Statistiques descriptives et Introduction à R

Partie 2 : Statistiques bivariées

Edmond Sanou

Université d'Evry Val d'Essonne

Avril 2023

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Nuage de points

- Le nuage de points est un outil graphique qui permet de mettre en évidence la relation entre deux variables. Généralement la variable de cause est représentée en abscisse et la variable de réponse en ordonnée.

Remarques :

- Quand vous étudiez simultanément deux variables quantitatives X et Y, il faut **toujours** tracer le nuage de points $(x_i, y_i)_{i=1,\dots,n}$ avant de postuler une éventuelle relation linéaire entre les deux variables.
- Certains cas non linéaires peuvent se ramener à des cas linéaires via un changement de variable idoine

Nuage de points : Exemple

Exemple : Révision et note d'examen

- Tableau

Etudiants	**Maxime**	**Stan**	**Mariem**	**Célia**	**David**
Nombre d'heures de révision avant l'examen	2	3	4	1	6
Note de l'examen sur 20	11	13	14	8	18

- Nuage de points

```
heures <- c(2,3,4,1,6)
notes <- c(11,13,14,8,18)

plot(heures, notes,
     main = "Nuage de points (révision (X), note d'examen (Y))",
     xlab = "Nombre d'heures de révision avant l'examen (X)",
     ylab = "Note del'exament (Y)")
```

- Donner la nature de la relation entre les deux variables

Covariance

La formule de la covariance est donnée comme suit :

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Sous R :

- Fonction `cov`

```
heures <- c(2,3,4,1,6)
notes <- c(11,13,14,8,18)

cov(heures, notes)
```

```
## [1] 7.05
```

Une covariance positive indique que lorsque les valeurs de X sont supérieures à leur moyenne, les valeurs de Y le sont aussi.

Coefficient de corrélation linéaire

On appelle **coefficient de corrélation linéaire** (*ou coefficient de Bravais-Pearson*) de X et Y la statistique

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Avec $s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ et s_x et s_y les écarts-types de X et Y.

Sous R :

- La fonction est `cor`

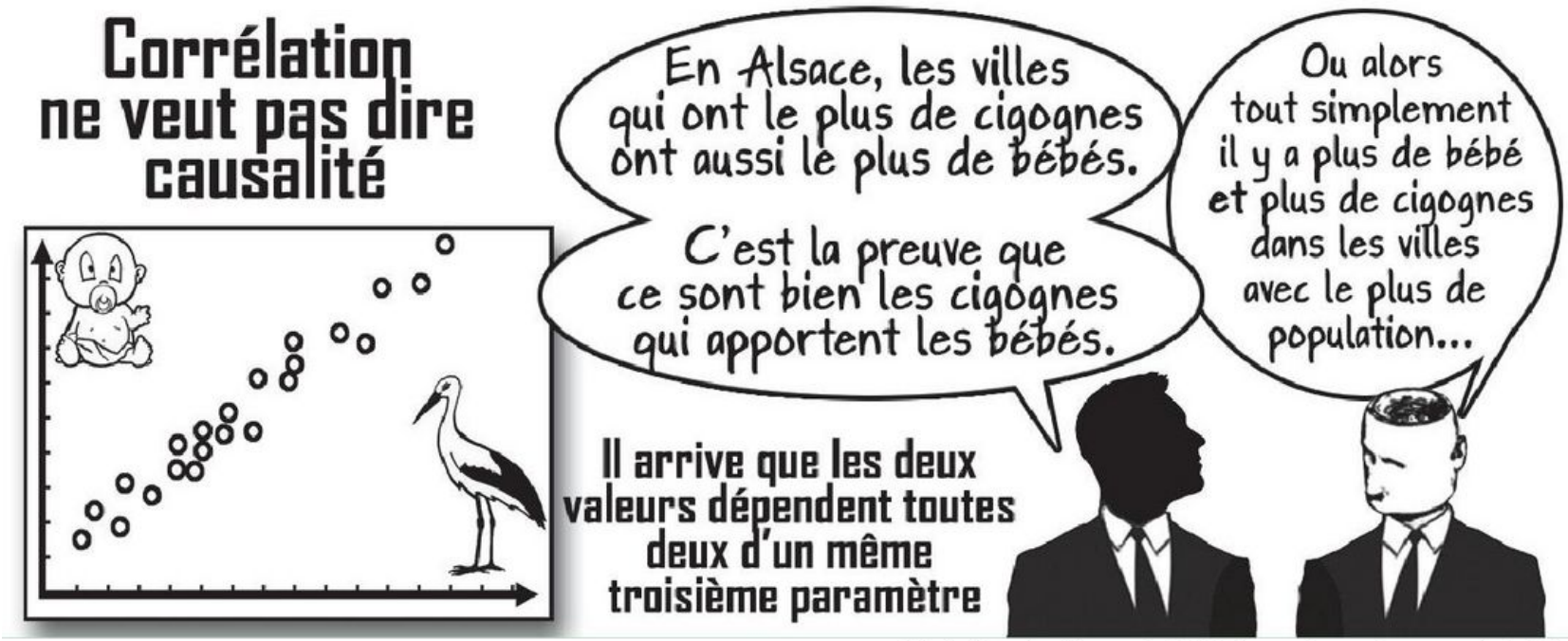
```
heures <- c(2,3,4,1,6)
notes <- c(11,13,14,8,18)

cor(heures, notes)
```

```
## [1] 0.9902115
```

Coefficient de corrélation linéaire : Interprétation

- On a $-1 \leq r_{xy} \leq 1$
- Si $r_{xy} = -1$ (respectivement si $r_{xy} = -1$), on a une corrélation négative (respectivement positive). Si $r_{xy} = 0$, il n y a pas de corrélation.
- La présence de corrélation linéaire n'induit pas un lien de causalité



Coefficient de correlation : Interprétation

- L'absence de corrélation n'implique pas l'absence de relation entre les deux variables.
  Exemple : Quelle est la corrélation entre $(x_1, \ldots, x_{40}) = (-20, -19, \ldots, 20)$ et $y_i = |x_i|$?
- Un coefficient proche de 1 ne signifie pas pour autant que la relation est linéaire.
  Exemple : Quelle est la corrélation entre $(x_1, \ldots, x_{20}) = (0, 1, \ldots, 20)$ et $y_i = \sqrt{x_i}$.

Droite d'ajustement linéaire (1)

- La droite d'ajustement linéaire ou droite de tendance permet d'ajuster linéairement un nuage de points deux variables quantitatives.
- En partant du nuage de points précédent dans lequel la relation semble linéaire, on cherche une droite qui résume au mieux le nuage de points (i.e. une ordonnée à l'origine et un coefficient directeur).

Ecriture matricielle

On est dans le cadre suivant

$$(S)\begin{cases} y_1 &= \beta_1 + \beta_2 x_1 \\ \vdots &= \quad \vdots \quad \Leftrightarrow y = \boldsymbol{X}\beta \\ y_n &= \beta_1 + \beta_2 x_n \end{cases}$$

Avec $\boldsymbol{X} = (\mathbf{1}, x) \in \mathbb{R}^{n\times 2}$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)' \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n)'$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$.

- On a donc n équations et 2 inconnues, le système est surdimensionné
- Pour "résumer au mieux" le nuage de points, il nous fait un critère. Ce sera le critère des moindres carrés ordinaires.
- On cherche deux paramètres $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ tels que la somme des carrés des distances des poitns à la droite soit minimale.

MCO(2)

Avec ce critère la solution de ce problème de minimisation est

$$\begin{cases} \hat{\beta}_2 & = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \\ \hat{\beta}_1 & = \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x} \end{cases}$$

où $s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ est la covariance entre X et Y et s_x^2 la variance de X. Pour le démontrer il suffit de résoudre le programme de minimisation suivant

$$(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \arg \min_{(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_1 - \beta_2 x_i)^2$$

MCO(3)

Il est possible de résoudre ce problème avec une approche matricielle. On pose

$$\Psi(\beta) = \|y - \mathbf{X}\beta\|^2$$

avec $\|.\|$ la norme euclidienne.

La condition du premier ordre consiste à annuler le gradient de $\Psi(\beta)$.

On a :

- $\nabla u'a = a$ avec $u, a \in \mathbb{R}$
- $\nabla u'\mathbf{A}u = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')u$ avec $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

MCO(4)

Il vient alors

$$\Psi(\beta) = (y - \mathbf{X}\beta)'(y - \mathbf{X}\beta) = y'y - 2y'\mathbf{X}\beta + \beta'\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta$$

qui s'annule pour

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'y$$

- L'existence de la solution repose sur le fait que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ est inversible (vrai car de plein rang)
- ce résultat s'étend au cas où il y a plusieurs variables explicatives (voir cours de regression multiple)

Sous R

- Ajouter le centre du nuage de point

```
plot(heures, notes,
     main = "Nuage de points (révision (X), note d'examen (Y))",
     xlab = "Nombre d'heures de révision avant l'examen (X)",
     ylab = "Note del'exament (Y)")

points(mean(heures), mean(notes), col = "red", pch=15)
```

Sous R : modélisation

- Modele linéaire à l'aide de la fonction `lm`

```
modele <- lm(notes ~ heures) #Y ~ X
coefficients(modele)
```

```
## (Intercept)      heures
##    6.702703    1.905405
```

Sous R : Visualisation droite ajustement

- Ajouter la droite d'ajustement linéare au nuage de point

```
modele <- lm(notes ~ heures)

plot(heures, notes,
     main = "Nuage de points (révision (X), note d'examen (Y))",
     xlab = "Nombre d'heures de révision avant l'examen (X)",
     ylab = "Note del'exament (Y)")

points(mean(heures), mean(notes), col = "red", pch=15)

abline(modele)
```

Analyse de la variance

Comme nous l'avons vu avec l'interprétation géométrique, il est possible d'écrire le vecteur Y comme la somme de deux vecteurs apartenant à deux sous-espaces vectoriels en somme directe. Ainsi, nous avonsla décomposition suivante

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

avec $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_i$

- On appelle $\hat{u} = y - \hat{y}$ le vecteur des résidus
- La qualité d'ajustement peut mesure aussi en faisant le rapport de la variance expliquée sur la variance totale de y (i.e. le coefficient de détermination R^2)

Coefficient de détermination

- C'est la part de variance de Y expliquée par la relation $y = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x$
- On a $0 \leq R^2 \leq 1$ qui représente la part de variabilité de Y expliquée par le modèle.
- Plus R^2 est proche de 1 meilleur est l'ajustement.
- Si $R^2 = 0$ alors la variance expliquée est nulle donc la variable X n'a aucune influence linéaire sur Y
- Si $R^2 = 1$ alors la variance résiduelle est nulle donc on a une relation linéaire exacte

Sur R

- Afficher les variances totale, résiduelle et expliquée

```
var(notes) ## variance totale Y
```

```
## [1] 13.7
```

```
var(residuals(modele)) ## variance résiduelle
```

```
## [1] 0.2668919
```

```
var(fitted(modele)) ## variance expliquée
```

```
## [1] 13.43311
```

Remarques

- Dans la corrélation linéaire, il n y a aucune causalité entre les variables
- On voit bien au travers de ces droites que l'ajustement linéaire est un cadre de travail adapté pour expliquer une variables Y comme la conséquence d'une variable X. On rentre là dans le domaine de la modélisation et logiquement par la suite de la prévision
- De plus, les méthodes utilisées dans ce cours sont totalement déterministes et ne renseignent pas sur la significativité des paramètres obtenus.