14 - non-homogeneous linear systems - variation of parameters

nonhomogeneous system $\Rightarrow$ $x' = A(t).x + b \to$ ex: $\begin{bmatrix} e^{2t} \\ t \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{variation of parameters}}$

$x' = Ax + b \rightarrow x = \Psi(t).\boxed{\varphi(t)}$

$\hookrightarrow \int \Psi^{-1}(t).b(t)\,dt$

ex: $x' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ t \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda_2 = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -3e^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = \int \begin{bmatrix} e^{-2t} & 3e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} \\ t \end{bmatrix} dt = \int \begin{bmatrix} 1+3te^{-2t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} t - \frac{3t}{2}e^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} + c_1 \\ -te^{-t} - e^{-t} + c_2 \end{bmatrix}$$

$$x = \Psi.\varphi = \begin{bmatrix} e^{2t} & -3e^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t - \frac{3t}{2}e^{-2t} - \frac{3}{4}e^{-2t} \\ -te^{-t} - e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{2t} & -3e^{t} \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} te^{2t} + \frac{3}{2}t + \frac{9}{4} \\ -t-1 \end{bmatrix} + c_1\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -3e^{t} \\ e^{t} \end{bmatrix}$$

when $\lambda_1 \neq \lambda_2$ and negative real:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \rightarrow \lim_{t \to 0} = \begin{bmatrix} x_1(\infty) \\ x_2(\infty) \end{bmatrix} = -A^{-1}.\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$