

Introduction au GPS

Marc-André Désautels

2018-03-20

Contents

Qu'est-ce que le GPS?	1
Comment fonctionne le GPS?	1
Le problème du GPS	2
Laboratoire en Maxima	5
Préalables	5
Questions sur les satellites	6
Questions sur votre position	6

Qu'est-ce que le GPS?

Le système GPS a été complètement déployé en 1995 par le Ministère américain de la défense qui autorise le public à s'en servir. En utilisant un récepteur GPS, un objet qui est maintenant à la portée de toutes les bourses et qu'on peut ranger dans sa poche, on peut connaître notre position à 15-20 mètres près.

Dans la plupart des techniques de positionnement, on détermine la position par rapport à des objets dont la position est connue : c'est ce qu'on appelle faire de la triangulation. Ce peut être par rapport au soleil ou aux étoiles, des antennes dans le système Loran, des satellites dans le système GPS.

Comment fonctionne le GPS?

Un minimum de 24 satellites bougent sur des orbites autour de la Terre à une altitude d'environ 20 000 km et émettent des signaux répétés périodiquement. Ces orbites, au nombre de 6, font un angle de 55 degrés avec le plan de l'équateur. Il y a au moins 4 satellites sur chacune. La distribution des satellites est telle qu'à tout instant sur la terre on peut capter le signal d'au moins 4 satellites.

Les signaux sont captés à l'aide d'un récepteur. Le récepteur calcule sa position sur la terre. Le principe est que le récepteur mesure les temps de parcours des signaux depuis les satellites jusqu'à lui. Étant donné que chaque signal voyage à la vitesse de la lumière, cela permet de calculer la distance entre le récepteur et chacun des satellites. La donnée de la distance d_1 entre un satellite S_1 et le récepteur permet de conclure que le récepteur se trouve sur une sphère de rayon d_1 centrée au satellite S_1 . Si on connaît la distance d_2 entre le récepteur et un deuxième satellite S_2 , on sait que le récepteur est aussi sur la sphère de rayon d_2 centrée en S_2 . L'intersection de ces deux sphères est un cercle C .

A FAIRE INSERER UNE IMAGE...

Enfin, si on connaît la distance d_3 entre le récepteur et un troisième satellite S_3 , alors on sait que le récepteur est sur la sphère de rayon d_3 centrée en S_3 . L'intersection de cette sphère avec le cercle C consiste en deux points. L'un de ces deux points se trouve toujours loin de la surface de la Terre (un avion est au maximum à 12 kilomètres d'altitude, ce qui est considéré proche) et est éliminé parce qu'irréaliste. Donc, en mesurant les temps de parcours de trois signaux depuis 3 satellites jusqu'à lui le récepteur peut calculer sa position (c'est-à-dire longitude, latitude et altitude).

En pratique les choses sont un peu plus compliquées, car les temps mesurés sont très petits et il faut donc faire des mesures très précises. Les satellites sont équipés d'horloges atomiques très coûteuses et parfaitement synchronisées alors que le récepteur a une horloge de qualité moindre. En plus des 3 inconnues qui sont les coordonnées de la position du récepteur, il y a donc une quatrième inconnue : le décalage entre l'horloge du récepteur et les horloges des satellites (lequel est le même avec tous les satellites). Le récepteur a alors besoin d'une quatrième mesure du temps de parcours du signal entre un quatrième satellite et le récepteur. Il obtient alors un système de 4 équations à 4 inconnues qui sont les trois coordonnées x , y et z donnant la position du récepteur et le décalage T entre l'horloge du récepteur et celle des satellites:

$$\left. \begin{array}{c} 4 \text{ satellites} \\ \Updownarrow \\ 4 \text{ équations} \end{array} \right\} \iff 4 \text{ inconnues } \left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ T \end{array} \right.$$

Ce système admet encore deux solutions dont l'une est de nouveau éliminée parce que non réaliste. C'est le récepteur qui est chargé de résoudre ce système. Comme la solution inclut le décalage T entre l'horloge du récepteur et celle des satellites, le récepteur peut alors ajuster son horloge sur celle des satellites.

Le problème du GPS

Pour simplifier le problème du GPS, nous utiliserons les coordonnées cartésiennes xyz , c'est-à-dire un système de coordonnées avec la Terre centrée à l'origine, l'axe des z positifs pointant vers le pôle nord, et les unités de mesure étant le rayon moyen de la Terre.

A FAIRE INSERER UNE IMAGE...

Nous allons également supposer que n'importe quel point sur la surface de la Terre satisfait à l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Le temps sera mesuré en millisecondes (un millième de seconde ou alors 10^{-3} seconde). Nous aurons besoin des constantes suivantes pour résoudre le problème:

$$\begin{aligned} c &= 299792458 \text{ ms}^{-1} && \text{vitesse de la lumière} \\ R_t &= 6\,378\,137 \text{ m} && \text{rayon moyen de la Terre} \end{aligned}$$

À partir des deux constantes précédentes, nous allons définir une troisième constante, la vitesse de la lumière en unités de rayons de la Terre et en millième de seconde, que nous pouvons calculer de la manière suivante:

$$v_c = \frac{c}{1000R_t}$$

Dans ce devoir, vous vous trouvez à un endroit célèbre sur la planète Terre et votre GPS reçoit simultanément 4 signaux provenant de 4 satellites différents. Ces 4 satellites vous envoient leur position en coordonnées cartésiennes et le temps en millisecondes de l'envoi du signal. Un exemple vous est donné dans la table suivante. Les nombres sont factices pour qu'il soit plus aisé de travailler avec ceux-ci, mais ils ne sont pas complètement irréalistes.

Les nombres se trouvant dans le tableau ci-dessous ne **sont pas** ceux que vous utiliserez pour ce laboratoire. Vous allez recevoir vos propres données qui seront distribuées par votre enseignante ou votre enseignant.

Satellite	x	y	z	t
1	2	0	2	103.538332
2	3	-2	3	70.815246
3	2	-1	-3	64.737496

Satellite	x	y	z	t
4	3	0	-2	68.627982

A FAIRE INSERER UNE IMAGE...

Soit (x, y, z) la position du GPS sur la Terre et t le temps où les signaux arrivent au GPS. Soit d_i la distance entre le récepteur GPS et le satellite i . Pour le satellite 1, nous pouvons mesurer d_1 en calculant la distance parcourue par le signal entre le moment où il a été émis et le moment où il a été reçu. Nous avons:

$$d_1 = v_c(t - 103.538332)$$

Si nous utilisons la distance euclidienne, nous avons:

$$d_1 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2}$$

En combinant ces deux équations, nous avons:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2} &= v_c(t - 103.538332) \\ (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 &= v_c^2(t - 103.538332)^2\end{aligned}$$

Si nous développons et réarrangons les termes pour que les variables linéaires soient à gauche du symbole d'égalité (en utilisant le fait que $v_c \approx 0.047003$), nous obtenons:

$$4x + 0y + 4z - 5.7376576636 \times 10^4 t = -2.970329515432 \times 10^6 + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2$$

Nous appellerons cette équation E_1 .

Nous pouvons faire de même pour les trois autres satellites.

$$\begin{aligned}6x - 4y + 6z - 3.9242822719 \times 10^4 t &= -1.389473076184 \times 10^6 + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2 \\ 4x - 2y - 6z - 3.5874790105 \times 10^4 t &= -1.161208047207 \times 10^6 + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2 \\ 6x + 0y - 4z - 3.8030733412 \times 10^4 t &= -1.304973252957 \times 10^6 + x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2\end{aligned}$$

Nous appellerons ces équations E_2 , E_3 et E_4 .

Remarquons que les termes quadratiques des quatre équations sont tous identiques. Nous pouvons donc les faire disparaître en faisant la différence entre les équations 2, 3 et 4 avec l'équation 1. Nous voulons donc trouver $L_1 = E_2 - E_1$, $L_2 = E_3 - E_1$ et $L_3 = E_4 - E_1$. Nous obtenons.

$$\begin{aligned}2x - 4y + 2z + 0.14459t &= 26.604883 \\ 0x - 2y - 10z + 0.171445t &= 20.425024 \\ 2x + 0y - 8z + 0.154255t &= 18.278716\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu un système d'équations linéaires de trois équations et quatre inconnues. La solution de ce système (trouvée par **Maxima**) est:

$$\begin{aligned}x &= 0.03012t + 4.802841 \\ y &= -0.026963t - 4.791865 \\ z &= -0.011752t - 1.084129\end{aligned}$$

Pour être en mesure de trouver la valeur du paramètre t , nous allons remplacer les équations précédentes dans la première équation (E_1) que nous avons trouvé précédemment. Nous avons donc:

$$(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = v_c^2(t-103.538332)^2$$

$$(0.03012t + 4.802841 - 2)^2 + (-0.026963t - 4.791865 - 0)^2 + (-0.011752t - 1.084129 - 2)^2 = v_c^2(t-103.538332)^2$$

Nous pouvons résoudre l'équation quadratique précédente à l'aide de **Maxima**. Nous obtenons deux valeurs de t .

$$t_1 = -249.421146957767$$

$$t_2 = 152.733718346294$$

En remplaçant dans les équations trouvées pour x , y et z , nous obtenons deux positions possibles.

x	y	z
12.315401	-11.517106	-4.015282
0.202504	-0.673646	0.710770

En calculant les normes des deux vecteurs, nous obtenons pour le premier 17.33307 et pour le second 1. Puisque la seconde est plus près de 1, le second vecteur correspond à la position de l'endroit où nous nous trouvons.

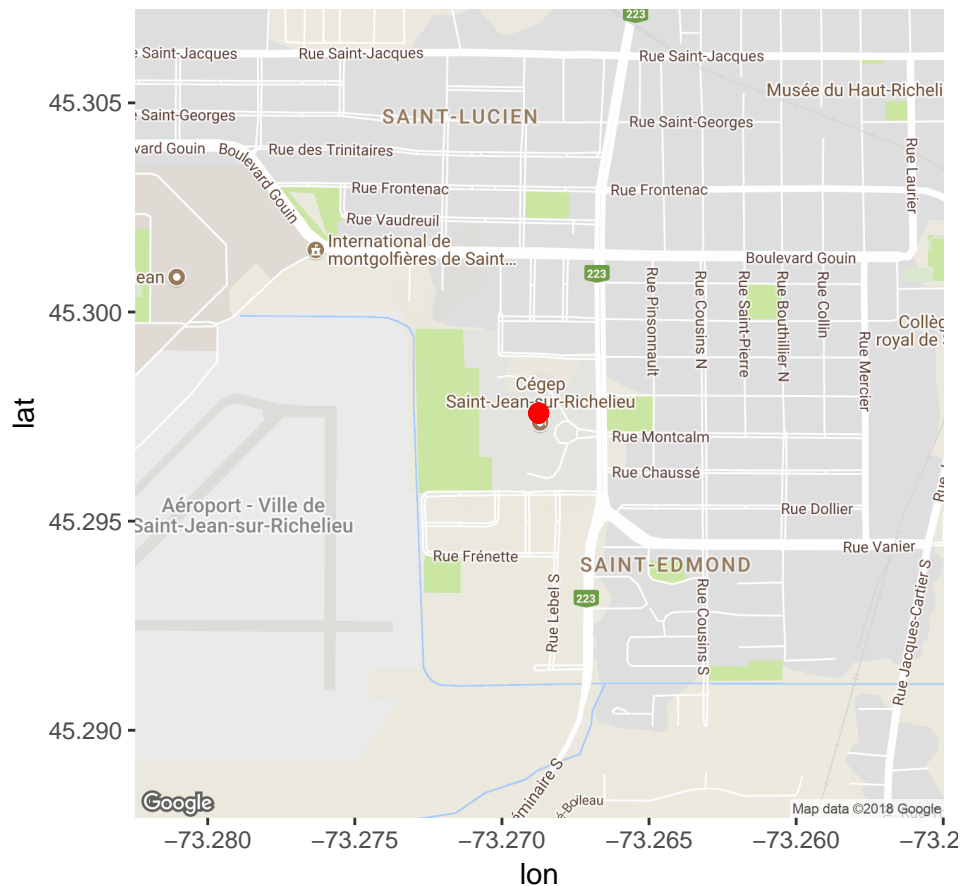
Pour convertir ces coordonnées cartésiennes en coordonnées géodétiques, c'est-à-dire en latitude et longitude, nous devons utiliser les formules suivantes:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\text{latitude} = \text{Arcsin} \left(\frac{z}{r} \right)$$

$$\text{longitude} = \text{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Nous nous trouvons donc à la latitude 45.297583° et à la longitude -73.26875° . En affichant cet endroit sur une carte, nous obtenons:



Nous sommes au cégep de Saint-Jean-sur-Richelieu.

Laboratoire en Maxima

Pour le reste du devoir, vous devez utiliser les informations que votre enseignant vous a distribué concernant vos satellites. De plus, vous devrez utiliser le logiciel **Maxima** pour faire ce devoir. Votre enseignant vous distribuera un fichier **Maxima** dans lequel vous pourrez répondre.

Écrivez vos réponses dans votre feuille Maxima en utilisant la commande **Cell** → **Insert Text** **Cell**.

Préalables

1. Définir dans **Maxima** les constantes c , R_t et v_c . Pour définir un élément dans **Maxima** effectuer la commande `..`. Par exemple, `c:299792458` ou `E:x^2-4=0`. **N'utilisez pas des valeurs arrondies pour ces constantes (par exemple $v_c \approx 0.047$) car vous n'obtiendrez pas la bonne localisation.**

Questions sur les satellites

Pour les questions suivantes, vous n'utilisez que les informations données par votre enseignant. Vous n'avez pas à connaître votre localisation finale pour y répondre.

2. Trouvez l'angle (en degrés) formé par votre satellite 1, le centre de la Terre et votre satellite 2.
3. Trouvez l'azimuth (en degrés) de votre satellite 4, c'est-à-dire l'angle formé par le satellite, le centre de la Terre et le nord géographique.
4. Trouvez l'angle (en degrés) formé par votre satellite 3, le centre de la Terre et le plan de l'équateur.

Questions sur votre position

Pour être en mesure de trouver votre position sur la Terre, nous vous invitons à utiliser les explications données plus tôt dans ce document et à suivre les étapes suivantes.

- À partir de vos données, trouvez 4 équations similaires à celles présentées plus haut que vous noterez E_1 , E_2 , E_3 et E_4 . Écrivez toutes les équations dans le même format, c'est-à-dire développez vos équations.
 - Vous devriez remarquer que les 4 équations ont toutes le même terme quadratique, $x^2 + y^2 + z^2 - v_c^2 t^2$. Utilisez l'équation E_1 pour éliminer le terme quadratique, créant ainsi un système d'équations linéaires de trois équations L_1 , L_2 et L_3 à 4 inconnues x , y , z et t . Vous pouvez le faire en soustrayant l'équation E_1 de chaque autre équation, c'est-à-dire $L_1 = E_2 - E_1$, $L_2 = E_3 - E_1$ et $L_3 = E_4 - E_1$.
 - Résolvez le système d'équations linéaires composé des équations L_1 , L_2 et L_3 à l'aide du logiciel **Maxima**. Notez que vous avez 3 équations et 4 inconnues. Choisissez la variable appropriée comme paramètre de votre ensemble solution. (Remarque: Il pourrait être utile d'utiliser les commandes **expand** et **float**.)
 - Vous obtenez des fonctions pour les variables x , y et z avec un paramètre. Définir les fonctions obtenues de votre ensemble solution à l'aide de la commande **:=**. Remplacez les fonctions dans l'équation E_1 et résolvez pour la variable indépendante (le paramètre choisi précédemment). Vous devriez obtenir une équation quadratique et vous devriez obtenir deux solutions. Déterminez quelle solution est la bonne.
5. Donnez la localisation de votre GPS en coordonnées cartésiennes. Vous devez donner votre réponse en mètre en utilisant le fait que le rayon moyen de la Terre est d'environ 6 378 137 m.
 6. Donnez la distance entre votre position et le centre de la Terre.
 7. Donnez l'altitude de votre position.
 8. Vous devez maintenant convertir vos coordonnées cartésiennes en coordonnées géodétiques, c'est-à-dire en latitude et longitude. Pour ce faire, utilisez les formules suivantes.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\text{latitude} = \text{Arcsin}\left(\frac{z}{r}\right)$$
$$\text{longitude} = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Assurez-vous de donner vos réponses en degrés et non pas en radians. (Remarque: Il pourrait être utile d'utiliser les commandes **asin** **atan2(y,x)** ainsi que la constante **%pi**.)

9. Vous devez maintenant utiliser vos coordonnées géodétiques pour localiser la position de votre GPS. Pour ce faire, utilisez le site web Google Maps et tapez vos coordonnées dans le champ de recherche (entrez seulement la latitude et la longitude séparées par un espace).
10. À quel endroit, dans la liste suivante, vous trouvez-vous?

En raison de l'approximation utilisée pour les temps des satellites, il est fort probable que vous ne vous trouverez pas exactement sur l'endroit recherché. Par contre, vous devriez vous trouver très près.

- L'acropole d'Athènes en Grèce
- L'Alhambra de Grenade en Espagne
- Angkor au Cambodge
- Chichén Itza au Mexique
- Le Christ Rédempteur à Rio de Janeiro au Brésil
- Le Colisée à Rome en Italie
- Les Moaïs de l'île de Pâques au Chili
- La Tour Eiffel à Paris en France
- La Grande Muraille de Chine
- La Basilique Sainte-Sophie à Istanbul en Turquie
- Les temples de Kiyomizu-dera à Kyoto au Japon
- Le Kremlin à Moscou en Russie
- Le Machu Pichu au Pérou
- Le château de Neuschwanstein en Bavière en Allemagne
- Pétra en Jordanie
- La statue de la liberté à New York aux États-Unis
- Stonehenge au Royaume-Uni
- L'opéra de Sydney en Australie
- Le Taj Mahal à Agra en Inde
- La ville de Tombouctou au Mali
- La Pyramide de Khéops en Égypte