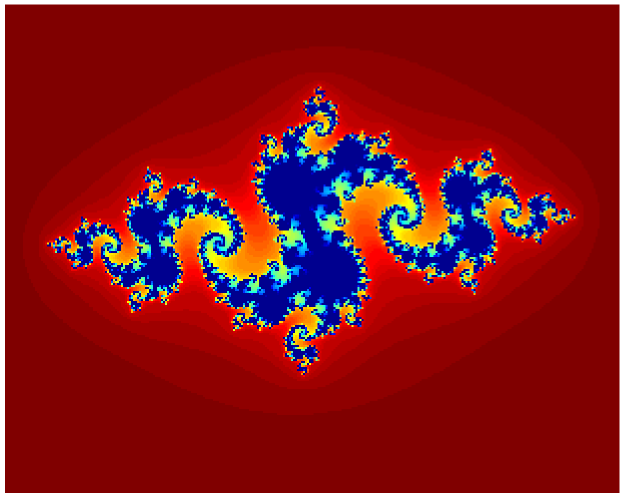
Conjunto de Julia Lleno



Contenido de esta página:

- Definiciones y Teoremas básicos sobre el Conjunto de Julia (Lleno) de funciones polinómicas de segundo grado
- Función MatLab para representar un Conjunto de Julia Lleno
- Galería de imágenes

Definición 1

Sea **f(z)** un polinomio con coeficientes complejos, es decir,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

siendo $\mathbf{a_i}$ números complejos.

Llamamos **Conjunto de Julia Lleno de *f*** al conjunto

$$K(f) := \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \nrightarrow \infty\}$$

donde f^n es la n-ésima composición de **f** consigo misma, es decir,

$$f^1(z) := f(z)$$

$$f^2(z) := f\left(f^1(z)\right)$$

$$f^3(z) := f\left(f^2(z)\right)$$

$$f^n(z) := f\left(f^{n-1}(z)\right)$$

Al término f^n **(z)** de la sucesión anterior lo denominamos **n**-ésima iterada de **f**.

Dicho en palabras, el **Conjunto de Julia Lleno** de la función **f** está formado por los puntos del plano complejo para los cuales las iteradas de la función en dichos puntos constituyen una sucesión no divergente.

Aunque no pretendemos estudiar en esta página los Conjuntos de Julia, los vamos a definir por las propiedades que podemos demostrar como consecuencia de su definición a partir de los Conjuntos de Julia Llenos.

Definición 2

Bajo las condiciones de la **Definición 1**, llamamos **Conjunto de Julia** de la función **f** al conjunto

$$J(f) := \partial K(f)$$

Es decir, el Conjunto de Julia de la función **f** es la frontera del Conjunto de Julia Lleno de **f**.

Nota: la **Definición 2** es, en realidad, una propiedad del caso particular de los Conjuntos de Julia de funciones polinómicas.

Teorema 1

El **Conjunto de Julia Lleno** de las funciones con la forma

$$f_c(z) := z^2 + c,\ c \in \mathbb{C}$$

está contenido en el disco de radio

$$r = max\{|c|, 3\}$$

Ver Demostración

Consecuencia:

El **Conjunto de Julia** de $\mathbf{f_c}$ también está en dicho disco (ya que es la frontera del Conjunto de Julia Lleno).

Teorema 2

Para las funciones

$$f_c(z) = z^2 + c$$

El Conjunto de Julia Completo de $\mathbf{f_c}$ es **compacto**.

Ver Demostración

Consecuencia:

El **Conjunto de Julia** de $\mathbf{f_c}$ también es compacto ya que es

$$J(f_c) = \partial K(f_c)$$

Función MatLab

Para representar el Conjunto de Julia Lleno de

$$f_c(z) = z^2 + c$$

```
1   function Julia(n, iter)
2   % n es el número de particiones
3   % x_a (x_b): extremo inf (sup)
4   % para la parte real
5   % y_a (y_b): extremo inf (sup)
6   % para la parte imaginaria
7   % iter: número de iteraciones
8   xa = -2.5;   xb = 2.5;
9   ya = -2; yb = 2;
10  v=linspace(xa, xb, n);
11  w=linspace(ya, yb, n);
12  [x,y] = meshgrid(v, w);
13  f = x + 1i * y;
14  m = zeros(size(f));
15  c=-0.8+0.156*i;
16  k=max(abs(c),3);
17  for p = 1:1:iter
18    f = f.^2 + c;
19    m(abs(f)> k & m == 0) = iter - p;
20  end
21  figure
21  imagesc(m)
22  end
```

Ver Comentarios

Imágenes del Conjunto de Julia Lleno

Estas imágenes fueron obtenidas a partir de la función de MatLab del apartado anterior, cambiando los valores de c de la línea 15 de la función.

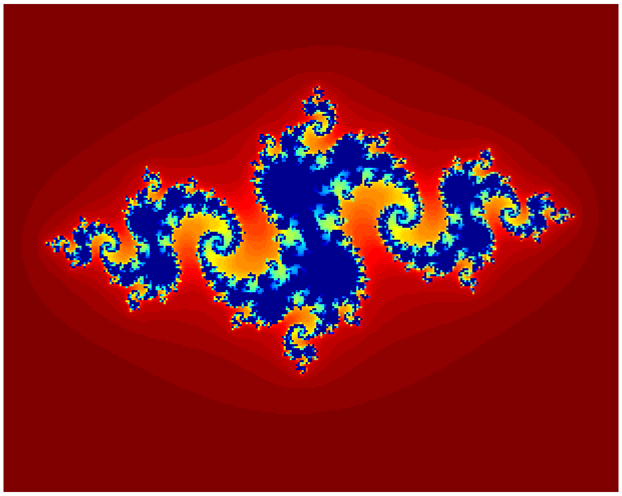
Las 7 primeras imágenes son el Conjunto de Julia Lleno de la función

$$f_c(z) = z^2 + c$$

y las cuatro últimas son los conjuntos de otro tipo de funciones. Son el resultado de variaciones de la misma función de MatLab.

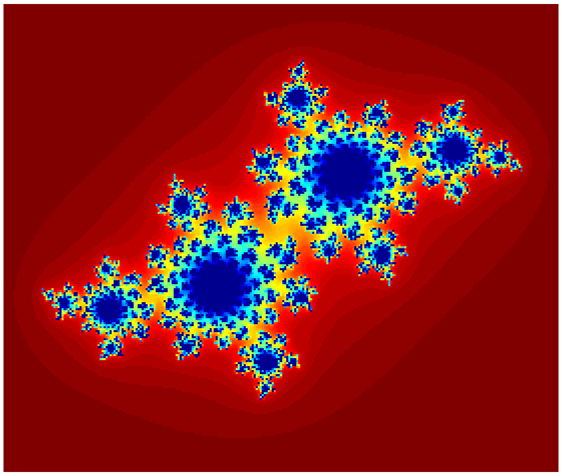
$$f(z) = z^2 + c$$

$$c = -0.8 + 0.156i$$



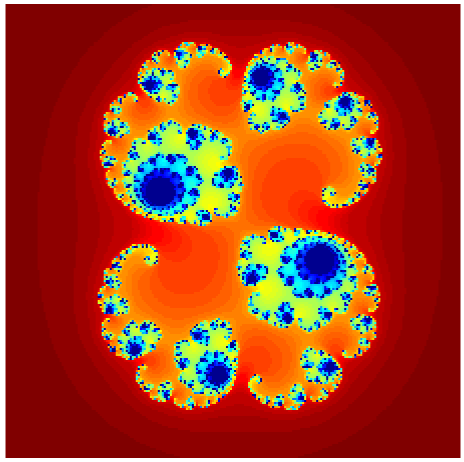
$$f(z) = z^2 + c$$

$$c = -0.4 + 0.6i$$



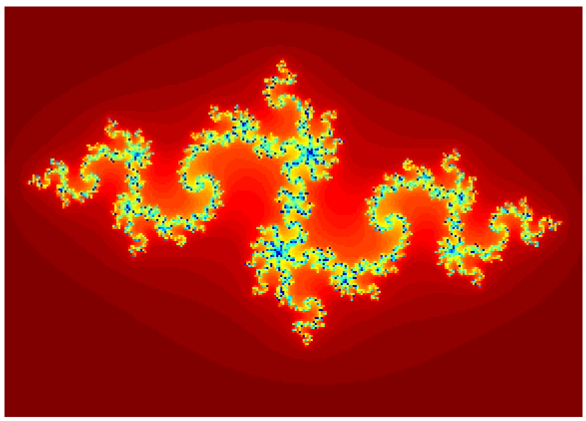
$$f(z) = z^2 + c$$

$$c = 0.285 + 0.01i$$



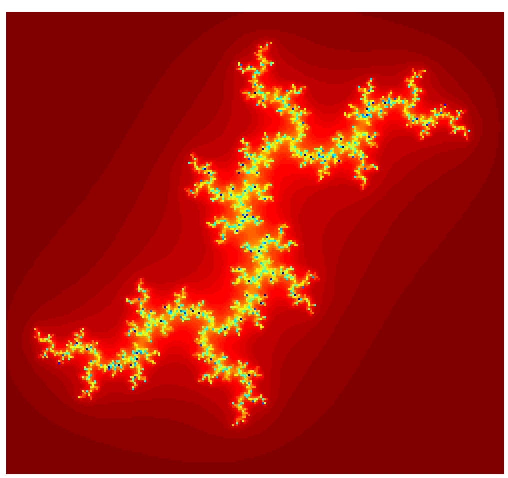
$$f(z) = z^2 + c$$

$$c = -0.835 - 0.2321i$$



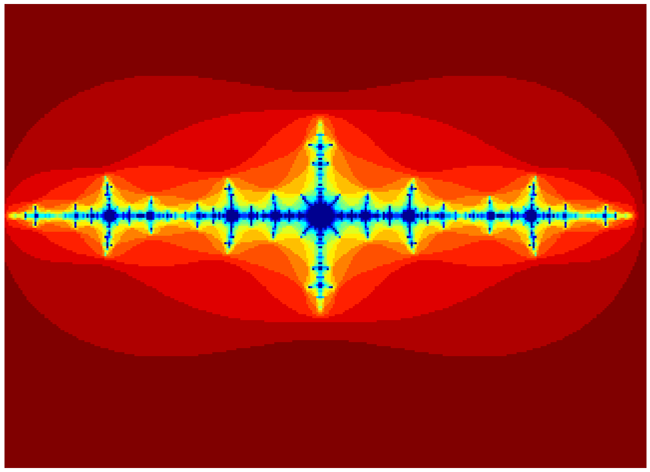
$$f(z) = z^2 + c$$

$$c = 0.8i$$



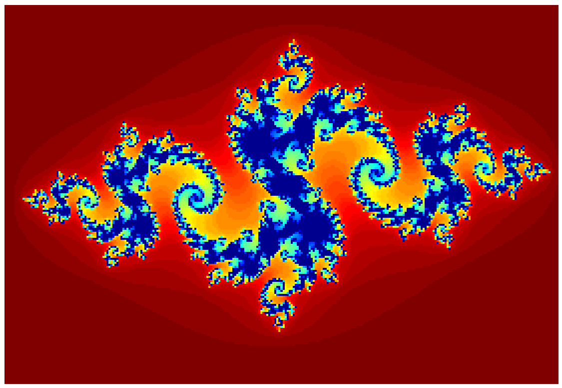
$$f(z) = z^2 + c$$

$$c = -1.476$$



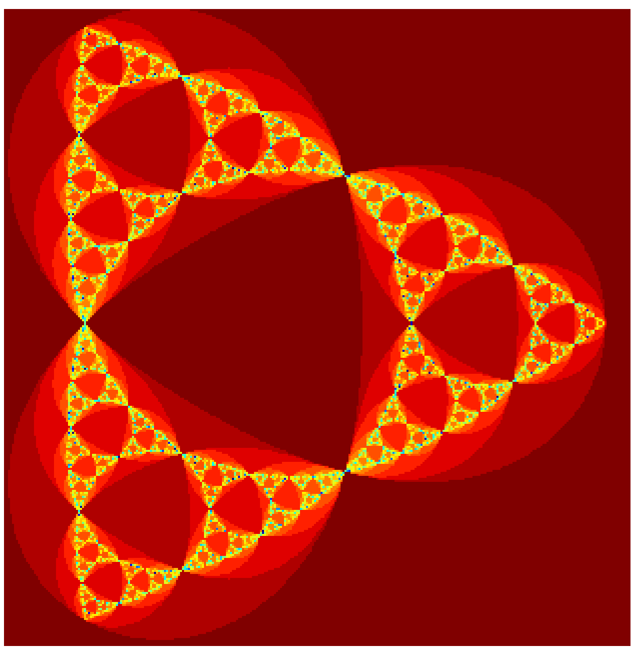
$$f(z) = z^2 + c$$

$$c = -0.79 + 0.15i$$

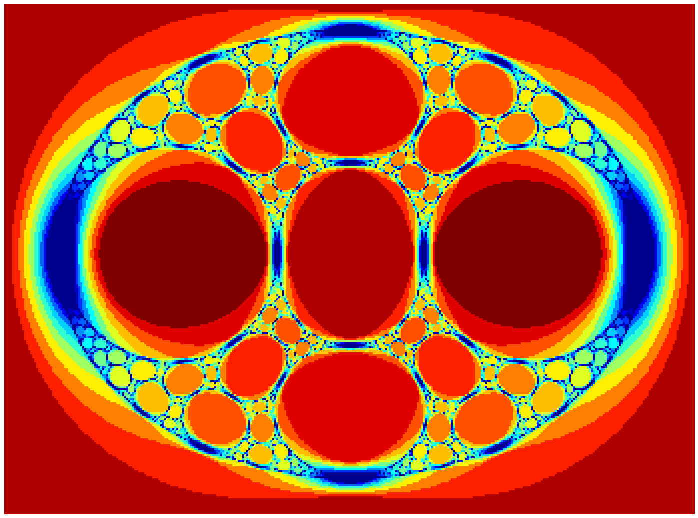


$$f(z) = \frac{2(z^3 - 2)}{3z}$$

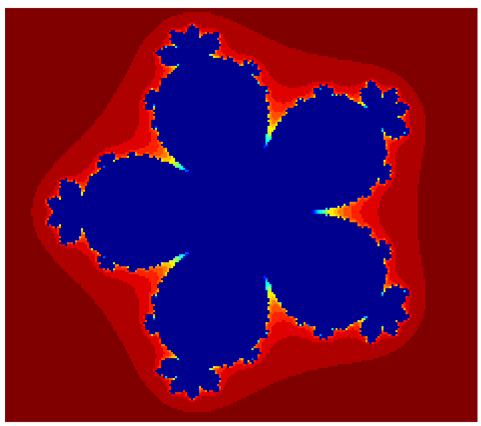
Triángulo de Sierpinski



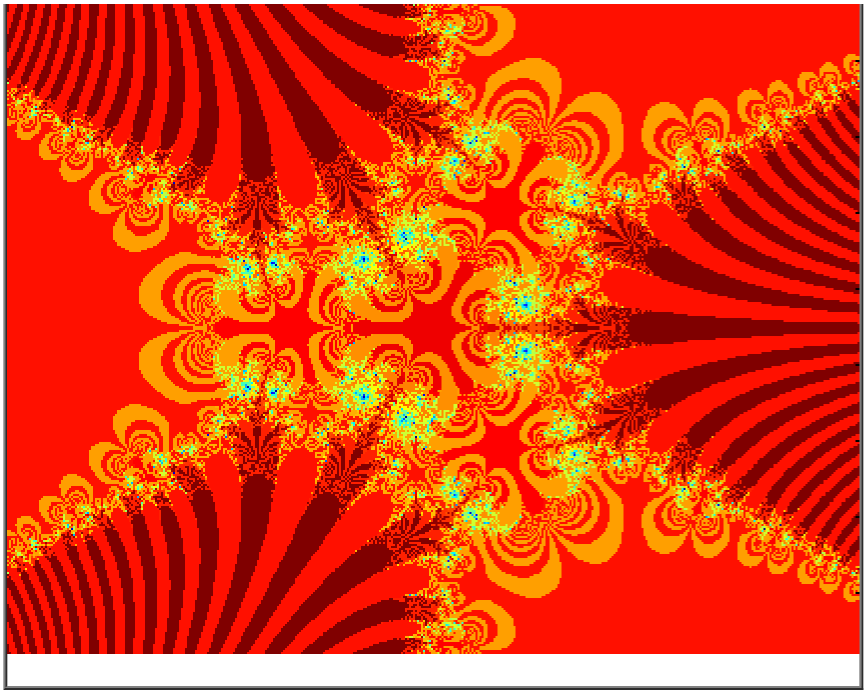
$$f(z)=\frac{z^2+0.7}{z^2-0.7}$$



$$f(z)=z^6+1.01z$$



$$f(z)=exp(z^3)-0.59$$



¿Necesitas ayuda?
Accede al foro de matesfacil