Trois applications méconnues pour sciences de la nature

Éric Brunelle et Marc-André Désautels

Département de mathématiques
Cégep de Saint-Jean-sur-Richelieu

4 octobre 2014
58e congrès de l'Association Mathématique du Québec

Table des matières

Énoncé de la compétence

Compétence 00UN

Appliquer les méthodes de calcul différentiel à l'étude de fonctions et à la résolution de problèmes.

Lignes directrices

Une question préalable

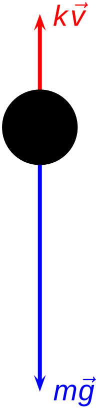
Soit deux parachutistes qui se laissent tomber d'un avion au même moment. Si l'un de des parachutistes est plus lourd que l'autre, lequel des deux arrivera au sol en premier ?

Le problème

Soit un objet de masse m qui tombe sous l'effet d'une force $m\vec{g}$ dans un milieu visqueux. De plus, supposons que la friction du milieu est proportionnelle à la vitesse avec une constante de proportionnalité k.

Note : Nous pourrions également étudier le cas où la friction du milieu est proportionnelle au carré de la vitesse avec une nouvelle constante de proportionnalité k.

Le problème de façon imagée

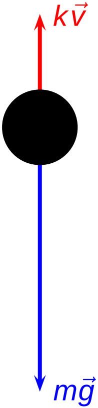


À l'aide de la seconde loi de Newton, nous avons :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

Le problème de façon imagée



À l'aide de la seconde loi de Newton, nous avons :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$
$$m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$$

Réécriture de l'équation différentielle

Pour simplifier l'écriture de l'équation différentielle, nous allons enlever les notations vectorielles puisque le mouvement est restreint à l'axe des y.

De plus, en posant :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

nous avons :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

où v est une fonction qui dépend du temps t et $g = 9,81ms^{-2}$.

Réécriture de l'équation différentielle

Pour simplifier l'écriture de l'équation différentielle, nous allons enlever les notations vectorielles puisque le mouvement est restreint à l'axe des y.
De plus, en posant :

$$a = \frac{dv}{dt}$$

nous avons :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

où v est une fonction qui dépend du temps t et $g = 9,81ms^{-2}$.

Une équation différentielle du premier ordre

L'équation différentielle $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$ se résoud avec les techniques du calcul intégral. Elle peut donc être utilisée dans ce cours.

Par contre, il est possible d'utiliser cette application dans le cours de calcul différentiel en posant d'autres types de questions.

Une équation différentielle du premier ordre

L'équation différentielle $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$ se résoud avec les techniques du calcul intégral. Elle peut donc être utilisée dans ce cours.

Par contre, il est possible d'utiliser cette application dans le cours de calcul différentiel en posant d'autres types de questions.

Lignes directrices

La solution de l'équation différentielle

Nous pouvons donner la solution de cette équation différentielle et demander aux étudiantes et aux étudiants de vérifier si c'est bel et bien la solution.

Soit l'équation différentielle $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$, sa solution est donnée par :

$$v(t) = \frac{mg}{k} - Ce^{-\frac{kt}{m}}$$

où C est une constante d'intégration.

La solution de l'équation différentielle

Nous pouvons donner la solution de cette équation différentielle et demander aux étudiantes et aux étudiants de vérifier si c'est bel et bien la solution.
Soit l'équation différentielle $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$, sa solution est donnée par :

$$v(t) = \frac{mg}{k} - Ce^{-\frac{kt}{m}}$$

où C est une constante d'intégration.

Trouver la constante d'intégration

Nous pouvons donner une condition initiale au problème et demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la constante d'intégration.

Si l'objet possède une vitesse initiale v_0, nous avons :

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0\right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

En particulier, si $v_0 = 0$, c'est-à-dire que l'objet part au repos, nous avons :

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\frac{kt}{m}}$$

Trouver la constante d'intégration

Nous pouvons donner une condition initiale au problème et demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la constante d'intégration.
Si l'objet possède une vitesse initiale v_0, nous avons :

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0\right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

En particulier, si $v_0 = 0$, c'est-à-dire que l'objet part au repos, nous avons :

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\frac{kt}{m}}$$

Trouver la constante d'intégration

Nous pouvons donner une condition initiale au problème et demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la constante d'intégration.

Si l'objet possède une vitesse initiale v_0, nous avons :

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0\right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

En particulier, si $v_0 = 0$, c'est-à-dire que l'objet part au repos, nous avons :

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\frac{kt}{m}}$$

Trouver la vitesse limite de l'objet

Nous pouvons demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la vitesse limite de l'objet. Cette vitesse dépend-elle de la vitesse initiale ?

Si l'objet possède une vitesse initiale v_0, nous avons :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} v(t) &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0\right)e^{-\frac{kt}{m}}\right)\\ &= \frac{mg}{k}\end{aligned}$$

La vitesse limite ne dépend pas de la vitesse initiale mais elle dépend de la masse.

Trouver la vitesse limite de l'objet

Nous pouvons demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la vitesse limite de l'objet. Cette vitesse dépend-elle de la vitesse initiale ?
Si l'objet possède une vitesse initiale v_0, nous avons :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} v(t) &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0\right)e^{-\frac{kt}{m}}\right)\\ &= \frac{mg}{k}\end{aligned}$$

La vitesse limite ne dépend pas de la vitesse initiale mais elle dépend de la masse.

Trouver la vitesse limite de l'objet

Nous pouvons demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la vitesse limite de l'objet. Cette vitesse dépend-elle de la vitesse initiale ?
Si l'objet possède une vitesse initiale v_0, nous avons :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} v(t) &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0\right)e^{-\frac{kt}{m}}\right)\\ &= \frac{mg}{k}\end{aligned}$$

La vitesse limite ne dépend pas de la vitesse initiale mais elle dépend de la masse.

Trouver la position de l'objet

Nous pouvons demander aux étudiantes et aux étudiants de vérifier si la fonction :

$$y(t) = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2} e^{-\frac{kt}{m}} + C$$

où C est une constante d'intégration est une solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dy}{dt} = v(t)$$

Trouver la valeur de k

Nous pouvons demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la valeur de k.

Une façon simple de trouver k est d'utiliser la vitesse limite (v_∞) de l'objet. Puisque nous connaissons m et g, et si nous connaissons v_∞, nous avons :

$$k = \frac{mg}{v_\infty}$$

Quelles sont les unités de k ?

Trouver la valeur de k

Nous pouvons demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la valeur de k.
Une façon simple de trouver k est d'utiliser la vitesse limite (v_∞) de l'objet. Puisque nous connaissons m et g, et si nous connaissons v_∞, nous avons :

$$k = \frac{mg}{v_\infty}$$

Quelles sont les unités de k ?

Trouver la valeur de k

Nous pouvons demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la valeur de k.
Une façon simple de trouver k est d'utiliser la vitesse limite (v_∞) de l'objet. Puisque nous connaissons m et g, et si nous connaissons v_∞, nous avons :

$$k = \frac{mg}{v_\infty}$$

Quelles sont les unités de k ?

Trouver la valeur de k

Nous pouvons demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la valeur de k.
Une façon simple de trouver k est d'utiliser la vitesse limite (v_∞) de l'objet. Puisque nous connaissons m et g, et si nous connaissons v_∞, nous avons :

$$k = \frac{mg}{v_\infty}$$

Quelles sont les unités de k ? $kg \cdot s^{-1}$

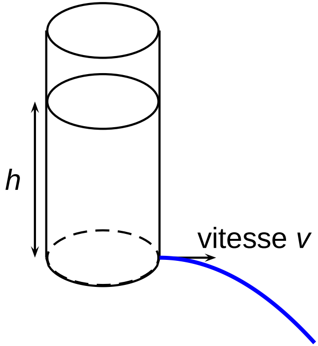
Lignes directrices

Une vidéo du problème

Une vidéo de la chute de deux billes de masses différentes.

Lignes directrices

Le problème

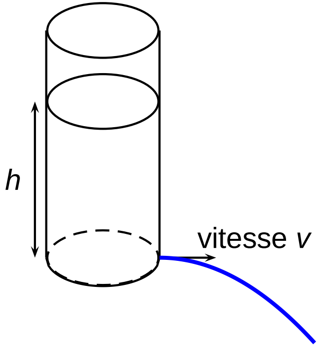


La principe de Torricelli établit que la variation du volume contenu dans une cuve sous l'effet de la pesanteur est proportionnelle à la hauteur de fluide située au-dessus de l'ouverture par lequel s'échappe le fluide. Nous avons donc :

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha\sqrt{h}$$

où V est le volume de la cuve et α est une constante qui dépend du liquide, de la forme du trou et de $g = 9,81ms^{-2}$.

Le problème



La principe de Torricelli établit que la variation du volume contenu dans une cuve sous l'effet de la pesanteur est proportionnelle à la hauteur de fluide située au-dessus de l'ouverture par lequel s'échappe le fluide. Nous avons donc :

$$\frac{dV}{dt} = -\alpha\sqrt{h}$$

où V est le volume de la cuve et α est une constante qui dépend du liquide, de la forme du trou et de $g = 9,81 ms^{-2}$.

Les volumes de solides de révolution

Puisque nous avons besoin de de trouver le volume du contenant en fonction de la hauteur de liquide dans le contenant, le principe de Torricelli s'applique particulièrement bien aux problèmes où nous pouvons trouver le volume d'un solide de révolution.

En particulier, nous pouvons trouver le volume d'un cylindre, d'un cône, d'une sphère ou d'un paraboloïde de révolution. Ces exemples s'utilisent d'une façon similaire au problème que nous verrons maintenant.

Les volumes de solides de révolution

Puisque nous avons besoin de de trouver le volume du contenant en fonction de la hauteur de liquide dans le contenant, le principe de Torricelli s'applique particulièrement bien aux problèmes où nous pouvons trouver le volume d'un solide de révolution.
En particulier, nous pouvons trouver le volume d'un cylindre, d'un cône, d'une sphère ou d'un paraboloïde de révolution. Ces exemples s'utilisent d'une façon similaire au problème que nous verrons maintenant.

Lignes directrices

Un contenant cylindrique

Dans le cas le plus simple, celui d'un contenant cylindrique de rayon r, le volume de liquide en fonction de la hauteur est donné par $V(y) = \pi r^2 y$.

Nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = -\alpha\sqrt{y}$$

$$\pi r^2 \frac{dy}{dt} = -\alpha\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\alpha\sqrt{y}}{\pi r^2}$$

Un contenant cylindrique

Dans le cas le plus simple, celui d'un contenant cylindrique de rayon r, le volume de liquide en fonction de la hauteur est donné par $V(y) = \pi r^2 y$.
Nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} &= -\alpha\sqrt{y} \\ \pi r^2 \frac{dy}{dt} &= -\alpha\sqrt{y} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\alpha\sqrt{y}}{\pi r^2} \end{aligned}$$

Résoudre une équation différentielle à variables séparables

Nous pouvons demander aux étudiantes et aux étudiants de résoudre l'équation différentielle précédente. La solution est donnée par :

$$y(t) = \left(C - \frac{\alpha}{\pi r^2} t\right)^2$$

où C est une constante d'intégration.

Trouver la constante d'intégration

Nous pouvons donner une condition initiale au problème et demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la constante d'intégration.

Si la hauteur initiale du liquide est noté y_0, nous avons :

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\sqrt{y_0} - \frac{\alpha}{\pi r^2}t\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{y_0} - kt\right)^2 \end{aligned}$$

où $k = \dfrac{\alpha}{\pi r^2}$.

Nous pouvons simplifier davantage le problème en posant $y_0 = 1$ unité.

Trouver la constante d'intégration

Nous pouvons donner une condition initiale au problème et demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la constante d'intégration.

Si la hauteur initiale du liquide est noté y_0, nous avons :

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\sqrt{y_0} - \frac{\alpha}{\pi r^2} t\right)^2 \\ &= (\sqrt{y_0} - kt)^2 \end{aligned}$$

où $k = \dfrac{\alpha}{\pi r^2}$.

Nous pouvons simplifier davantage le problème en posant $y_0 = 1$ unité.

Trouver la constante d'intégration

Nous pouvons donner une condition initiale au problème et demander aux étudiantes et aux étudiants de trouver la constante d'intégration.
Si la hauteur initiale du liquide est noté y_0, nous avons :

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\sqrt{y_0} - \frac{\alpha}{\pi r^2} t\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{y_0} - kt\right)^2 \end{aligned}$$

où $k = \dfrac{\alpha}{\pi r^2}$.
Nous pouvons simplifier davantage le problème en posant $y_0 = 1$ unité.

Trouver la constante k

Pour être en mesure de trouver la constante k, il suffit d'observer le temps nécessaire pour que la hauteur de liquide diminue de moitié [1].

Si ce temps nécessaire est noté $t_{\frac{1}{2}}$, nous avons alors :

$$k = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}t_{\frac{1}{2}}} \approx 0,29 \cdot \frac{1}{t_{\frac{1}{2}}}$$

1. Bien sûr, nous pourrions choisir n'importe quelle fraction inférieure à 1 de la hauteur initiale

Trouver la constante k

Pour être en mesure de trouver la constante k, il suffit d'observer le temps nécessaire pour que la hauteur de liquide diminue de moitié [1].
Si ce temps nécessaire est noté $t_{\frac{1}{2}}$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}t_{\frac{1}{2}}} \\ &\approx 0,29 \cdot \frac{1}{t_{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

1. Bien sûr, nous pourrions choisir n'importe quelle fraction inférieure à 1 de la hauteur initiale

Prédire le temps pour arriver au quart du contenant

Pour être en mesure de prédire le temps nécessaire pour que la cuve se vide au quart, nous utilisons l'équation suivante :

$$\frac{1}{4} = \left(1 - kt_{\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$t_{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}t_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} - 1}$$

Prédire le temps pour arriver au quart du contenant

Pour être en mesure de prédire le temps nécessaire pour que la cuve se vide au quart, nous utilisons l'équation suivante :

$$\frac{1}{4} = \left(1 - kt_{\frac{1}{4}}\right)^2$$

$$t_{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}t_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} - 1}$$

Prédire le temps de vidage complet

Pour être en mesure de prédire le temps nécessaire pour que la cuve se vide au complet, nous utilisons l'équation suivante :

$$0 = (1 - kt_v)^2$$

$$t_v = \frac{\sqrt{2}t_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} - 1}$$

Prédire le temps de vidage complet

Pour être en mesure de prédire le temps nécessaire pour que la cuve se vide au complet, nous utilisons l'équation suivante :

$$0 = (1 - kt_v)^2$$

$$t_v = \frac{\sqrt{2}t_{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} - 1}$$

Lignes directrices

Un vidéo du problème

Un vidéo d'une cuve cylindrique se vidant.

Les résultats à partir du vidéo

Temps	Vidéo	Prédiction
$t_{\frac{1}{2}}$	$\approx$ 20 s	
$t_{\frac{1}{4}}$	$\approx$ 34,5 s	34,14 s
t_v	$\approx$ 68 s	68,28 s

Pour aller plus loin

Il est possible d'aller plus loin avec les étudiantes et étudiants en s'intéressant aux cuves de formes coniques, sphériques et paraboloïdes. Il est relativement simple de trouver le temps de vidage pour ces cuves. De plus, cela permet de trouver des volumes de solides de révolutions ainsi que des solutions d'équations différentielles.

Lignes directrices

Problématique

Comment faire pour qu'un calculateur donne $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ ou $\tan(\theta)$ le plus rapidement possible ?

Première solution

Les séries de Taylor ?

- Converge trop lentement

Première solution

Les séries de Taylor ?

- Converge trop lentement
- Temps de calcul trop long à cause des multiplications et des puissances.

$$\tan(\theta) = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \ldots$$

Première solution

Les séries de Taylor ?

- Converge trop lentement
- Temps de calcul trop long à cause des multiplications et des puissances.

$$\tan(\theta) = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{15}\theta^5 + \dots$$

- Intervalle de convergence

Les opérations les plus rapides pour un ordinateur

1. Les additions et soustractions

Les opérations les plus rapides pour un ordinateur

1. Les additions et soustractions
2. Vérifier si un nombre est plus grand qu'un autre

Les opérations les plus rapides pour un ordinateur

1. Les additions et soustractions
2. Vérifier si un nombre est plus grand qu'un autre
3. Chercher une valeur dans une table mémorisée

Les opérations les plus rapides pour un ordinateur

1. Les additions et soustractions
2. Vérifier si un nombre est plus grand qu'un autre
3. Chercher une valeur dans une table mémorisée
4. Effectuer des opérations de type "bitshift"

Deuxième solution

Algorithme CORDIC

- Créé par Jack E. Volder en 1959

Deuxième solution

Algorithme CORDIC

- Créé par Jack E. Volder en 1959
- CORDIC : Coordinate Rotation Digital Computer

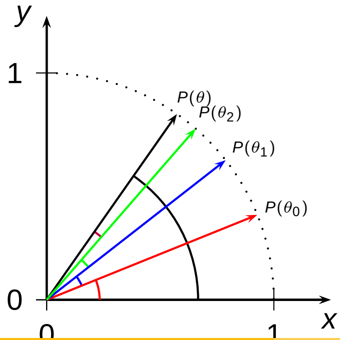
Deuxième solution

Algorithme CORDIC

- Créé par Jack E. Volder en 1959
- CORDIC : Coordinate Rotation Digital Computer
- Cet algorithme n'utilise que les 4 opérations précédentes

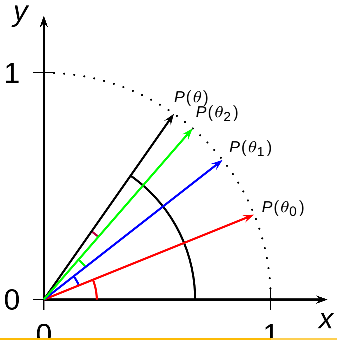
L'algorithme CORDIC

- On a que $\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$ avec $|\theta_i| > |\theta_{i+1}|$



L'algorithme CORDIC

- On a que $\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$ avec $|\theta_i| > |\theta_{i+1}|$
- Ainsi, l'angle θ peut être obtenu par une suite de rotations d'angles de plus en plus petits du vecteur $[1, 0]$



L'algorithme CORDIC : suite

Soit $P(\theta_i) = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \\
&= \cos(\theta_i) \begin{bmatrix} 1 & \tan(\theta_i) \\ -\tan(\theta_i) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

L'algorithme CORDIC : suite

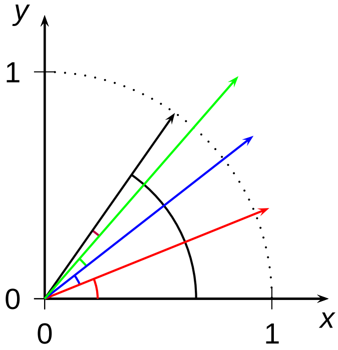
Soit $P(\theta_i) = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ -\sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \\ &= \cos(\theta_i) \begin{bmatrix} 1 & \tan(\theta_i) \\ -\tan(\theta_i) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cependant, il reste toujours des fonctions trigonométriques à calculer.

L'algorithme CORDIC : suite

Le $\cos(\theta_i)$ sert de contraction du vecteur puisqu'il est entre 0 et 1. S'il n'est pas là, on a alors



Oublions le $\cos(\theta_i)$ pour l'instant, car il ne change pas les rapports trigonométriques.

L'algorithme CORDIC : suite

Donc, les itérations suivantes nous donne les triangles semblables

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \tan(\theta_i) \\ -\tan(\theta_i) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_i + \tan(\theta_i) \cdot y_i \\ y_i - \tan(\theta_i) \cdot x_i \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Il reste toujours deux problèmes : le calcul de $\tan(\theta_i)$ et le produit.

L'algorithme CORDIC : suite

Donc, les itérations suivantes nous donne les triangles semblables

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan(\theta_i) \\ -\tan(\theta_i) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_i + \tan(\theta_i) \cdot y_i \\ y_i - \tan(\theta_i) \cdot x_i \end{bmatrix}$$

Il reste toujours deux problèmes : le calcul de $\tan(\theta_i)$ et le produit.
Cependant, il nous reste le choix des θ_i ! !

L'algorithme CORDIC : suite

Choisissons les θ_i de manière à ce que $\tan(\theta_i) = 2^{-i}$.

L'algorithme CORDIC : suite

Choisissons les θ_i de manière à ce que $\tan(\theta_i) = 2^{-i}$.

1. Pas de calculs de tangentes

L'algorithme CORDIC : suite

Choisissons les θ_i de manière à ce que $\tan(\theta_i) = 2^{-i}$.

1. Pas de calculs de tangentes
2. La multiplication par 2^{-i} revient à déplacer une virgule "bitshift", en base 2.

L'algorithme CORDIC : suite

De cette manière, nous venons de fixer les θ_i !

L'algorithme CORDIC : suite

De cette manière, nous venons de fixer les θ_i !

1. θ_0 à θ_5 sont gardés en mémoire dans la calculatrice.

L'algorithme CORDIC : suite

De cette manière, nous venons de fixer les θ_i !

1. θ_0 à θ_5 sont gardés en mémoire dans la calculatrice.
2. Pour les autres angles, nous considérons que $\tan(\theta_i) \approx \theta_i$ car les angles sont petits

L'algorithme CORDIC : suite

De cette manière, nous venons de fixer les θ_i !

1. θ_0 à θ_5 sont gardés en mémoire dans la calculatrice.
2. Pour les autres angles, nous considérons que $\tan(\theta_i) \approx \theta_i$ car les angles sont petits
3. Par contre, nous ne pourrons pas seulement faire des additions, mais aussi des soustractions d'angle afin de converger vers l'angle recherché.

Lignes directrices

Un exemple d'utilisation de l'algorithme CORDIC

Exemple de suite pour s'approcher de $\theta = 55°$.

$\tan(\theta_i)$	θ_i	Signe σ_i	$\sum \sigma_i \theta_i$
$2^0 = 1$	$0.785398 \equiv 45°$	+	$45°$
$2^{-1} = 0.5$	$0.4636 \equiv 26.566°$	+	71.566
$2^{-2} = 0.25$	$0.2449 \equiv 14.036°$	-	57.53
$2^{-3} = 0.125$	$0.124 \equiv 7.165°$	-	50.365
$2^{-4} = 0.0625$	$0.0624 \equiv 3.5763°$	+	53.9143
$2^{-5} = 0.03125$	$0.03122 \equiv 1.7899°$	+	55.7312
$2^{-6} = 0.015625$	$0.015623 \equiv 0.895°$	-	54.8362

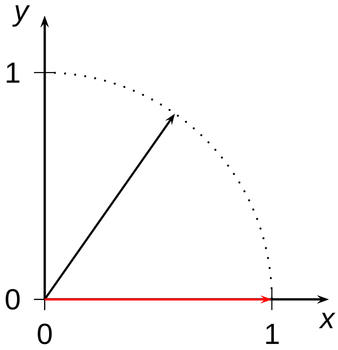
Un exemple d'utilisation de l'algorithme CORDIC

Le vecteur obtenu en effectuant des rotations pour s'approcher de $\theta = 55°$.

$\sum \sigma_i \theta_i$	x_i	y_i	$\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$
0°	1	0	1
45°	1	1	1.4142
71.5651°	0.5	1.5	1.5811
57.5288°	0.875	1.375	1.6298
50.4038°	1.0469	1.2656	1.6425
53.9801°	0.96777	1.3311	1.6457
55.77°	0.92618	1.3613	1.6465
54.8749°	0.94745	1.3468	1.6467
55.3225°	0.93693	1.3542	1.6467
55.0987°	0.94222	1.3506	1.6468

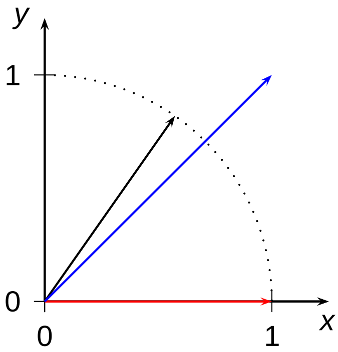
Une visualisation des itérations de CORDIC

Voici quelques itérations successives de l'algorithme lorsque nous désirons effectuer une rotation de 55°.



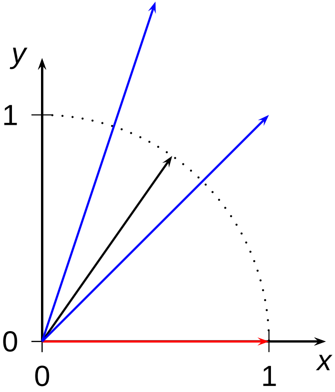
Une visualisation des itérations de CORDIC

Voici quelques itérations successives de l'algorithme lorsque nous désirons effectuer une rotation de 55°.



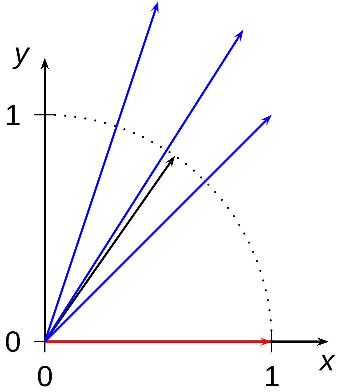
Une visualisation des itérations de CORDIC

Voici quelques itérations successives de l'algorithme lorsque nous désirons effectuer une rotation de 55°.



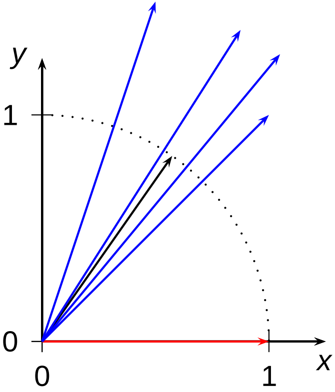
Une visualisation des itérations de CORDIC

Voici quelques itérations successives de l'algorithme lorsque nous désirons effectuer une rotation de 55°.



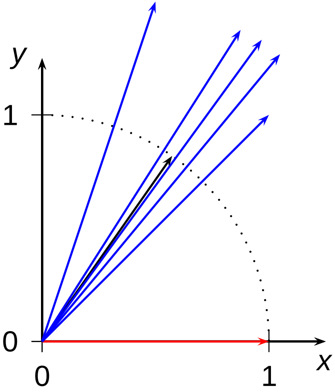
Une visualisation des itérations de CORDIC

Voici quelques itérations successives de l'algorithme lorsque nous désirons effectuer une rotation de 55°.



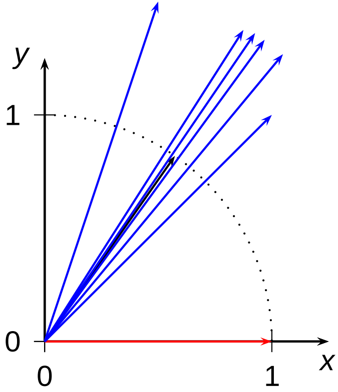
Une visualisation des itérations de CORDIC

Voici quelques itérations successives de l'algorithme lorsque nous désirons effectuer une rotation de 55°.



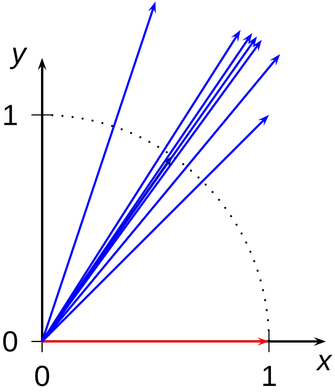
Une visualisation des itérations de CORDIC

Voici quelques itérations successives de l'algorithme lorsque nous désirons effectuer une rotation de 55°.



Une visualisation des itérations de CORDIC

Voici quelques itérations successives de l'algorithme lorsque nous désirons effectuer une rotation de 55°.



Utiliser le vecteur obtenu pour obtenir le sinus et le cosinus

Pour trouver le sinus et le cosinus en utilisant les triangles semblables, il faut calculer des racines carrées, ce qui nécessite des opérations supplémentaires.

Utiliser le vecteur obtenu pour obtenir le sinus et le cosinus

Pour trouver le sinus et le cosinus en utilisant les triangles semblables, il faut calculer des racines carrées, ce qui nécessite des opérations supplémentaires.

1. Astuce : au lieu de choisir le vecteur $[1, 0]$ au départ, on choisit le vecteur

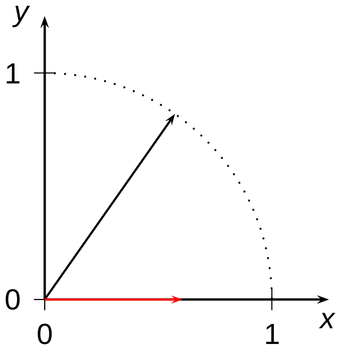
$$[\cos(\theta_0) \cdot \cos(\theta_1) \cdot \ldots \cos(\theta_n), 0]$$

où n est le nombre d'itérations fait dans le calculateur et est fixe. D'où le produit des cosinus précédents est une constante.

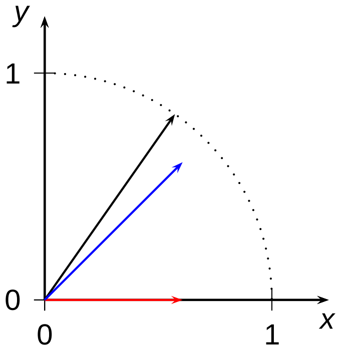
Exemple

$\sum \sigma_i \theta_i$	x_i	y_i	$\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$
0°	0.60725	0	0.60725
45°	0.60725	0.60725	0.85879
71.5651°	0.30363	0.91088	0.96015
57.5288°	0.53135	0.83497	0.9897
50.4038°	0.63572	0.76856	0.99741
53.9801°	0.58768	0.80829	0.99935
55.77°	0.56243	0.82665	0.99984
54.8749°	0.57534	0.81787	0.99996
55.3225°	0.56895	0.82236	0.99999
55.0987°	0.57216	0.82014	1

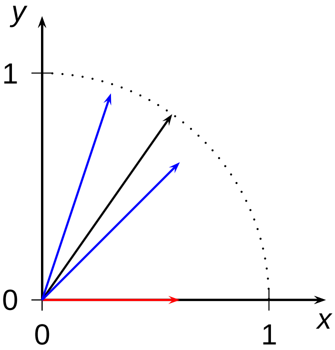
Visualisation



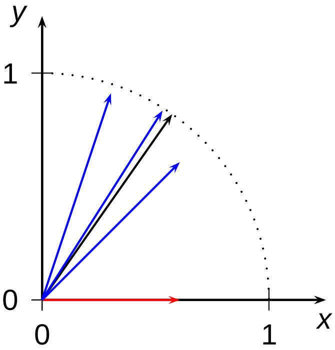
Visualisation



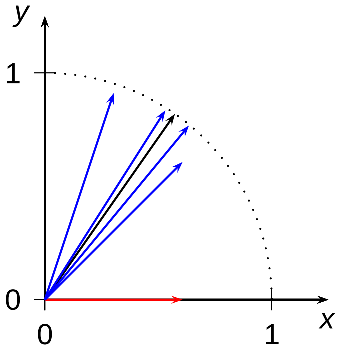
Visualisation



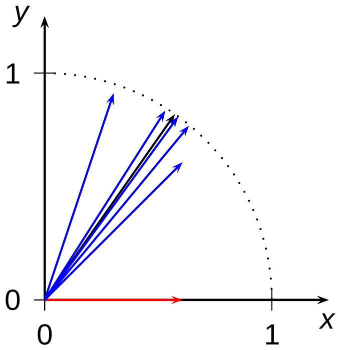
Visualisation



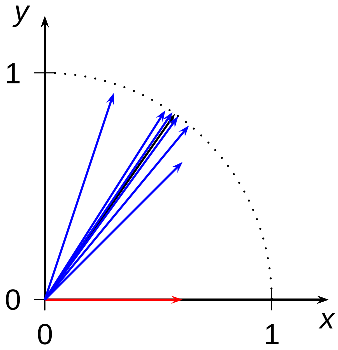
Visualisation



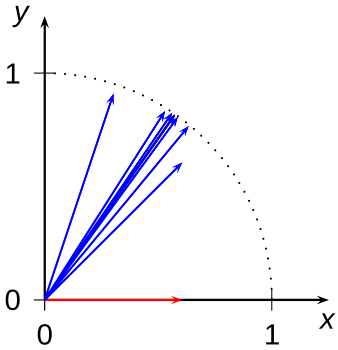
Visualisation



Visualisation



Visualisation



Remerciements et questions

Nous souhaitons remercier Bernard Boulanger, technicien au département de physique du cégep Saint-Jean-sur-Richelieu, pour son aide précieuse dans l'élaboration du vidéo des deux billes.

Avez-vous des questions ?

Remerciements et questions

Nous souhaitons remercier Bernard Boulanger, technicien au département de physique du cégep Saint-Jean-sur-Richelieu, pour son aide précieuse dans l'élaboration du vidéo des deux billes.

Avez-vous des questions ?