	INSTITUCIÓN EDUCATIVA JORGE ELIÉCER GAITÁN			
	Área	Matemáticas	Asignatura	Matemáticas
	Docente	Álvaro Mejía	Grupo	11-1
	No. Celular	310 833 8481	Correo electrónico	mejiaalvaro17@gmail.com
	No. de clases		Fecha de entrega	01 de Octubre de 2020
	Estudiante			

GUÍA DIDÁCTICA No. 4: LÍMITES Y CONTINUIDAD

Indicaciones

1. Lea y estudie detenidamente la guía.
2. Resuelva el taller que se encuentra al final de esta guía.
3. Envíe el taller resuelto y la autoevaluación vía WhatsApp o correo electrónico (verificar que las fotos sean legibles). **Fecha límite para la recepción de esta guía:** 03 de noviembre de 2020.

1. LÍMITES

1.1 Definición de Límite

Encontrar el límite de una función *f* significa hallar el valor al cual se aproxima *f(x)* cuando x tiende a tomar un valor determinado.

La función f(x) tiende hacia el límite L cuando x tiende hacia a, si es posible hacer que f(x) se aproxime tanto a L como se quiera, siempre y cuando x esté lo suficientemente cerca de a, sin tomar el valor de a. Esto se expresa como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

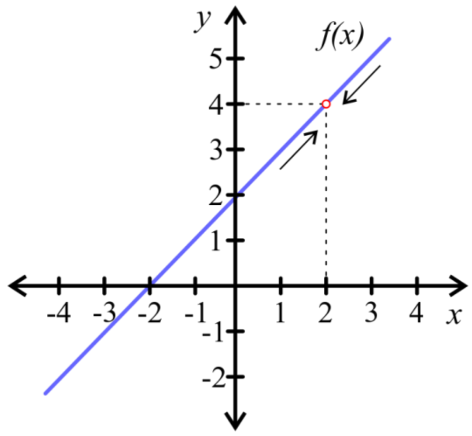
Y se lee: el límite cuando de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es igual a L.

Por ejemplo, si $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 se puede determinar calculando algunos valores de $f(x)$ para valores de x cercanos y menores que 2 y para valores cercanos y mayores que 2, tal y como se muestra en las siguientes tablas.

x	1	1,7	1,9	1,999
$f(x)$	3	3,7	3,9	3,999

x	3	2,5	2,1	2,001
$f(x)$	5	4,5	4,1	4,001

Para que el límite exista, se debe obtener el mismo valor de la función al acercarnos al valor **a** (en este caso 2) tanto si lo hacemos por la izquierda (valores menores que 2) como si lo hacemos por la derecha (valores mayores que 2).



Como podemos ver en la gráfica, cuando los valores de x se aproximan a 2, los valores de la función $f(x)$, es decir de la variable y se aproximan a 4. Por lo tanto se tiene que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

<u>Ejemplo</u>: Utilizar tablas de valores para determinar si $\text{Lím}_{x\to -3}\frac{4}{x+3}$ existe.

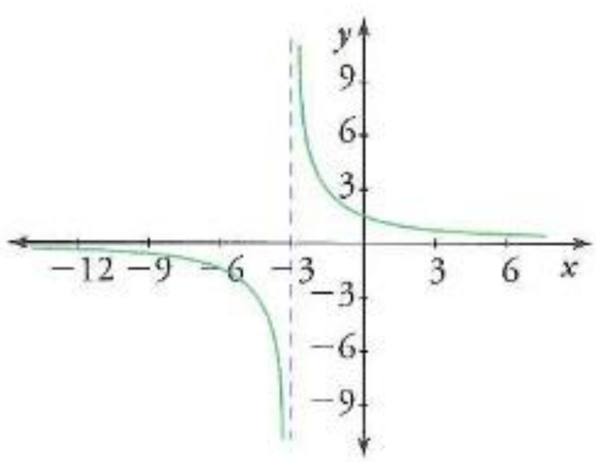
Se realizan las siguientes tablas de valores.

Con valores de x que se aproximen a -3, tales que sean menores que -3, tenemos:

x	-4	$-3{,}1$	$-3{,}001$	$-3{,}00001$
$f(x)$	-4	-40	-4.000	-400.000

Con valores de x que se aproximen a -3, tales que estos sean mayores que -3, tenemos:

x	-2	$-2{,}9$	$-2{,}999$	$-2{,}99999$
$f(x)$	4	40	4.000	400.000

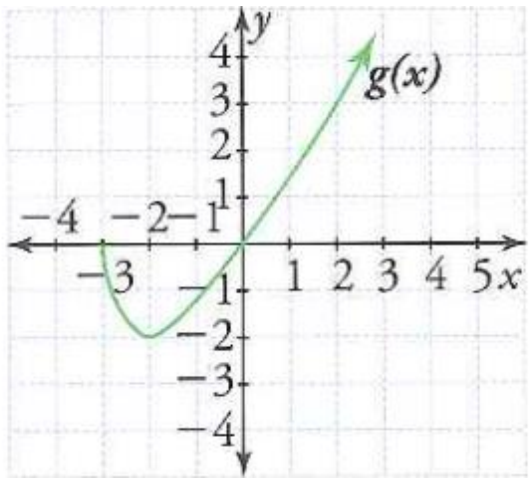


Con los valores obtenidos en la tabulación o en la gráfica podemos ver a medida que x se aproxima a -3 por la izquierda (es decir con valores menores a -3), la función toma valores cada vez menores, siendo estos negativos; mientras que a medida que x se aproxime a -3, pero por la derecha (es decir con valores mayores que -3), la función toma en su lugar, valores cada vez mayores pero positivos.

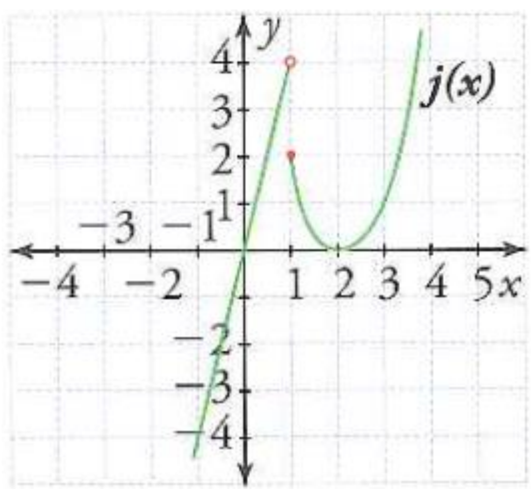
Por ello, decimos que el $\text{Lím}_{x\to -3} f(x)$ no existe.

Ejemplo: Determinar si el límite planteado existe a partir de cada gráfica.

a. $\lim\limits_{x \to -3} g(x)$



b. $\lim\limits_{x \to -3} j(x)$



En la gráfica **a**, el límite de $g(x)$ cuando x tiende a -2 es igual a -2. En cambio, en la gráfica **b**, el límite de $j(x)$ cuando x tiende a 1 no existe, ya que para valores de x cercanos y menores que 1 se tiene que $j(x)$ toma valores cercanos a 4, mientras que para valores cercanos y mayores que 1 se tiene que $j(x)$ toma valores cercanos a 2.

1.2 Límites Laterales

Las aproximaciones que se realizan para determinar el límite de una función se relacionan con el concepto de **límite lateral**.

Los límites laterales se representan de dos formas distintas, según si la aproximación se realiza por la izquierda o por la derecha.

$\lim_{x \to a+} f(x) = L$ significa que el límite, cuando x tiende a ***a*** por la **derecha** es igual a ***L***.

$\lim_{x \to a-} f(x) = L$ significa que el límite, cuando x tiende a ***a*** por la **izquierda** es igual a ***L***.

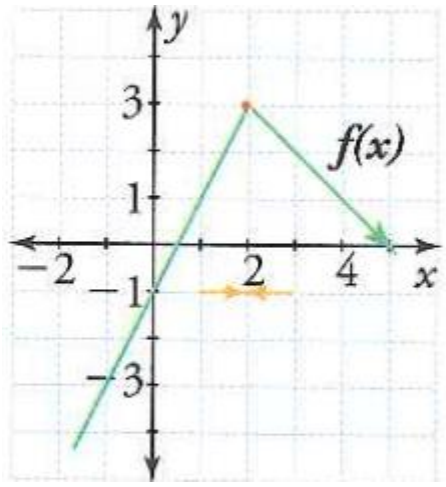
La existencia o no existencia del límite de una función depende de los límites laterales, ya que si los límites laterales existen y son iguales, entonces el límite de la función existe y es igual al valor de los límites laterales. En cambio, si los límites laterales no existen o son diferentes, entonces, el límite de la función no existe. Porto tanto, se tiene que:

$$\text{Lim}_{x\to a} f(x) = L \text{ si y solo si } \text{Lim}_{x\to a-} f(x) = L \text{ y } \text{Lim}_{x\to a+} f(x) = L$$

<u>Ejemplo</u>:

1. Determinar el límite indicado en cada caso a partir de la gráfica.

a. $\text{Lim}_{x\to 2} f(x)$



Primero, calculamos el límite por la izquierda.

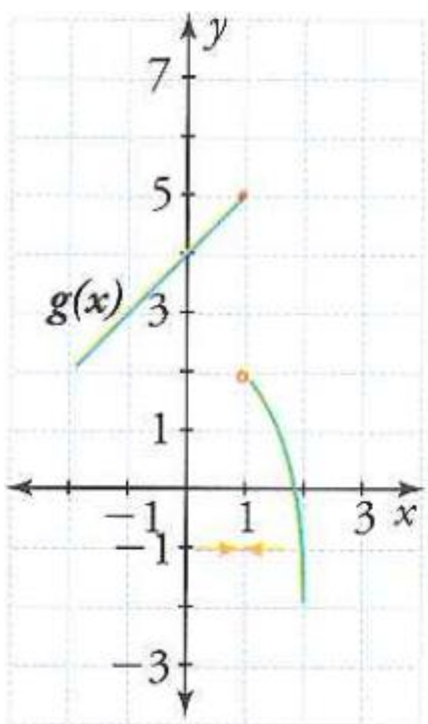
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = 3$$

Luego, calculamos el límite por la derecha.

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = 3$$

Por lo tanto, $\text{Lim}_{x\to 2} f(x)$ existe y es igual a 3.

b. $\text{Lim}_{x\to 1} g(x)$



Primero, calculamos el límite por la izquierda.

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 5$$

Luego, calculamos el límite por la derecha.

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 2$$

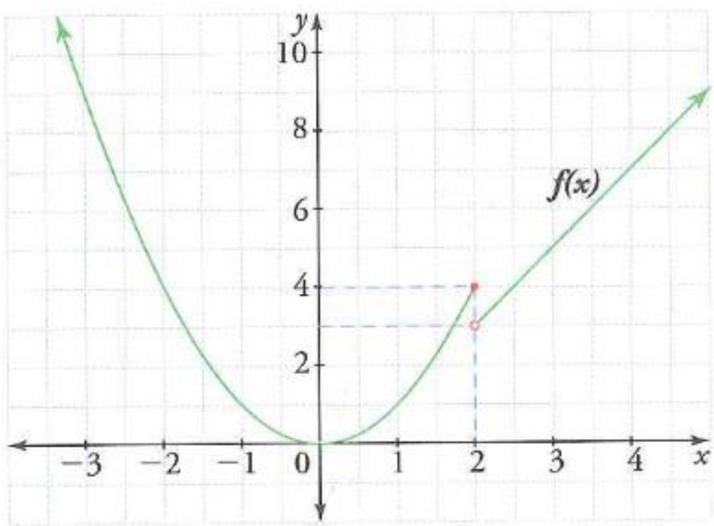
Por lo tanto, $\text{Lim}_{x\to 1} f(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

2. Realizar la gráfica de la siguiente función. Luego, determinar los límites indicados.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ \ x \leq 2 \\ 2x - 1 & si\ x > 2 \end{cases}$$

a. $\text{Lim}_{x\to 2-} f(x)$ b. $\text{Lim}_{x\to 2+} f(x)$ c. $\text{Lim}_{x\to 2} f(x)$

Solución: Primero realizamos la gráfica. Como esta función está definida a trozos, entonces la gráfica para valores de x menores o iguales que 2 será una parábola ya que para esos valores la función es $f(x) = x^2$. Para valore de x mayores a 2, la gráfica es una recta, ya que la función es, para estos valores, $f(x) = 2x - 1$. Esto se ilustra en la siguiente gráfica.



Luego, se determinan los límites laterales.

$\text{Lim}_{x\to 2-} f(x) = 4$ $\text{Lim}_{x\to 2+} f(x) = 3$

Finalmente, se tiene que $\text{Lim}_{x\to 2} f(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

1.3 Cálculo de límites aplicando propiedades

Hasta el momento, se ha determinado el límite de una función mediante la tabulación o mediante la gráfica de la función. Sin embargo, para facilitar el cálculo de límites es necesario saber aplicar sus propiedades.

Propiedades de los límites

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que $\text{Lim}_{x\to a} f(x) = L$ y $\text{Lim}_{x\to a} g(x) = M$ y k una constante real, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

a. Límite de una constante.

$$\lim_{x \to a} k = k$$

b. Límite de una constante por una función.

$$\lim_{x \to a} k\, f(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = kL$$

c. Límite de una suma o de una diferencia de funciones.

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$$

d. Límite del producto de funciones.

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L \cdot M$$

e. Límite del cociente de dos funciones.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}, siempre\ qeu\ M \neq 0.$$

f. Límite de la potencia de una función.

$$\lim_{x \to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n, para\ n \in \mathbb{Z}^+$$

g. Límite de una función radical.

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, si\ n\ es\ par, entonces, L \geq 0.$$

h. Límite de una función logarítmica.

$$\lim_{x \to a}[\log_b f(x)] = \log_b \left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = \log_b(L)\ \ siempre\ que\ L > 0.$$

Principio de sustitución

Otra propiedad importante de los límites es el principio de sustitución, en el cual se establece que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, que en algunas funciones el límite cuando x tiende hacia a de $f(x)$ se obtiene reemplazando a en $f(x)$ y realizando las operaciones. En particular para calcular el límite de una función polinómica siempre se aplica el principio de sustitución.

En las funciones racionales, aplicamos este principio sólo si el valor que se reemplaza hace que el denominador sea diferente de cero.

Ejemplo:

1. Calcular los siguientes límites aplicando las propiedades.

a. $\lim_{x \to 2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)$

$\lim_{x \to 2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to 2}\left(\frac{3}{4}x\right) - \lim_{x \to 2}\left(\frac{1}{2}\right)$ *Se aplica el límite de una diferencia.*

$= \frac{3}{4} \text{Lim}_{x \to 2}\, x - \text{Lim}_{x \to 2} \frac{1}{2}$ *Se aplica el límite de una constante por una función*

$= \frac{3}{4}(2) - \frac{1}{2}$ *Se calcula cada límite*

$= 1$ *Se realizan las operaciones.*

b. $\text{Lim}_{x \to 1} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si\ \ x < 1 \\ x^2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$

Se calculan los límites laterales aplicando el principio de sustitución así:

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} 3x - 1$$

$$= 3(1) - 1$$

$$= 2$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} x^2$$

$$= (1)^2$$

$$= 1$$

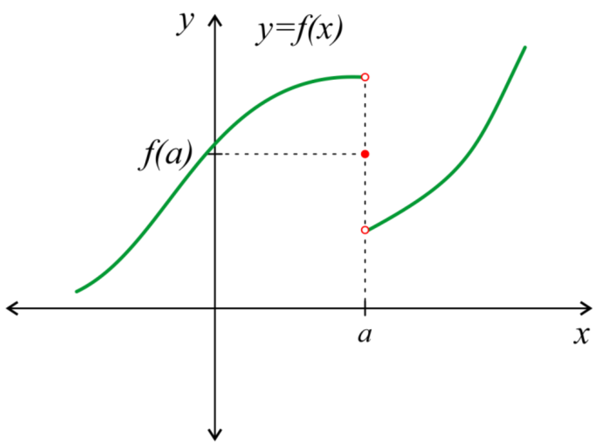
Como $\text{Lim}_{x \to 1-} f(x) \neq \text{Lim}_{x \to 1+} f(x)$, entonces $\text{Lim}_{x \to 1} f(x)$ no existe.

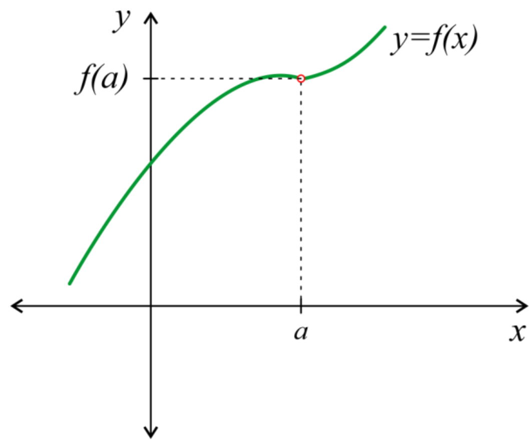
2. Determinar el valor del siguiente límite teniendo en cuenta que $\text{Lim}_{x \to 2} f(x) = 5$ y que $\text{Lim}_{x \to 2} g(x) = -2$.

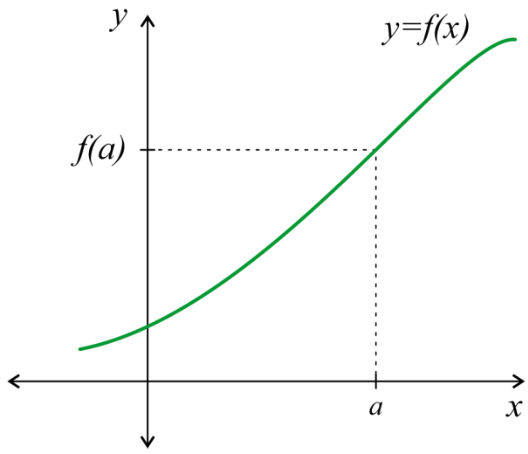
$$\lim_{x \to 2}[3f(x) - 5[g(x)]^2]$$
$$= 3 \lim_{x \to 2} f(x) - 5 \lim_{x \to 2}[g(x)]^2$$
$$= 3 \lim_{x \to 2} f(x) - 5 \left[\lim_{x \to 2} g(x)\right]^2$$
$$= 3(5) - 5(-2)^2$$
$$= -5$$

2. Funciones continuas

Una función es continua, si su gráfica no presenta algún tipo de cambio abrupto o salto.
Por ejemplo, las dos primeras funciones no son continuas para $x = a$. La tercera gráfica muestra una función continua en $x = a$.

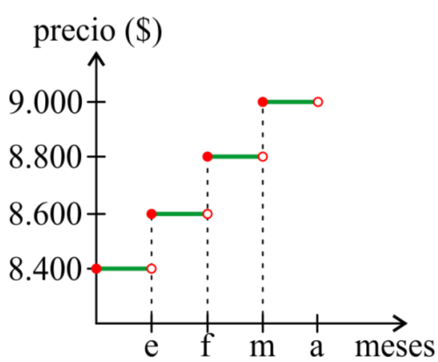






Existen situaciones relacionadas con funciones continuas. Por ejemplo, el peso de un cachorro en función del tiempo, se presenta una función continua ya que el peso del cachorro no para de aumentar en los primeros meses de vida.

En cambio, al considerar el precio de la gasolina por galón, se observa que la asignación de estos precios se establece mensualmente y cambia al final de cada mes, tal y como se muestra en la siguiente gráfica. En este caso, la función no es continua en los puntos en los cuales hay un cambio de mes.



Cuando se realizan las operaciones entre funciones continuas dan como resultado funciones continuas. Es decir, si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas, entonces, las siguientes funciones también son continuas.

$$f(x) + g(x);\ f(x) - g(x);\ f(x) \cdot g(x);\ \frac{f(x)}{g(x)}\ si\ g(x) \neq 0;\ kf(x).$$

Además, como ejemplos de funciones continuas se tiene que:

- Las funciones polinómicas y exponenciales son continuas en todos los números reales.
- Las funciones racionales, radicales y trigonométricas son continuas en todos los números reales de su dominio.
- Las funciones logarítmicas son continuas en los números reales donde la función $f(x) = \text{Log}_a\, x$ está definida. Es decir, para los valores de $a > 0$ y $x > 0$.

2.1 Continuidad de una función en un punto

Una función f es continua en un punto $x = a$ si cumple las siguientes condiciones.

- $f(a)$ existe. Es decir, a está en el dominio de la función f.
- El límite de la función cuando x tiende a a existe. Es decir: $\lim_{x \to a} f(x)$ existe.
- El límite de la función cuando x tiende a a es igual a la función evaluada en a. Es decir, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si una función f no cumple con alguna de las condiciones anteriores, decimos que f es ***discontinua*** en $x = a$ o que presenta una discontinuidad en $x = a$.

Ejemplos:

1. Determinar si la función $f(x)$ es continua en $x = 2$, si:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & si\ \ x < 2 \\ x^2 + 1 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

Primero, verificamos que $f(2)$ exista.

$$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$$

Como $f(2) = 5$, $f(2)$ existe.

Ahora verificamos si existe $\text{Lim}_{x \to 2} f(x)$.

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (4x - 3) = 4(2) - 3 = 5 \qquad \lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x^2 + 1) = (2)^2 + 1 = 5$$

Como $\text{Lim}_{x \to 2-} f(x) = \text{Lim}_{x \to 2+} f(x) = 5$, entonces, $\text{Lim}_{x \to 2} f(x)$ existe y es igual a 5.

Finalmente, $\text{Lim}_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Es decir, la función $f(x)$ es continua en $x = 2$.

2. Determinar si la función $f(x) = \frac{3x^2+4}{x^2-6x+5}$ es continua en $x = 1$ y $x = 3$.

En $x = 1$:

Primero, comprobamos si $f(1)$ existe:

$$f(1) = \frac{3(1)^2 + 4}{(1)^2 - 6(1) + 5} = \frac{7}{0}$$

Como $f(1)$ no existe, entonces, la función $f(x)$ es discontinua en $x = 1$.

En $x = 3$:

Primero, comprobamos si $f(3)$ existe:

$$f(3) = \frac{3(3)^2 + 4}{(3)^2 - 6(3) + 5} = \frac{31}{-4} = -\frac{31}{4}$$

Ahora verificamos si existe $\mathrm{Lim}_{x\to 3} f(x)$.

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{3x^2 + 4}{x^2 - 6x + 5}$$

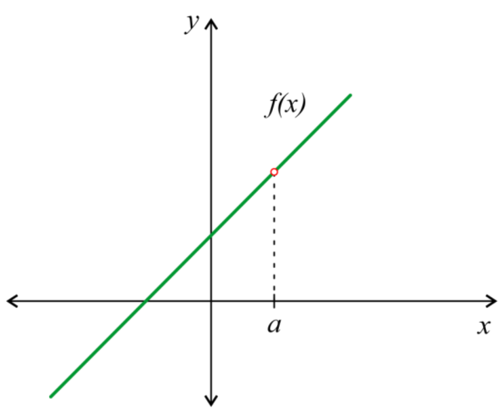
$$= \frac{3(3)^2 + 4}{(3)^2 - 6(3) + 5} = -\frac{31}{4}$$

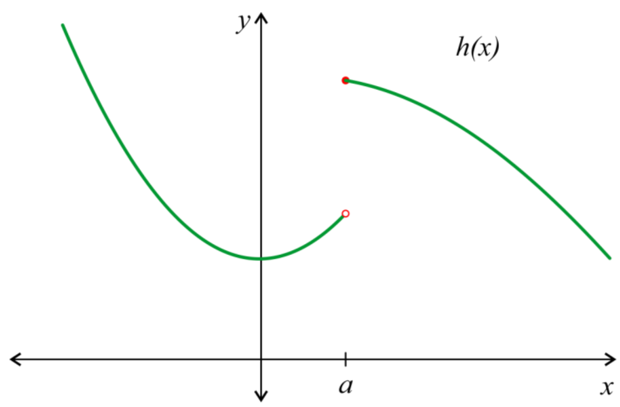
Como $\mathrm{Lim}_{x\to 3} f(x) = f(3)$, entonces, la función $f(x)$ es continua en $x = 3$.

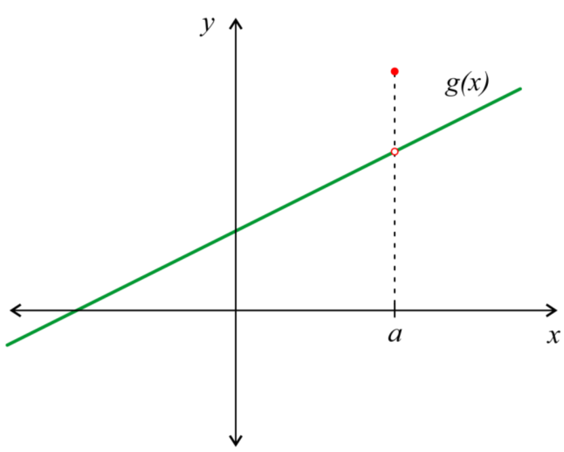
2.1 Discontinuidades

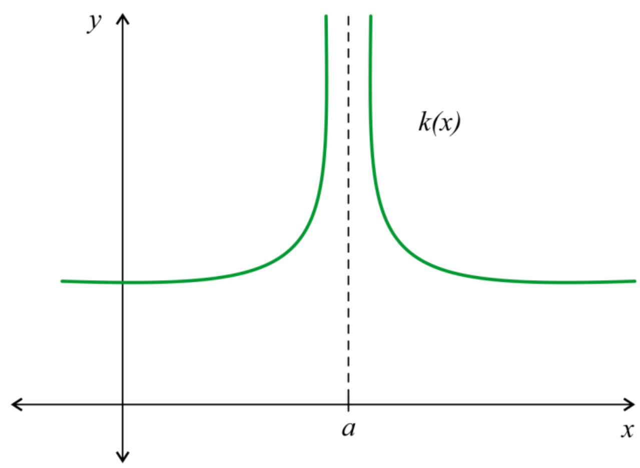
Una función no es continua o es discontinua, cuando no se cumple alguna de las condiciones establecidas para ser continua.

Las siguientes gráficas corresponden a funciones discontinuas en un punto.







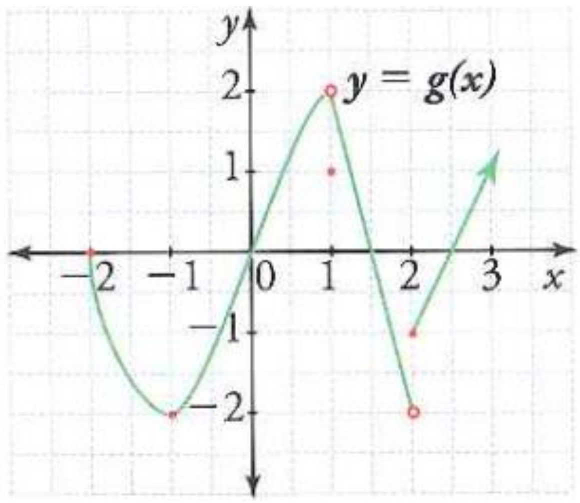


La función $f(x)$ no es continua en $x = a$, porque $f(a)$ no existe, en la función $g(x)$ no se cumple $\mathrm{Lim}_{x\to a}\, g(x) = g(a)$. Mientras que en las funciones $h(x)$ y $k(x)$ el límite no existe en $x = a$. Es decir, $\mathrm{Lim}_{x\to a}\, h(x)$ y $\mathrm{Lim}_{x\to a}\, k(x)$ no existen.

Taller

1. Realiza la tabulación y la gráfica respectiva de las siguientes funciones para determinar si los límites respectivos existen.
   a. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ $\quad\quad \lim_{x\to 1} f(x)$
   b. $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ $\quad\quad \lim_{x\to 2} g(x)$

2. Con base en la gráfica, determina si los límites existen. Si existen, determina su valor.



a. $\lim_{x\to -1} g(x)$ $\quad\quad$ b. $\lim_{x\to 0} g(x)$

c. $\lim_{x\to 1} g(x)$ $\quad\quad$ d. $\lim_{x\to 2} g(x)$

3. Considera la siguiente función definida a trozos.

$$f(x) = \begin{cases} 5x+6 & si \;\; x \leq -3 \\ 3x & si \; x > -3 \end{cases}$$

Realiza la gráfica de esta función y determina el valor de los siguientes límites.

$\text{Lim}_{x\to -3-} f(x)$ $\quad\quad$ $\text{Lim}_{x\to -3+} f(x)$ $\quad\quad$ $\text{Lim}_{x\to -3} f(x)$

4. Si $\text{Lim}_{x\to -1} f(x) = 1$; $\text{Lim}_{x\to -1} g(x) = -3$; $\text{Lim}_{x\to -1} h(x) = 2$, encuentra valor de los siguientes límites:
   a. $\text{Lim}_{x\to -1}[f(x) - 3h(x)]$
   b. $\text{Lim}_{x\to -1}[f(x)g(x) + h(x)]$
   c. $\text{Lim}_{x\to -1} \frac{f(x)}{3g(x)+4h(x)}$

5. Determina si la función es continua en los puntos indicados.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x+1} & si \;\; x < -1 \\ x^2 - 4 & si \; x \geq -1 \end{cases}$$

En $x = -1$ y en $x = 3$.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

El estudiante y el padre de familia debe valorar de manera responsable y consciente el proceso de aprendizaje que el estudiante ha tenido durante el estudio y desarrollo de esta guía de aprendizaje. Utilizando los criterios registrados en la siguiente tabla:

Ítem	Criterio	Nota Autoevaluación	Nota Coevaluación
1.	Responsabilidad en el cumplimiento de las actividades:		
2.	Entrega oportuna de trabajos:		
3.	Interés por los temas desarrollados en las guías:		
4.	Promedio		

Bibliografía y Webgrafía

Buitrago, L.; Benavides, O.; Perdomo, A.; Castaño, J.; Morales, D.; Gamboa, J. (2013). *Matemáticas 11 – Los Caminos del Saber*. Bogotá, Colombia: Editorial Santillana.