenta el orden o posición. Se toman todos los elementos

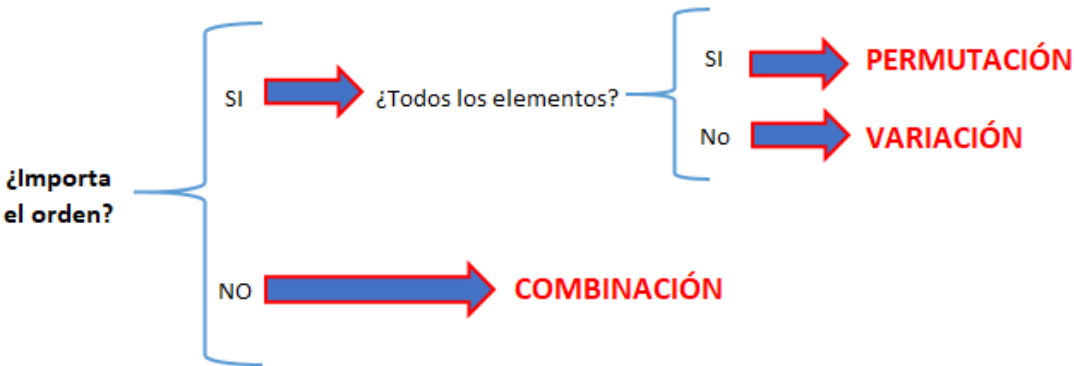
$$Pn = n!$$

- **Variación.** Hay arreglo de varios elementos en el cuál sí importa el orden. Se toman algunos elementos.

$$nVr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Donde,  
**n** es el número total de elementos  
**r** es el grupo que se va a seleccionar

Para realizar los ejercicios se debe tener en cuenta las siguientes preguntas para diferenciar entre combinación, permutación y variación, como se describe a continuación:



**Ejemplos.** En los siguientes ejemplos solamente vamos a determinar si son combinación, permutación o variación.

1. De un grupo de 8 estudiantes se requiere elegir presidente, vicepresidente y tesorero. ¿De cuántas formas diferentes se pueden seleccionar los 3 estudiantes?

**Solución.** Primero analizamos las preguntas:

¿Importa el orden? Verificamos de la siguiente manera: Presidente (**P**), Vicepresidente (**V**), Tesorero (**T**). Como cada uno de los que se eligen van a realizar cosas diferentes, **SÍ** va a importar el orden.

¿Se necesitan todos los elementos? La respuesta es **NO** porque de los 8 estudiantes se van a elegir 3.

Por lo tanto, es **VARIACIÓN**

La población (**n**) = 8

Número de elementos que se van a ordenar (**r**) = 3

$$V_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

**RTA/** Por lo tanto, se pueden seleccionar los tres estudiantes de **336** formas diferentes.

- De un grupo de 15 estudiantes se quiere seleccionar a 4 para que asistan a una reunión. ¿De cuántas formas se puede seleccionar a los 4 estudiantes?

**Solución.** Analizamos las preguntas:

¿Importa el orden? **NO** importa el orden, porque las personas que se escogen, pueden ser seleccionadas en cualquier orden y los 4 estudiantes asistirían a la reunión.

Por lo tanto, es una **COMBINACIÓN**. Y no habría necesidad de responder la otra pregunta.

$$nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$15C4 = \frac{15!}{4!(15-4)!} = \frac{15!}{4! \cdot 11!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{4! \cdot 11!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{32.760}{24} = 1.365$$

**RTA/** Por lo tanto, se pueden seleccionar de 1,365 formas a los 4 estudiantes para que asistan a la reunión.

- 5 estudiantes están compitiendo para los 400 m planos. ¿De cuántas formas diferentes pueden quedar ubicados en la llegada?

**Solución.**

¿Importa el orden? **SI** importa el orden ya que no es lo mismo llegar a la meta de primero que de segundo o quinto.

¿Se necesitan todos los elementos? La respuesta es **SI** porque los 5 estudiantes van a llegar (se utilizan todos los elementos).

Por lo tanto, es una **PERMUTACIÓN**

$$P_n = n!$$

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

**RTA/** Por lo tanto, de 120 formas diferentes pueden ubicarse en la llegada

- ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 4 carros de la fila para un parqueadero?

**Solución.**

¿Importa el orden? **SI** importa el orden ya que no es lo mismo estar de primero en la fila que de segundo, tercero o cuarto.

¿Se necesitan todos los elementos? La respuesta es **SI** porque se utilizan los 4 carros (se utilizan todos los elementos).

Por lo tanto, es una **PERMUTACIÓN**.  $P_n = n!$

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

**RTA/** Hay 24 opciones diferentes para que se formen los cuatro carros.

TALLER

1. En una heladería se ofrecen 7 sabores para escoger ¿cuántas combinaciones de helado de 3 bolas se puede hacer?  
Determinar: la población (n), muestra (r), ¿importa el orden?, ¿se puede repetir?
2. Resolver:
- a)  $\frac{2! \cdot 6!}{5!}$
- b)  $\frac{8! \cdot 4!}{3! \cdot 6!}$
3. En el siguiente experimento determinar el espacio muestral y los elementos del evento descrito.
- a) En una urna hay una bola roja, 2 azules y 3 blancas. Si se saca una bola.  
 $B = \{Sacar\ una\ bola\ que\ no\ sea\ blanca\}$
4. Se lanza una moneda y dos dados. ¿Cuántos resultados diferentes se puede obtener?
5. ¿Cuántas placas diferentes se pueden hacer con 2 letras y un dígito?
6. Determinar si el siguiente enunciado es una combinación, permutación o variación:  
En una reunión a la que asistieron 20 amigos se van a dar dos obsequios. ¿De cuántas formas diferentes se puede seleccionar a los ganadores?
- a) Si el obsequio son 2 celulares iguales.
- b) Si el obsequio es 1 celular y una memoria usb.
7. En un campeonato compiten 8 equipos. ¿De cuántas maneras diferentes se podrían ganar los títulos de campeón y subcampeón?
8. Se va a programar un torneo de ajedrez para los 10 integrantes de un club. ¿Cuántos partidos se deben programar si cada integrante jugará con cada uno de los demás sin partidos de revancha?
9. Se tiene 7 frutas distintas. ¿De cuántas maneras se puede preparar un jugo con 4 frutas?
10. Imagínate que vas al cine con 5 amigos. Se sientan en 6 sillas consecutivas en una fila ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar?

AUTOEVALUACIÓN

Indicadores de Desempeño	NOTA
1. Me conecto a los encuentros en los horarios establecidos	
2. Soy puntual al conectarme a los encuentros por WhatsApp	
3. Participo en los encuentros por WhatsApp	
4. Entrego a tiempo las actividades asignadas	
5. Aprovecho los encuentros para aclarar dudas	
Definitiva	

## **Bibliografía y Webgrafía**

- <https://psicologiaymente.com/miscelanea/tecnicas-de-conteo>
- <https://www.smartick.es/blog/matematicas/recursos-didacticos/factoriales/>
- [https://danacaweb.com/tcnicas\\_de\\_conteo.html](https://danacaweb.com/tcnicas_de_conteo.html)
- <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/probabilidades/combinatoria/variaciones-permutaciones-y-combinaciones.html>
- <https://www.disfrutalasmaticas.com/combinatoria/combinaciones-permutaciones.html>

## **Actividades Interactivas (Sólo si tienes conexión a Internet)**

- Video. Técnicas de conteo  
<https://www.youtube.com/watch?v=3aOsueffUw>
- Video. Combinatoria – Permutación – Variación – Combinación  
<https://www.youtube.com/watch?v=A0wBokBfJWQ>
- Video. Combinación, variaciones y permutaciones  
<https://www.youtube.com/watch?v=ZtEl4Vz7SFI>