	INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ELIÉCER GAITÁN			
	Área	Matemáticas	Asignatura	Matemáticas
	Docente	Carlos Andrés Montenegro	Grupo	9-1 y 9-2
	No. Celular	3165270550	Correo electrónico	carandres78@gmail.com
	No. de clases	3	Fecha de desarrollo	1 de Octubre al 3 de Noviembre

GUÍA DIDÁCTICA No. 5

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Para comprender el tema de sistemas de ecuaciones y cómo solucionarlos, es fundamental recordar los siguientes conceptos:

Ecuación. Igualdad entre dos expresiones que contienen una o varias variables. **Por ejemplo:** En las siguientes ecuaciones el valor de **X**, no solo tiene un valor, sino que en cada ecuación tiene diferentes valores, por eso se le llama **variable**.

$x + 3 = 5;$ $2x = 6;$ $y = x + 2$

Para solucionar una ecuación, se debe encontrar el valor de la variable que hace que esa igualdad sea verdadera.

Para la ecuación $x + 3 = 5$, se debe dar el valor de x , que haga verdadera la igualdad, en este caso el valor de x sería **2**. Ya que al remplazarla y sumarla con **3** nos da **5**. Así: $2 + 3 = 5$, por lo tanto, se escribe que $x = 2$.

Para la ecuación $2x = 6$, se debe dar el valor de x , que haga verdadera la igualdad, en este caso el valor de x sería **3**, porque al reemplazarla y multiplicarlo con **2** nos da **6**. Así: $2 \cdot x = 6$, por lo tanto, se escribe que $x = 3$.

Para la ecuación $y = x + 2$, se observa que tienen dos variables x y y , cuando las ecuaciones tienen dos variables, tienen varias respuestas, por ejemplo, Si $x = 7$, entonces, $y = 9$, porque al reemplazar el valor de x en la ecuación original, se tiene: $y = 7 + 2 = 9$. Como no es la única respuesta, se puede decir que si $x = 10$, entonces $y = 12$, porque al remplazar se tiene: $y = 10 + 2 = 12$. Por lo tanto, esta ecuación seguirá tomando varios valores, dependiendo del valor que tome x .

Las ecuaciones anteriores son **ecuaciones lineales**, porque las variables son de primer grado, es decir, están elevadas al exponente 1.

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones (lineales) que tienen más de una incógnita. Las incógnitas aparecen en varias de las ecuaciones, pero no necesariamente en todas. Lo que hacen estas ecuaciones es relacionar las incógnitas entre sí.

Los sistemas de ecuaciones son ecuaciones a las que se les debe buscar una misma solución; pueden haber sistemas de 2, 3, o 4 ecuaciones con 2, 3 o 4 incógnitas. En esta guía nos vamos a centrar en el sistema de **dos** ecuaciones lineales con **dos** incógnitas, a estos sistemas de ecuaciones se los conoce como **sistemas de 2 x 2**.

Por ejemplo. El siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Por ejemplo, si tomamos la primera ecuación $x + y = 5$; hay muchas respuestas para que se cumpla la igualdad, podemos decir que $x = 5$ y $y = 0$, por lo tanto, $5 + 0 = 5$; pero si los mismos valores los reemplazamos en la segunda ecuación $x - y = 1$, no servirá por que $5 - 0 \neq 1$. Por lo tanto $x = 5$ y $y = 0$ solamente sirve para la primera ecuación y no para la segunda.

En conclusión, para solucionar el sistema de ecuaciones debemos encontrar una solución que sirve para las dos ecuaciones.

Si ahora tomamos los valores de $x = 3$ y $y = 2$, y los reemplazamos en las ecuaciones, notaremos que esos valores **SI** son solución para las dos ecuaciones:

$x + y = 5$

\Rightarrow

$3 + 2 = 5$

$x - y = 1$

\Rightarrow

$3 - 2 = 5$

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

Para resolver un sistema de ecuaciones hay diferentes métodos que los vamos a ver a continuación, en el cual se encuentra la solución que sirve para las dos ecuaciones:

Método Gráfico.

Este método consiste en representar gráficamente las rectas que corresponden a las ecuaciones que forman el sistema, el punto en el cual se cortan las dos rectas es la solución del sistema.

Como se va a trabajar con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, la gráfica de cada ecuación es una **recta**. Por lo tanto, la intersección de las gráficas es en único punto (x,y).

Si las rectas son paralelas (no se cortan), el sistema **no tiene solución**, y si son iguales hay **infinitas soluciones**.

Ejemplo. Encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método gráfico.

$y - 2x = 0$

$y + x = 3$

Solución. Lo primero que se hace es despejar la variable **y** en ambas ecuaciones:

Primera ecuación:

$y - 2x = 0$

\Rightarrow

$y = 2x$

Segunda ecuación:

$y + x = 3$

\Rightarrow

$y = 3 - x$

Ahora, vamos a calcular unos cuantos puntos de las dos funciones para graficarlas. Por ejemplo escogemos los valores de $x = 0$ y $x = 2$, y los reemplazamos en cada ecuación:

Primera ecuación:

$x = 0$

$y = 2 \cdot (0) = 0$

$x = 2$

$y = 2 \cdot (2) = 4$

x	y	Punto
0	0	(0,0)
2	4	(2,4)

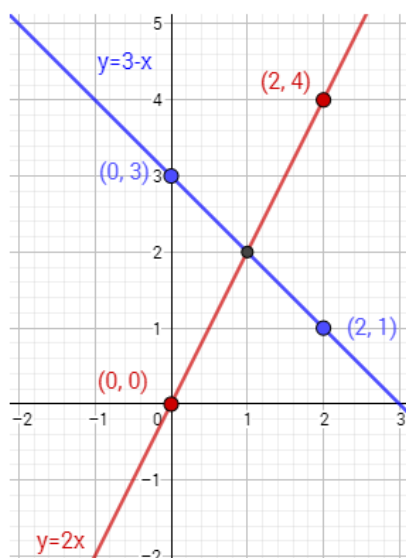
Segunda ecuación:

x	y	Punto
0	3	(0,3)
2	1	(2,1)

$$x = 0 \qquad y = 3 - 0 = 3$$

$$x = 2 \qquad y = 3 - 2 = 1$$

Ahora, procedemos a graficarla uniendo los puntos de las tablas de cada ecuación:



Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es el punto donde se unen las dos gráficas, en este caso es $x = 1, y = 2$

Método de Sustitución.

Consiste en despejar una de las variables en una de las ecuaciones y reemplazarla en la otra ecuación.

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones por el método de sustitución.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 5x - 2y = -7 \end{cases}$$

Solución.

Lo primero que se hace es despejar una de las variables en la primera ecuación, en este caso vamos a despejar y :

$$x + y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 7 - x$$

Ahora, reemplazamos el valor correspondiente de la y en la segunda ecuación:

$$5x - 2y = -7$$

$$5x - 2(7 - x) = -7$$

Continuamos realizando las respectivas operaciones y despejamos la variable x :

$$5x - 14 + 2x = -7$$

$$7x = -7 + 14 \quad \Rightarrow \quad 7x = 7 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7}{7}$$

$$x = 1$$

Finalmente, utilizamos el valor de x para encontrar el valor de y , reemplazando en cualquiera de las dos ecuaciones. En este caso lo vamos a reemplazar en la primera ecuación:

$$x + y = 7$$

$$1 + y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = 7 - 1 \quad \Rightarrow \quad y = 6$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = 1$ y $y = 6$.

Método de Reducción.

Consiste en operar entre las ecuaciones ya sea sumando o restando las ecuaciones entre sí para que desaparezca una de las variables (incógnitas). Se realizan los siguientes pasos:

- Primero, se multiplican los términos de una o ambas ecuaciones por constantes escogidas para que los coeficientes de x o de y se diferencien solo en el signo.
- Segundo, se suman las ecuaciones y se resuelve la ecuación resultante, si es posible.
- Tercero, se encuentra el valor de la otra variable reemplazando en alguna de las ecuaciones originales el valor de la variable que se encontró.

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\begin{cases} 8x - 3y = -3 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$$

Solución.

Se multiplica la primera ecuación por **2** y la segunda ecuación por **(-3)** para eliminar la variable y . Luego se halla el valor de la variable x , de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{l} 8x - 3y = -3 \\ 5x - 2y = -1 \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{por } 2 \\ \text{por } -3 \end{array} & \\ \left\{ \begin{array}{l} 16x - 6y = -6 \\ -15x + 6y = 3 \end{array} \right. & & \\ \hline x + 0 = -3 & & \\ x = -3 & & \end{array}$$

Como $x = -3$, se procede a hallar el valor de y ; para esto se reemplaza $x = -3$ en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$\begin{array}{rcl} 5x - 2y = -1 & \Rightarrow & 5(-3) - 2y = -1 \\ -15 - 2y = -1 & \Rightarrow & -2y = -1 + 15 \\ -2y = 14 & \Rightarrow & y = \frac{14}{-2} \end{array}$$

$y = -7$. Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = -3$ y $y = -7$.

NOTA. Cuando se resuelve un sistema de ecuaciones por el método de reducción, al transformar las dos ecuaciones en una sola se pueden presentar los siguientes casos especiales:

- ✓ Si en la ecuación resultante se tiene $0 = c$, donde c es una constante diferente de cero, entonces, el sistema de ecuaciones no tiene solución y se le llama **inconsistente**.
- ✓ Si en la ecuación resultante se tiene $0 = 0$, entonces, el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones y se le llama **dependiente** o **indeterminado**.

Método de Igualación.

Este método consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones para luego igualar las expresiones algebraicas obtenidas, obteniendo así, una ecuación con una incógnita (variable).

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones por el método de reducción.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

Despejamos la variable x en la primera ecuación:

$$3x - 2y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x = 2y$$

$$x = \frac{2y}{3}$$

Ahora, despejamos la variable x en la segunda ecuación:

$$2x + y = 7 \quad \Longrightarrow \quad 2x = 7 - y$$

$$x = \frac{7 - y}{2}$$

Procedemos a igualar las dos expresiones ($x = x$):

$$\frac{2y}{3} = \frac{7 - y}{2}$$

Se resuelve la ecuación despejando la variable y :

$$2(2y) = 3(7 - y) \quad \Longrightarrow \quad 4y = 21 - 3y$$

$$4y + 3y = 21 \quad \Longrightarrow \quad 7y = 21 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{21}{7}$$

$$y = 3$$

Como ahora conocemos y , reemplazando se puede encontrar x :

$$x = \frac{7 - y}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2}$$

$$x = 2$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = 2$ y $y = 3$.

Método de Determinantes (Regla de Cramer).

Un determinante es un número asociado a un arreglo de números reales con igual cantidad de filas y columnas.

La siguiente notación corresponde al determinante 2×2 o de orden **dos**, asociado a un arreglo de dos filas y dos columnas:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Donde, a y d forman la diagonal principal; c y b forman la diagonal secundaria.

El valor del determinante 2×2 es un número que equivale al producto de los dos números de la diagonal principal menos el producto de los números de la diagonal secundaria:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Por ejemplo, encontrar el determinante de los siguientes números:

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (5 \cdot 4) - [3 \cdot (-2)] = 20 - (-6) = 20 + 6 = 26$$

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por determinantes, se utiliza el método llamado **Regla de Cramer**. El procedimiento se detalla de la siguiente manera:

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Se cumple que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{ce - bf}{ae - bd} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

- ✓ Para formar el determinante del sistema se escriben los coeficientes de las variables, el cual va en el denominador.
- ✓ Para formar el determinante del numerador para x , se escriben en la primera columna los términos independientes y en la segunda columna los coeficientes de la variable y .
- ✓ Para formar el determinante del numerador para y , se escriben en la primera columna los coeficientes de la variable x , y en la segunda columna los términos independientes.

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$$

Si comparamos con el sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Se tienen los coeficientes:

Para x : $a = 2$, $d = 1$; para y : $b = 1$, $e = -2$; términos independientes: $c = 6$, $f = 8$

Aplicando la regla de Cramer y reemplazando los coeficientes, se encuentran los valores de x y y , de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{6 \cdot (-2) - 1 \cdot 8}{2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1} = \frac{-12 - 8}{-4 - 1} = \frac{-20}{-5} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{2 \cdot 8 - 6 \cdot 1}{2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1} = \frac{16 - 6}{-4 - 1} = \frac{10}{-5} = -2$$

Podemos verificar si la solución es correcta:

$$2x + y = 6 \quad \Rightarrow \quad 2(4) - 2 = 6 \quad \Rightarrow \quad 8 - 2 = 6$$

$$x - 2y = 8 \quad \Rightarrow \quad 4 - 2(-2) = 8 \quad \Rightarrow \quad 4 + 4 = 8$$

Problemas de aplicación

Hay problemas que se pueden solucionar a partir de un sistema de ecuaciones lineales, para ello, se deben tener presentes los siguientes pasos:

1. Leer detenidamente el problema para familiarizarnos con el problema.
2. Luego de entender el contexto del problema, se procede a realizar el planteamiento del mismo.
3. Se determina las incógnitas que plantea el problema
4. Se plantean el sistema de ecuaciones
5. Por último, se soluciona el sistema de ecuaciones y se comprueban las soluciones.

Algunos trucos que nos puede servir de ayuda:

Un número cualquiera = x (Por ejemplo, si $x=1$, $x=2$, $x=4$,...)

Número consecutivos = $x, x+1, x+2 \dots$ (si $x=1$, $x+1=2$, $x+2=3$)

Números pares = $2x$ (si $x=1$, $2 \cdot 1=2$, si $x=2$, $2 \cdot 2=4$, si $x=3$, $2 \cdot 3=6$)

Números impares = $2x-1$ (si $x=2$, $2 \cdot 2-1=3$, si $x=3$, $3 \cdot 2-1=5$)

La mitad de un número = $x/2$ (si $x=1$, $1/2$, si $x=2$, $2/2=1$)

La tercera parte de un número = $x/3$

Ejemplos.

1. Dos números suman 25 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Qué números son?

Solución.

x y y son los números

Los números suman **25**, por lo tanto, $x + y = 25$

El doble de uno de los números es **14**, por lo tanto, $2x = 14$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ 2x = 14 \end{cases}$$

Se debe tener en cuenta que el sistema de ecuaciones lo podemos resolver por cualquier método y el resultado será el mismo:

Este ejemplo lo vamos a resolver por el método de sustitución

De la segunda ecuación despejamos x :

$$2x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{2} \Rightarrow x = 7$$

Ahora, el resultado anterior lo reemplazamos en la primera ecuación.

$$x + y = 25 \Rightarrow 7 + y = 25 \Rightarrow y = 25 - 7 \Rightarrow y = 18$$

Por lo tanto, los números son **7 y 18**.

2. María tiene el triple de edad que su hijo Jaime. Dentro de 15 años, la edad de María será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Jaime tiene su madre?

Solución.

m = edad de María

j = edad de Jaime

La edad de María es el triple que la de Jaime: **$m = 3j$**

Dentro de 15 años, la edad de María será el doble que la de Jaime: **$(m + 15) = 2(j + 15)$**

Por lo tanto, tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} m = 3j \\ (m + 15) = 2(j + 15) \end{cases}$$

Aplicando el método de sustitución, tenemos:

La primera ecuación la reemplazamos en la segunda:

$$(3j + 15) = 2(j + 15) \Rightarrow 3j + 15 = 2j + 30 \Rightarrow 3j - 2j = 30 - 15$$

$$j = 15$$

El resultado anterior lo reemplazamos en la primera ecuación:

$$m = 3j \Rightarrow m = 3(15) \Rightarrow m = 45$$

En resumen, María tiene 45 años y su hijo Jaime 15; por lo tanto, Ana tiene 30 años más que su hijo.

3. Luis tiene en su bolsillo billetes de \$5.000 y \$2.000 que suman \$38.000. Si se cambian los billetes de \$5.000 por billetes de \$2.000 y viceversa, entonces, suman \$32.000. Determinar cuántos billetes tiene Luis de cada tipo.

Solución.

x: cantidad de billetes de \$2.000

y: cantidad de billetes de \$5.000

Ahora, planteamos las ecuaciones y despejamos y.

$$\begin{cases} 2.000x + 5.000y = 38.000 & (1) \\ 5.000x + 2.000y = 32.000 & (2) \end{cases}$$

Utilizaremos el método de reducción. Vamos a multiplicar a la ecuación (1) por **5** y a la ecuación (2) por **-2**, quedando lo siguiente:

$$\begin{array}{r} 10.000x + 25.000y = 190.000 \\ -10.000x - 4.000y = -64.000 \\ \hline 21.000y = 126.000 \end{array}$$

y = 6

Ahora, para encontrar el valor de *x*, vamos a reemplazar el anterior valor en la ecuación (1):

$$2.000x + 5.000y = 38.000$$

$$2.000x + 5.000(6) = 38.000 \Rightarrow 2.000x + 30.000 = 38.000 \Rightarrow 2.000x = 8.000$$

x = 4

Por último, verificamos las respuestas en las ecuaciones:

Ecuación (1): $2.000(4) + 5.000(6) = 38.000$ $8.000 + 30.000 = 38.000$ $38.000 = 38.000$	Ecuación (2): $5.000(4) + 2.000(6) = 32.000$ $20.000 + 12.000 = 32.000$ $32.000 = 32.000$
--	---

Los valores encontrados si son solución del problema, por lo tanto, Luisa tiene 4 billetes de \$2.000 y 6 billetes de \$5.000.

TALLER

1. Verificar si los puntos dados son una solución de cada uno de los sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{cases} -2x + y = -5 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases} \qquad (2, -1)$$

b)
$$\begin{cases} -2x - 2y = 12 \\ 9x + 6y = -48 \end{cases} \qquad (-4, -2)$$

2. Encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones por el método gráfico:

a)
$$\begin{cases} 3x + 4y = 14 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x = y - 5 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

3. Resolver los sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

$$\begin{cases} 3y - 4x + 1 = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación:

$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 3y = -x - 2 \end{cases}$$

5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de reducción:

$$\begin{cases} 4(x - 1) - y = 9 \\ 2(x + 3) = 2y - 1 \end{cases}$$

6. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer:
- $$\begin{cases} 6x + 3y = -4 \\ 9x + 5y = 6 \end{cases}$$
7. Carlos tiene 7 vehículos en el garaje: bicicletas (2 ruedas) y triciclos (3 ruedas). ¿Cuántas bicicletas y cuántos triciclos tiene Carlos si suman un total de 17 ruedas.?
8. La suma de dos números es 148 y el segundo número es cuatro unidades menos que el primer número. ¿Cuáles son los números?

AUTOEVALUACIÓN

Indicadores de Desempeño	NOTA
1. Me conecto a los encuentros en los horarios establecidos	
2. Soy puntual al conectarme a los encuentros por WhatsApp	
3. Participo en los encuentros por WhatsApp	
4. Entrego a tiempo las actividades asignadas	
5. Aprovecho los encuentros para aclarar dudas	
Definitiva	

Bibliografía y Webgrafía

- <https://leccionesdemates.com/blog/ejercicios-resueltos-sistemas-ecuaciones-lineales/>
- <https://www.problemasyecuaciones.com/Ecuaciones/sistemas/metodos-resolucion-sistemas-sustitucion-igualacion-reduccion-ejemplos.html>
- <https://www.matesfacil.com/ESO/Ecuaciones/resueltos-sistemas-ecuaciones.html>
- <https://www.calcularporcentajeonline.com/ecuaciones/sistemas/sistemas-ecuaciones-resueltos-metodos-sustitucion-igualacion-reduccion-grafico-solucion-ejemplos-explicados.html>

Actividades Interactivas (Sólo si tienes conexión a Internet)

- Sistema de ecuaciones lineales
<https://www.matesfacil.com/ESO/Ecuaciones/resueltos-sistemas-ecuaciones.html>
- Métodos de solución de sistemas de ecuaciones
<https://yosoytuprofe.20minutos.es/2016/06/03/sistema-de-ecuaciones/>
- Método gráfico del sistema de ecuaciones.
<https://www.geogebra.org/m/ZvD4cPnN>
- Sistema de ecuaciones lineales con geogebra
<https://www.youtube.com/watch?v=j6Zuctg3Uz4>