



**Trabajo final de grado**

**GRADO DE  
MATEMÁTICAS**

**Facultad de Matemáticas  
Universidad de Barcelona**

---

**Fractales matemáticos**

---

**Vanessa Atencia Toro**

Director: Nuria Fagella Rabionte  
Realizado en: Departament de  
Matemàtica Aplicada i Anàlisi.  
UB

Barcelona, 27 de enero de 2014

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Ejemplos de fractales geométricos</b>	<b>5</b>
2.1. El conjunto de Cantor . . . . .	5
2.1.1. Construcción . . . . .	5
2.1.2. Coordenadas . . . . .	7
2.1.3. Sistemas de funciones iteradas . . . . .	8
2.2. El triángulo de Sierpinski . . . . .	9
2.2.1. Construcción . . . . .	10
2.2.2. Sistema de funciones iteradas . . . . .	11
2.3. La curva de Koch . . . . .	12
2.4. Otros fractales . . . . .	13
2.4.1. Curva del dragón . . . . .	13
2.4.2. Fudgeflake . . . . .	15
2.4.3. Sierpinski drágon . . . . .	16
2.5. Conjunto de Julia . . . . .	16
<b>3. Teorema del Collage y su demostración</b>	<b>18</b>
3.1. Espacio métrico . . . . .	18
3.1.1. Bolas abiertas y cerradas . . . . .	22
3.2. Estructuras métricas y el Teorema del punto fijo . . . . .	24
3.2.1. Funciones en espacios métricos . . . . .	25
3.2.2. Sucesión en un espacio métrico . . . . .	26
3.2.3. Convergencia uniforme . . . . .	28
3.2.4. Teorema del punto fijo de Banach . . . . .	29
3.3. Espacio $H(S)$ y la métrica de Hausdorff . . . . .	30
3.4. Teorema del Collage . . . . .	34
<b>4. Dimensión fractal</b>	<b>38</b>
4.1. Dimensión topológica . . . . .	38
4.2. Medida y dimensión de Hausdorff . . . . .	39
4.2.1. Medida de Hausdorff . . . . .	39
4.2.2. Dimensión de Hausdorff . . . . .	40
4.3. Dimensión de Box-Counting . . . . .	44
4.4. Relación entre la dimensión de Hausdorff y Box-Counting . . . . .	46
4.5. Aplicaciones . . . . .	50
<b>Anexo</b>	<b>52</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>

# 1. Introducción

La palabra fractal deriva del latín fractus, que significa quebrado o fracturado.

¿Que es un fractal?, un fractal es un objeto geométrico, cuya estructura básica, fragmentada o irregular se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Mandelbrot en el año 1975.

Su definición es reciente, pero los objetos que hoy denominamos fractales eran conocidos en las matemáticas desde principios del siglo XX. Las maneras más comunes de determinar lo que hoy denominamos dimensión fractal fueron establecidas a principios del siglo XX en el seno de la teoría de la medida.

Su definición fue un aporte muy importante en las matemáticas, ya que en el siglo XIX matemáticos como Weierstrass, Koch (capítulo 2.3) o Cantor (capítulo 2.1), estudiaron objetos cuyas propiedades no se explicaban con la geometría tradicional y además eran autosimilares, es decir que su forma se realizaba a partir de copias más pequeñas de la misma figura.

En 1872 apareció la función de Weierstrass (Figura 1), cuyo grafo hoy en día consideraríamos fractal, como ejemplo de función continua pero no diferenciable en ningún punto.

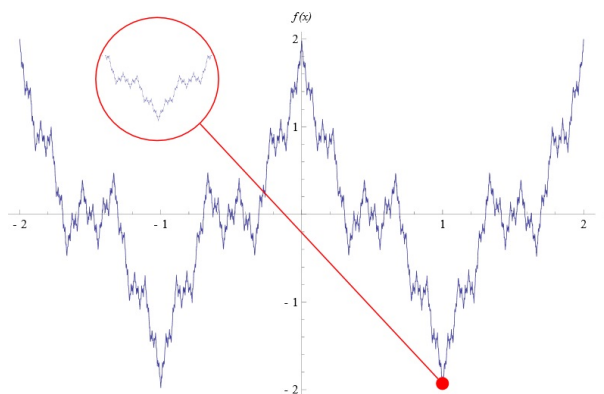


Figura 1: Función de Weierstrass en el intervalo  $[-2, 2]$ . La función tiene un comportamiento fractal.

Posteriormente, aparecieron ejemplos con propiedades similares pero con una definición más geométrica. Dichos ejemplos podían construirse partiendo de una figura inicial, a la que se aplicaban una serie de construcciones geométricas sencillas. La serie de figuras obtenidas se aproximaba a una figura límite que correspondía al que hoy llamamos conjunto fractal. Así, en 1904, Helge von Koch definió una curva con propiedades similares a la de Weierstrass: el copo de nieve de Koch (capítulo 2.3). En 1915, Waclaw Sierpinski construyó el triángulo de Sierpinski y, un año después, la alfombra de Sierpinski (capítulo 2.2).

Dichos conjuntos eran vistos como objetos artificiales, llamados “monstruos”, como los denominó Poincaré.

A principios del siglo XX, Poincaré, Schröder, Fatou o Julia (capítulo 2.5) realizaron las primeras incursiones en el mundo de la iteración (la aplicación repetida de un proceso o función) en el plano euclídeo o en el plano complejo, descubriendo situaciones variantes en el tiempo, hoy llamados sistemas dinámicos, que se comportaban de manera

extremadamente complicada (o caótica, en términos actuales). A su vez, dichos sistemas dinámicos, generaban objetos geométricos con propiedades similares a la que poseían los objetos estudiados por Cantor o Koch, como la auto-similitud, es decir, similitud entre las “partes” y el “todo” llevada al infinito. No obstante, al no disponer de ayuda de los ordenadores modernos, dichos matemáticos no pudieron ver la belleza de los fractales que estudiaban.

Hacia el 1987 Barnsley quiso poder describir cualquier imagen como un atractor de un sistema de funciones iteradas (a partir de ahora lo denotaremos por IFS) por motivos de la comprensión de imágenes. Ese motivo le llevó a demostrar el Teorema del Collage (capítulo 3.4) y otras versiones de este teorema más sofisticadas. No obstante, no consiguió demostrar el proyecto inicial, pero desarrolló técnicas muy avanzadas para describir imágenes como un IFS. Posteriormente, estas técnicas se aplicaron al mundo del cine para crear paisajes, como puede ser el cielo o entornos montañosos, un ejemplo de ello lo podemos encontrar en las películas de Star Wars (1977 - 2005) y Star Trek (1979 - 2013), también para crear piel, tela, plumas, etc, un ejemplo de ello son los personajes del Troll o de Golum en la trilogía El Señor de los Anillos (Lord of the rings, 2001 – 2003).

Retomando la definición de fractal, Mandelbrot la definió como:

**Definición.** *Un fractal es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  cuya dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor que la dimensión topológica.*

La dimensión de Hausdorff (lo describiremos en el capítulo 4.2.2) o dimensión de Hausdorff-Besicovith es una generalización de la dimensión topológica, que permite definir la dimensión fractal como un número no entero. Dicha definición de dimensión fue dada por Hausdorff hacia el 1917, aunque fue estudiada más tarde por Besicovitch, a quien se deben la mayoría de los resultados teóricos y teoremas relacionados tanto con la medida de Hausdorff como con la dimensión fractal.

Otro método de calcular la dimensión fractal, es a partir de Box-Counting (lo describiremos en el capítulo 4.3). Es un método sencillo para calcular dicha dimensión a partir de contabilizar cuantos cuadrados de lado  $r$  (donde  $r$  es el factor de contracción), son necesarios para cubrir el conjunto del cual queremos calcular la dimensión. Esta dimensión es una buena aproximación de la dimensión de Hausdorff.

En el capítulo 2 describiremos diversos fractales muy conocidos, construyéndolos por medio de iteraciones geométricas (eliminando partes del conjunto inicial, etc) y estudiando algunas propiedades interesantes.

El segundo capítulo está dedicado al Teorema del Collage y su demostración, para lo cual introduciremos previamente conceptos y resultados como espacio métrico, compacidad, completitud, Teorema del punto fijo de Banach y la métrica de Hausdorff.

Finalmente, el tercer capítulo trata sobre las diferentes nociones de dimensión (topológica, Hausdorff, Box-Counting), estudiaremos la relación de estas dimensiones, y utilizaremos ejemplos de fractales geométricos del capítulo 2 para calcular su dimensión. Por último, veremos aplicaciones de fractales generados por IFS.

## 2. Ejemplos de fractales geométricos

En este capítulo estudiaremos diferentes ejemplos de fractales geométricos, que se obtienen a partir de un procedimiento de extracción de piezas (segmentos, triángulos, cuadrados, etc.), partiendo de una pieza inicial. Construiremos paso a paso los patrones básicos de estructura fractal, que después se observan en la naturaleza (a través de los modelos dinámicos pertinentes). En todos ellos encontraremos la definición que hemos adelantado en la introducción de un conjunto fractal y observaremos una de sus propiedades, la autosimilitud. Todos los conjuntos que estudiaremos a continuación son subconjuntos de la recta real  $\mathbb{R}$  o del plano  $\mathbb{R}^2$ .

A continuación definiremos que es un sistema de funciones iteradas, ya que dicha definición la utilizaremos a lo largo de todo el capítulo.

**Definición 2.0.1.** Sea  $p_1, \dots, p_n$  puntos del plano y  $\beta_1, \dots, \beta_n$  números reales tales que  $0 < \beta_i < 1$  para  $i = 1, \dots, n$ . Sea  $A_i(p) = \beta_i(p - p_i) + p_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$  (donde  $A$  es una función afín, y en particular una contracción de factor  $\beta_i$  de todo el plano respecto al punto  $p_i$ ). Entonces, la colección de funciones  $\{A_1, \dots, A_n\}$  se llama sistema de funciones iteradas o IFS.

### 2.1. El conjunto de Cantor

Hay diversos conjuntos que son llamados “de Cantor”. El conjunto de Cantor sobre el que trabajaremos es el más típico y se conoce por el nombre **Conjunto de Cantor** o también **Cantor middle-thirds set**.

Fue llamado conjunto de Cantor, por su descubridor Georg Cantor en 1883.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (San Petersburgo, 1845 - Halle, 1918) fue un matemático alemán, inventor con Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales). [1]

Mandelbrot lo ha llamado “*Polvo de Cantor*”, este nombre nos puede dar una ligera idea de lo que describiremos a continuación.

#### 2.1.1. Construcción

Tomamos un intervalo inicial  $C_0 = [0, 1]$ , este será la iteración inicial del conjunto de Cantor. Para crear la siguiente iteración utilizamos el conjunto  $C_0 = [0, 1]$ , lo dividimos en tres partes iguales y eliminamos el intervalo central, por lo cual, resulta el siguiente conjunto:

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

Para la siguiente iteración utilizamos los dos intervalos de  $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ , dividimos cada intervalo en tres partes iguales y eliminamos el intervalo central (tal y como hemos hecho en la iteración anterior). Por lo tanto, obtenemos el siguiente conjunto:

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Aplicando el procedimiento anterior en las siguientes iteraciones, obtenemos una sucesión de conjuntos  $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \dots$ .

Representando gráficamente los conjuntos de Cantor  $C_i$  para  $i = 0, 1, 2, \dots$ , es fácil ver la sucesión de conjuntos que hemos obtenido anteriormente, tal y como muestra la siguiente figura:

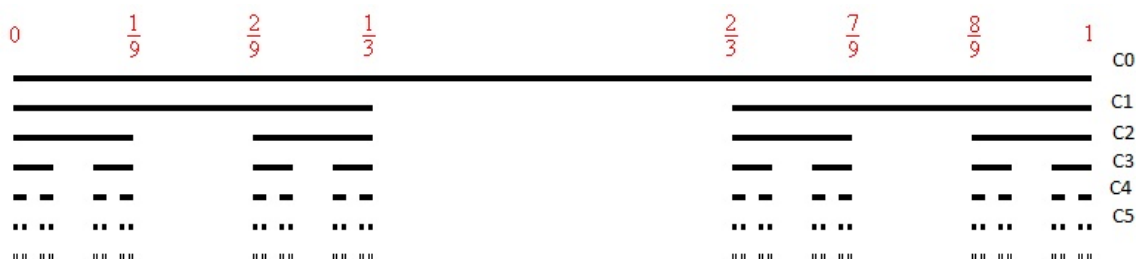


Figura 2: Conjunto de Cantor  
[2]

En consecuencia, el límite del conjunto de Cantor (que lo llamaremos  $C$ ), está formado por la intersección de los puntos que quedan al repetir el proceso infinitas veces, tal y como muestra la siguiente ecuación:

$$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k.$$

Por ejemplo, cada conjunto  $C_k$  se divide en  $2^k$  intervalos disjuntos y cerrados, cada uno de los intervalos tiene longitud  $(\frac{1}{3})^k$ . Por lo tanto, el total de la longitud de  $C_k$  es la suma de las longitudes de los intervalos, es decir  $(\frac{2}{3})^k$ . En consecuencia, el límite de la longitud de  $C_k$  es:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

Por lo que, el conjunto de Cantor es de medida nula <sup>1</sup>. Esto implica, en particular, que el conjunto de Cantor no puede contener ningún intervalo de medida no nula.

A continuación, analizaremos qué puntos son los que construyen el conjunto de Cantor después de aplicar infinitas iteraciones con un caso genérico.

¿Que puntos de un intervalo cualquiera forman el Conjunto de Cantor?

Supongamos un intervalo cerrado cualquiera  $[a, b]$ , donde dicho intervalo es una de las aproximaciones de  $C_k$ , por lo cual los extremos  $a$  y  $b$  pertenecen a futuras aproximaciones de  $C_m$ , para  $m \geq k$ , por lo tanto los extremos  $a$  y  $b$  pertenecen a la intersección  $C$ .

Por otro lado, debemos tener en cuenta los puntos que se obtienen como límite del proceso y que por lo tanto no son extremos de los intervalos  $C_k$ .

Tomando todos los puntos finales de todos los intervalos de aproximaciones a  $C_k$ , obtenemos infinitos conjuntos de puntos, todos ellos pertenecientes a  $C$ .

<sup>1</sup>Un conjunto  $C \subset \mathbb{R}$  es de medida nula, si para cada  $\epsilon > 0$  existe un recubrimiento de  $C$  formado por un número finito de intervalos cerrados, tal que la suma de las longitudes de los intervalos es menor que  $\epsilon$ .

### 2.1.2. Coordenadas

Caracterizaremos el conjunto de Cantor con términos de expansión en base 3.

*Recordatorio:* A continuación mostraremos como se expresan números naturales, números reales y algunos números racionales en base 3.

#### 1. Números naturales.

Por ejemplo 16:

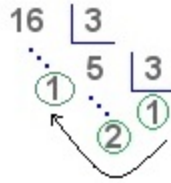


Figura 3: Expansión de un número natural en base 3

Por lo tanto, 16 en base 3 es:

$$16 = \mathbf{1} \times 3^0 + \mathbf{2} \times 3^1 + \mathbf{1} \times 3^2 = (121)_3.$$

El subíndice indica en la base en la que trabajamos.

#### 2. Números reales.

Por ejemplo 0,2.

$$0,2 \times 3 = \mathbf{0},6 \Rightarrow \mathbf{0}$$

$$0,6 \times 3 = \mathbf{1},8 \Rightarrow \mathbf{1}$$

$$0,8 \times 3 = \mathbf{2},4 \Rightarrow \mathbf{2}$$

$$0,4 \times 3 = \mathbf{1},2 \Rightarrow \mathbf{1}$$

$$0,2 \times 3 = \mathbf{0},6 \Rightarrow \mathbf{0}$$

repetimos el proceso infinitas veces, por lo que 0.2 en base 3 es:

$$0,2 = (0,012101210\dots)_3.$$

#### 3. Números racionales.

Algunos números racionales de la forma  $\frac{a}{3^k}$ , admiten dos expresiones distintas, por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = (0,1000\dots)_3 = (0,0222\dots)_3.$$

A continuación, estudiaremos la propiedad que ha de cumplir un número  $x \in [0, 1]$  para pertenecer al conjunto de Cantor.

**Proposición 2.1.1.** Sea  $x \in [0, 1]$ . Entonces,  $x$  pertenece al conjunto de Cantor  $C$  si y sólo si la expansión de  $x$  en base 3 no contiene 1's.

*Demostración.* Sea  $x \in [0, 1]$ , dividimos el intervalo en tres partes iguales, obteniendo los siguientes intervalos:

$$C_0 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1],$$

expresándolos en base 3, los 1's se encuentran en el intervalo  $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$  ( $\frac{1}{3} = (0,10000\dots)_3$  y  $\frac{2}{3} = (0,1222\dots)_3$ ), en consecuencia eliminamos dicho intervalo obteniendo el conjunto  $C_1 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, 1]$ .

Seguidamente, dividimos cada intervalo del conjunto  $C_1$  en tres partes iguales y obtenemos:

$$C_1 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{7}{9}, \frac{8}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1],$$

expresándolo en base 3, los 1's se encuentran en los siguientes intervalos:

$$\frac{1}{9} = (0,01)_3; \frac{2}{9} = (0,02)_3; \frac{7}{9} = (0,21\dots)_3; \frac{8}{9} = (0,22)_3,$$

por lo tanto, eliminaremos los intervalos  $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$  y  $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ , obteniendo el conjunto:

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

Aplicando el proceso infinitas veces, observamos que el conjunto  $C$  está formado por:

$$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k,$$

que son los puntos  $x \in C$ . □

El conjunto de Cantor es no numerable, esto se deduce observando la figura 2, junto con el punto 3 del recordatorio de la expansión en base 3, que indica que cada número real tiene como máximo dos representaciones en base 3.

### 2.1.3. Sistemas de funciones iteradas

Sea  $r > 0$  y  $a \in \mathbb{R}$ . La dilatación de  $\mathbb{R}$  con radio  $r$  y centro  $a$  es la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = rx + (1 - r)a$ .

Consideramos dos funciones de  $\mathbb{R}$  definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{x}{3}, \\ f_2(x) &= \frac{x+2}{3}, \end{aligned}$$

de manera que  $f_1$  tiene centro 0 y  $f_2$  tiene centro 1, y ambas tienen radio  $\frac{1}{3}$

**Proposición 2.1.2.** El conjunto de Cantor satisface la ecuación de autoreferencia  $C = f_1[C] \cup f_2[C]$ .

*Demostración.* Comprobaremos que  $C = f_1[C] \cup f_2[C]$ , para ello dividiremos la demostración en dos inclusiones.

Por inducción sabemos que:

$$C_{k+1} = f_1[C_k] \cup f_2[C_k] \text{ para } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$



1.  $C \subseteq f_1[C] \cup f_2[C]$ .

Supongamos que  $x \in C$ , por lo tanto  $x \in C_1$ , que es equivalente a que  $x \in [0, \frac{1}{3}]$  o  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ .

Supongamos que  $x \in [\frac{2}{3}, 1]$ . Para todo  $k$ , sabemos que  $x \in C_{k+1} = f_1[C_k] \cup f_2[C_k]$ , pero  $f_1[C_k] \subseteq f_2[[0, \frac{1}{3}]] = [0, \frac{1}{3}]$ , por lo cual  $x \in f_2[C_k]$  o  $3x - 2 \in C_k$ , esto es cierto para todo  $k$ , por lo que  $3x - 2 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$ . En consecuencia, obtenemos que  $x \in f_2[C]$ .

Análogamente, demostraríamos que  $x \in f_1[C]$ .

En conclusión,  $x \in f_1[C] \cup f_2[C]$  y como  $x \in C$  obtenemos que  $C \subseteq f_1[C] \cup f_2[C]$ .

2.  $C \supseteq f_1[C] \cup f_2[C]$ .

Sea  $x \in C$ , esto implica que  $x \in C_k$  para todo  $k$ . Por lo que, aplicando funciones obtenemos que  $f_1(x) \in f_1(C_k) \subset C_{k+1}$  para todo  $k$ . Por lo tanto,  $f_1(x) \in C$ .

Análogamente, demostraríamos que  $f_2(x) \in C$ .

En conclusión, obtenemos que  $C \supseteq f_1[C] \cup f_2[C]$ .

En efecto:

$$C = f_1[C] \cup f_2[C].$$

□

*Observación.* El punto  $\frac{1}{4}$  no es extremo de ningún intervalo de cualquier conjunto de  $C_k$ , en cambio el punto  $\frac{1}{4}$  pertenece a  $C$ . Lo demostraremos a partir de un programa, que podrán encontrar en el anexo.

*Observación.* La observación anterior también se puede demostrar expresando  $\frac{1}{4}$  en base 3, tal y como vemos a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= 0,25 \times 3 = 0,75 \Rightarrow \mathbf{0} \\ 0,75 \times 3 &= 2,25 \Rightarrow \mathbf{2} \\ 0,25 \times 3 &= 0,75 \Rightarrow \mathbf{0} \end{aligned}$$

Por lo tanto, observamos que  $\frac{1}{4} = (0,02020\dots)_3$ , no contiene 1's. Por lo que, obtenemos que  $\frac{1}{4}$  es un punto del conjunto de Cantor y que no es extremo de ningún intervalo del conjunto  $C_k$ , ya que los extremos de los intervalos del conjunto  $C_k$  terminan de la siguiente forma 00000.... o bien 2222.... .

En conclusión el punto  $\frac{1}{4}$  no es de ningún intervalo del conjunto  $C_k$ , en cambio sí que pertenece al conjunto  $C$ .

## 2.2. El triángulo de Sierpinski

Waclaw Franciszek Sierpinski (Varsovia, 1882 - República Popular de Polonia, 1969), fue un matemático polaco. Son notables sus aportaciones a la teoría de conjuntos, la teoría de números, la topología y la teoría de funciones. Tres conocidos fractales llevan su nombre: Triángulo de Sierpinski, Alfombra de Sierpinski y Curva de Sierpinski.[4]

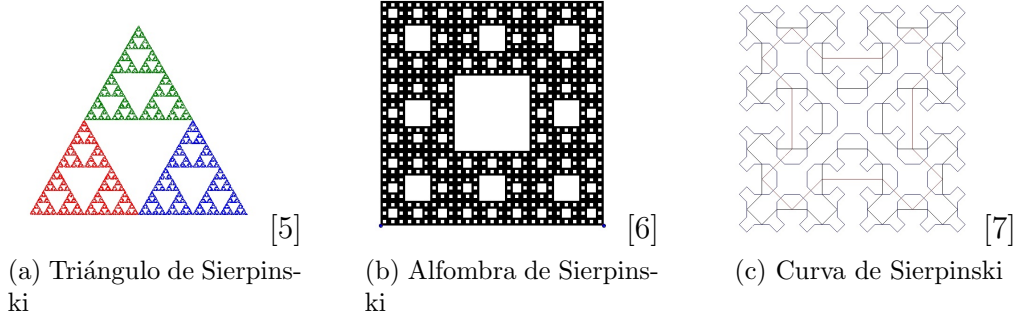


Figura 4: Fractales Sierpinski

### 2.2.1. Construcción

Partimos de un triángulo equilátero de lado 1 (se puede utilizar para cualquier lado) al que llamaremos  $S_0$ .

Para crear el siguiente conjunto, representamos en el conjunto  $S_0$  un nuevo triángulo, cuyos vértices son los puntos medios de los lados del conjunto  $S_0$ , por lo tanto obtenemos cuatro triángulos equiláteros (de tamaño  $\frac{1}{2}$  del triángulo del conjunto  $S_0$ ) y eliminamos el triángulo central, obteniendo el conjunto  $S_1$ .

Para crear el siguiente conjunto, en cada uno de los triángulos del conjunto  $S_1$ , representamos un nuevo triángulo, cuyos vértices son los puntos medios de los lados del conjunto  $S_1$ , por lo tanto obtenemos en cada triángulo del conjunto  $S_1$  cuatro triángulos nuevos, eliminamos los triángulos centrales y obtenemos el conjunto  $S_2$ , formado por nueve triángulos.

Aplicando el procedimiento anterior  $k$  veces, obtenemos el conjunto  $S_k$ , tal y como se muestra en la figura: 5

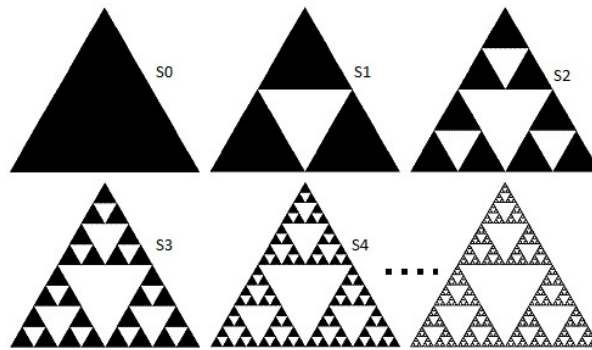


Figura 5: Triángulo de Sierpinski [8]

Aplicando el razonamiento anterior, obtenemos una sucesión de conjuntos de la forma  $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \dots$ , tal que, cada nueva iteración el conjunto  $S_i$  estará incluida en el conjunto  $S_{i-1}$ .

En consecuencia el límite del triángulo de Sierpinski (lo llamaremos  $S$ ) está formado por la intersección de los triángulos que quedan al repetir el proceso infinitas veces, tal y como muestra la siguiente ecuación:

$$S = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} S_k.$$

**Corolario 2.2.1.** *El área del triángulo de Sierpinski es cero.*

*Demostración.* Cada conjunto  $S_k$  consta de  $3^k$  triángulos, con lado  $2^{-k}$ , por lo que el área del conjunto  $S_k$  es:

$$\text{Área}(S_k) = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{l \cdot l \cdot \sin(60^\circ)}{2} = (2^{-k})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4},$$

como en cada iteración obtenemos  $3^k$  triángulos, entonces:

$$3^k \cdot \text{Área}(S_k) = 3^k \cdot (2^{-k})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

En consecuencia:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3^k \cdot (2^{-k})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

Por lo cual, el área del triángulo de Sierpinski es 0. □

### 2.2.2. Sistema de funciones iteradas

El triángulo de Sierpinski se construye utilizando aproximaciones  $S_k$ .

Sea  $r > 0$  y  $a \in \mathbb{R}$ . La dilatación de  $\mathbb{R}$  con radio  $r$  y centro  $a$  es la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Consideremos tres funciones de  $\mathbb{R}$  definidas por:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right), \\ f_2 &= \left(\frac{x}{2} + 1, \frac{y}{2}\right), \\ f_3 &= \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Las tres funciones tienen radio  $\frac{1}{2}$  y centro en los tres vértices del triángulo del conjunto  $S_0$ .

Aplicando inducción, obtenemos:

$$S_{k+1} = f_1[S_k] \cup f_2[S_k] \cup f_3[S_k].$$

Tal y como hemos demostrado en la proposición 2.1.2, obtenemos que:

$$S = f_1[S] \cup f_2[S] \cup f_3[S],$$

Dicha ecuación de autoreferencia indica que  $S$  es el conjunto invariante del IFS  $f_1, f_2, f_3$ .

### 2.3. La curva de Koch

Niels Fabian Helge von Koch (Estocolmo, 1870 - Estocolmo, 1924), fue un matemático sueco, cuyo nombre se ha asignado a una famosa curva fractal llamada *curva de Koch* o *copo de Koch*, esta fue una de las primeras curvas fractales en ser descrita.[9]

La curva de Koch se construye de diferentes formas, a continuación describiremos dos de ellas:

1. Partimos de un área rectangular con ángulos  $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ , llamaremos al conjunto inicial  $L_0$ .

El siguiente conjunto, se crea dividiendo el conjunto  $L_0$  en tres triángulos más pequeños, dos triángulos con ángulos  $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ , con lados largos a lo largo de los lados cortos del triángulo original y un triángulo equilátero que es el que eliminaremos, obteniendo el conjunto  $L_1$ .

Para construir el siguiente conjunto, se divide cada triángulo de los resultantes en la iteración anterior en tres y eliminamos el triángulo central (tal y como hemos hecho anteriormente), con esta operación obtenemos cuatro triángulos, al conjunto obtenido lo notaremos conjunto  $L_2$ .

Si nos fijamos en la silueta formada por los triángulos, observamos claramente la curva de Koch.

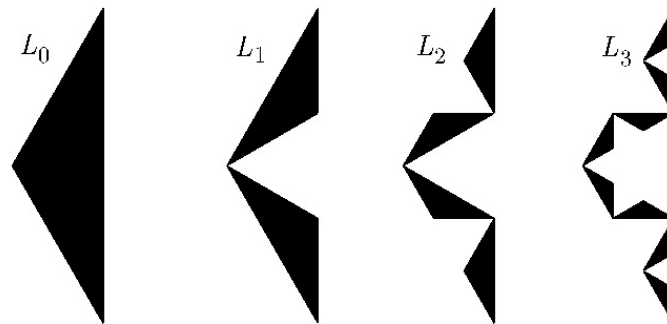


Figura 6: Curva de Koch  
[10]

2. A continuación describiremos la forma más habitual de construir la curva de Koch.

El primer conjunto  $L_0$  se construye a partir de un segmento.

Para construir el conjunto  $L_1$ , dividimos el conjunto  $L_0$  en tres partes iguales y reemplazamos la parte central por dos partes de la misma longitud formando un ángulo de  $60^\circ$ , de este modo obtenemos el conjunto  $L_1$ .

Para la siguiente iteración dividimos cada uno de los segmentos resultantes en  $L_1$  en tres partes iguales y reemplazamos la parte central por dos partes de la misma longitud formando un ángulo de  $60^\circ$ , tal y como se realizó en la iteración de  $L_0$  a  $L_1$ , lo que da lugar a 16 segmentos más pequeños, formando el conjunto  $L_2$ .

Aplicando el procedimiento anterior  $k$  veces obtenemos la curva de Koch.

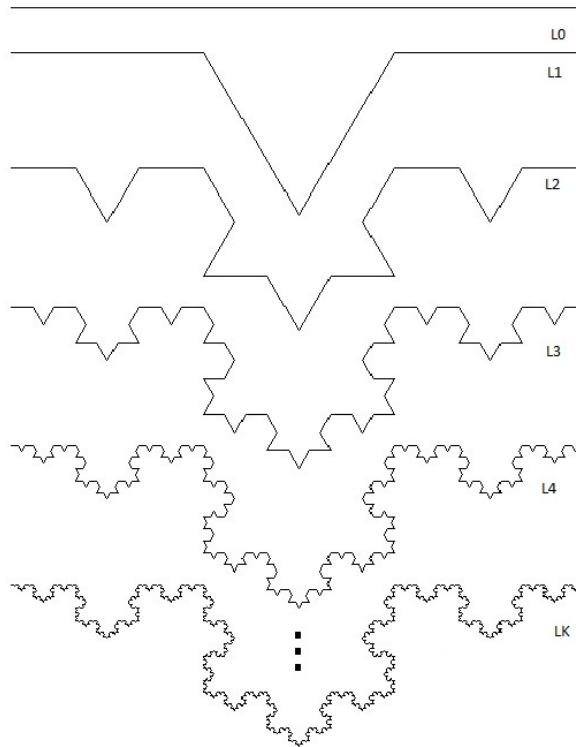


Figura 7: Curva de Koch  
[11]

Uniendo tres curvas de Koch formaremos el **copo de nieve de Koch** (cada color es una curva de Koch).

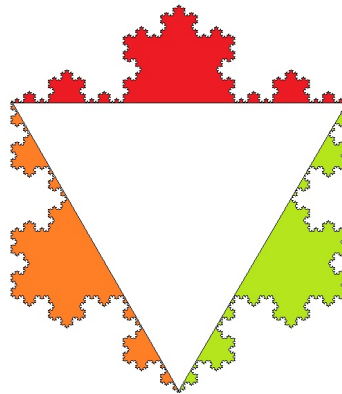


Figura 8: Copo de nieve de Koch  
[12]

## 2.4. Otros fractales

### 2.4.1. Curva del dragón

La curva del dragón se construye de la siguiente forma:

Partimos de un segmento de longitud 1 (aunque puede tener cualquier longitud), el cual llamaremos conjunto  $D_0$ .

Para construir el conjunto  $D_1$ , utilizaremos el conjunto  $D_0$ . En dicho conjunto  $D_0$  construiremos un triángulo rectángulo e isósceles (la longitud de los dos segmentos del

triángulo rectángulo e isósceles es de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ), eliminamos el segmento inicial del conjunto  $D_0$  (marcado en rojo) obteniendo el conjunto  $D_1$ .

Para construir el conjunto  $D_2$  aplicamos el razonamiento anterior, en cada segmento del conjunto  $D_1$  construimos un triángulo rectángulo e isósceles, eliminamos los segmentos iniciales del conjunto  $D_1$  (marcados en rojo) obteniendo el conjunto  $D_2$ .

Para construir el conjunto  $D_3$  aplicamos el razonamiento anterior, en cada segmento del conjunto  $D_2$  construimos un triángulo rectángulo e isósceles, la orientación de cada uno de los triángulos ha de ser alterna, eliminamos los segmentos iniciales del conjunto  $D_2$  (marcados en rojo) obteniendo el conjunto  $D_3$ .

*Nota.* Siempre a partir del conjunto  $D_2$  para construir los siguientes conjuntos  $D_j$  para  $j = 3, 4, \dots$  tenemos que alternar la orientación de los triángulos.

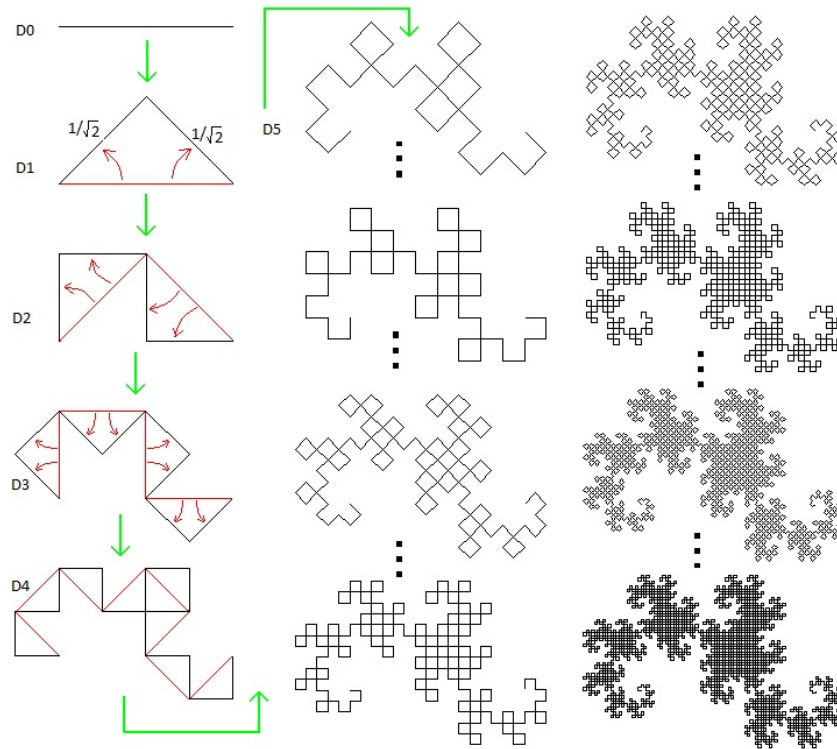


Figura 9: Curva del dragón  
[13]

**Proposición 2.4.1.** *Todas las aproximaciones de  $D_k$  están acotadas en una región del plano.*

*Demostración.* Todos los puntos del conjunto  $D_0$  tienen distancia máxima 1 desde el punto final.

Todos los puntos del conjunto  $D_1$  tienen distancia máxima  $\frac{1}{2}$  desde algún punto del conjunto  $D_0$ .

Por lo que, podemos ver por inducción, que cada punto del conjunto  $D_k$  tiene distancia máxima  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}$  desde algún punto de  $D_{k-1}$ . Por lo tanto, cualquier punto  $D_k$  tiene distancia máxima del punto final:

$$1 + \sum_{j=1}^k \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{j+1} < 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{j+1}, \quad (1)$$

De manera que la ecuación 1 es una serie geométrica con razón menor a 1, por lo que converge a infinito.  $\square$

### 2.4.2. Fudgeflake

Podemos construir otros fractales, utilizando ángulos distintos de  $90^\circ$  (tal y como hemos utilizado en la curva del dragón) y de este modo obtener variaciones de los fractales descritos anteriormente.

El Fudgeflake se construye de una forma parecida a la curva del dragón.

Por *ejemplo*, partimos como referencia de la curva del dragón, pero esta vez utilizaremos un ángulo de  $120^\circ$ , de manera que obtenemos la siguiente curva:

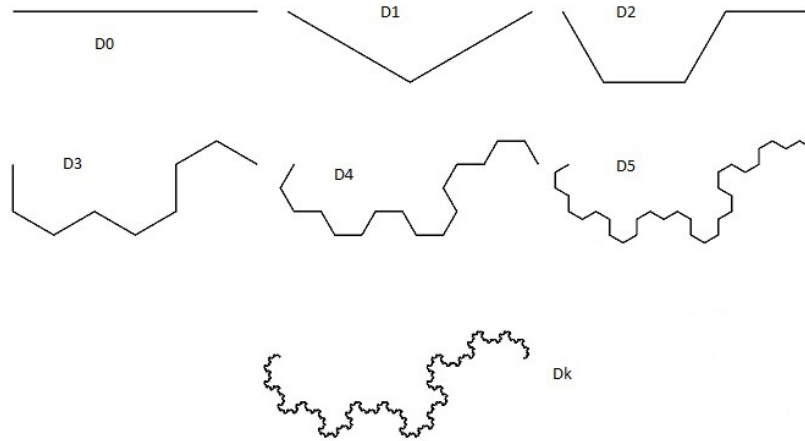


Figura 10: Curva de dragón (con ángulo 120 grados)  
[14]

Añadiendo tres copias de la nueva curva de dragón, formamos lo llamado un *Fudgeflake* (cada color es una curva de dragón), tal y como muestra la siguiente figura:

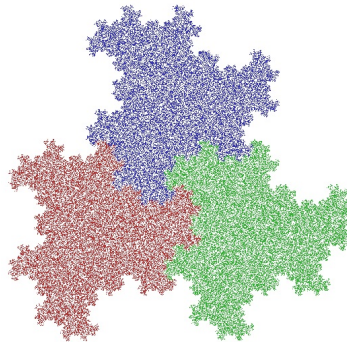


Figura 11: Fudgeflake  
[15]

### 2.4.3. Sierpinski drágon

Otra figura parecida a la curva del dragón es la que se obtiene tomando como referencia el triángulo de Sierpinski, tal y como muestra la figura 12.

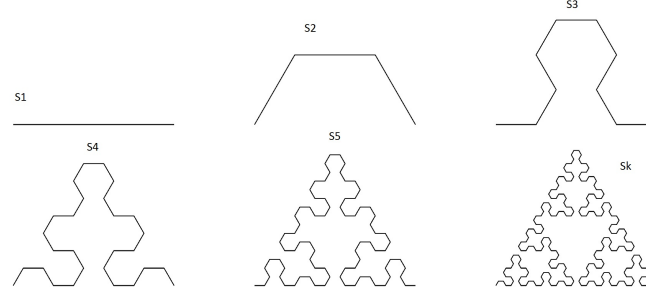


Figura 12: Sierpinski dragón  
[16]

## 2.5. Conjunto de Julia

Los conjuntos de Julia, así llamados por el matemático Gaston Julia, son una familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una función holomorfa. El conjunto de Julia de una función holomorfa  $f$  está construido por aquellos puntos que bajo la iteración de  $f$  tienen comportamiento “caótico”. El conjunto se denota  $J(f)$ .

Gaston Maurice Julia (3 de febrero de 1893, Sidi Bel Abes, Argelia - 19 de marzo de 1978, París, Francia) fue un matemático francés. Julia fue un precursor en lo que hoy se conoce como fractales. Fue el primero en estudiar el tema y en explicar cómo a partir de cualquier función compleja se puede fabricar por medio de una sucesión definida por inducción, un conjunto cuya frontera es imposible de dibujar a pulso por ser de longitud infinita, entre otras cosas.[17]

Los planos en un IFS para construir un conjunto de Julia no necesitan ser similares.

$\mathbb{C}$  es el conjunto de los números complejos. Supongamos la función  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\varphi(z) = z^2 + c$  (donde  $c$  es un número complejo). El conjunto de Julia que se obtiene a partir de esta función y se denota  $J_c$ .

La función  $\varphi$  tiene como inversa  $f$ , definida por:

$$z = z^2 + c \Rightarrow z - c = z^2 \Rightarrow \pm\sqrt{z - c} = f(z),$$

sabemos que un número complejo tiene dos raíces cuadradas (excepto el cero), por lo tanto  $f$  tiene dos inversas:

$$\begin{aligned} f_0 &= \sqrt{z - c}, \\ f_1 &= -\sqrt{z - c}. \end{aligned}$$

El conjunto de Julia en este caso es un conjunto compacto (cerrado y acotado) y no vacío, tal que  $J \subseteq \mathbb{C}$ , que satisface:



$$J = f_0[J] \cup f_1[J].$$

Veamos a continuación como se construye el conjunto de Julia, para todo número complejo  $z$ :

$$z_0 = z$$

$$z_1 = z_0^2 + c = z^2 + c$$

$$z_2 = z_1^2 + c = (z_0^2 + c)^2 + c = (z^2 + c)^2 + c = z^4 + 2z^2 + c^2 + c$$

.

.

.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Por lo tanto:

$$J_{n+1} = f_0[J_n] \cup f_1[J_n].$$

El límite de  $J_n$  es  $J$ .

Veamos a continuación un *ejemplo*, supongamos  $c = -0,15 + 0,72i$  (se podría utilizar cualquier valor para  $c$ ) y partimos con un paralelogramo en el conjunto el  $J_0$ .

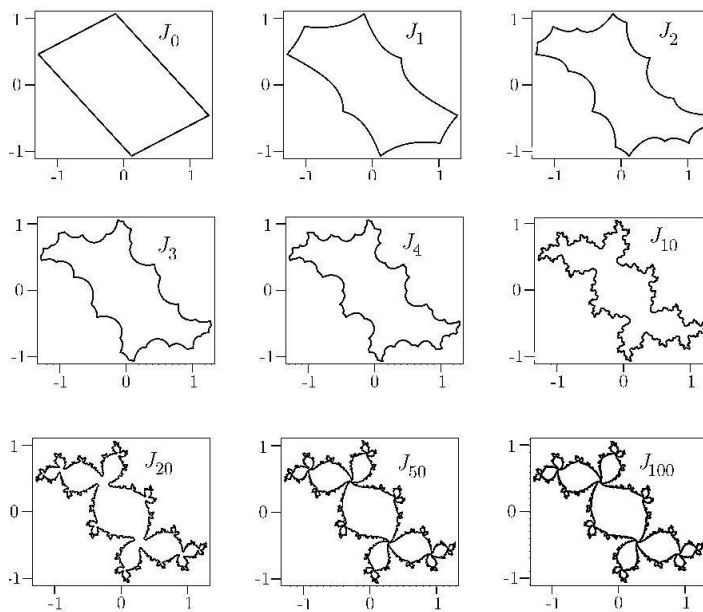


Figura 13: Conjunto de Julia

[18]

### 3. Teorema del Collage y su demostración

El Teorema del Collage es uno de los resultados más clásicos en la teoría de fractales. Su autoría se atribuye a Barnsley en 1987 [19]. Barnsley estaba motivado a encontrar sistemas de IFS que codificara cualquier conjunto del plano. Por esta razón se interesó previamente en saber bajo qué condiciones podía asegurarse la existencia de un atractor para un IFS dado.

El objetivo de este capítulo es enunciar el Teorema del Collage y demostrarlo. De manera aproximada dicho teorema dice lo siguiente. Dado un conjunto de de contracciones del plano  $w_1, \dots, w_n$  y un conjunto  $P_0$ , generamos una sucesión de conjuntos:

$$\begin{aligned} P_1 &= w_1(P_0) \cup \dots \cup w_n(P_0) \\ P_2 &= w_1(P_1) \cup \dots \cup w_n(P_1) \\ &\vdots \\ P_{k+1} &= w_1(P_k) \cup \dots \cup w_n(P_k) \end{aligned}$$

El Teorema del Collage establece que esta sucesión converge a un conjunto límite  $P$  (en una métrica que precisaremos más adelante). Observemos que  $P$  debe ser invariante por las  $n$  afinidades simultáneamente, es decir:

$$P = w_1(P) \cup \dots \cup w_n(P).$$

Para enunciar dicho teorema de manera precisa necesitamos, la noción de métrica de Hausdorff, así como algunos conceptos generales de topología. Así mismo, la demostración, requiere más conceptos previos, uno de los más importantes es el Teorema del punto fijo en un espacio de Banach. Por tanto, iniciamos este capítulo con una exposición de los conceptos previos necesarios, has llegar a la sección 3.4 al enunciado y demostración del Teorema.

#### 3.1. Espacio métrico

La mayoría de los conceptos que introduciremos a continuación se estudian en la asignatura de Topología (2º curso de Grado), pero hagamos un recordatorio de las cosas más importantes.

Empecemos con la definición de distancia entre dos puntos.

**Definición 3.1.1.** *Se define la distancia entre dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^n$  como la  $d(x, y) = |x - y|$ , tenemos por lo tanto una aplicación  $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que satisface las siguientes propiedades:*

1.  $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
2.  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Esta propiedad se llama propiedad simétrica.
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todo  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ . Esta propiedad se llama desigualdad triangular.

A partir de la definición de distancia entre dos puntos, definiremos el espacio métrico.

**Definición 3.1.2.** Un espacio métrico es un conjunto  $S$ , y una aplicación  $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ , que llamaremos métrica tal que verifica las siguientes propiedades:

1.  $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in S$ .
2.  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$  para todo  $x, y \in S$ .
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in S$ .
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todo  $x, y, z \in S$ .

Notaremos el espacio métrico por  $(S, d)$ .

*Nota.* La desigualdad triángular es una igualdad en el espacio métrico  $\mathbb{R}$ , si  $d(x, y) = d(y, x) = 0$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Lema 3.1.3.** Propiedades del espacio vectorial.

Sea  $\mathbb{R}^n$ , donde  $n \in \mathbb{Z}$ , y sean  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $a \in \mathbb{R}$ , tal que:

1.  $ax = (ax_1, \dots, ax_n)$ .
2.  $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ .
3.  $x - y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$ .
4.  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .

**Teorema 3.1.4.** El espacio  $\mathbb{R}^n$  es un espacio métrico con la métrica  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

Para demostrar el Teorema 3.1.4, necesitamos dos teoremas previos, la Desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Desigualdad de Minkowski.

**Teorema 3.1.5.** Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , entonces:

$$|\langle x \cdot y \rangle|^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2, \text{ es decir, } \left( \sum_{j=1}^n x_j y_j \right)^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n y_j^2 \right).$$

*Demostración.* Consideramos la función definida por:

$$p(\lambda) = |\lambda y - x|^2 = (\lambda y - x) \cdot (\lambda y - x).$$

Observamos que  $\underbrace{\sum_{j=1}^n (x_j - \lambda y_j)^2}_{p(\lambda)} \geq 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$p(\lambda) = (y \cdot y)\lambda^2 - 2(x \cdot y)\lambda + x \cdot x = \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n y_j^2 \right)}_a \cdot \lambda^2 - 2 \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n x_j y_j \right)}_b \cdot \lambda + \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)}_c \geq 0.$$

Esto es cierto para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Como podemos observar tenemos una función polinómica de segundo grado, que como mucho tendrá una raíz real, y por lo tanto su discriminante es negativo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 \left( \sum_{j=1}^d x_j y_j \right)^2 - 4 \left( \sum_{j=1}^d y_j^2 \right) \left( \sum_{j=1}^d x_j^2 \right) \leq 0 \Rightarrow 4 \left( \sum_{j=1}^d y_j^2 \right) \left( \sum_{j=1}^d x_j^2 \right) \geq 4 \left( \sum_{j=1}^d x_j y_j \right)^2 \Rightarrow \left( \sum_{j=1}^d y_j^2 \right) \left( \sum_{j=1}^d x_j^2 \right) \geq \left( \sum_{j=1}^d x_j y_j \right)^2.$$

□

*Nota.* La condición necesaria y suficiente para que la desigualdad de Cauchy sea una igualdad en  $\mathbb{R}^n$ , se da si y sólo si todos los  $x_i$  son iguales y no negativos para  $i = 1, \dots, n$  y todos los  $y_j$  son iguales y no negativos para  $j = 1, \dots, n$ .

**Teorema 3.1.6.** Desigualdad de Minkowski.

Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , entonces:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

*Demostración.*  $\|x + y\|^2 = \left( \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2 \right) \leq \sum_{j=1}^n x_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n x_j y_j + \sum_{j=1}^n y_j^2 \leq \sum_{j=1}^n x_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n x_j y_j + \sum_{j=1}^n y_j^2$

Desigualdad triángular

$$2 \left( \sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{1/2} + \sum_{j=1}^n x_j^2 = \left( \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}}_{\|x\|} + \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n y_j^2 \right)^{1/2}}_{\|y\|} \right)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Rightarrow$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

*Nota.* La condición necesaria y suficiente para que la desigualdad de Minkowski sea una igualdad en  $\mathbb{R}^n$ , es en el caso de proporcionalidad de  $x_i^2$  e  $y_j^2$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .

Una vez demostrada la Desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Desigualdad de Minkowski, podemos demostrar el Teorema 3.1.4.

*Demostración.* Demostración Teorema 3.1.4.

Para demostrar que  $\mathbb{R}^n$  es un espacio métrico, comprobaremos las cuatro propiedades de la definición 3.1.2.

Supongamos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

1.  $d(x, y) \geq 0$ .

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \geq 0.$$

2.  $d(x, y) = 0$  si y sólo si  $x = y$ .

$$\Rightarrow \text{Si } d(x, y) = 0 \Rightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = 0 \Rightarrow (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - y_1)^2 = \dots = (x_n - y_n)^2 \Leftrightarrow (x_1 - y_1) = \dots = (x_n - y_n) \Leftrightarrow x_i = y_i = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n$$

$$\Leftarrow \text{Si } x = y, \text{ entonces } d(x, y) = \|x - y\| \underset{\text{como } x=y}{=} \|x - x\| = 0.$$

3.  $d(x, y) = d(y, x)$ .

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

4. Por último veamos la desigualdad triángular.

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \underset{\text{Teorema 3.1.6}}{\leq} \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

En conclusión, al verificar las cuatro propiedades de la definición 3.1.2 confirmamos que  $\mathbb{R}^n$  es un espacio métrico con la métrica  $d(x, y) = \|x - y\|$ .  $\square$

**Corolario 3.1.7.** Si  $(S, d)$  es un espacio métrico y  $T \subseteq S$ , entonces  $T$  también es un espacio métrico con métrica  $d_t$ , definida por:

$$d_t(x, y) = d(x, y) \text{ para } x, y \in T.$$

**Definición 3.1.8.** El diámetro de un subconjunto  $A$  de un espacio métrico  $(S, d)$  es:

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

El diámetro de  $A$  es la distancia entre los dos puntos más distantes de  $A$  (si existen estos puntos).

**Definición 3.1.9.** Si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos no vacíos en un espacio métrico  $(S, d)$ , definimos la distancia entre  $A$  y  $B$  como:

$$\text{dist}(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

*Observación.* Puede haber casos en que dos conjuntos no cumplan la definición 3.1.1, por ejemplo:

$$A = 0 \text{ y } B = (0, 1], \text{ entonces } \text{dist}(A, B) = 0 \text{ y en cambio } A \neq B$$

por lo que no se cumple la propiedad 2 de la definición 3.1.1.

A continuación definiremos la compacticidad, pero previamente tenemos que saber que es un recubrimiento abierto.

**Definición 3.1.10.** Un recubrimiento abierto de un subconjunto  $A \subseteq S$  de un espacio métrico, es una familia de conjuntos abiertos  $\{O_i\}_{i \in I}$  de  $S$  tal que su unión “cubre” a  $A$ , es decir  $A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ .

**Definición 3.1.11.** Dado un recubrimiento  $C$  de un conjunto  $A$ , un subrecubrimiento  $D$  es una subfamilia de  $C$  tal que  $D \subseteq C$  sigue siendo un recubrimiento de  $A$ , es decir, una subcolección de conjuntos de  $C$  que aún cubre a  $A$ .

A partir de las definiciones anteriores definiremos la compacticidad.

**Definición 3.1.12.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico, se dice que  $S$  es compacto si dado un recubrimiento abierto de  $S$ , existe un subrecubrimiento del mismo.

### 3.1.1. Bolas abiertas y cerradas

A continuación estudiaremos las bolas abiertas, bolas cerradas y sus respectivas propiedades.

**Definición 3.1.13.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico, sea  $x \in S$  y  $r > 0$ . La bola abierta de radio  $r$  y de centro  $x$  es el subconjunto de  $S$ :

$$B_r(x) = \{y \in S : d(x, y) < r\}.$$

La bola cerrada de radio  $r$  y de centro  $x$  es el subconjunto de  $S$ :

$$\overline{B_r(x)} = \{y \in S : d(x, y) \leq r\}.$$

**Definición 3.1.14.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico y sea  $A$  un subconjunto. Un punto interior de  $A$  es un punto  $x$  de manera que  $B_\epsilon(x) \subseteq A$  para algún  $\epsilon > 0$ .

**Definición 3.1.15.** Un conjunto  $A$  se llama conjunto abierto si y sólo si todos los puntos de  $A$  son puntos interiores.

**Proposición 3.1.16.** Propiedades de las bolas abiertas.

Sea  $(S, d)$  un espacio métrico, las bolas abiertas verifican las siguientes propiedades:

1.  $B_r(x) \neq \emptyset$  para todo  $x \in S$  y para todo  $r > 0$ .
2.  $S = \bigcup_{x \in S, r > 0} B_r(x)$ .
3. Si  $y \in B_r(x)$ , existe  $r' > 0$  tal que  $B_{r'}(y) \subset B_r(x)$ .
4. Dados  $x, y \in S$  y para cualquier  $r, a > 0$ , la intersección  $B_r(x) \cap B_a(y)$  es una unión de bolas.

*Demostración.* 1. Como  $d(x, x) = 0$ ,  $x \in B_r(x)$ , por tanto  $B_r(x) \neq \emptyset$ .

2. En la propiedad anterior hemos visto que  $x \in B_r(x)$ , entonces  $S = \bigcup_{x \in S} \{x\} \subset$

$$\bigcup_{x \in S, r > 0} B_r(x) \subset S.$$

3. Sea  $y \in B_r(x)$ , supongamos  $\delta = d(x, y)$  y  $r' = r - d(x, y) = r - \delta$ .

Entonces, si  $z \in B_{r'}(y)$ , tenemos  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \delta + r' = r$ , por lo tanto  $z \in B_r(x)$ . En conclusión  $B_{r'}(y) \subset B_r(x)$ .

4. Sea  $z \in B_r(x) \cap B_a(y)$ . Aplicando el apartado anterior, existe  $r', a' > 0$  tal que  $B_{r'}(z) \subset B_r(x)$  y  $B_{a'}(z) \subset B_a(y)$ . Sea  $\delta_z = \min \{a', r'\}$ . Así  $B_{\delta_z}(z) \subset B_r(x) \cap B_a(y)$ . Fijando un  $\delta_z > 0$  para todo  $z \in B_r(x) \cap B_a(y)$ , obtenemos:

$$\bigcup_{z \in B_r(x) \cap B_a(y)} B_{\delta_z}(z) = B_r(x) \cap B_a(y).$$

□

**Proposición 3.1.17.** Una bola abierta  $B_r(x)$  es un conjunto abierto.

*Demostración.* Para demostrarlo, utilizaremos la propiedad 3 de la proposición 3.1.16.

Sea  $y \in B_r(x)$ . Sea  $\delta = d(x, y) < r$ , de manera que  $\epsilon = r - d(x, y) = r - \delta > 0$ . Por la desigualdad triángular:

$$d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z) = \delta + \epsilon = r, \text{ por lo tanto } z \in B_r(x) \Rightarrow B_\epsilon(y) \subset B_r(x).$$

Por lo que,  $y$  es un punto interior de  $B_r(x)$ . En conclusión, la bola abierta  $B_r(x)$  es un conjunto abierto.  $\square$

**Proposición 3.1.18.** *Sea  $(S, d)$  un espacio métrico. Entonces:*

1. *Los subconjuntos  $\emptyset$  y  $S$  son conjuntos abiertos de  $S$ .*
2. *Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos abiertos de  $S$ , entonces la reunión  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es un conjunto abierto de  $S$ .*
3. *Sea  $A_1, \dots, A_n$  una colección finita de conjuntos abiertos de  $S$ , entonces la intersección  $\bigcap_{i=1, \dots, n} A_i$  es un conjunto abierto de  $S$ .*

*Demostración.* 1. El  $\emptyset$  es un abierto porque no contiene ningún elemento, por lo tanto es un conjunto abierto.

Para cualquier  $x \in S$  podemos coger una bola  $B_r(x)$  con radio  $r$  suficientemente pequeño, de manera que  $B_r(x) \subset S$ .

2. Sea  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ , existe un  $i \in I$  tal que  $x \in A_i$ , y como  $A_i$  es un conjunto abierto existe un  $r > 0$  tal que  $B_r(x) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ .
3. Supongamos  $I = \{1, \dots, n\}$ . Sea  $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ . Sea  $r_i > 0$  para  $i = 1, \dots, n$  tal que  $B_{r_i}(x) \subset A_i$  para todo  $i \in I$ . Entonces  $B_r(x) \subset \bigcap_{i \in I} A_i$ , donde  $r = \min \{r_1, \dots, r_n\} > 0$ .

$\square$

**Definición 3.1.19.** *Sea  $(S, d)$  un espacio métrico y sea  $A \subseteq S$ . Un punto  $x \in S$  es un punto de acumulación de  $A$  si y sólo si para cada  $\epsilon > 0$ , la bola  $B_\epsilon(x)$  contiene puntos de  $A$  distintos de  $x$ .*

**Definición 3.1.20.** *Un conjunto  $A$  es cerrado si y sólo si contiene todos los puntos de acumulación, es equivalente a decir que,  $A$  es un conjunto cerrado si y sólo si  $S - A$  es un conjunto abierto.*

**Proposición 3.1.21.** *Sea  $(S, d)$  un espacio métrico. Entonces:*

1. *Los subconjuntos  $\emptyset$  y  $S$  son conjuntos cerrados de  $S$ .*
2. *Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos cerrados de  $S$ , entonces la intersección  $\bigcap_{i \in I} A_i$  es un conjunto cerrado de  $S$ .*

3. Sea  $A_1, \dots, A_n$  una colección finita de conjuntos cerrados de  $S$ , entonces la unión  $\bigcup_{i=1, \dots, n} A_i$  es un conjunto cerrado de  $S$ .

*Demostración.* 1. Sea  $S$  un subconjunto, por la definición 3.1.20 sabemos que  $\emptyset = S - S$  es un conjunto abierto, por tanto  $\emptyset$  es un conjunto cerrado de  $S$ .

Sea  $\emptyset$  un subconjunto, por la definición 3.1.20 sabemos que  $S = S - \emptyset$  es un conjunto abierto, por lo tanto  $S$  es un conjunto cerrado de  $S$ .

2. Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de conjuntos cerrados de  $S$ , entonces por la definición 3.1.20 tenemos que  $(S - A_i)_{i \in I}$  es un conjunto abierto, entonces  $\bigcup_{i \in I} (S - A_i)$  es un conjunto abierto, es lo mismo que decir  $S - \bigcap_{i \in I} A_i$  es un conjunto abierto. Por lo tanto,  $\bigcap_{i \in I} A_i$  es un conjunto cerrado de  $S$ .

3. Sea  $A_1, \dots, A_n$  una colección finita de conjuntos cerrados de  $S$ , entonces por la definición 3.1.20 tenemos que  $(S - A_i)_{i=1, \dots, n}$  es un conjunto abierto, entonces  $\bigcap_{i=1}^n (S - A_i)$  es un conjunto abierto, es lo mismo que decir  $S - \bigcup_{i=1}^n A_i$  es un conjunto abierto.

Por lo tanto,  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  es un conjunto cerrado de  $S$ .

□

**Proposición 3.1.22.** Una bola cerrada  $\overline{B_r(x)}$  es un conjunto cerrado.

*Demostración.* Para demostrar que  $\overline{B_r(x)}$  es un conjunto cerrado, demostraremos que su complementario es un conjunto abierto, es decir  $S - \overline{B_r(x)}$  es un conjunto abierto.

Sea  $y \in S - \overline{B_r(x)}$ , demostraremos que existe una bola centrada en  $y$  de radio  $s > 0$  tal que está contenida en  $S - \overline{B_r(x)}$ , es decir  $B_s(y) \subseteq S - \overline{B_r(x)}$ .

Como  $d(x, y) = \|x - y\| > r$ , podemos definir  $s = \|x - y\| - r > 0$ . Entonces si  $z \in B_r(y)$ , tenemos:

$$\|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|,$$

de manera que:

$$\|x - z\| \geq \|x - y\| - \|y - z\| > \|x - y\| - s = \|x - y\| - \|x - y\| + r = r,$$

luego en efecto  $z \in S - \overline{B_r(x)}$ . Es decir, todo punto de la bola  $B_s(y) \subset S - \overline{B_r(x)}$  □

### 3.2. Estructuras métricas y el Teorema del punto fijo

En este apartado a estudiaremos funciones y sucesiones en el espacio métrico, que utilizaremos para demostrar el Teorema del punto fijo.



### 3.2.1. Funciones en espacios métricos

**Definición 3.2.1.** 1. Sean  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacios métricos. Una función  $h : S \rightarrow T$ , es una isometría si y sólo si  $d_t(h(x), h(y)) = d_s(x, y)$  para todo  $x, y \in S$

2. Dos espacios métricos son isométricos si y sólo si existe una isometría de uno sobre el otro.

Podemos dividir las isometrías en dos grupos:

1. *Isometría directa:* es una isometría que no cambia el sentido del plano, un ejemplo de isometría directa es rotación.
2. *Isometría indirecta:* es una isometría que cambia el sentido del plano, un ejemplo de isometría indirecta es la reflexión, tal y como se muestra en la figura 14.

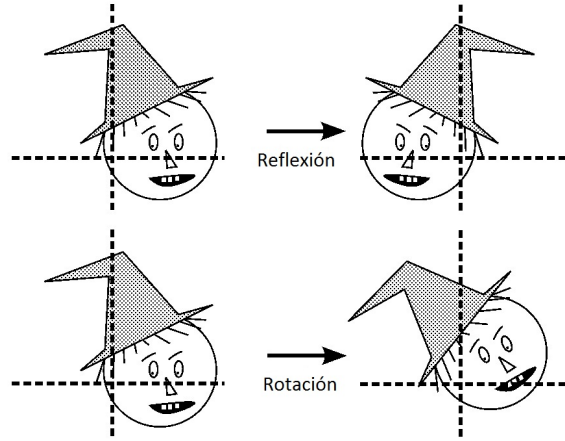


Figura 14: Isometría reflexión y rotación  
[20]

Otro tipo de isometría es la traslación, tal y como se muestra en la figura 15.

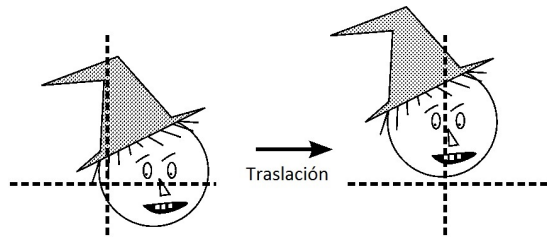


Figura 15: Isometría traslación  
[21]

**Definición 3.2.2.** Una función  $h : S \rightarrow T$  es semejante si y sólo si existe un  $r > 0$  tal que  $d(h(x), h(y)) = r \cdot d(x, y)$ .

**Definición 3.2.3.** Sean  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacios métricos. Sea  $x \in S$ . Una función  $h : S \rightarrow T$  es continua en  $x$  si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $y \in S$ :

$$d_s(x, y) < \delta \Rightarrow d_t(h(x), h(y)) < \epsilon,$$

o equivalentemente,

$$h(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(h(x)).$$

**Teorema 3.2.4.** Sean  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacios métricos. Sea  $x \in S$ . Una función  $h : S \rightarrow T$  es continua si y sólo si para todo abierto  $U$  de  $T$ ,  $h^{-1}(U)$  es un abierto de  $S$ .

*Demostración.* Para esta demostración comprobaremos las dos implicaciones.

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $h$  es continua en  $x$ . Sea  $U$  un abierto de  $T$ , demostraremos que  $h^{-1}(U)$  es un abierto de  $S$ .

Si  $x \in h^{-1}(U)$ , entonces  $h(x) \in U$ . Como  $U$  es un abierto, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(h(x)) \subseteq U$ . Como  $h$  es continua, existe  $\delta > 0$  tal que  $h(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(h(x)) \subseteq U$ , entonces  $x \in B_\delta(x) \subseteq h^{-1}(B_\epsilon(h(x))) \subseteq h^{-1}(U)$ . Por lo tanto,  $h^{-1}(U)$  es un abierto de  $S$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que para todo abierto  $U$  de  $T$ ,  $h^{-1}(U)$  es un abierto de  $S$ . Sea  $x \in S$ , demostraremos que  $h$  es continua en  $x$ .

Sea  $\epsilon > 0$ , supongamos que  $B_\epsilon(h(x))$  es un abierto de  $T$ . Entonces  $W = h^{-1}(B_\epsilon(h(x)))$  es un abierto de  $S$ . Ahora  $x \in W$ , por lo tanto existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(x) \subseteq W$ . Por lo cual,  $h(B_\delta(x)) \subseteq h(W) \subseteq B_\epsilon(h(x))$ . Por lo que,  $h$  es continua.  $\square$

**Definición 3.2.5.** 1. Sean  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacios métricos, y sea  $h : S \rightarrow T$  una función. Entonces  $h$  es un homeomorfismo si se cumple que:

- $h$  es biyectiva,
- $h$  es continua,
- $h^{-1}$  es continua.

2. Dos espacios métricos son homeomorfos si y sólo existe un homeomorfismo entre ellos.

### 3.2.2. Sucesión en un espacio métrico

A continuación definiremos que es una sucesión, sucesión convergente y estudiaremos alguna de sus propiedades.

**Definición 3.2.6.** Sea  $S$  un conjunto. Una sucesión de  $S$  es una función  $f : \mathbb{N} \rightarrow S$ , definida por infinitos valores  $f(1), f(2), \dots$ , y la notaremos como  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de manera que  $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots$

A partir de la definición de sucesión definiremos cuando una sucesión es convergente.

**Definición 3.2.7.** Una sucesión de puntos  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de un espacio métrico  $(S, d)$ , converge a un punto  $x \in S$  si y sólo si para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x) < \epsilon$  para todo  $n \geq N$ .

Lo escribiremos de la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ o bien } x_n \rightarrow x.$$

Una sucesión es convergente si y sólo si converge a un punto, y este punto es único, para demostrarlo veamos la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.8.** Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión en un espacio métrico. Si  $x_n \rightarrow a$  y  $x_n \rightarrow b$ , entonces  $a = b$ .

*Demostración.* Supongamos que  $x_n \rightarrow a$  y  $x_n \rightarrow b$ , entonces tenemos dos bolas  $B_{\frac{\epsilon}{3}}(a)$  y  $B_{\frac{\epsilon}{3}}(b)$  (donde  $\epsilon > 0$ ), de manera que la distancia entre los centros de cada bola es  $\epsilon$ . Entonces, sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que para cada  $n \geq N$  todos los  $x_n \rightarrow a$ , pero también los  $x_n \rightarrow b$ , la cual cosa no puede ocurrir. Por lo tanto,  $a = b$   $\square$

Seguidamente estudiaremos alguna de las propiedades de sucesiones.

**Teorema 3.2.9.** Sean  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacios métricos, y sea  $h : S \rightarrow T$  una función. Entonces,  $h$  es continua si y sólo si para cada sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $S$ :

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow h(x_n) \rightarrow h(x).$$

*Demostración.* Demostraremos el Teorema comprobando las dos implicaciones.

$\Rightarrow$ ) Supongamos que  $h$  es continua. Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de  $S$  y supongamos que  $x_n \rightarrow x$ . Tenemos que comprobar que  $h(x_n) \rightarrow h(x)$ .

Como  $h$  es continua, por lo tanto para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $h(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(h(x))$ . Como  $x_n \rightarrow x$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in B_\delta(x)$  para todo  $n \geq N$ , por lo que  $h(x_n) \rightarrow h(x)$ .

$\Leftarrow$ ) Para demostrar esta implicación utilizaremos reducción a lo absurdo.

Supongamos que  $h$  no es continua. Tenemos que comprobar que  $x_n \rightarrow x$  pero que no implica que  $h(x_n) \rightarrow h(x)$ .

Si  $h$  no es continua, entonces existe  $x \in S$  y  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existe un  $y \in S$  con  $d(x, y) < \delta$  pero con  $d(h(x), h(y)) \geq \epsilon$ .

Supongamos que  $\delta = \frac{1}{n}$ , existe  $x_n \in S$  con  $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ , pero  $d(h(x_n), h(x)) \geq \epsilon$ , por lo que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$ , pero  $h(x_n)$  no converge a  $h(x)$ , por lo cual contradicción.

Obtenemos esta contradicción porque hemos supuesto que  $h$  no es continua.  $\square$

Otra propiedad interesante de las sucesiones es la llamada Regla de la cadena, que estudiaremos a continuación.

**Proposición 3.2.10.** Regla de la cadena.

Sean  $(S_1, d_1)$ ,  $(S_2, d_2)$ ,  $(S_3, d_3)$  tres espacios métricos. Si  $f : S_1 \rightarrow S_2$  es una función continua en un punto  $a$  y  $g : S_2 \rightarrow S_3$  es una función continua en un punto  $b = f(a)$ , entonces la composición  $g \circ f : S_1 \rightarrow S_3$  es una función continua en  $a$ .

*Demostración.* Sea  $x_n \rightarrow a$ , entonces  $f(x_n) \rightarrow f(a) = b$ , por tanto  $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$  es continua en  $a$ .  $\square$

A continuación definiremos cuando una sucesión es de Cauchy, esta definición es importante para poder demostrar el Teorema del punto fijo de Banach, uno de los temas centrales de este capítulo.

**Definición 3.2.11.** Una sucesión de Cauchy en un espacio métrico  $(S, d)$  es una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que satisface, que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ , para todo  $n, m$  con  $n \geq N$  y  $m \geq N$ .

*Nota.* Tenemos que tener en cuenta que una sucesión en  $\mathbb{R}$  es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy. En cambio en un espacio métrico en general, sólo es cierto en una dirección, tal y veremos en el siguiente Teorema.

**Teorema 3.2.12.** *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.*

*Demostración.* Supongamos que  $x_n \rightarrow x$ , y demostraremos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy.

Sea  $\epsilon > 0$ , por lo cual es cierto que  $\frac{\epsilon}{2} > 0$ . Como  $x_n \rightarrow x$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$  para todo  $n \geq N$ . Entonces, si  $n, m \geq N$ , por la desigualdad triángular obtenemos que:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por lo tanto,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy.  $\square$

Por último, definiremos cuando un espacio métrico es completo, esta definición es muy importante para demostrar el Teorema del Collage que es estudiaremos en el punto 3.4.

**Definición 3.2.13.** *Un espacio métrico  $(S, d)$  diremos que es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge en  $S$ .*

### 3.2.3. Convergencia uniforme

Seguidamente estudiaremos la convergencia uniforme en espacios métricos y alguna de sus propiedades.

**Definición 3.2.14.** *Sean  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacios métricos. Consideremos la función  $f : S \rightarrow T$ . Sea  $f_n : S \rightarrow T$ , tal que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de funciones. La sucesión  $f_n$  converge uniformemente (en  $S$ ) a la función  $f$ , si y sólo si para cada  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $x \in S$  y para todo  $n \geq N$ , tenemos  $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ .*

**Teorema 3.2.15.** *Sean  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacios métricos. Sea  $f : S \rightarrow T$  una función. Supongamos  $f_n : S \rightarrow T$  tal que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de funciones que converge uniformemente a la función  $f$ . Si todas las funciones  $f_n$  son continuas, entonces la función  $f$  es continua.*

*Demostración.* Demostraremos que  $f$  es continua en  $x$ , es decir probaremos que para todo punto  $y \in S$ , se cumple:

para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - y| < \delta$ , por lo que  $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ .

Para ello, utilizaremos la definición 3.2.3 de continuidad y la definición 3.2.14 de convergencia uniforme.

Como  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de funciones que converge uniformemente a la función  $f$ , tenemos que:

para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $N$  tal que  $d(f_m(x), f_m(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ , para todo  $m \geq N$ , para todo  $x \in S$ .

Como la sucesión de funciones  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son continuas, podemos asegurar que para todo  $y \in S$ :

para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |x - y| < \delta$ , por lo que  $d(f_m(x), f_m(y)) < \frac{\epsilon}{3}$ , para todo  $m \geq N$ .

Por lo tanto, dado  $\epsilon > 0$  obtenemos  $N$ , elegimos un  $m$  cualquiera ( $m \geq N$ ). Tomamos, la función  $f_m$  y el  $\epsilon$  anterior y, fijado el punto  $y$ , obtenemos  $\delta$ .

Así pues, dado  $\epsilon$ , existen  $m, \delta$  tales que cumplen  $0 < |x - y| < \delta$ , por lo que:

$$d(f(x), f(y)) \leq \underbrace{d(f(x), f_m(x))}_1 + \underbrace{d(f_m(x), f_m(y))}_2 + \underbrace{d(f_m(y), f(y))}_3 < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

donde 1 y 3 son menor que  $\frac{\epsilon}{3}$  por la continuidad uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , y 2 es menor que  $\frac{\epsilon}{3}$  por la continuidad de  $f_m$  en  $y$ .  $\square$

### 3.2.4. Teorema del punto fijo de Banach

**Teorema 3.2.16.** Teorema del punto fijo de Banach.

Sea  $(S, d)$  un espacio métrico completo. Si la función  $f : S \rightarrow S$  es una contracción, entonces  $f$  tiene un único punto fijo.

A continuación demostraremos el Teorema del punto fijo de Banach, también llamado Teorema de la aplicación contractiva, pero necesitaremos unas definiciones previas.

**Definición 3.2.17.** Sea  $S$  un conjunto, dada una función  $f : S \rightarrow S$  del conjunto  $S$ , decimos que  $x$  es un punto fijo de  $f$  si  $f(x) = x$ .

**Definición 3.2.18.** Sean  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacios métricos y sea  $f : S \rightarrow T$  una función. Decimos que  $f$  es una contracción si existe un número  $\alpha$ , donde  $0 < \alpha < 1$ , tal que  $d_t(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d_s(x, y)$  para todo  $x, y \in S$ .

*Demostración.* Demostración del Teorema 3.2.16

Para comprobar esta demostración, demostraremos tres cosas:

1. La sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es de Cauchy.
2. El punto  $x$  es un punto fijo.
3. El punto fijo es único.

Veamos estas tres partes.

Sea  $x_0$  un punto de  $S$  y construimos la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $S$  de manera que:

$$x_1 = f(x_0), \dots, x_{n+1} = f(x_n) \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

1. Demostraremos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy, y por la completitud de  $S$ , la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es convergente.

Sea  $n > m$ . Entonces:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{m-2}) \leq \dots \leq \\ &\alpha^m d(x_{n-m}, x_0) \leq \alpha^m (d(x_{n-m}, x_{n-m-1}) + \dots + d(x_1, x_0)) \leq \\ &\alpha^m (\alpha^{n-m-1} + \dots + 1) d(x_1, x_0) = \frac{\alpha^m (1 - \alpha^{n-m})}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

como  $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha^m \rightarrow 0$ , por lo que si  $\epsilon > 0$  y  $N$  es tal que  $\frac{\alpha^N}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) < \epsilon$ , obtenemos que  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ , para  $n, m \geq N$ , por lo cual  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy.

2. Supongamos que  $x_n \rightarrow x$ . Demostraremos que  $x$  es un punto fijo, demostrando que  $d(x, f(x)) < \epsilon$ , para todo  $\epsilon > 0$ .

Como  $x_n \rightarrow x$ , sea  $N > 0$  tal que  $d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$  para todo  $n \geq N$ . Entonces:

$$d(x, f(x)) \leq d(x, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, f(x)) < \frac{\epsilon}{2} + d(x_N, f(x)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \alpha \cdot d(x_N, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

3. Demostraremos que el punto fijo es único.

Supongamos que  $x$  e  $y$  son dos puntos fijos de  $f$ . Por lo que,  $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$ , y como  $0 < \alpha < 1$ , la igualdad es cierta sólo si  $x = y$ .

□

### 3.3. Espacio $\mathbb{H}(S)$ y la métrica de Hausdorff

Anteriormente hemos definido los conceptos de distancia, espacio métrico, completitud, convergencia uniforme, etc, por lo que a continuación podemos trabajar la métrica de Hausdorff.

Felix Hausdorff (1868 - 1942) fue un matemático alemán considerado como uno de los fundadores de la topología moderna, ha contribuido significativamente a la teoría de conjuntos, la teoría descriptiva de conjuntos, la teoría de la medida, el análisis funcional y la teoría de funciones. Hausdorff introdujo los conceptos de medida de Hausdorff y dimensión de Hausdorff, que son muy importantes en el estudio de la teoría de fractales.[22]

**Definición 3.3.1.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico, diremos que  $\mathbb{H}(S)$  es la colección de todos los subconjuntos compactos no vacíos de  $S$ . Llamaremos a  $\mathbb{H}(S)$  hiperespacio de  $S$ .

**Definición 3.3.2.** Sea  $(S, d)$  es un espacio métrico, sea  $A \in \mathbb{H}(S)$  y sea  $x \in S$  un punto. Se define la distancia de un punto  $x$  a un conjunto  $A$  como:

$$\delta(x, A) = \inf_{y \in A} \{d(x, y)\}.$$

**Definición 3.3.3.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico. Sean  $A, B \in \mathbb{H}(S)$  dos subconjuntos compactos de  $S$ . Definimos la distancia Hausdorff entre dos conjuntos  $A$  y  $B$  como:

$$D(A, B) = \max \{d_1, d_2\},$$

donde

$$d_1 = \sup_{x \in A} \{\delta(x, B)\}; \quad d_2 = \sup_{y \in B} \{\delta(A, y)\}.$$

Equivalentemente,

$$D(A, B) = \inf \{r > 0 : A \subseteq N_r(B), B \subseteq N_r(A)\},$$

donde  $r > 0$  y  $N_r(A) = \{y \in S : d(x, y) < r \text{ para algún } x \in A\}$  es el entorno abierto de  $A$  de radio  $r$ .

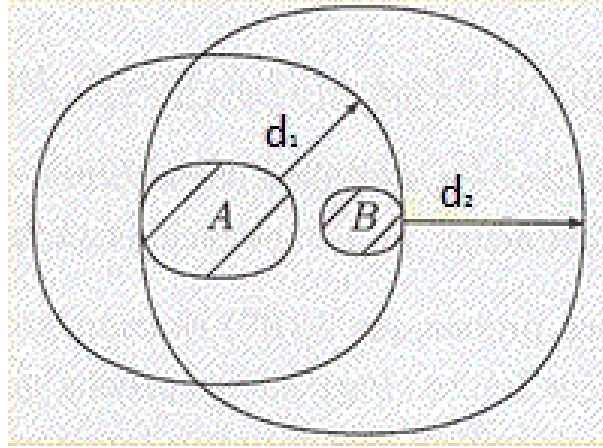


Figura 16: Distancia de Hausdorff  
[26]

*Observación.* La función  $D$  puede definirse para conjuntos más generales que los de  $\mathbb{H}(S)$ . No obstante puede ocurrir que en estos casos  $D$  no defina una métrica. Por ejemplo, si no requerimos que los conjuntos sean cerrados, no se cumple la propiedad 2 de la definición 3.1.1, como se muestra en los conjuntos  $(0, 1)$  y  $[0, 1]$ .

En efecto,  $D(A, B) = 0$ , pero  $A \neq B$ .

A partir de los conceptos estudiados anteriormente, podemos estudiar algunas propiedades de la métrica de Hausdorff.

**Teorema 3.3.4.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico. La función Hausdorff  $D$  es una métrica en el conjunto  $\mathbb{H}(S)$ .

*Demostración.* Para esta demostración utilizaremos la definición 3.1.2 de métrica.

1.  $D(A, B) \geq 0$ .

Por la definición 3.3.3 sabemos que  $d(A, B) = \max\{d_1, d_2\}$ , donde  $d_1 = \sup_{x \in A} \{d(x, B)\}$  y  $d_2 = \sup_{y \in B} \{d(A, y)\}$ , por lo que  $D(A, B) \geq 0$  esto implica que  $d_1 \geq 0$  o  $d_2 \geq 0$ , por lo tanto  $\delta_1 \geq 0$  o  $\delta_2 \geq 0$  y esto es siempre cierto. En consecuencia,  $D(A, B) \geq 0$ .

2.  $D(A, B) = 0$  si y sólo si  $A = B$ .

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $A = B$ . Entonces para cada  $\epsilon > 0$ , tenemos por la definición 3.3.3 que  $A \subseteq N_\epsilon(B)$  y  $B \subseteq N_\epsilon(A)$ . Por lo tanto,  $D(A, B) = 0$ .

$\Rightarrow$ ) Supongamos  $A, B \in \mathbb{H}(S)$  y  $D(A, B) = 0$ , como  $D(A, B) = 0$  entonces por la definición 3.3.3 tenemos que  $d_1 = \sup_{x \in A} \{d(x, B)\} = 0$  y que  $d_2 = \sup_{y \in B} \{d(A, y)\} = 0$ , por lo cual  $\delta(A, y) = 0$  para todo  $y \in B \Rightarrow B \subseteq A$ , y como  $\delta(x, B) = 0$  para todo  $x \in A \Rightarrow A \subseteq B$ . En efecto,  $A = B$ .

3.  $D(A, B) = D(B, A)$ .

Obvio.

4. Desigualdad triangular.

Sean  $A, B, C \in \mathbb{H}(S)$  y sea  $\epsilon > 0$ . Si  $x \in A$ , entonces  $y \in B$  con  $d(x, y) < D(A, B) + \epsilon$ . También, tenemos que  $z \in C$  con  $d(y, z) < D(B, C) + \epsilon$ . Por lo que:

$$\begin{aligned} A &\subseteq (D(A, B) + D(B, C) + 2\epsilon) \text{ en un entorno de } C. \\ C &\subseteq (D(A, B) + D(B, C) + 2\epsilon) \text{ en un entorno de } A. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $D(A, C) \leq (D(A, B) + D(B, C) + 2\epsilon)$ , es cierto para todo  $\epsilon > 0$ . En conclusión,  $D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C)$ .

□

**Proposición 3.3.5.** *Sea  $(S, d)$  un espacio métrico. Sea  $A_n$  una sucesión de subconjuntos compactos no vacíos de  $S$ , y sea  $A$  un subconjunto compacto no vacío de  $S$ . Si  $A_n$  converge a  $A$  en la métrica de Hausdorff, entonces:*

$$A = \{x \in A, \text{ existe } (x_n), x_n \in A_n \text{ tal que } x_n \rightarrow x\}$$

*Demostración.* Que  $A_n$  converge a  $A$ , significa por la definición 3.2.7 que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $D(A_n, A) < \epsilon$  para todo  $n \geq N$ , que es lo mismo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(A_n, x) = 0$ .

Sea  $X = \{x \in S, \text{ existe } (x_n), x_n \in A_n \text{ tal que } x_n \rightarrow x\}$ , y demostraremos que  $A = X$ , para ello comprobaremos dos inclusiones.

$A \subseteq X$ ) Sea  $x \in A$ , tenemos que encontrar un  $x_n \in A_n$  tal que  $x_n \rightarrow x$ .

Sea  $x \in A$ , por la definición 3.3.3 tenemos que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $N_\epsilon$  tal que  $A \subseteq N_\epsilon(A_n)$  para todo  $n > N_\epsilon$ , sea  $\epsilon = \frac{1}{k}$ , por la definición 3.2.7 tenemos que existe  $x_n \in A_n$  tal que  $D(x, x_n) < \epsilon$ .

Ahora supongamos  $\frac{\epsilon}{2} > 0$  y que existe  $N_{\frac{\epsilon}{2}}$  tal que para todo  $n > N_{\frac{\epsilon}{2}}$ ,  $x_n \in A_n$  tal que  $D(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ . Observamos que  $x_n$  se va aproximando a  $x$ , y aplicando este razonamiento infinitas veces obtendremos que  $x_n \rightarrow x$ .

$A \supseteq X$ ) Sea  $x$  tal que existe  $x_n \rightarrow x$  donde  $x_n \in A_n$ , y queremos demostrar que  $x \in A$ . Para comprobar esta inclusión utilizaremos reducción a lo absurdo.

Supongamos que  $x \notin A$ , sea  $\delta = D(x, A)$ , entonces existe  $N_\delta(x)$  tal que  $N_\delta(x) \cap A = \emptyset$ , pero  $x_n \in A_n$  tal que para todo  $n > N$  tenemos que  $x_n \in B(x, \delta)$ . Supongamos  $r = \frac{\delta}{2}$  tal que  $N_{\frac{\delta}{2}}(A) \not\subseteq A_n$  para ningún  $n > N$ , por lo tanto llegamos a una contradicción, porque hemos supuesto que  $x \notin A$ . □

**Teorema 3.3.6.** *Sea  $(S, d)$  es un espacio métrico completo, entonces el espacio  $(\mathcal{H}(S), D)$  es un espacio métrico completo.*

Para demostrar el Teorema 3.3.6, necesitamos un lema previo.

**Lema 3.3.7.** *Sea  $(S, d)$  un espacio métrico compacto y sea  $r > 0$ , entonces  $S$  tiene un número finito de entornos de radio  $r$ .*

*Demostración.* Demostraremos el Lema a partir de reducción a lo absurdo.

Supongamos que  $S$  no tiene un número finito de entornos de radio  $r$ . Definimos una sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que  $d(x_n, x_m) > r$  para todo  $m \neq n$ . Supongamos,  $S \neq \emptyset$ . Escogemos  $x_1 \in S$  de la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , supongamos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  no son entornos de radio  $r$ , entonces existe un punto  $x_{n+1}$  tal que  $d(x_j, x_{n+1}) > r$  para  $1 \leq j \leq n$ .

A continuación, comprobaremos que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  no tiene ningún punto de acumulación. Si  $x$  fuera un punto de acumulación, entonces la bola  $B_r(x)$  contendría al menos dos puntos  $x_n$  (donde  $n \in \mathbb{N}$ ), esto es imposible ya que la distancia entre los puntos  $x_j$  y  $x_{n+1}$  (donde  $1 \leq j \leq n$ ) es mayor a  $r$ . Por lo tanto,  $S$  no es compacto, esta contradicción es debido a que hemos supuesto que  $S$  no tiene un número finito de entornos de radio  $r$ . □



*Demostración.* Demostración del Teorema 3.3.6.

Por la definición 3.2.13, sabemos que un espacio métrico es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge a ese espacio métrico. Entonces, supongamos que  $A_n$  es una sucesión de Cauchy en  $H(S)$ , por lo tanto demostraremos que  $A_n$  converge a  $A$ .

Sea  $A = \{x \in A, \text{ existe } (x_n), x_n \in A_n \text{ tal que } x_n \rightarrow x\}$ , por la proposición 3.3.5 sabemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(A_n, A) = 0$  si  $A$  es compacto y no vacío. En definitiva, demostraremos tres cosas:

1.  $A_n$  converge a  $A$ .

2.  $A \neq \emptyset$ .

3.  $A$  es compacto.

1.  $A_n$  converge a  $A$ .

Sea  $\epsilon > 0$ , entonces existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $n, m \geq N$ , de manera que  $D(A_n, A_m) \leq \frac{\epsilon}{2}$ . Sea  $n \geq N$ , entonces es cierto que  $D(A_n, A) \leq \epsilon$ . Si  $x \in A$ , entonces existe una sucesión  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  con  $x_k \in A_k$  tal que  $x_k \rightarrow x$  (tal y como hemos visto en la proposición 3.3.5), por lo tanto para un  $k$  suficientemente grande, tenemos que  $D(x_k, x) < \frac{\epsilon}{2}$ . Por lo tanto, si  $k \geq N$ , entonces (como  $D(A_k, A_n) < \frac{\epsilon}{2}$ ) existe  $y \in A_n$  tal que  $D(A_k, y) < \frac{\epsilon}{2}$ , y obtenemos que  $D(y, x) \leq D(y, x_k) + D(x_k, x) < \epsilon$ . Demostrando que  $A \subseteq N_\epsilon(A_n)$ .

Supongamos que  $y \in A_n$ , cogemos  $k_1 < k_2 < \dots$  de manera que  $k_1 = n$  y  $D(A_{k_j}, A_m) < \frac{\epsilon}{2^j}$  para todo  $m \geq k_j$ . Entonces, definimos una sucesión  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $y_k \in A_k$ . Para  $k < n$ , cogemos  $y_k \in A_k$  arbitrario. Supongamos que  $y_n = y$ , si escogemos  $y_{k_j}$  para  $k_j < k < k_{j+1}$ , tenemos  $y_k \in A_k$  tal que  $D(y_{k_j}, y_k) < \frac{\epsilon}{2^j}$ . Por lo cual,  $y_k$  es una sucesión de Cauchy convergente. Supongamos que  $x$  es el límite de la sucesión  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , por lo tanto si  $x \in A$  obtenemos  $D(y, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} D(y, y_k) < \epsilon$ , por lo cual  $y \in N_\epsilon(A)$ . Demostrando que  $A_n \subseteq N_\epsilon(A)$ .

Por lo tanto, hemos demostrado que  $D(A, A_n) \leq \epsilon$ , de manera que  $A_n$  converge a  $A$ .

2.  $A \neq \emptyset$ .

Suponiendo que  $\epsilon = 1$  en todo el argumento anterior, demostramos que  $A \neq \emptyset$ .

3.  $A$  es compacto.

Demostraremos que  $A$  es compacto, verificando lo siguiente:

a)  $A$  es cerrado.

b)  $A$  es acotado.

a)  $A$  es cerrado.

Demostraremos que  $A$  es cerrado, es decir, para  $\epsilon > 0$ , existe un número finito de entornos de radio  $\epsilon$  de  $A$ .

Supongamos un  $n$ , de manera que  $D(A_n, A) < \frac{\epsilon}{3}$ . Entonces por el lema 3.3.7, sabemos que existe un número finito de entornos de radio  $\frac{\epsilon}{3}$  de  $A_n$ , que los llamaremos  $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ . Para cada entorno  $y_i$ , existe  $x_i \in A$  con  $D(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{3}$ . El conjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  son entornos de radio  $\epsilon$  de  $A$ . Sea  $x \in \bar{A}$

de  $A$  (donde  $\bar{A}$  es el conjunto cerrado de  $A$ ). Entonces, existe una sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $A$  con  $D(x, y_n) < 2^{-n}$ . Para cada  $n$ , existe un punto  $z_n \in A_n$  con  $D(z_n, y_n) < D(A_n, A) + 2^{-n}$ . Por lo que,  $D(z_n, x) \leq D(z_n, y_n) + D(y_n, x) < D(A_n, A) + 2^{-n} + 2^{-n}$ , por lo cual  $D(z_n, x)$  converge a 0 cuando  $z_n \rightarrow x$ . Por lo tanto, como  $x \in A$  y hemos visto que  $x \in \bar{A}$ , entonces  $A$  es cerrado.

b)  $A$  es acotado.

Sea  $F$  un subconjunto infinito de  $A$ . Existe un número finito de entornos de radio  $\frac{1}{2}$  de un conjunto  $B$  en  $A$ , por lo que cada elemento de  $F$  está dentro de la distancia media de algún elemento de  $B$ . Sea  $F_1 \subseteq F$ , tal que  $F_1$  es un subconjunto infinito y sus puntos están entre ellos a una distancia menor a 1, es decir  $\text{diam}(F_1) \leq 1$ , de la misma manera hay un conjunto infinito  $F_2 \subseteq F_1$  tal que el  $\text{diam}(F_2) \leq \frac{1}{2}$  y así sucesivamente. Por lo tanto, hay conjuntos infinitos  $F_j$  con  $\text{diam}(F_j) \leq 2^{-j}$ , tal que  $F_{j+1} \subseteq F_j$  para todo  $j$ . Escogiendo un  $x_j$  de un  $F_j$ , obtenemos que  $D(x_j, x_k) \leq 2^{-j}$  para  $j < k$ , por lo tanto  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy y como  $S$  es completo, obtenemos que  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  converge a  $x$ .

Anteriormente hemos demostrado que  $A$  es cerrado, supongamos que  $x \in A$ , pero entonces  $x$  es un punto de acumulación del conjunto  $F$ . Por lo que,  $A$  es acotado.

□

**Proposición 3.3.8.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico. Sea  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos compactos no vacíos, y supongamos que la sucesión  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que es decreciente tal que  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ . Entonces  $A_n$  converge a la intersección, es decir,  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  en la métrica de Hausdorff.

*Demostración.* Demostraremos que  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  y para ello comprobaremos dos inclusiones.

$A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ) Sea  $\epsilon > 0$ , sabemos que  $A \subseteq A_n$ , entonces por la definición 3.3.3 obtenemos que  $A \subseteq N_\epsilon(A_n)$ .

$A \supseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ) Supongamos  $\epsilon > 0$ , tal que  $N_\epsilon(A) = \{y \in A, D(x, y) < \epsilon \text{ para algún } x \in A\}$  en un conjunto abierto. La familia  $\{N_\epsilon(A)\} \cup \{S - A_n : n \in \mathbb{N}\}$  es un entorno abierto de  $A_1$ . Entonces,  $A_1$  es compacto, por lo que existe un subrecubrimiento finito, esto significa que para algún  $N \in \mathbb{N}$ , tenemos  $A_1 \subseteq \{N_\epsilon(A)\} \cup \{S - A_n : n \in \mathbb{N}\}$  para todo  $n \geq N$ . Por lo cual,  $A_n \subseteq N_\epsilon(A)$ . Por lo tanto,  $D(A, A_n) < \epsilon$  para todo  $n \geq N$ .

En efecto, hemos demostrado que  $A_n$  converge a  $A$ .

□

### 3.4. Teorema del Collage

En el capítulo 2 hemos visto como a partir de un conjunto de transformaciones afines contractivas nos conducían hacia un conjunto final, pero dado un conjunto final ¿cuál es el IFS que nos conduce a él?. A dicha preguntas se la conoce por el nombre problema inverso.

El Teorema del Collage nos indica cuales tienen que ser las condiciones de un IFS para que converjan a un conjunto final compacto. Dicho compacto es invariante para las aplicaciones que forman el IFS, y por tanto este hecho nos facilita información sobre el problema inverso, es decir, si tenemos un fractal, y encontramos un cierto número de aplicaciones contractivas que dejan invariante el fractal, entonces puede ser que el IFS formado por dichas aplicaciones generen el fractal.

Michael Fielding Barnsley (1946) es un matemático e investigador, que ha trabajado en la comprensión fractal. Se le atribuye el descubrimiento del Teorema del Collage.

En el sistema de funciones iteradas, se dedicó inicialmente a la compresión fractal de imágenes (personificado por el helecho de Barnsley) [23]

**Definición 3.4.1.** *La compresión fractal es un método de compresión con pérdida para imágenes digitales, basado en fractales. El método es el más apropiado para texturas e imágenes naturales, basándose en el hecho de que partes de una imagen, que a menudo, se parecen a otras partes de la misma imagen. Los algoritmos fractales convierten estas partes en datos matemáticos llamados "códigos fractales" los cuales se usan para recrear la imagen codificada. [24]*

A continuación demostraremos dos Teoremas del Collage, el primero es el que se estudia en la asignatura del Modelos matemáticos y sistemas dinámicos (2º de grado de matemáticas), y el segundo es un complemento del primero, ya que da estimaciones más concretas de la velocidad a la que el IFS converge al atractor.

**Teorema 3.4.2.** Teorema del Collage 1.

Sea  $(S, d)$  un espacio métrico completo. Sea la función collage  $w : S \rightarrow S$  que actúa sobre el conjunto de compactos del plano. Consideramos el IFS dadas por las contracciones  $\{w_1, \dots, w_m\}$ , de manera que:

$$|w_i(A) - w_i(B)| \leq c_i |A - B| \text{ donde } (A, B) \in S,$$

con  $c_i < 1$  para cada  $i$ . Entonces, existe un único atractor  $F$ , donde  $F$  es compacto y no vacío, tal que:

$$F = \bigcup_{i=1}^m w_i(F).$$

Además, para cualquier compacto  $E$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w^k(E) = F,$$

con la métrica de Hausdorff en  $S$ .

*Demostración.* Sea  $(S, d)$  un espacio métrico. Sea  $D$  la métrica de Hausdorff en el espacio  $\mathbb{H}(S)$  de compactos de  $S$ . Sean  $A, B \in S$ , por lo que:

$$D(w(A), w(B)) = D\left(\bigcup_{i=1}^m w_i(A), \bigcup_{i=1}^m w_i(B)\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} D(w_i(A), w_i(B)),$$

entonces, por la definición 3.3.3 de la métrica de Hausdorff, tenemos que  $w_i(B) \subseteq N_r(w_i(A))$  para todo  $i$  (donde  $r > 0$ ), por lo cual  $\bigcup_{i=1}^m w_i(B) \subseteq N_r(\bigcup_{i=1}^m w_i(A))$  y también tenemos que  $w_i(A) \subseteq N_r(w_i(B))$  para todo  $i$  (donde  $r > 0$ ), por lo cual  $\bigcup_{i=1}^m w_i(A) \subseteq N_r(\bigcup_{i=1}^m w_i(B))$ .

Como  $|w_i(A) - w_i(B)| \leq c_i |A - B|$  con  $c_i < 1$  para cada  $i$ , tenemos que  $D(w(A), w(B)) \leq (\max_{1 \leq i \leq m} c_i) D(A, B)$ , de manera que la función collage  $w$  es una contracción en el espacio métrico  $(S, d)$ .

En la sección 3.3, hemos demostrado en el Teorema 3.3.6 que como  $(S, d)$  es un espacio métrico completo, entonces  $(H(S), D)$  también lo es. Y por la definición 3.2.13, sabemos que un espacio métrico es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy converge en ese espacio métrico.

Por el Teorema del punto fijo de Banach 3.2.16,  $w$  tiene un único punto fijo, es decir, existe un conjunto compacto  $F \in S$ , tal que  $w(F) = F$  y como  $w(F) = \bigcup_{i=1}^m w_i(F)$ , obtenemos que  $F = \bigcup_{i=1}^m w_i(F)$  y además para cualquier compacto  $E$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w^k(E) = F$$

□

### Teorema 3.4.3. Teorema del Collage 2.

Sea  $(S, d)$  un espacio métrico completo. Sea la función collage  $w : S \rightarrow S$  que actúa sobre el conjunto de compactos del plano. Consideramos el IFS dadas por las contracciones  $\{w_1, \dots, w_m\}$ , de manera que:

$$|w_i(A) - w_i(B)| \leq c |A - B| \text{ para todo } (A, B) \in S, \text{ y } c < 1.$$

Entonces, existe un único atractor  $F$ , donde  $F$  es compacto y no vacío, tal que:

$$F = \bigcup_{i=1}^m w_i(F).$$

Sea  $E$  un subconjunto compacto y no vacío de  $S$ . Entonces:

$$D(E, F) \leq D(E, \bigcup_{i=1}^m w_i(E)) \frac{1}{1 - c},$$

donde  $D$  es la métrica de Hausdorff.

*Demostración.* Utilizando la desigualdad triángular en la métrica de Hausdorff:

$$D(E, F) = D(E, \bigcup_{i=1}^m w_i(E)) + D(\bigcup_{i=1}^m w_i(E), F).$$

Y como  $F = \bigcup_{i=1}^m w_i(F)$ , obtenemos que:

$$D(E, F) \leq D(E, \bigcup_{i=1}^m w_i(E)) + D(\bigcup_{i=1}^m w_i(E), \bigcup_{i=1}^m w_i(F)) \leq D(E, \bigcup_{i=1}^m w_i(E)) + c \cdot D(E, F),$$

por lo que:

$$(1 - c)D(E, F) \leq D(E, \bigcup_{i=1}^m w_i(E)) \Rightarrow D(E, F) \leq D(E, \bigcup_{i=1}^m w_i(E)) \frac{1}{1 - c}.$$

□

## 4. Dimensión fractal

La definición de dimensión que utilizamos habitualmente es la dimensión topológica y es siempre un número natural. En cambio, la dimensión fractal no siempre es un número entero. Naturalmente, las dos dimensiones coinciden en el caso de un segmento, de un cuadrado o de un cubo, entre otros, pero para los objetos que hemos estudiado en el capítulo 2, por ejemplo para la curva de Koch, veremos que aunque su dimensión topológica es 1, su dimensión fractal es 1,261..., por lo que nuestra intuición conduce a que la curva de Koch es “más que una curva”, pero “menos que una superficie”.

Estudiaremos la dimensión fractal a partir de dos métodos:

1. Dimensión de Hausdorff
2. Dimensión Box-Counting.

### 4.1. Dimensión topológica

Hay diferentes definiciones de la dimensión topológica. Una de ellas es la siguiente:

**Definición 4.1.1.** *Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tiene dimensión topológica 0 si para cada punto de  $A$  podemos encontrar un entorno de  $\mathbb{R}^n$  tan pequeño como deseemos, cuya frontera no interseque el conjunto  $A$  en ningún punto.*

Por ejemplo, el conjunto de Cantor (recordemos que no tiene ningún punto aislado) tiene dimensión topológica 0.

De hecho todos los conjuntos totalmente desconexos tienen dimensión cero.

**Definición 4.1.2.** *Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tiene dimensión topológica  $k > 0$  si cada punto  $p \in A$  posee entornos de  $\mathbb{R}^n$  arbitrariamente pequeños cuya frontera interseca el conjunto  $A$  en un subconjunto de dimensión  $k - 1$ , y además  $k$  es el número natural más pequeño con esta propiedad.*

Por ejemplo, cualquier segmento o curva tiene dimensión 1 ya que existen entornos de todos sus puntos que intersecan la curva en conjunto de dimensión 0. Las figuras planas más comunes tienen dimensión 2, tal y como muestra la siguiente figura.

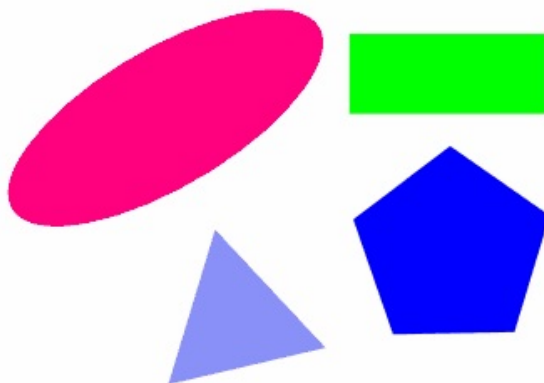


Figura 17: Figuras planas de dimensión topológica 2  
[31]

En cambio, ¿cual es la dimensión de los fractales que hemos estudiado en el capítulo 2?. Pues sorprendentemente todos tienen dimensión 1.

La dimensión topológica no es suficientemente buena para medir la compleja dimensión de los fractales.

## 4.2. Medida y dimensión de Hausdorff

### 4.2.1. Medida de Hausdorff

Para definir la medida de Hausdorff, necesitamos unas definiciones previas.

**Definición 4.2.1.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico. Sea  $U$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, el diámetro de  $U$  se define como:

$$|U| = \sup \{|x - y| : x, y \in U\},$$

es decir, la mayor distancia de cualquier par de puntos de  $U$ .

**Definición 4.2.2.** Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  es una colección de conjuntos finitos de diámetro máximo  $\delta$  que cubre a  $F$ , es decir  $F \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  con  $0 \leq |U_i| \leq \delta$  para cada  $i \in I$ , entonces decimos que  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$ .

A partir del siguiente Lema definiremos la *medida de Hausdorff*.

**Lema 4.2.3.** Supongamos que  $F$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $s$  es un número real positivo. Para cualquier  $\delta > 0$ , definimos:

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i \in I} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } F \right\},$$

de manera que si  $\delta$  es cada vez más pequeño, entonces  $H_\delta^s(F)$  es cada vez más grande. Por lo tanto, el ínfimo  $H_\delta^s(F)$  se aproxima al límite cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Lo escribiremos:

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F).$$

A  $H^s(F)$  se denomina medida exterior  $s$ -dimensional de Hausdorff del conjunto  $F$ .

*Nota.* El límite  $H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$  existe para cualquier subconjunto  $F$  de  $\mathbb{R}^n$ , aunque el límite puede ser (y generalmente es) cero o infinito.

**Proposición 4.2.4.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico, sea  $F$  un subconjunto de  $S$  y sea la función  $f : F \rightarrow S$ , tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \text{ para } x, y \in F, \quad (2)$$

para constantes  $c > 0$  y  $\alpha > 0$ . Entonces, para cada  $s$ :

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(F).$$

*Demostración.* Por la definición 4.2.2 sabemos que  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$ , entonces:

$$|f(F \cap \{U_i\})| \leq c|F \cap \{U_i\}|^\alpha \leq c|\{U_i\}|^\alpha,$$

por lo tanto  $\{f(F \cap \{U_i\})\}$  es un  $\epsilon$ -recubrimiento de  $f(F)$ , donde  $\epsilon = c\delta^\alpha$ .

En consecuencia,  $\sum_{i=1}^{\infty} |f(F \cap \{U_i\})|^\alpha \leq c^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$  tal que  $H_\epsilon^\alpha(f(F)) \leq c^\alpha H_\delta^s(F)$ , como  $\delta \rightarrow 0$  y  $\epsilon \rightarrow 0$ , obtenemos que  $H^\alpha(f(F)) \leq c^\alpha H^s(F)$ .  $\square$

A la condición 2 se le llama *condición de Hölder* de exponente  $\alpha$ , esta condición implica que  $f$  sea una función continua.

Suponiendo que  $\alpha = 1$ , obtenemos la siguiente definición.

**Definición 4.2.5.** Sea  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacio métricos. Una función  $f : S \rightarrow T$  es una función Lipschitz si y sólo si existe una constante  $\beta$  tal que:

$$d_s(f(x) - f(y)) \leq \beta \cdot d_t(x - y) \text{ para todo } x, y \in S.$$

A partir de la definición 4.2.5, obtenemos que la *medida de Hausdorff es Lipschitz* si:

$$H^s(f(F)) \leq c^s \cdot H^s(F). \quad (3)$$

En particular, la ecuación 3 se cumple para cualquier función diferenciable con derivada acotada.

Si  $f$  es una isometría, es decir  $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ , entonces  $H^s(f(F)) = H^s(F)$ .

**Definición 4.2.6.** Sea  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacio métricos. Una función  $f : S \rightarrow T$  es inversa Lipschitz si y sólo si existe una constante  $\beta$  tal que:

$$d_s(f(x) - f(y)) \geq \beta \cdot d_t(x - y) \text{ para todo } x, y \in S.$$

#### 4.2.2. Dimensión de Hausdorff

A partir de la medida de Hausdorff estudiaremos la dimensión de Hausdorff.

**Teorema 4.2.7.** Sea  $F$  un conjunto de Borel y sea  $0 < s < t$ .

- Si  $H^s(F) < \infty$ , entonces  $H^t(F) = 0$ .
- Si  $H^t(F) > 0$ , entonces  $H^s(F) = \infty$ .

Para demostrar el teorema 4.2.7 necesitaremos la definición de  $\sigma$ -álgebra, la definición de un conjunto de Borel y un Teorema que nos indica cuando existe una única medida exterior.

**Definición 4.2.8.** Sea  $F$  una colección de subconjuntos de un conjunto  $X$ , se dice que  $F$  es una  $\sigma$ -álgebra de  $X$  si y sólo si:

1.  $\emptyset, X \in F$ .
2. Si  $A \in F$ , entonces  $X - A \in F$ .
3. Si  $A_1, A_2, \dots \in F$ , entonces  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in F$ .

**Definición 4.2.9.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico. Un subconjunto de  $S$  se llama conjunto de Borel si y sólo si pertenece a la  $\sigma$ -álgebra de  $S$  generada por los conjuntos abiertos.



**Teorema 4.2.10.** *Sea  $X$  un conjunto, y sea  $A$  una familia de subconjuntos de  $X$  que cubren a  $X$ . Sea  $c : A \rightarrow [0, \infty]$  una función. Existe una única medida exterior  $M$  en  $X$  tal que:*

1.  $M(B) \leq c \cdot (B)$  para todo  $B \in A$ .
2. Si  $N$  es otra medida exterior de  $X$  con  $N(B) \leq c \cdot (B)$  para todo  $B \in A$ , entonces  $N(C) \leq M(C)$  para todos los  $C \subseteq X$ .

*Demostración.* Demostración Teorema 4.2.7

Por la definición 4.2.2, sabemos que  $\{U_i\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $F$ , por lo que  $|U_i| \leq \delta$ , entonces:

$$H_\delta^t(U) \leq |U_i|^t \leq \delta^{t-s} |U_i|^s \text{ (si } t > s \text{)}.$$

Por el Teorema 4.2.10, tenemos que  $H_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} H_\delta^s(F)$  para todo  $F$ .

Comprobaremos que:

1. Si  $H^s(F) < \infty$ , entonces  $H^t(F) = 0$ .

2. Si  $H^t(F) > 0$ , entonces  $H^s(F) = \infty$ .

1. Si  $H^s(F) < \infty$ , entonces  $H^t(F) = 0$ .

$$\text{Si } H^s(F) < \infty, \text{ entonces } H^t(F) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{t-s} H_\delta^s(F) = 0 \times H^s(F) = 0.$$

2. Si  $H^t(F) > 0$ , entonces  $H^s(F) = \infty$ .

$$\text{Si } H^t(F) > 0, \text{ entonces } H^s(F) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{H_\delta^t(F)}{\delta^{t-s}} = \frac{H^t(F)}{0} = \infty$$

□

A partir del Teorema 4.2.7 definiremos la dimensión de Hausdorff.

**Definición 4.2.11.** *Dado un conjunto  $F$ , existe un único “valor crítico”  $s_0 \in [0, \infty]$  tal que:*

$$\begin{aligned} H^s(F) &= \infty \text{ para todo } s < s_0, \\ H^s(F) &= 0 \text{ para todo } s > s_0. \end{aligned}$$

Llamamos al valor  $s_0$  dimensión de Hausdorff del conjunto  $F$ . Lo escribiremos  $s_0 = \dim_H(F)$

Es posible que  $H^s(F) = 0$  para todo  $s > 0$ , en este caso la  $\dim_H(F) = 0$ . Del mismo modo, es posible que  $H^s(F) = \infty$  para todo  $s$ , en este caso la  $\dim_H(F) = \infty$

Si  $s = \dim_H(F)$ , entonces  $H^s(F)$  puede ser cero o infinito, o puede satisfacer la siguiente desigualdad:

$$0 < H^s(F) < \infty,$$

tal y como vemos en la siguiente figura:

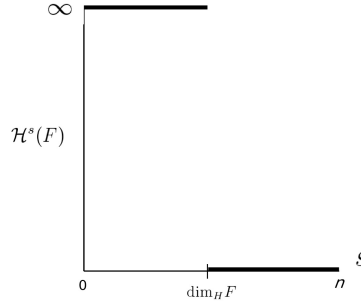


Figura 18: Dimensión Hausdorff  
[27]

A continuación veremos alguna de las propiedades de la dimensión de Hausdorff.

**Proposición 4.2.12.** *Sea  $A, B$  dos conjuntos de Borel.*

1. Si  $A \subseteq B$ , entonces  $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$ .
2.  $\dim_H(A \cup B) = \max \{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$ .

*Demostración.* 1. Supongamos que  $A \subseteq B$ . Si  $s > \dim_H(B)$ , por la definición 4.2.11 tenemos que  $H^s(B) = 0$ , entonces como  $H^s(A) \leq H^s(B) = 0$ , por lo tanto  $H^s(A) = 0$  de manera que  $\dim_H(A) \leq s$ . Esto es cierto para todo  $s > \dim_H(B)$ , en conclusión  $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$ .

2. Comprobaremos que  $\dim_H(A \cup B) = \max \{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$  demostrando las dos inclusiones.

a)  $\dim_H(A \cup B) \leq \max \{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$ .

Sea  $s > \max \{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$ . Entonces sea  $s > \dim_H(A)$ , por la definición 4.2.11 tenemos que  $H^s(A) = 0$  y sea  $s > \dim_H(B)$ , por la definición 4.2.11 tenemos que  $H^s(B) = 0$ . Por lo cual,  $H^s(A \cup B) \leq H^s(A) + H^s(B) = 0 + 0 = 0$ . Por lo tanto,  $H^s(A \cup B) = 0$  de manera que  $\dim_H(A \cup B) \leq s$ . Esto es cierto para todo  $s > \max \{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$ , por lo que obtenemos que  $\dim_H(A \cup B) \leq \max \{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$ .

b)  $\dim_H(A \cup B) \geq \max \{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$ .

Por las propiedades de la unión sabemos que  $A \subseteq A \cup B$  y que  $B \subseteq A \cup B$ , entonces por el apartado 1 sabemos que  $\dim_H(A) \leq \dim_H(A \cup B)$  y que  $\dim_H(B) \leq \dim_H(A \cup B)$ , de manera que  $\dim_H(A \cup B) \geq \max \{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$ .

En efecto,  $\dim_H(A \cup B) = \max \{\dim_H(A), \dim_H(B)\}$

□

**Proposición 4.2.13.** *Supongamos que  $A_1, A_2, \dots$  son conjuntos de Borel, entonces  $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) =$*

$$\sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H(A_i).$$

*Demostración.* Comprobaremos que  $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H(A_i)$  demostrando las dos inclusiones.

$$\blacksquare \dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H(A_i).$$

Por la propiedad 2 de la proposición 4.2.12 sabemos que la  $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H(A_i)$  para cada  $j$ .

$$\blacksquare \dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H(A_i).$$

Sea  $s > \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H(A_i)$ . Entonces, sea  $s > \dim_H(A_i)$  para todo  $i$ , por la definición

4.2.11 sabemos que  $H^s(A_i) = 0$  para todo  $i$ . Como  $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq H^s(A_1) + H^s(A_2) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$ , por lo tanto  $H^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$ , de manera que  $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq s$ . Esto

es cierto para todo  $s > \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H(A_i)$ , por lo que obtenemos que  $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H(A_i)$ .

En efecto,  $\dim_H(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim_H(A_i)$ . □

**Teorema 4.2.14.** Sea  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacio métricos. Sea  $f : S \rightarrow T$  una función semejante con razón  $r > 0$ . Sea  $s$  un número real positivo, y sea  $F \subseteq S$  un conjunto. Entonces,  $H^s(f[F]) = r^s H^s(F)$ , por lo cual la  $\dim_H(f[F]) = \dim_H(F)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $T = f[S]$ . Entonces,  $f$  tiene una inversa  $f^{-1}$ . Sea  $A$  un conjunto tal que  $A \subseteq S$ , satisface que  $\text{diam}(f[A]) = r \cdot \text{diam}(A)$ . Por lo tanto,  $(\text{diam}(f[A]))^s = r^s \cdot (\text{diam}(A))^s$ . Aplicando el Teorema 4.2.10 dos veces, obtenemos que  $H_{r\epsilon}^s(f[F]) = r^s H_{\epsilon}^s(F)$ . Por lo cual,  $H^s(f[F]) = r^s H^s(F)$  y  $\dim_H(f[F]) = \dim_H(F)$ . □

**Proposición 4.2.15.** Sea  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacio métricos. Sea  $f : S \rightarrow T$  una función. Sea  $F \subseteq S$  un conjunto de Borel. Si  $f$  es Lipschitz, entonces  $\dim_H(f[F]) \leq \dim_H(F)$ .

La demostración de la proposición 4.2.15 requiere un Corolario previo.

**Corolario 4.2.16.** Sea  $(S, d_s)$  y  $(T, d_t)$  dos espacio métricos. Sea  $F \subseteq S$  y supongamos la función  $f : S \rightarrow T$  que verifica la condición de Hölder  $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\alpha}$  para  $x, y \in S$ . Entonces,  $\dim_H(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F)$ .

*Demostración.* Supongamos  $s$  un número real positivo, tal que  $s > \dim_H(F)$ , por la definición 4.2.11 tenemos que  $H^s(F) = 0$ . Por la proposición 4.2.4 tenemos que  $H^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} H^s(F)$ . Por lo tanto,  $H^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} H^s(F) = 0$ , de manera que  $H^{s/\alpha}(f(F)) = 0$ , por lo cual  $\dim_H(f(F)) \leq \frac{s}{\alpha}$  es cierto para todo  $s > \dim_H(F)$ . En efecto,  $\dim_H(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F)$ . □

Ahora ya podemos pasar a demostrar la proposición 4.2.15.

*Demostración.* de la proposición 4.2.15.

Supongamos  $\alpha = 1$  en la demostración de la proposición 4.2.16, entonces obtenemos que  $\dim_H(f(F)) \leq \dim_H(F)$ .  $\square$

### 4.3. Dimensión de Box-Counting

La dimensión de Box-Counting o también llamada la dimensión de Minkowski-Bouligard, es otra forma de determinar la dimensión fractal de un conjunto  $F$  en un espacio métrico  $(S, d)$ .

Una manera sencilla de explicar la dimensión de Box-Counting es, tenemos un fractal cualquiera y lo dividimos en cuadrados de lado  $r$ , contamos cuantos cuadrados han sido necesarios para cubrir todo el fracta. No es una definición formal, pero nos ayuda a tener una idea de lo que estudiaremos a continuación.

**Definición 4.3.1.** Sea  $F$  un subconjunto acotado y no vacío, sea  $N_\delta(F)$  el entorno que cubre a  $F$  de diámetro máximo  $\delta$ . Definimos la dimensión inferior y superior de Box-Counting como:

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_B(F) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log(\delta)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{\log(\frac{1}{\delta})}, \\ \overline{\dim}_B(F) &= \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log(\delta)} = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{\log(\frac{1}{\delta})}. \end{aligned}$$

Si la dimensión inferior y superior coinciden, entonces el valor del límite es la dimensión de Box-Counting, y se define como:

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{-\log(\delta)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(N_\delta(F))}{\log(\frac{1}{\delta})}.$$

*Nota.* Para evitar problemas con  $\log(0)$  o bien  $\log(\infty)$ , consideramos que las cajas de dimensión  $r$  son conjuntos no vacíos.

**Teorema 4.3.2.** Sea  $(S, d)$  un espacio métrico y sea  $F$  un subconjunto de  $S$ . Sea  $\epsilon_n = Cr^n$  para  $0 < r < 1$ ,  $C > 0$  y  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Si

$$\dim_B(F) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log(N_{\epsilon_n}(F))}{\log(\frac{1}{\epsilon_n})},$$

entonces,  $F$  tiene dimensión fractal  $\dim_B(F)$ .

Antes de demostrar el Teorema 6, necesitaremos el Teorema del Sandwich.

**Teorema 4.3.3.** Teorema del sandwich.

Sea  $I$  un intervalo que contiene un punto  $a$ , y sean  $f, g$  y  $h$  funciones definidas en  $I$ , exceptuando quizás el mismo punto  $a$ . Supongamos que para todo  $x$  en  $I$  diferente de  $a$  tenemos:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

y supongamos también que:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L.$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

*Demostración.* Demostraremos que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$  con  $0 < |x - a| < \delta$ , tenemos  $-\epsilon < f(x) - L < \epsilon$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ , significa que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_1 > 0$  tal que para todo  $x$  con  $0 < |x - a| < \delta_1$  tenemos

$$-\epsilon < g(x) - L < \epsilon. \quad (4)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ , significa que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta_2 > 0$  tal que para todo  $x$  con  $0 < |x - a| < \delta_2$  tenemos

$$-\epsilon < h(x) - L < \epsilon. \quad (5)$$

Sabemos por hipótesis que  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , por lo que  $g(x) - L \leq f(x) - L \leq h(x) - L$ , supongamos que  $\delta < \delta_1$  y  $\delta < \delta_2$ . Entonces si  $0 < |x - a| < \delta$ , combinando la ecuación 4 y la ecuación 5, obtenemos:

$$-\epsilon < g(x) - L \leq f(x) - L \leq h(x) - L < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < f(x) - L < \epsilon.$$

En efecto,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . □

*Nota.* Las funciones  $g$  y  $h$  se dicen que son límites inferior y superior respectivamente de  $I$ .

*Demostración.* del Teorema 6

Sean  $r, C > 0$ , y sea la sucesión  $E = \{\epsilon_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ . Definimos  $f(\epsilon) = \max \{\epsilon_n \in E : \epsilon_n \leq \epsilon\}$ . Supongamos que  $\epsilon \leq r$ . Entonces:

$$f(\epsilon) \leq \epsilon \leq \frac{f(\epsilon)}{r},$$

y

$$N_{f(\epsilon)}(F) \geq N_\epsilon(F) \geq N_{\frac{f(\epsilon)}{r}}(F).$$

Dado que  $\log(x)$  es una función positiva y creciente para  $x \geq 1$ , obtenemos que:

$$\frac{\log(N_{\frac{f(\epsilon)}{r}}(F))}{\log(\frac{1}{f(\epsilon)})} \underbrace{\leq}_2 \frac{\log(N_\epsilon(F))}{\log(\frac{1}{\epsilon})} \underbrace{\leq}_1 \frac{\log(N_{f(\epsilon)}(F))}{\log(\frac{1}{f(\epsilon)})}.$$

Supongamos que  $N_\epsilon(F) \rightarrow \infty$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , sino el Teorema no será cierto. Entonces por la desigualdad 1:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N_{f(\epsilon)}(F))}{\log(\frac{r}{f(\epsilon)})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\epsilon_n}(F))}{\log(\frac{r}{\epsilon_n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\epsilon_n}(F))}{\log(r) + \log(\frac{1}{\epsilon_n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\epsilon_n}(F))}{\log(\frac{1}{\epsilon_n})} \quad (6)$$

Entonces, por la desigualdad (2):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N_{\frac{f(\epsilon)}{r}}(F))}{\log(\frac{1}{f(\epsilon)})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\epsilon_{n-1}}(F))}{\log(\frac{1}{\epsilon_n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\epsilon_{n-1}}(F))}{\log(\frac{1}{r}) + \log(\frac{1}{\epsilon_{n-1}})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\epsilon_n}(F))}{\log(\frac{1}{\epsilon_n})} \quad (7)$$

Como  $\epsilon \rightarrow 0$ , la ecuación 6 y la ecuación 7 tienen el mismo valor. Por el Teorema 4.3.3, obtenemos que  $\dim_B(F)$  tendrá el mismo valor que la ecuación 6 y la ecuación 7. Por lo tanto,  $\dim_B(F) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log(N_{\epsilon_n}(F))}{\log(\frac{1}{\epsilon_n})}$ . □

#### 4.4. Relación entre la dimensión de Hausdorff y Box-Counting

Una vez estudiada la dimensión de Hausdorff y de Box-Counting, veremos la relación que hay entre ambas dimensiones.

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $(S, d)$  es un espacio métrico y sea  $F$  es un subconjunto de  $S$ .  $\dim_B(F)$  denota la dimensión fractal Box-Counting de  $F$  y  $\dim_H(F)$  denota la dimensión fractal Hausdorff de  $F$ . Entonces:*

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F).$$

*Demostración.* Si  $F$  se puede cubrir por  $N_\delta(F)$  entornos de diámetro  $\delta$ , por el Lema 4.2.3 sabemos que  $H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i \in I} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } F \right\}$ , de manera que  $H_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s$ .

Si  $1 < H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$ , entonces  $1 < N_\delta(F) \delta^s$ . Aplicando logaritmos, obtenemos que  $0 < \log N_\delta(F) + s \log(\delta)$  si  $\delta$  es suficientemente pequeño. Por lo tanto, despejando  $s$  de la ecuación, obtenemos que  $s < \frac{\log N_\delta(F)}{-\log(\delta)}$ , por lo que  $s \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log(\delta)}$ , en efecto:

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F).$$

□

En general la definición 4.3.1 de Box-Counting nos dice que  $N_\delta(F) \cong \delta^{-s}$  para  $\delta$  pequeño, donde  $s = \dim_B(F)$ .

Más concretamente, si decimos que:

$$\begin{aligned} N_\delta(F) &= \infty \text{ si } s < \dim_B(F), \\ N_\delta(F) &= 0 \text{ si } s > \dim_B(F), \end{aligned}$$

pero,

$$N_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ es finito y es un } \delta\text{-recubrimiento de } F \right\}$$

si lo comparamos con,

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i \in I} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } F \right\},$$

tenemos que al calcular la dimensión de Hausdorff, asignamos diferentes tamaños  $|U_i|^s$  a los conjuntos que cubren  $U_i$ , mientras que en la dimensión de Box-Counting utilizamos el mismo tamaño  $\delta^s$  para conjuntos que cubren a  $U_i$ .

Es decir la dimensión de Box-Counting se puede pensar que es más eficiente, porque un conjunto lo podemos recubrir por pequeños grupos del mismo tamaño, en cambio en la dimensión de Hausdorff también hacemos recubrimientos pequeños pero quizás de tamaños distintos.

A continuación calcularemos la dimensión de algunos de los ejemplos fractales geométricos que hemos estudiado en el capítulo 2.

■ Conjunto de Cantor.

Paso 1: Cubrimos el conjunto de Cantor con  $N(r_1) = 2$  cuadrados de lado  $r = \frac{1}{3}$ , tal y como vemos en la siguiente figura:



Figura 19: Dimensión fractal, paso 1  
[28]

Paso 2: Cubrimos el conjunto de Cantor con  $N(r_1) = 4$  cuadrados de lado  $r = \frac{1}{9}$  (hemos reducido el lado del cuadrado  $\frac{1}{3}$  respecto al paso anterior), tal y como vemos en la siguiente figura:



Figura 20: Dimensión fractal, paso 2  
[28]

Paso 3: Cubrimos el conjunto de Cantor con  $N(r_1) = 8$  cuadrados de lado  $r = \frac{1}{27}$  (hemos reducido el lado del cuadrado  $\frac{1}{3}$  respecto al paso anterior), tal y como vemos en la siguiente figura:



Figura 21: Dimensión fractal, paso 3  
[28]

Aplicando el razonamiento  $n$  veces, obtenemos que cubriremos el conjunto de Cantor con  $N(r_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$  cuadrados de lado  $r = \frac{1}{3^n}$ .

Por lo que, por la definición 4.3.1 sabemos que:

$$\dim_B = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log(2)}{n \log(3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0,62989$$

■ Triángulo de Sierpinski.

Paso 1: Cubrimos el triángulo de Sierpinski con  $N(r_1) = 3$  cuadrados de lado  $r = \frac{1}{2}$ , tal y como vemos en la siguiente figura:

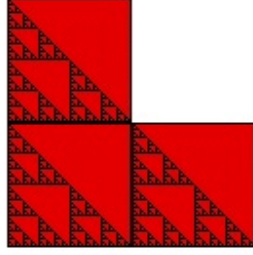


Figura 22: Dimensión fractal, paso 1  
[29]

Paso 2: Cubrimos el triángulo de Sierpinski con  $N(r_1) = 9$  cuadrados de lado  $r = \frac{1}{2}$  (hemos reducido el lado del cuadrado  $\frac{1}{2}$  respecto al paso anterior), tal y como vemos en la siguiente figura:

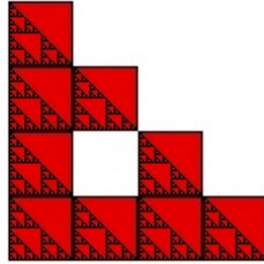


Figura 23: Dimensión fractal, paso 2  
[29]

Paso 3: Cubrimos el triángulo de Sierpinski con  $N(r_1) = 27$  cuadrados de lado  $r = \frac{1}{3}$  (hemos reducido el lado del cuadrado  $\frac{1}{3}$  respecto al paso anterior), tal y como vemos en la siguiente figura:

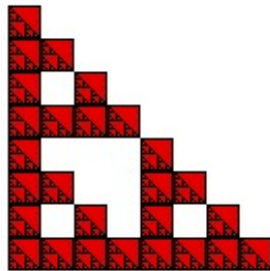


Figura 24: Dimensión fractal, paso 3  
[29]

Aplicando el razonamiento  $n$  veces, obtenemos que cubriremos el triángulo de Sierpinski con  $N(r_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  cuadrados de lado  $r = 3^n$ .

Por lo que, por la definición 4.3.1 sabemos que:

$$\dim_B(F) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log(3^n)}{\log(2^n)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n \log(3)}{n \log(2)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,58996.$$



■ Curva de Koch.

Paso 1: Cubrimos la curva de Koch con  $N(r_1) = 3$  cuadrados de lado  $r = \frac{1}{3}$ , tal y como vemos en la siguiente figura:

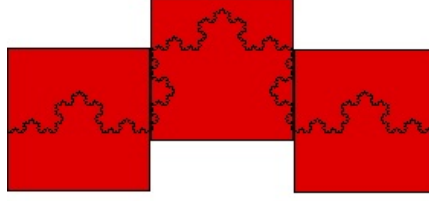


Figura 25: Dimensión fractal, paso 1  
[30]

Paso 2: Cubrimos la curva de Koch con  $N(r_1) = 12$  cuadrados de lado  $r = \frac{1}{9}$  (hemos reducido el lado del cuadrado  $\frac{1}{3}$  respecto al paso anterior), tal y como vemos en la siguiente figura:

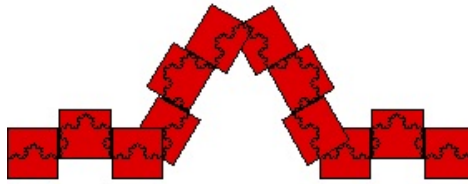


Figura 26: Dimensión fractal, paso 2  
[30]

Paso 3: Cubrimos la curva de Koch con  $N(r_1) = 48$  cuadrados de lado  $r = \frac{1}{27}$  (hemos reducido el lado del cuadrado  $\frac{1}{3}$  respecto al paso anterior), tal y como vemos en la siguiente figura:

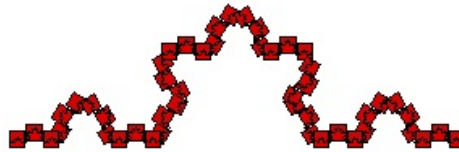


Figura 27: Dimensión fractal, paso 3  
[30]

Por lo que, por la definición 4.3.1 sabemos que:

$$\begin{aligned} \dim_B(F) &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\log(3 \cdot 4^{n-1})}{\log(3^n)} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(n-1)\log(4) + \log(3)}{n\log(3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n\log(4) - \log(4) + \log(3)}{n\log(3)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,26186. \end{aligned}$$

A partir de los ejemplos anteriores, demostraremos la siguiente proposición.

**Proposición 4.4.2.** *Sea  $(S, d)$ , un espacio métrico. Sea  $F$  un conjunto acotado y no vacío, sea  $n$  el número de afinidades tal que forman  $F$ . Sea  $r$  el factor de contracción tal que  $0 < r < 1$ . Definimos la dimensión fractal, como:*

$$\dim_{fractal} = \frac{\log(n)}{\log(r)}.$$

*Demostración.* Demostraremos dicha proposición por inducción.

Supongamos un conjunto cualquier  $F$ , que representaremos en una cuadrícula. Aplicamos un factor de contracción  $r$ , de manera que contabilizaremos cuantos cuadrados de lado  $a$  son necesario para cubrir dicho conjunto. Por lo que, necesitaremos  $n$  cuadrados con factor de contracción  $r$ . Por lo tanto,  $ra \mapsto n$

Repetimos el proceso, de manera que aplicamos un factor de contracción  $r^2$  y serán necesarios  $n^2$  cuadrados de lado  $a$  para cubrir el conjunto  $F$ . Por lo tanto:  $r^2a \mapsto n^2$

Repetiendo el proceso  $k$  veces, obtenemos que son necesarios  $n^k$  cuadrados de lado  $a$  con factor de contracción  $r^k$ . Por lo tanto,  $r^ka \mapsto n^k$ .

Por lo que:

$$\dim_{fractal} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(n^k)}{\log(r^ka)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k \log(n)}{\log(a) + k \log(r)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\frac{\log(a)}{k} + \log(r)} = \frac{\log(n)}{\log(r)}$$

□

## 4.5. Aplicaciones

Podemos pensar que los fractales son meras curiosidades de las matemáticas sin ninguna utilidad, sin embargo son una herramienta importante a la hora de estudiar fenómenos complejos.

A continuación indicaremos algunas de sus aplicaciones, aunque tenemos que tener en cuenta que hay muchas más.

- Comprensión de imágenes.

El almacenamiento digital de imágenes, está formada por millones de píxeles o puntos de diferentes colores, y pueden ocupar mucha memoria. Por lo que, existen muchos algoritmos para comprimir las imágenes, con el objetivo de almacenar la información de una manera eficiente que reduzca el espacio que ocupa. Por *ejemplo*, las imágenes que guardamos habitualmente en jpeg o gif, utilizan dicha comprensión.

- Arte fractal.

Los fractales se pueden aplicar de una forma artística, de manera que puedan reproducir paisajes generados a partir de sistemas de funciones iteradas, tal y como hemos descrito en el capítulo 2, pero de forma más complejos. Como hemos indicado en la introducción, dicho arte se ha utilizado en películas como Star Wars (1977 - 2005) y Star Trek (1979 - 2013), también es utilizado en la programación de videojuegos.

- Dimensión fractal en la cromatina.

La cromatina es un material fibroso dentro del núcleo de las células, que contiene el material genético. La cromatina tiende a replegarse en sí misma.

Es posible estimar la dimensión fractal de este material. Los científicos del centro de investigaciones Monte Sinaí de Nueva York han demostrado que existe una relación entre la dimensión fractal de la cromatina y el cáncer de mama.

- Análisis de la estructura ósea.

La alteración de la estructura ósea, y el descenso de la masa ósea, contribuye a que un paciente con osteoporosis sufra una fractura. Los métodos tradicionales de medida de la masa ósea no parecen muy eficientes a la hora de diagnosticar el riesgo de fractura en estos pacientes. Por ello, numerosos equipos de radiología han desarrollado métodos para estimar la dimensión fractal de la estructura ósea, utilizando tomografías computerizadas adecuadas (TAC). Estas medidas han demostrado que son más eficientes a la hora de predecir los riesgos de fractura.

# Anexo

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

int main(void)
{
    int i, k, j, w, b, n, c, contador;
    double I1, I2, aux, a;
    double *x;

    printf("Introduzca iteracion del conjunto de Cantor a calcular: ");
    scanf("%d",&n);

    //reservamos memoria
    x= (double*)malloc((pow(2,n))*sizeof(double));
    if (x==NULL)
    {
        printf("Error reservando memoria");
        exit (1);
    }

    //iteracion inicial del conjunto de Cantor
    x[0]=0.;
    x[1]=1.;

    //segunda iteracion del conjunto de Cantor
    x[0]=0.;
    x[1]=1./3.;
    x[2]=2./3.;
    x[3]=1.;

    //partimos de j=4 porque mantenemos la informacion de los vectores
    anteriores.
    j=4;
    for(i=2; i<n; i++)
    {
        //calculamos el tamaño del intervalo de cada iteración
        a=(x[1]-x[0])/3.;
        //w indica la posición del vector que necesitamos para calcular el
        nuevo extremo del conjunto de Cantor
        w=1;
        k=j;
        //calculamos los nuevos extremos del conjunto de Cantor
        while(w<k)
        {
            x[j]=x[w-1]+a;
            x[j+1]=x[j]+a;
            w = w + 2;
            j = j + 2;
        }
        //reordenamos todos los extremos con el método de la burbuja
        for(b=0; b<j; b++)
        {
            for(c=b+1; c<j; c++)
            {
                if(x[b]>x[c])
                {
```

```

        aux = x[c];
        x[c]=x[b];
        x[b]=aux;
    }
}

//comprobamos que 1/4 no pertenece a ningún extremo del conjunto de
cantor
contador=0;
for(i=0; i<(pow(2,n)); i++)
{
    if(x[i]!=1./4.)
    {
        contador=contador+1;
    }
}
if(contador==(pow(2,n)))
{
    printf("El punto 1/4 no es un extremo del conjunto de Cantor.\n\n");
}

//miramos en que intervalo está el punto 1/4
for(i=0; i<(pow(2,n)); i++)
{
    if(x[i]>(1./4.))
    {
        I1=x[i-1];
        break;
    }
}
for(i=((pow(2,n))-1); i>=0; i--)
{
    if(1./4.<x[i])
    {
        I2=x[i];
    }
}

//imprimimos en que intervalo está el punto 1/4
printf("El punto 1/4 se encuentra en el intervalo (%lf,%lf).\n\n",
I1,I2);

//imprimimos el conjunto de cantor que hemos obtenido
printf("Los intervalos del conjunto de Cantor en la iteración %d
son:\n", n);
for(i=0; i<(pow(2,n)); (i=i+2))
{
    printf("(%lf,%lf)\n", x[i],x[i+1]);
}
return 0;
}

```

## Bibliografía

- [1] G. Ferdinand Ludwing Philipp Cantor: [http://es.wikipedia.org/wiki/Georg\\_Cantor](http://es.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor)
- [2] Imagen del conjunto de Cantor: [http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto\\_de\\_Cantor](http://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor)
- [3] E. Linés: Principios de Análisi matemático. Editorial Reverté S.A., 1991. Página 417.
- [4] W. Franciszek Sierpenkins: [http://es.wikipedia.org/wiki/Waclaw\\_Sierpinski](http://es.wikipedia.org/wiki/Waclaw_Sierpinski)
- [5] Imagen del triángulo de Sierpinski: <http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifskit/gallery/gallery.htm>
- [6] Imagen de la alfombra de Sierpinski: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sierpinski\\_carpet\\_6.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sierpinski_carpet_6.png)
- [7] Imagen de la curva de Sierpinski: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sierpinski-Curve-3.png>
- [8] Imagen de la construcción del triángulo de Sierpinski. G. Edgar: Measure, topology, and fractal geometry. Editorial Board, Second Edition. Página 8.
- [9] N. Fabian Helge von Koch [http://en.wikipedia.org/wiki/Helge\\_von\\_Koch](http://en.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch)
- [10] Imagen de la construcción de la curva de Koch con triángulos: G. Edgar: Measure, topology, and fractal geometry. Editorial Board, Second Edition. Página 19.
- [11] Imagen de la construcción de la curva de Koch con segmentos: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Koch\\_snowflake0192.png](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Koch_snowflake0192.png)
- [12] Imagen copo de Koch: [http://enciclopedia.us.es/index.php/Copo\\_de\\_nieve\\_de\\_Koch](http://enciclopedia.us.es/index.php/Copo_de_nieve_de_Koch)
- [13] Imagen curva del dragón: [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Curva\\_del\\_dragon\\_formacion.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Curva_del_dragon_formacion.png)
- [14] Imagen curva de dragón con ángulo  $120^0$ : G. Edgar: Measure, topology, and fractal geometry. Editorial Board, Second Edition. Página 23.
- [15] Imagen Fudgeflake: <http://facstaff.unca.edu/mcmcclur/class/Spring09FractalILS/handouts/FractalinaPractice.html>
- [16] Imagen Sierpinski dragón: G. Edgar: Measure, topology, and fractal geometry. Editorial Board, Second Edition. Página 23.
- [17] G. Maurice Julia: [http://es.wikipedia.org/wiki/Gaston\\_Julia](http://es.wikipedia.org/wiki/Gaston_Julia)
- [18] Imagen Conjunto de Julia: G. Edgar: Measure, topology, and fractal geometry. Editorial Board, Second Edition. Página 28.

- [19] Fecha del Teorema del Collage: [http://es.wikipedia.org/wiki/Compresi\penalty\@M\hskip\z@skip\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19o\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\penalty\@M\hskip\z@skip\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\spacefactor\accent@spacefactor\n\\_fractal](http://es.wikipedia.org/wiki/Compresi\penalty\@M\hskip\z@skip\unhbox\voidb@x\bgroup\let\unhbox\voidb@x\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\accent19o\egroup\spacefactor\accent@spacefactor\penalty\@M\hskip\z@skip\setbox\@tempboxa\hbox{o\global\mathchardef\accent@spacefactor\spacefactor}\spacefactor\accent@spacefactor\n_fractal)
- [20] Imagen reflexión y rotación: G. Edgar: Measure, topology, and fractal geometry. Editorial Board, Second Edition. Página 48.
- [21] Imagen traslación: G. Edgar: Measure, topology, and fractal geometry. Editorial Board, Second Edition. Página 48.
- [22] F. Hausdorff: [http://es.wikipedia.org/wiki/Felix\\_Hausdorff](http://es.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff)
- [23] M. Fielding Barnsley: [http://en.wikipedia.org/wiki/Michael\\_Barnsley](http://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Barnsley)
- [24] Definición de comprensión fractal: [http://es.wikipedia.org/wiki/Compresion\\_fractal](http://es.wikipedia.org/wiki/Compresion_fractal)
- [25] M. Barnsley: Fractals everywhere. Editorial Academic Press Professional, Second Edition. Página 94.
- [26] Imagen de la distancia de Hausdorff: [urlhttp://www.dma.fi.upm.es/sonia/proyectos/sfi-recurrentes/documentacion/teoria.htm](http://www.dma.fi.upm.es/sonia/proyectos/sfi-recurrentes/documentacion/teoria.htm)
- [27] K. Falconer: Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications. Editorial Wiley, Second Edition. Página 31.
- [28] Imagen del conjunto de Cantor para calcular la dimensión fractal: [urlhttp://classes.yale.edu/fractals/fracanddim/boxdim/CantorBoxDim/CantorBoxDim.html](http://classes.yale.edu/fractals/fracanddim/boxdim/CantorBoxDim/CantorBoxDim.html)
- [29] Imagen del triángulo de Sierpinski para calcular la dimensión fractal: [urlhttp://classes.yale.edu/fractals/fracanddim/boxdim/GasketBoxDim/GasketBoxDim.html](http://classes.yale.edu/fractals/fracanddim/boxdim/GasketBoxDim/GasketBoxDim.html)
- [30] Imagen de Koch para calcular la dimensión fractal: [urlhttp://classes.yale.edu/fractals/fracanddim/boxdim/KochBoxDim/KochBoxDim.html](http://classes.yale.edu/fractals/fracanddim/boxdim/KochBoxDim/KochBoxDim.html)
- [31] Imagen de figuras planas: [urlhttp://ramonlazatercerciclo.blogspot.com.es/2012/03/6-mate-figuras-planas.html](http://ramonlazatercerciclo.blogspot.com.es/2012/03/6-mate-figuras-planas.html)