T.P. Variables aléatoires et inférence statistique (Labo 2)

201-9F6-ST : Statistiques appliquées à l'informatique

Marc-André Désautels

2017-12-07

Instructions:

1. Le but de ce T. P. est de vous familiariser avec le langage `R`. Il vous faudra trouver et utiliser les commandes appropriées pour répondre aux questions. Vous devez vous aider de la documentation fournie dans le logiciel `RStudio` ou de la recherche `Google`.
2. Vous devez répondre aux questions directement dans ce document et vous assurez qu'il compile lorsque vous utilisez la commande `Knit`. Vous pouvez également compiler vos commandes au fur et à mesure dans ce document en appuyant sur la **flèche verte pointant vers la droite** en haut à droite de votre code `R`.

Installer `R` et `RStudio`

Vous pouvez télécharger `R` aux adresses suivantes:

- Pour Linux
- Pour (Mac) OS X
- Pour Windows

Une fois le logiciel `R` installé, vous pouvez télécharger et installer le logiciel `RStudio` à l'adresse suivante:

- Pour Linux, (Mac) OS X et Windows

Les lois de probabilités

Chaque distribution en `R` possède quatre fonctions qui lui sont associées. Premièrement, la fonction possède un *nom racine*, par exemple le *nom racine* pour la distribution *binomiale* est `binom`. Cette racine est précédée par une de ces quatre lettre:

- `p` pour *probabilité*, qui représente la fonction de répartition
- `q` pour *quantile*, l'inverse de la fonction de répartition
- `d` pour *densité*, la fonction de densité de la distribution
- `r` pour *random* ou *simulation*, une variable aléatoire suivant la distribution spécifiée.

Pour la loi binomiale (*nom racine* `binom`) par exemple, ces fonctions sont `pbinom`, `qbinom`, `dbinom` et `rbinom`.

Nous avons donc:

Loi: `loi`	Densité	Fonction de répartition	Quantile	Simulation
Notations	$f(x)$ ou $P(X = x)$	$F(x)$	valeur liée à $F(x)$	$x_1, x_2, \ldots, x_n$

Les lois de probabilités discrètes

La loi binomiale

Le *nom racine* pour la loi binomiale est `binom`.

Soit X: le nombre de succès en n essais et $X \sim B(n, p)$. Voici la façon de calculer des probabilités pour la loi binomiale à l'aide de `R`:

Probabilités	Commande `R`
$P(X = k)$	`dbinom(k, n, p)`
$P(i \leq X \leq j)$	`sum(dbinom(i:j, n, p))`
$P(X \leq k)$	`pbinom(k, n, p)`
$P(X > k)$	`1-pbinom(k, n, p)`

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de face 2 que nous obtenons en lançant un dé à quatre reprises. Nous avons que $X \sim B(4, \frac{1}{6})$. Si nous voulons calculer $P(X = 3)$, nous aurons:

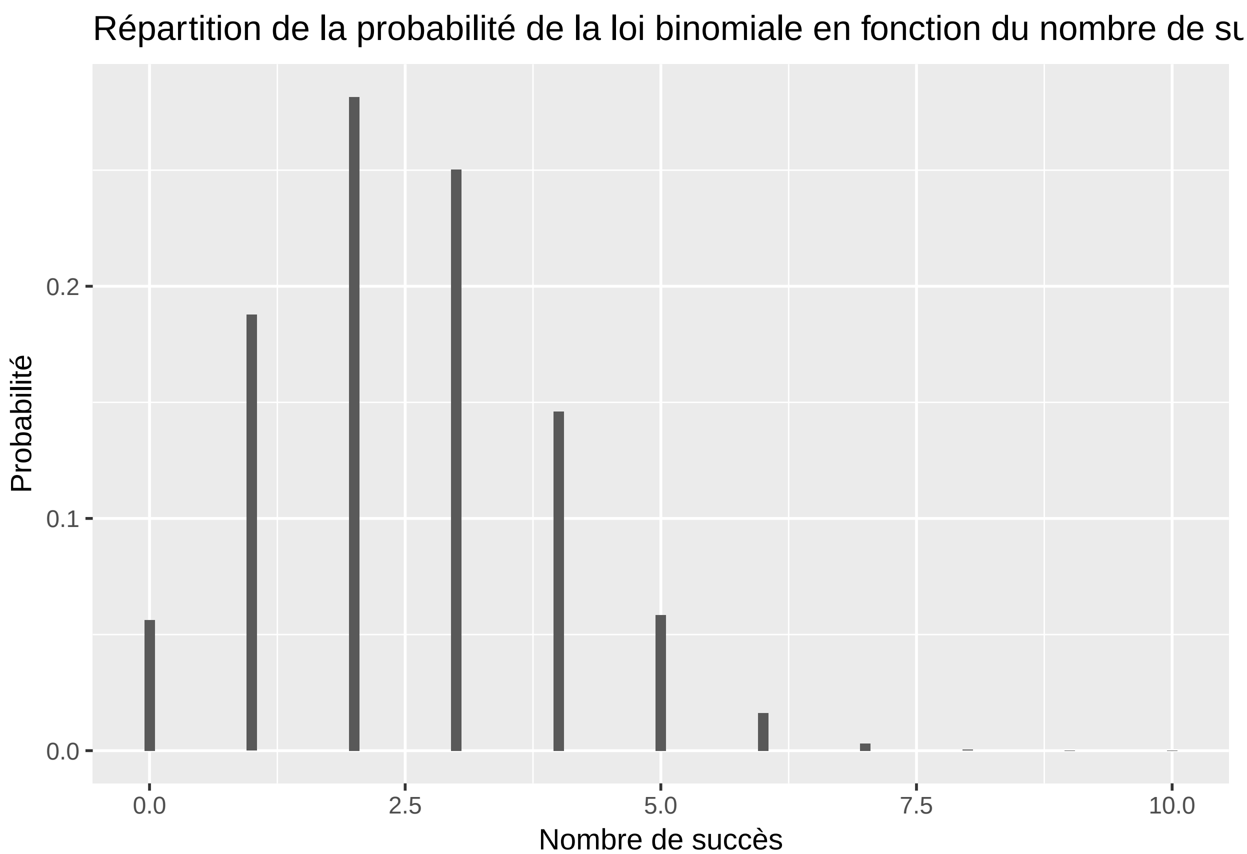
```
dbinom(3,4,1/6)
```

```
## [1] 0.0154321
```

Nous avons donc une probabilité de 1.5432099% d'obtenir 3 fois la face deux en lançant un dé à quatres reprises.

Nous pouvons représenter graphiquement la loi binomiale. Soit X $B(10, 1/4)$. Nous aurons:

```
fbinom <- data.frame(x = 0:10, y = dbinom(0:10, 10, 1/4))
ggplot(fbinom, aes(x = x, y = y)) +
  geom_bar(width = 0.1, stat = "identity") +
  labs(
    x = "Nombre de succès",
    y = "Probabilité",
    title = "Répartition de la probabilité de la loi binomiale en fonction du nombre de succès"
  )
```



La loi de Poisson

Le *nom racine* pour la loi de Poisson est `pois`.

Soit X: le nombre d'événements dans un intervalle fixé et $X \sim Po(\lambda)$. Voici la façon de calculer des probabilités pour la loi de Poisson à l'aide de `R`:

Probabilités	Commande `R`
$P(X = k)$	`dpois(k, lambda)`
$P(i \leq X \leq j)$	`sum(dpois(i:j, lambda))`
$P(X \leq k)$	`ppois(k, lambda)`
$P(X > k)$	`1-ppois(k, lambda)`

Soit X le nombre d'erreurs dans une page. Si une page contient en moyenne une demie erreur alors $X \sim Po(1/2)$. Si nous voulons calculer $P(X = 2)$, nous aurons:

```
dpois(2, 1/2)
```

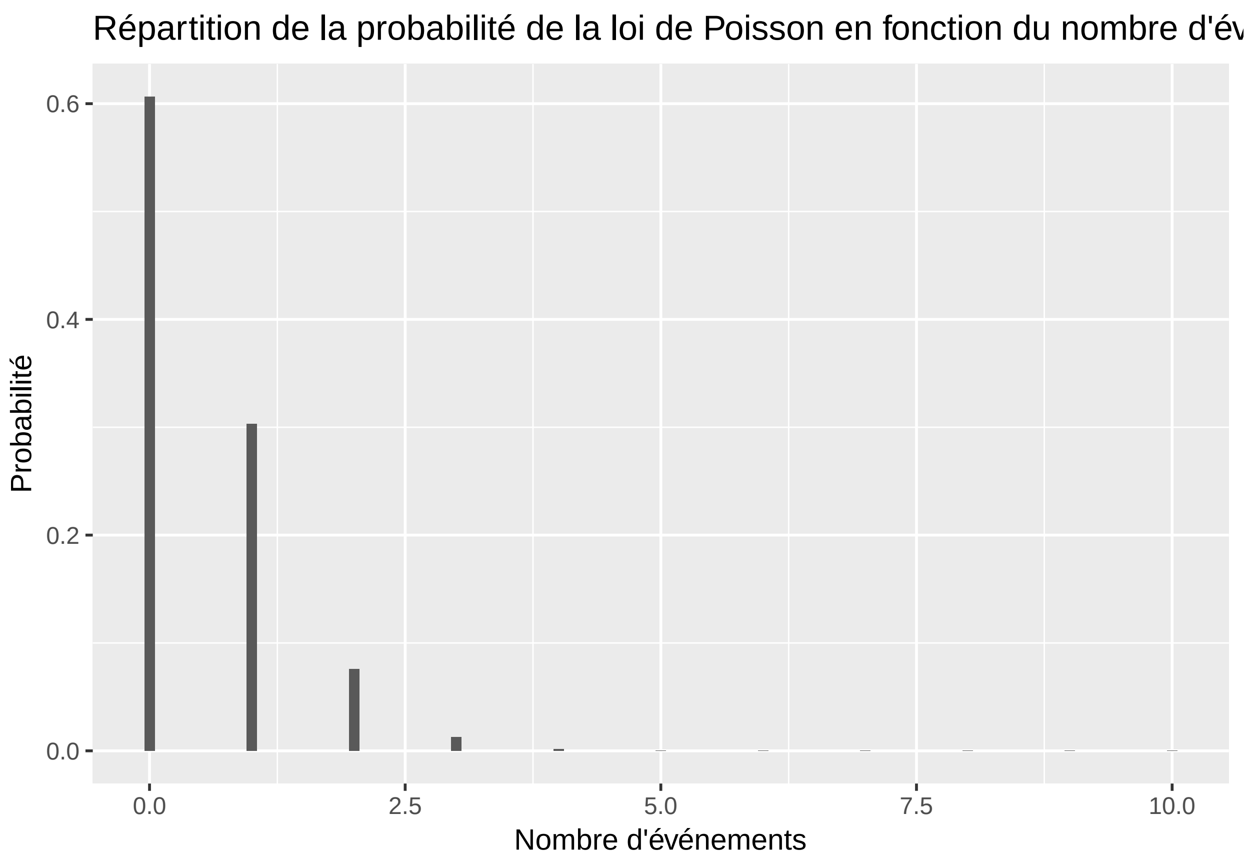
```
## [1] 0.07581633
```

Nous avons donc une probabilité de 7.5816332% d'obtenir deux erreurs sur une page.

Nous pouvons représenter graphiquement la loi de Poisson. Soit $X \sim Po(1/2)$. Nous aurons:

```
fpois <- data.frame(x = 0:10, y = dpois(0:10, 1/2))
ggplot(fpois, aes(x = x, y = y)) +
```

```r
  geom_bar(width = 0.1, stat = "identity") +
  labs(
    x = "Nombre d'événements",
    y = "Probabilité",
    title = "Répartition de la probabilité de la loi de Poisson en fonction du nombre d'événements"
  )
```



La loi géométrique

Le *nom racine* pour la loi géométrique est `geom`.

Soit X: le nombre d'échecs avant d'obtenir un succès et $X \sim G(p)$. Voici la façon de calculer des probabilités pour la loi géométrique à l'aide de `R`:

Probabilités	Commande `R`
$P(X = k)$	`dgeom(k, p)`
$P(i \leq X \leq j)$	`sum(dgeom(i:j, p))`
$P(X \leq k)$	`pgeom(k, p)`
$P(X > k)$	`1-pgeom(k, p)`

Soit X le nombre d'échecs avant d'avoir un premier succès. Si la probabilité de succès est $\frac{1}{5}$ alors $X \sim G(1/5)$. Si nous voulons calculer $P(X = 6)$, nous aurons:

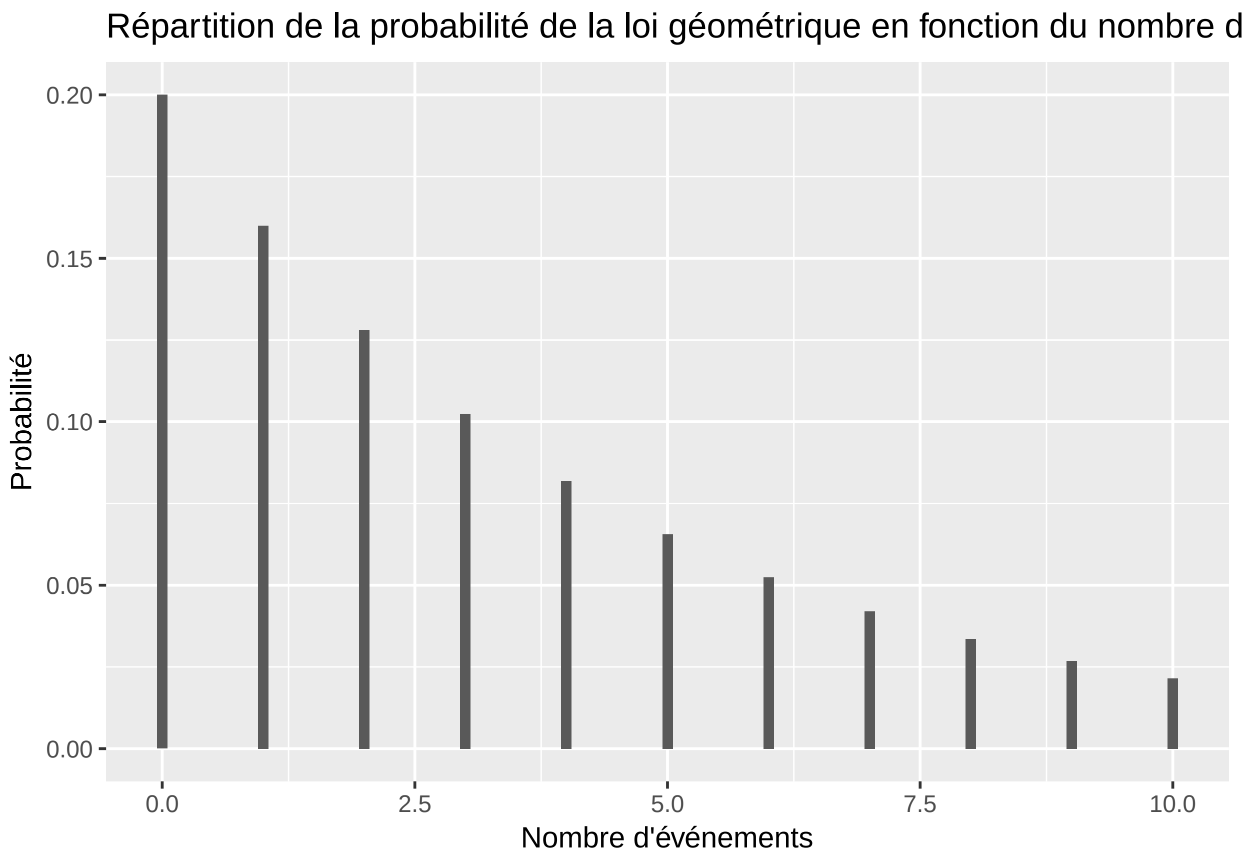
```
dgeom(6, 1/5)
```

```
## [1] 0.0524288
```

Nous avons donc une probabilité de 5.24288% d'obtenir 6 échecs avant un premier succès.

Nous pouvons représenter graphiquement la loi géométrique. Soit $X \sim G(1/5)$. Nous aurons:

```
fgeom <- data.frame(x = 0:10, y = dgeom(0:10, 1/5))
ggplot(fgeom, aes(x = x, y = y)) +
  geom_bar(width = 0.1, stat = "identity") +
  labs(
    x = "Nombre d'événements",
    y = "Probabilité",
    title = "Répartition de la probabilité de la loi géométrique en fonction du nombre d'échecs avant le
  )
```



> Remarque : Pour la loi géométrique, on rencontre parfois cette définition : la probabilité p'(k) est la probabilité, lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, d'obtenir k échecs avant un succès. On remarque qu'il ne s'agit que d'un décalage de la précédente loi géométrique. Si X suit la loi p, alors $X + 1$ suit la loi p'.

La loi hypergéométrique

Le *nom racine* pour la loi hypergéométrique est `hyper`.

On tire sans remise n objets d'un ensemble de N objets dont A possèdent une caractéristique particulière (et les autres $B = N - A$ ne la possèdent pas). Soit X le nombre d'objets de l'échantillon qui possèdent la caractéristique. Nous avons que $X \sim H(N, A, n)$.

Voici la façon de calculer des probabilités pour la loi hypergéométrique à l'aide de `R`:

Probabilités	Commande `R`
$P(X = k)$	`dhyper(k, A, B, n)`
$P(i \leq X \leq j)$	`sum(dhyper(i:j, A, B, n))`
$P(X \leq k)$	`phyper(k, A, B, n)`
$P(X > k)$	`1-phyper(k, A, B, n)`

Soit X le nombre de boules blanches de l'échantillon de taille 4. Si l'urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires, nous avons $X \sim H(13, 5, 4)$. Si nous voulons calculer $P(X = 2)$, nous aurons:

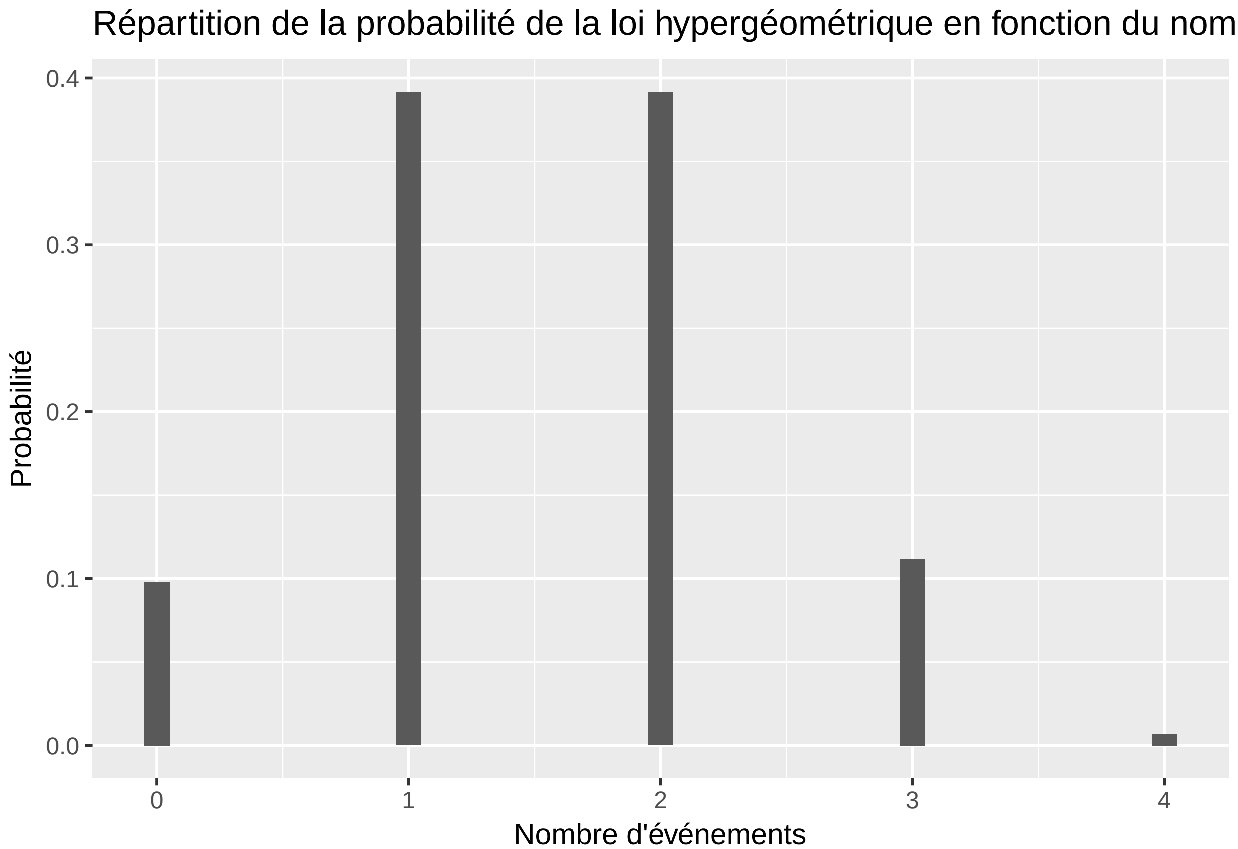
```
dhyper(2, 5, 8, 4)
```

```
## [1] 0.3916084
```

Nous avons donc une probabilité de 39.1608392% de piger 2 boules blanches dans un échantillon de taille 4.

Nous pouvons représenter graphiquement la loi hypergéométrique. Soit $X \sim H(13, 5, 4)$. Nous aurons:

```
fhyper <- data.frame(x = 0:4, y = dhyper(0:4, 5, 8, 4))
ggplot(fhyper, aes(x = x, y = y)) +
  geom_bar(width = 0.1, stat = "identity") +
  labs(
    x = "Nombre d'événements",
    y = "Probabilité",
    title = "Répartition de la probabilité de la loi hypergéométrique en fonction du nombre de boules bl
  )
```



Les lois de probabilités continues

La loi normale

Le *nom racine* pour la loi normale est `norm`.

Si X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2, nous avons $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Voici la façon de calculer des probabilités pour la loi normale à l'aide de `R`:

Probabilités	Commande `R`
$P(i \leq X \leq j)$	`pnorm(j, mu, sigma)-pnorm(i, mu, sigma)`
$P(X \leq k)$	`pnorm(k, mu, sigma)`
$P(X > k)$	`1-pnorm(k, mu, sigma)`

Soit $X \sim N(3, 25)$ une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne 3 et de variance 25. Si nous voulons calculer la probabilité $P(1.25 < X < 3.6)$ en `R`, nous pouvons utiliser la commande suivante:

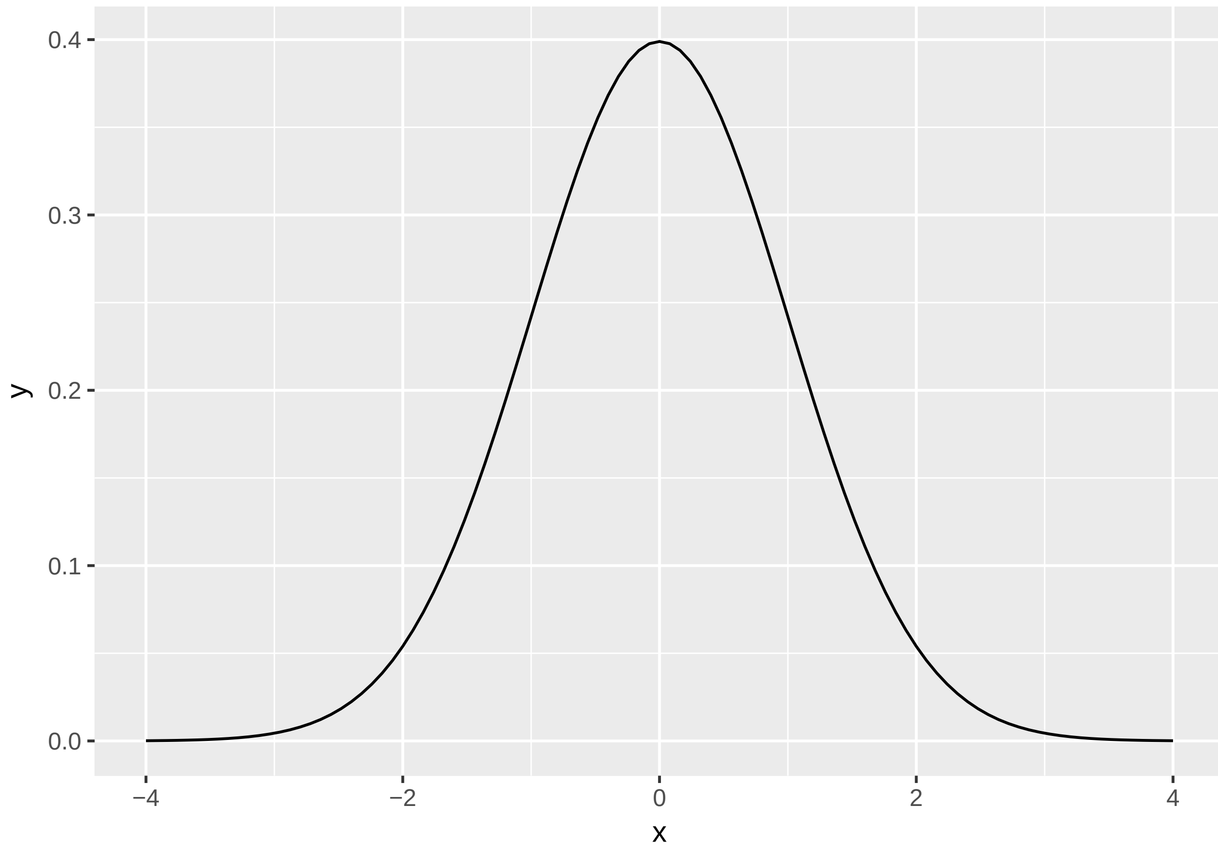
```
pnorm(3.6, 3, 5) - pnorm(1.25, 3, 5)
```

```
## [1] 0.1845891
```

La probabilité que notre variable aléatoire se trouve entre 1.25 et 3.6 est donc 18.4589077 %.

Nous pouvons représenter graphiquement la loi normale. Soit $X \sim N(0, 1)$. Nous aurons:

```r
ggplot(data = data.frame(x = c(-4, 4)), aes(x)) +
  stat_function(fun = dnorm, args = list(mean = 0, sd = 1))
```



La loi de Student

Le *nom racine* pour la loi de Student est `t`.

Si X suit une loi de Student à ν degrés de liberté, nous avons $X \sim T_\nu$.

Voici la façon de calculer des probabilités pour la loi de Student à l'aide de `R`:

Probabilités	Commande `R`
$P(i \leq X \leq j)$	`pt(j, nu)-pt(i, nu)`
$P(X \leq k)$	`pt(k, nu)`
$P(X > k)$	`1-pt(k, nu)`

Soit $X \sim T_5$ une variable aléatoire suivant une loi de Student à 5 degrés de liberté. Si nous voulons calculer la probabilité $P(X > 3)$ en `R`, nous pouvons utiliser la commande suivante:

```r
1 - pt(3, 5)
```

```
## [1] 0.01504962
```

La probabilité que notre variable aléatoire soit plus grande que 3 est donc 1.5049624 %.

Nous pouvons représenter graphiquement la loi de Student. Soit $X \sim T_5$. Nous aurons:

```r
ggplot(data = data.frame(x = c(-4, 4)), aes(x)) +
  stat_function(fun = dt, args = list(df = 5))
```