Mathématiques discrètes

Marc-André Désautels

Table des matières

Préface

Ce document est un livre Quarto.

Pour en apprendre davantage sur les livres Quarto, visitez https://quarto.org/docs/books.

1 Systèmes de numération positionnelle

Un système de numération est un ensemble de règles qui permettent de représenter des nombres. Le plus ancien est probablement le système unaire où le symbole | représente l'entier un, || représente l'entier deux, ||| pour trois, |||| pour quatre et ainsi de suite. Ce système atteint vite ses limites, mais il permet de mettre en évidence le fait qu'il existe plusieurs façons de représenter les entiers.

Nom français	Système unaire	Système décimal	Chiffres romains
Zéro		0	
Un	|	1	I
Deux	||	2	II
Trois	|||	3	III
⋮	⋮	⋮	⋮
Douze	|||| |||| ||||	12	XII
⋮	⋮	⋮	⋮

Dans la table ci-dessus, on remarque que sur une ligne donnée, on retrouve quatre manières différentes de représenter le même entier. Pour le reste de cette section, il sera important de dissocier la **représentation** d'un nombre et sa **valeur**.

Définition 1.1 (Système de numération)**.** Un **système de numération** permet de compter des objets et de les représenter par des nombres. Un système de numération **positionnel** possède trois éléments:

- Base b (un entier supérieur à 1)
- Symboles (digits): 0, 1, 2, …, b-1
- Poids des symboles selon la position et la base, où poids=base$^{\text{position}}$

> **Note**
>
> Lorsque plusieurs bases interviennent dans un même contexte, on écrit $(a_n \dots a_1 a_0)_b$ pour indiquer que le nombre représenté en base b.

Définition 1.2 (Représentation polynomiale)**.** Le système positionnel utilise la **représentation polynomiale**. Celle-ci est donnée par:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \dots + a_{-m} b^{-m}$$

où b est la **base** et les a_i sont des **coefficients** (les symboles de votre système de numération).

1.1 Système décimal

Il s'agit du système de numération le plus utilisé dans notre société. On peut le résumer avec les trois règles suivantes.

- Base = 10
- Symboles ordonnés qu'on nomme les *chiffres* : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Le poids des symboles est donné par 10^{position}

Exemple 1.1. Représentez le nombre 3482 sous une forme de numération positionnelle.

Symboles (digits)	3	4	8	2
Rang (position)				
Poids				
Valeur du poids				
Valeur de chaque symbole (digits)				

Nous avons donc que 3482=

> **!** Important
>
> Pour convertir un nombre de la base b vers la base 10 (décimal), on trouve sa représentation polynomiale.

Exemple 1.2. En utilisant la représentation polynomale en base 10, convertissez le nombre $(176{,}21)_8$.

1.2 Système binaire

Ce concept est essentiel en informatique, puisque les processeurs des ordinateurs sont composés de transistors ne gérant que deux états chacun (0 ou 1). Un calcul informatique n'est donc qu'une suite d'opérations sur des paquets de 0 et de 1, appelés **bits**.

- Base = 2
- Symboles ordonnés qu'on nomme les *bits*: 0, 1
- Le poids des symboles est donné par 2^{position}

> **!** Important
>
> En base 2, le *chiffre* 2 n'existe pas (c'est un **nombre**); tout comme le *chiffre* 10 n'existe pas en base 10 (c'est un **nombre**).

Exemple 1.3. Convertissez le nombre $(11001)_2$ en décimal.

Symboles (digits)	1	1	0	0	1
Rang (position)					
Poids					
Valeur du poids					
Valeur de chaque symbole (digits)					

Nous avons donc que $(11001)_2 =$

Exemple 1.4. Convertissez les nombres suivants en base 10 (décimal).

(a) $(110)_2 =$
(b) $(101101)_2 =$
(c) $(0{,}1011)_2 =$
(d) $(110{,}101)_2 =$

Exemple 1.5. Quels sont les nombres qui, dans la base deux, succèdent à $(0)_2$?

Exemple 1.6. Quels sont les nombres qui, dans la base deux, succèdent à $(1110)_2$?

1.3 Système hexadécimal

Le système hexadécimal est utilisé notamment en électronique numérique et en informatique car il est particulièrement commode et permet un compromis entre le code binaire des machines et une base de numération pratique à utiliser pour les ingénieurs. En effet, chaque chiffre hexadécimal correspond exactement à quatre chiffres binaires (ou bits), rendant les conversions très simples et fournissant une écriture plus compacte. L'hexadécimal a été utilisé la première fois en 1956 par les ingénieurs de l'ordinateur Bendix G-15.

- Base = 16
- Symboles ordonnés qu'on nomme les *chiffres*: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
- Le poids des symboles est donné par 16^{position}

On remarque qu'en base 16, les dix chiffres de 0 à 9 ne suffisent pas. Il faut donc se doter de 6 symboles additionnels. On utilise les lettres de A à F avec la signification suivante:

$$(A)_{16} = (10)_{10}, \quad (B)_{16} = (11)_{10}, \quad (C)_{16} = (12)_{10}, \quad (D)_{16} = (13)_{10}, \quad (E)_{16} = (14)_{10}, \quad (F)_{16} = (15)_{10}$$

Exemple 1.7. Trouvez la représentation en base 10 de:

a) $(\text{AB0})_{16}$
b) $(214{,}\text{EA})_{16}$

Exemple 1.8. Donnez, en base 16, les dix nombres qui succèdent à $(\text{AAA})_{16}$.

1.4 Division entière

Définition 1.3 (Divisibilité)**.** Si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ et $a \neq 0$, on dit que a **divise** b s'il existe un entier c tel que $b = ac$. L'entier a est alors appelé **facteur** de b.

Si a **divise** b, nous le notons $a \mid b$.

Théorème 1.1 (Divisibilité)**.** *Soit a, b et c des nombres entiers quelconques, avec $a \neq 0$.*

1. *Si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid (b + c)$ et $a \mid (b - c)$.*
2. *Si $a \mid b$ alors $a \mid (bc)$.*
3. *Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$.*

Exemple 1.9. Vrai ou faux? Justifiez en invoquant une définition, un théorème, en donnant une preuve ou un contre-exemple.

a) $7 \mid 10$
b) $-5 \mid 10$
c) $100 \mid 10$
d) $5 \mid -10$

Théorème 1.2. *Soit a et d des entiers, avec $d > 0$. Il existe une seule paire d'entiers q et r satisfaisant*

$$0 \leq r < d \quad \textit{et} \quad a = dq + r$$

Définition 1.4 (Diviseur, dividende, quotient, reste)**.** Considérons a et d des entiers, avec $d > 0$. Le Théorème 1.2 stipule qu'il existe une seule paire d'entiers q et r satisfaisant

$$a = dq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < d$$

Par exemple, si $a = 17$ et $d = 3$, on a

$$17 = 3 \cdot 5 + 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq 2 < 3$$

- L'entier $d = 3$ est appelé **diviseur**.
- L'entier $a = 17$ est appelé le **dividende**.
- L'entier $q = 5$ est appeléle **quotient** (notation: $q = a\mathbf{div}d$).
- L'entier $r = 2$ est appelé le **reste**.

1.5 Conversions de la base 10 vers une base b

Pour convertir un nombre entier de la base 10 vers une base b, il faut effectuer de façon successive des divisions en utilisant la Définition 1.4. Les restes des divisions successives correspondent aux coefficients de la représentation polynomiale (**lire de base en haut**).

1.5.1 Conversions vers binaire

Exemple 1.10. Convertissez les nombres suivants en binaire.

a) 115
b) 71

Nous pouvons utiliser la command `bin` de `Python` pour convertir des **entiers** décimaux en binaire.

```
print(bin(115))
```

```
0b1110011
```

```
print(bin(71))
```

```
0b1000111
```

Pour convertir un nombre fractionnaire en binaire, il suffit de multiplier (plutôt que de diviser) la partie fractionnaire en notant les parties entières et fractionnaires obtenues. Il faut ensuite répéter ces étapes avec la nouvelle partie fractionnaire et poursuivre le processus jusqu'à ce que la partie fractionnaire soit nulle. Les parties entières des résultats de ces produits correspondent aux coefficients de la représentation polynomiale (**lire de haut en bas**).

Exemple 1.11. Convertissez les nombres suivants en binaire.

a) $(0{,}8125)_{10}$
b) $(0{,}15)_{10}$

> **!** Important
>
> La conversion en binaire ou en n'importe quelle base ne donne pas toujours une suite finie. Si c'est un nombre rationnel, la conversion donnera toujours une suite finie ou périodique.

Exemple 1.12. Convertissez en binaire les nombres suivants, en ne conservant que 6 chiffres pour la partie fractionnaire, au besoin.

a) $(51{,}375)_{10}$
b) $(564{,}32)_{10}$

1.5.2 Conversions vers hexadécimal

Exemple 1.13. Convertissez les nombres décimaux suivants en hexadécimal.

a) $(176{,}47)_{10}$
b) $(69{,}28)_{10}$

Nous pouvons utiliser la command `hex` de `Python` pour convertir des **entiers** décimaux en hexadécimal.

```
print(hex(115))
```

```
0x73
```

```
print(hex(71))
```

```
0x47
```

1.5.3 Conversions binaire - hexadécimal

Une des raisons pour lesquelles le format hexadécimal a été inventé est qu'il est particulièrement simple de convertir un nombre binaire en nombre hexadécimal et inversement.

Hexa	0	1	2	3	4	5	6	7
Binaire	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
Hexa	8	9	A	B	C	D	E	F
Binaire	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Pour convertir un nombre binaire, on regroupe par *paquets* de 4 chiffres à partir de la virgule (pour la partie entière et la partie fractionnaire).

Exemple 1.14. Convertissez les nombres binaires suivants en hexadécimal.

a) $(111001{,}1101)_2$
b) $(1110001, 11\overline{001})_2$

Exemple 1.15. Convertissez les nombres hexadécimaux suivants en binaire.

a) $(537{,}14)_{16}$
b) $(45B, 1\overline{DE})_{16}$

1.6 Applications des nombres binaires et hexadécimaux

1.6.1 Vocabulaire des nombres binaires

Les codes binaires sont incontournables en informatique, car l'information la plus élémentaire est le **bit** (*binary-digit*).

Quartet Nombre binaire composé de 4 éléments binaires.
Octet (*byte*) Nombre binaire composé de 8 éléments binaires.
Mot Nombre binaire composé de 16, 32 ou 64 éléments binaires.
LSB (Least Significant Bit) Bit le moins significatif ou bit de poids faible (élément le plus à droite).
MSB (Most Significant Bit) Bit le plus significatif ou bit de poids fort (élément le plus à gauche).

> Truc
>
> Les mots de 8 ou de 16 bits écrits en binaire sont plus lisibles si on les inscrit en laissant un espace entre les groupes de quatre bits comme ceci: 0100 0001

> Truc
>
> On a avantage à représenter les zéros non significatifs pour montrer la taille des codes transcrits. remarquez que ces 0 à gauche ne sont d'ailleurs pas toujours *non significatifs*. En effet, les codes binaires ne représentent pas toujours des valurs numériques. Ce sont parfois simplement des codes qui ne représentent pas des quantités. Inutile donc de faire de l'arithmétique avec ces codes. Dans ce cas, cela n'a aucun sens de vouloir les convertir en décimal et ce serait une erreur d'omettre l'écriture des zéros à gauche.

1.6.2 Adresse IP

Une adresse IP (Internet Protocol) est un numéro d'identification qui est attribué de façon permanente ou provisoire à chaque périphérique relié à un réseau informatique qui utilise l'Internet Protocol. L'adresse IP est à la base du système d'acheminement (le routage) des paquets de données sur Internet.

Il existe des adresses IP de version 4 sur 32 bits, et de version 6 sur 128 bits. La version 4 est actuellement la plus utilisée : elle est généralement représentée en notation décimale avec quatre nombres compris entre 0 et 255, séparés par des points, ce qui donne par exemple « 181.174.87.53 ».

1.6.3 Adresse MAC

Une adresse MAC (de l'anglais Media Access Control), parfois nommée adresse physique, est un identifiant physique stocké dans une carte réseau ou une interface réseau similaire. À moins qu'elle n'ait été modifiée par l'utilisateur, elle est unique au monde. Le MAC (acronyme de Media Access Control) n'a aucun rapport avec le Mac d'Apple (diminutif de Macintosh). Toutes les cartes réseau ont une adresse MAC, même celles contenues dans les PC et autres appareils connectés (tablette tactile, smartphone, consoles de jeux, réfrigérateurs, montres …).

On peut utiliser `Python` et le module `uuid` pour trouver l'adresse MAC de l'appareil que j'utilise pour écrire ces lignes.

```
import uuid
print(hex(uuid.getnode()))
```

```
0xc0b5d7b3d9a2
```

1.6.4 Couleurs

Rouge, vert, bleu, de l'acronyme RVB ou en anglais RGB « red, green, blue ») désigne un système de traitement optique, d'affichage électronique ou d'un codage de signal vidéo analogique, ou un codage informatique des couleurs.

Ce principe est exploité par un téléviseur, un écran vidéo ou d'ordinateur, lequel reproduit la couleur par synthèse additive, à partir de trois couleurs primaires : rouge, vert et bleu.

Pour l'univers infographique, la valeur de chacune des couleurs primaires s'exprime dans un intervalle entre 0 et le maximum, qui est soit 1 ou 100 %, soit 255.

L'informatique utilise des nombres codés en système binaire, par groupes de huit (octet). En attribuant un octet à chacun des canaux de couleur primaire, on obtient un nombre de couleurs tel que deux codes consécutifs, pour une ou plusieurs composantes, ne peuvent pas se distinguer sur un écran correctement réglé.

Valeur	Couleur	Valeur	Couleur	Valeur	Couleur	Valeur	Couleur
#00FFFF	aqua / cyan	#008000	green (vert)	#000080	navy (bleu marine)	#C0C0C0	silver (argent)
#000000	black (noir)	#808080	gray (gris)	#808000	olive (jaune olive)	#008080	teal (sarcelle)
#0000FF	blue (bleu)	#00FF00	lime (vert citron)	#800080	purple (violet)	#FFFFFF	white (blanc)
#FF00FF	fuchsia / magenta (fuchsia)	#800000	maroon (bordeaux)	#FF0000	red (rouge)	#FFFF00	yellow (jaune)

Couleur	Valeur Rouge	Valeur Vert	Valeur Bleu	Hexadécimal
Red (rouge)	255 (FF)	0 (00)	0 (00)	#FF0000
Green (vert)	0 (00)	255 (FF)	0 (00)	#00FF00
Blue (bleu)	0 (00)	0 (00)	255 (FF)	#0000FF
Yellow (jaune)	255 (FF)	255 (FF)	0 (00)	#FFFF00
Orange	255 (FF)	165 (A5)	0 (00)	#FFA500
Aqua	0 (00)	255 (FF)	255 (FF)	#00FFFF
Navy blue (bleu marine)	0 (00)	0 (00)	128 (80)	#000080
Black (noir)	0 (00)	0 (00)	0 (00)	#000000
White (blanc)	255 (FF)	255 (FF)	255 (FF)	#FFFFFF

1.7 Addition en binaire

La méthode pour l'addition en base 10 peut s'appliquer pour n'importe quelle base (principe de report). Pour additionner en binaire, on procède comme en décimal. Quand le résultat de

la somme d'une colonne est supérieur à 1 (utilise plus de 1 **bit**), on reporte ce bit au voisin de gauche.

En binaire:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Procédure pour l'addition

1. Superposer les nombres en colonnes de telle sorte que les chiffres de même position soit alignés verticalement.
2. Additionner colonne par colonne, à partir de la droite, en effectuant les reports appropriés.

Exemple 1.16. Effectuez les additions demandées:

a) $(1011)_2+(1001)_2$
b) $(1011{,}011)_2+(110{,}01)_2$
c) $(110111{,}011)_2+(10101{,}0101)_2$

1.8 Représentation des entiers

Il existe de nombreuses manières de représenter un nombre entier dans la mémoir d'un ordinateur. Nous n'en verrons que quelques unes.

1.8.1 Entiers non signés

Définition 1.5 (Entiers non signés (nombres positifs))**.** Un nombre **entier non signé** (positif) est représenté par un nombre de bits préalablement fixé. Au besoin, on complète le nombre par des zéros à gauche fin d'avoir le nombre total de bits choisi.

Exemple 1.17. Transformez les entiers décimaux suivants en entiers non signés sur un octet (huit bits).

a) 143
b) 15
c) 30

Exemple 1.18. Quel est le plus grand entier non signé pouvant être représenté avec:

a) 8 bits?
b) 32 bits?
c) n bits?

1.8.2 Entiers signés

Pour travailler avec des entiers qui peuvent être positifs ou négatifs, il faut inclure le signe du nombre dans sa représentation, et l'on parle alors d'entiers signés.

Définition 1.6 (Entiers signés (représentation signe et module))**.** Un nombre **entier signé** (généralement représenté dans un octet) est un nombre où le 1er bit (à gauche) est réservé au signe, et les autres bits permettent d'indiquer la valeur absolue du nombre. Pour indique qu'un nombre est positif (+), le 1er bit est `0`, et pour un nombre négatif (-), le 1er bit est `1`.

Exemple 1.19. Complétez les tableaux suivants qui indiquent la représentation signe et module sur 4 bits.

Base 2	Base 10
0000	
0001	
0010	
0011	
0100	
0101	
0110	
0111	

Base 2	Base 10
1000	
1001	
1010	
1011	
1100	
1101	
1110	
1111	

En utilisant les nombres entiers signés:

- On peut écrire autant de nombres positifs que de négatifs.
- Pour un nombre exprimé avec n bits, les valeurs extrèmes sont $\pm(2^{n-1}-1)$

Exemple 1.20. Quelles sont les valeurs extrèmes pour des entiers signés représentés sur 4 bits?

⚠ Inconvénients de la représentation signe et module

- Il y a deux zéros! Un *zéro* positif (0000 0000) et un *zéro* négatif (1000 0000).
- Les opérations arithmétiques ne se font pas de la même manière qu'habituellement. Par exemple, sur 4 bits:

- **Base 2**: 0100 + 1011 = 1111
- **Base 10**: +4 + -3 = -7! (**FAUX!**)

Exemple 1.21. Écrivez la représentation signe et module sur 8 bits de:

a) 15

a) -15

a) -10

a) Quel est l'intervalle de nombres entiers *signés* pouvant être représentés avec:

i. 8 bits?
ii. 16 bits?

1.8.3 Complément à 1

Le complément à un d'un nombre binaire est la valeur obtenue en inversant tous les bits de ce nombre (en permutant les 0 par des 1 et inversement). Le complément à un d'un nombre se comporte alors comme le négatif du nombre original dans certaines opérations arithmétiques.

D'un point de vue algébrique, qui est plus général, c'est l'opération qui consiste à complémenter un nombre écrit en base b sur n chiffres à $b^n - 1$. C'est-à-dire que le complément d'un nombre a s'obtient par $(b^n - 1) - a$.

Exemple 1.22. Le complément à 1 de 0100 =

Note

Remarquons que dans l'Exemple 1.22, le complément à un représente le calcul de $(2^4 - 1) - 0100 = 1111 - 0100 = 1011$

Exemple 1.23. Représentez dans le tableau suivant toutes les valeurs possibles du complément à un sur 4 bits.

Décimal	+	-
0		

Décimal	+	-
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

1.8.4 Complément à 2

Dans le système de complément à un, la valeur 0 a deux représentations : « +0 » et « -0 » (exemple sur 4 bits: 0000 et 1111), ce qui oblige à réaliser deux tests pour tester la valeur nulle d'un résultat. Afin de pallier ce défaut, on a introduit la représentation par complément à deux.

On obtient le complément à deux en ajoutant 1 au complément à un. On ignore alors la retenue sur le bit de poids fort.

Le complément à deux ne s'applique qu'à des nombres ayant tous la même longueur : avec un codage sur n bits, cette méthode permet de représenter toutes les valeurs entières de $-2^n - 1$ à $2^{n-1} - 1$.

Tous les entiers en `Python` sont représentés en complémentation à deux et avec un nombre *infini* de bits (la limite est la capacité de mémoire de votre système). Par exemple:

```
from sys import getsizeof

counter1 = 0
counter2 = 100
counter3 = 2**64
size1 = getsizeof(counter1)
size2 = getsizeof(counter2)
size3 = getsizeof(counter3)
print(size1, size2, size3)
```

```
24 28 36
```

Remarques

Dans la représentation en complément à deux:

- le bit de gauche est réservé au signe;
- les **entiers négatifs** sont représentés par leur complément à deux;
- les entiers positifs sont simplement représentés par leur nombre binaire signé;
- le nombre de bits est **fixé**.

> **!** Important
>
> Il n'est pas nécessaire de compléménter un nombre positif.

La complémentation à deux se fait en trois étapes:

1. Écrivez le nombre binaire sur le nombre de bits préalablement établi en ne tenant pas compte du signe (ajoutez des 0 à gauche au besoin).
2. Calculez le complément à un (**Remplacez tous les `0` par des `1` et tous les `1` par des `0`**).
3. Calculez le complément à deux (**Ajoutez 1 au complément à un**).

Exemple 1.24. Écrivez le nombre $M = -4$ dans sa représentation en complément à deux.

Exemple 1.25. Trouvez les compléments à deux des octets suivants.

a) (0110 0100)
b) (0110 1101)
c) (0110 1001)

Exemple 1.26. Vous avez 8 bits.

a) Écrivez 5 en binaire sur 8 bits.
b) Complémentez à deux la réponses précédente.
c) Additionnez les réponses obtenues en a) et en b).

1.8.5 Addition de nombres par complémentation à deux

Puisque les opérations internes de l'ordinateur ne permettent que l'addition, il faut troiver une manière d'effectuer une soustraction sans réellement en faire une. Par exemple, afin de calculer 10-4, il est possible de faire l'addition 10+(-4).

Ainsi, le complément à deux est nécessaire pour représenter les nombres négatifs et pour effectuer des soustractions.

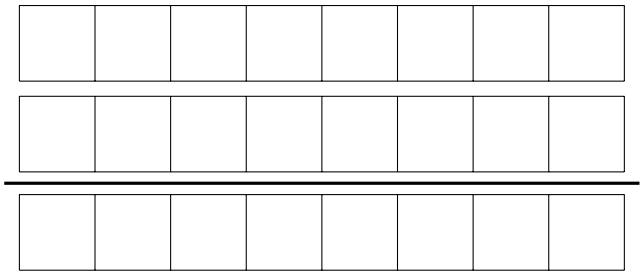
> ❗ Important
>
> Il est important de notes que:
>
> - Il faut utiliser des nombres signés;
> - Pour deux nombres ayant le même nombre de bits, il se peut que le résultat de l'addition de ces nombres comporte un bit de plus. Dans ce cas, il faut ignorer le bit supplémentaire;
> - **Si le signe de la réponses n'a pas de sens, cela signifie que le résultat de l'addition est un nombre trop grand pour la capacité de l'ordinateur, on parle alors de débordement.**
> - Si le bit-signe est à `1`, on doit complémenter le nombre pour retrouver le nombre négatif qui représente la réponse.

Addition de deux nombres de mêmes signes

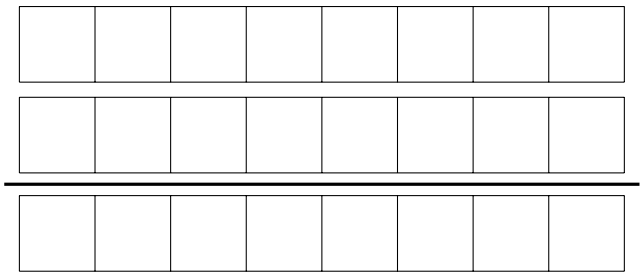
Cas particuliers:

- Si, après l'addition, le bit-signe est le même que les deux chiffres, le résultat est correct.
- Si le bit-signe est *différent* de celui des deux chiffres additionnés, il y a **débordement**.

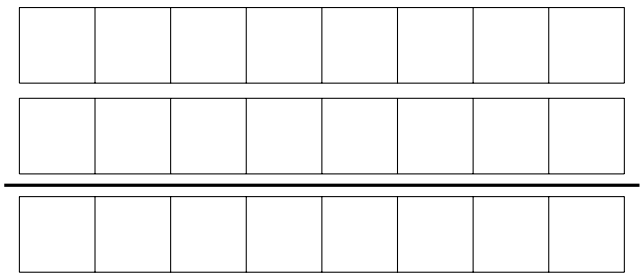
Exemple 1.27. À l'aide de la complémentation à deux, calculez 49+25.



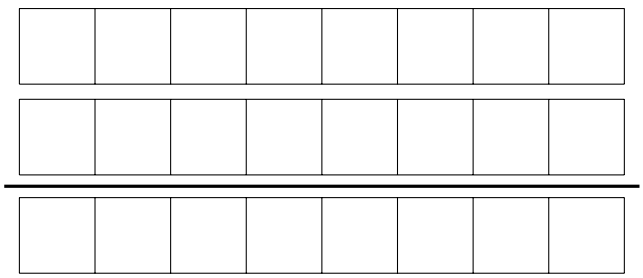
Exemple 1.28. À l'aide de la complémentation à deux, calculez 75+87.



Exemple 1.29. À l'aide de la complémentation à deux, calculez -64-56.



Exemple 1.30. À l'aide de la complémentation à deux, calculez -78-85.

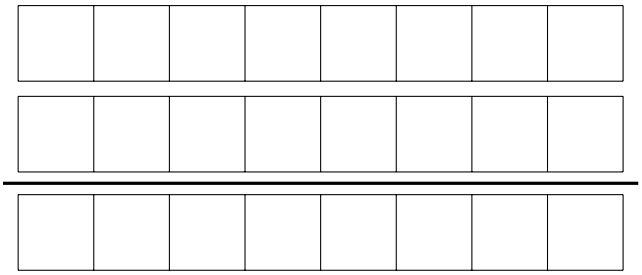


Addition de deux nombres de signes différents

- Il n'y a aucun débordement possible (**POURQUOI?**)
- Le résultat peut être positif ou négatif selon la valeur du bit-signe.
- On complémente le résultat si le bit-signe est `1`.

Exemple 1.31. À l'aide de la complémentation à deux, calculez -59-18.

Exemple 1.32. À l'aide de la complémentation à deux, calculez 18-59.



1.8.6 Opérateurs bit à bit

En logique, une opération bit à bit est un calcul manipulant les données directement au niveau des bits, selon une arithmétique booléenne. Elles sont utiles dès qu'il s'agit de manipuler les données à bas niveau : codages, couches basses du réseau (par exemple TCP/IP), cryptographie, etc.

Les opérations bit à bit courantes comprennent des opérations logiques bit par bit et des opérations de décalage des bits, vers la droite ou vers la gauche.

1.8.7 LEFT-SHIFT «

1.8.8 RIGHT-SHIFT »

1.8.9 COMPLÉMENT À UN ~ (MÊME CHOSE QUE NOT)

1.9 Représentation des nombres en virgule flottante

1.9.1 La norme IEEE754

En informatique, l'IEEE 754 est une norme sur l'arithmétique à virgule flottante mise au point par le *Institute of Electrical and Electronics Engineers*. Elle est la norme la plus employée

actuellement pour le calcul des nombres à virgule flottante avec les CPU et les FPU. La norme définit les formats de représentation des nombres à virgule flottante (signe, mantisse, exposant, nombres dénormalisés) et valeurs spéciales (infinis et NaN), en même temps qu'un ensemble d'opérations sur les nombres flottants. Il décrit aussi cinq modes d'arrondi et cinq exceptions (comprenant les conditions dans lesquelles une exception se produit, et ce qui se passe dans ce cas).

Format général

Un nombre flottant est formé de trois éléments : la mantisse, l'exposant et le signe. Le bit de poids fort est le bit de signe : si ce bit est à 1, le nombre est négatif, et s'il est à 0, le nombre est positif. Les e bits suivants représentent l'exposant biaisé (sauf valeur spéciale), et les m bits suivants (m bits de poids faible) représentent la mantisse.

L'exposant peut être positif ou négatif. Cependant, la représentation habituelle des nombres signés (complément à 2) rendrait la comparaison entre les nombres flottants un peu plus difficile. Pour régler ce problème, l'exposant est « biaisé », afin de le stocker sous forme d'un nombre non signé.

Ce biais est de 2e−1 − 1 (e représente le nombre de bits de l'exposant) ; il s'agit donc d'une valeur constante une fois que le nombre de bits e est fixé.

2 Logique

2.1 Logique propositionnelle

Définition 2.1 (Proposition)**.** Un énoncé qui est soit vrai, soit faux est appelé une **proposition**. La **valeur de vérité** d'une proposition est donc **VRAI** ou **FAUX**.

En `Python`, les valeurs de vérités sont données par `True` (**VRAI**) et `False` (**FAUX**).

Un énoncé qui n'est pas une proposition (comme un paradoxe, une phrase impérative ou interrogative) sera qualifié d'innaceptable.

Exemple 2.1. Les énoncés suivants sont des propositions:

- Les numéros de téléphones au Canada ont dix chiffres.
- La lune est faite de fromage.
- 42 est la réponse à la question portant sur la *vie, l'univers et tout ce qui existe.*
- Chaque nombre pair plus grand que 2 peut être exprimé comme la somme de deux nombres premiers.
- $3 + 7 = 12$

Les énoncés suivants ne sont **pas** des propositions:

- Voulez-vous du gâteau?
- La somme de deux carrés.
- $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2n + 1$.
- Va dans ta chambre!
- $3 + x = 12$

Nous utilisons une table de vérité pour montrer les valeurs de vérité de propositions composées.

2.1.1 La négation

Définition 2.2 (La négation)**.** Soit p une proposition. L'énoncé:

> *Il n'est pas vrai que p.*

est une autre proposition appelée **négation** de p, qui est représentée par $\neg p$. La proposition $\neg p$ se lit *non p*. La table de vérité de la négation est donnée ci-dessous.

p	$\neg p$

En `Python`, l'opérateur `not` permet de faire la négation d'une valeur de vérité.

```
def negation(p):
    return not p

print("p    non_p")
for p in [True, False]:
    non_p = negation(p)
    print(p, non_p)
```

```
p    non_p
True False
False True
```

2.1.2 La conjonction

Je suis une roche **ET** je suis une île.

Définition 2.3 (La conjonction)**.** Soit p et q deux propositions. La proposition p *et* q, notée $p \wedge q$, est vraie si à la fois p et q sont vraies. Elle est fausse dans tous les autres cas. Cette proposition est appelée la **conjonction** de p et de q. La table de vérité de la conjonction est donnée ci-dessous.

p	q	$p \wedge q$

En `Python`, l'opérateur `and` permet de faire la conjonction de deux valeurs de vérité.

```
def conjonction(p, q):
    return p and q

print("p    q    p_et_q")
for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        p_et_q = conjonction(p, q)
        print(p, q, p_et_q)
```

```
p    q    p_et_q
True True True
True False False
False True False
False False False
```

2.1.3 La disjonction

Elle a étudié très fort **OU** elle est extrêmement brillante.

Définition 2.4 (La disjonction)**.** Soit p et q deux propositions. La proposition p *ou* q, notée $p \vee q$, est fausse si p et q sont fausses. Elle est vraie dans tous les autres cas. Cette proposition est appelée la **disjonction** de p et de q. La table de vérité de la disjonction est donnée ci-dessous.

p	q	$p \vee q$

En `Python`, l'opérateur `or` permet de faire la disjonction de deux valeurs de vérité.

```
def disjonction(p, q):
    return p or q

print("p    q    p_ou_q")
for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        p_ou_q = disjonction(p, q)
        print(p, q, p_ou_q)
```

```
p    q    p_ou_q
True True True
True False True
False True True
False False False
```

2.1.4 La disjonction exclusive

Prenez **SOIT** deux Advil **OU** deux Tylenols.

Définition 2.5 (La disjonction exclusive)**.** Soit p et q deux propositions. La proposition p *ou exclusif* q, notée $p \oplus q$, est vraie si p et q ont des valeurs de vérité **différentes**. Elle est fausse dans tous les autres cas. Cette proposition est appelée la **disjonction exclusive** de p et de q. La table de vérité de la disjonction exclusive est donnée ci-dessous.

p	q	$p \oplus q$

En `Python`, il n'existe pas d'opérateur logique pour effectuer la disjonction exclusive. On peut par contre utiliser l'opérateur bit à bit `^` pour faire cette disjonction exclusive.

Exemple 2.2. Utilisez les opérateurs logiques vus précédemment pour construire la table de vérité de la disjonction exclusive dans `Python`.

```
def disjonction_exclusive(p, q):
    return #REMPLACEZ MOI#

print("p    q    p_ou_exclusif_q")
for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        p_ou_exclusif_q = disjonction_exclusive(p, q)
        print(p, q, p_ou_exclusif_q)
```

```
p    q    p_ou_exclusif_q
True True False
True False True
False True True
False False False
```

> **!** Important
>
> La disjonction exclusive signifie l'un ou l'autre, mais pas les deux.

2.1.5 L'implication

SI vous avez 100 à l'examen final, **ALORS** vous obtiendrez A dans ce cours.

Définition 2.6 (L'implication)**.** Soit p et q deux propositions. L'**implication** $p \to q$ est une proposition qui est fausse quand p est vraie et que q est fausse, et qui est vraie dans tous les autres cas. Dans une implication, p est appelée l'**hypothèse** (ou l'**antécédent** ou la **prémisse**) et q, la **conclusion** (ou la **conséquence**). La table de vérité de l'implication' est donnée ci-dessous.

p	q	$p \to q$

En `Python`, il n'existe pas d'opérateur logique pour effectuer l'implication.

Exemple 2.3. Utilisez les opérateurs logiques vus précédemment pour construire la table de vérité de l'implication dans `Python`.

```
def implication(p, q):
    return #REMPLACEZ MOI#

print("p    q    p_implique_q")
for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        p_implique_q = implication(p, q)
        print(p, q, p_implique_q)
```

```
p    q    p_implique_q
True True True
True False False
False True True
False False True
```

> **!** Important
>
> Une implication peut être considérée comme un **contrat** qui échoue seulement si les conditions du contrat sont respectées mais les résultats ne sont pas remplis.

Comme les implications apparaissent constamment en mathématiques, il existe une vaste terminologie pour désigner $p \to q$. Voici les modes les plus courants:

- si p alors q;
- p implique q;
- p seulement si q;
- p est suffisant pour q;
- q si p;
- q chaque fois que p;
- q est nécessaire à p.

2.1.6 La biconditionnelle

Il pleut dehors **SI ET SEULEMENT SI** c'est un jour nuageux.

Définition 2.7 (La biconditionnelle)**.** Soit p et q deux propositions. La **biconditionnelle** $p \leftrightarrow q$ est une proposition qui est vraie quand p et q ont les mêmes valeurs de vérité et qui est fausse dans les autres cas. La table de vérité de la biconditionnelle est donnée ci-dessous.

p	q	$p \leftrightarrow q$

En `Python`, il n'existe pas d'opérateur logique pour effectuer la biconditionnelle.

Exemple 2.4. Utilisez les opérateurs logiques vus précédemment pour construire la table de vérité de la biconditionnelle dans `Python`.

```
def biconditionnelle(p, q):
    return #REMPLACEZ MOI#

print("p    q    p_biconditionnelle_q")
for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        p_biconditionnelle_q = biconditionnelle(p, q)
        print(p, q, p_biconditionnelle_q)
```

```
p    q    p_biconditionnelle_q
True True True
True False False
False True False
False False True
```

> **!** Important
>
> La biconditionnelle est vraie si les propositions ont la même valeur de vérité et fausse autrement.

Comme les biconditionnelles apparaissent constamment en mathématiques, il existe une vaste terminologie pour désigner $p \leftrightarrow q$. Voici les modes les plus courants:

- p si et seulement si q;
- p est nécessaire et suffisante pour q;
- si p alors q et réciproquement.

Définition 2.8 (Réciproque, contraposée et inverse)**.**

- La **réciproque** de la proposition $p \to q$ est la proposition $q \to p$.
- La **contraposée** de la proposition $p \to q$ est la proposition $\neg q \to \neg p$.
- L'**inverse** de la proposition $p \to q$ est la proposition $\neg p \to \neg q$.

2.2 Équivalences propositionnelles

Une proposition composée est une proposition formée de plusieurs connecteurs logiques.

Définition 2.9 (Tautologie, contradiction et contingence)**.** Une proposition composée qui est toujours vraie, quelle que soit la valeur de vérité des fonctions qui la compose est appelée une **tautologie**. Une proposition composée qui est toujours fausse est appelée une **contradiction**. Finalement, une proposition qui n'est ni une tautologie ni une contradiction est appelée une **contingence**.

Exemple 2.5. Remplissez la table de vérité suivante et dites si les propositions composées sont des tautologies, des contradictions ou des contingences.

p	q	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$

Exemple 2.6. Le code ci-dessous révèle la table de vérité de la proposition composée $(p \wedge q) \vee \neg q$.

```
def conjonction(p, q):
    return p and q

def disjonction(p, q):
    return p or q

print("p    q    a")
for p in [True, False]:
    for q in [True, False]:
        a = disjonction(conjonction(p, q), not q)
        print(p, q, a)
```

```
p    q    a
True True True
True False True
False True False
False False True
```

De quelle manière pouvez-vous modifier le code précédent pour obtenir la table de vérité de la proposition composée $(p \vee \neg q) \wedge \neg p$?

Lorsque vous créez votre table de vérité, il est crucial que vous soyiez systématique pour vous assurer d'avoir toutes les valeurs de vérité possibles pour chacune des propositions simples. Chaque proposition a deux valeurs de vérité possibles, le nombre de lignes de la table devrait être égal à 2^n, où n est le nombre de propositions. Vous devriez également considérer de briser vos propositions complexes en plus petites propositions.

Exemple 2.7. L'extrait de code suivant fait intervenir les variables booléennes p, q et r. Chacune de ces variables peut prendre les valeurs **vrai** ou **faux**. Pour chaque bloc indiqué, donnez toutes les valeurs possibles pour p, q et r au moment où le bloc est atteint.

```
if (p and q):
    if r:
        #BLOC 1#
    else:
        #BLOC 2#
else:
    #BLOC 3#
```

p	q	r
V	**V**	**V**
V	**V**	**F**
V	**F**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**
F	**F**	**F**

Définition 2.10 (Équivalences de propositions)**.** Les propositions p et q sont dites **logiquement équivalentes** si la proposition $p \leftrightarrow q$ est une tautologie. Ainsi, deux propositions sont logiquement équivalentes si elles ont la même table de vérité, c'est-à-dire la même valeur de vérité dans tous les cas possibles.

La notation $p \equiv q$ signifie que p et q sont équivalentes.

Exemple 2.8. Vérifiez l'équivalence suivante à l'aide d'une table de vérité.

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

p	q	
V	**V**	
V	**F**	
F	**V**	
F	**F**	

Exemple 2.9. Vérifiez l'équivalence suivante à l'aide d'une table de vérité.

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

p	q
V	**V**
V	**F**
F	**V**
F	**F**

Pour gagner du temps, on note les équivalences fréquemment utilisées dans une table et on leur donne un nom ou un numéro afin d'y faire référence.

Table 2.11: Équivalences logiques

Nom	Équivalence 1	Équivalence 2
Identité	$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$	$p \vee \mathbf{F} \equiv p$
Domination	$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$	$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
Idempotence	$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$
Double négation	$\neg(\neg p) \equiv p$	
Commutativité	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
Associativité	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Distributivité	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Lois de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Absorption	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Négation	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$

Table 2.12: Équivalences logiques (implications)

Numéro	Implication
1	$p \to q \equiv \neg p \vee q$
2	$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
3	$p \vee q \equiv \neg p \to q$
4	$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
5	$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
6	$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
7	$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
8	$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
9	$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

Table 2.13: Équivalences logiques (biconditionnelles)

Numéro	Biconditionnelle
1	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to q)$
2	$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
3	$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
4	$p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q)$
5	$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Exemple 2.10. Vérifiez que la proposition

$$\neg(p \to q) \to \neg q$$

est une tautologie

a. à l'aide d'une table de vérité;

p	q
V	**V**
V	**F**
F	**V**
F	**F**

b. sans l'aide d'une table de vérité, en utilisant les tableaux d'équivalences.

! Propositions équivalentes ou non?

Pour démontrer que les propositions **ne sont pas** équivalentes, il suffit de fournir des valeurs de p, q et r pour lesquelles elles diffèrent. Pour démontrer que les propositions sont équivalentes, on peut procéder de l'une des trois façons suivantes.

1. Fournir leur table de vérité.
2. Utiliser la Table 2.11, la Table 2.12 ou la Table 2.13.
3. Formuler une explication en mots qui montre que les deux propositions sont vraies, ou encore que les deux sont fausses, exactement pour les mêmes combinaisons de valeur de vérité des variables propositionnelles.

2.3 Prédicats et quantificateurs

Un énoncé contenant une ou plusieurs variables tel que

$$x < 10 \quad \text{ou} \quad x + 2 = 7 - y$$

n'est pas une proposition pusique, tant que la valeur de x ou y n'est pas connue, on ne peut dire s'il est vrai ou faux.

Définition 2.11 (Terminologie)**.** Dans l'énoncé "$x < 10$", x est le **sujet**, et "est inférieur à 10" est le **prédicat**. Notons $P(x)$ l'énoncé $x < 10$. On dit que P est une **fonction propositionnelle**.

Une fonction propositionnelle $P(x)$ prend la valeur vrai ou faux quand x est précisé. Par exemple:

- $P(8)$ est une proposition vraie. On écrira parfois $P(8)$ est vrai (au masculin, en sous-entendant l'énoncé est vrai, ou même $P(8) \equiv \mathbf{V}$).
- $P(13)$ est une proposition fausse.
- P(Marc-André) n'est pas une proposition, car *Marc-André* n'est pas une valeur possible pour la variable x.

L'ensemble des valeurs possibles pour la variable x est appelé **univers du discours**, ou **domaine** de la fonction P.

Définition 2.12 (Quantificateurs)**.**

$\forall$: quantificateur universel $\qquad$ $\exists$: quantificateur existentiel

$\forall\ x\ P(x)$**:** signifie "Pour toutes les valeurs de x dans l'univers du discours, $P(x)$". Ou encore "Quel que soit x (dans l'univers du discours), $P(x)$".

$\exists\ x\ P(x)$**:** signifie "Il existe un élément de x dans l'univers du discours tel que $P(x)$". Ou encore "Il y a au moins un x (dans l'univers du discours) tel que $P(x)$". Ou encore "Pour un certain x (dans l'univers du discours), $P(x)$".

Notation. Certains auteurs mettent une virgule avant la fonction propositionnelle, surtout quand celle-ci est composée. Par exemple: $\forall\ x,\ (P_1(x) \to P_2(x) \vee P_3(x))$. Par ailleurs, si l'ensemble U n'a pas déjà été identifié, on peut préciser que la variable x prendra des valeurs dans l'ensemble U ainsi: $\exists\ x \in U,\ P(x)$.

Lorsque l'univers du discours est un ensemble fini $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, on a les équivalences logiques suivantes:

$$\forall\ x\ P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$
$$\exists\ x\ P(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)$$

La quantification universelle $\forall\ x\ P(x)$ est vraie quand $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs de x dans l'univers du discours U. Elle est donc fausse s'il existe un x de U pour lequel $P(x)$ est fausse. Un tel élément est appelé un **contre-exemple** de $\forall\ x\ P(x)$.

La quantification existentielle $\exists\ x\ P(x)$ est vraie s'il existe au moins une valeur x dans l'univers du discours telle que $P(x)$ est vraie. Elle est fausse si $P(x)$ est fausse pour toutes les valeurs possibles de x.

Ainsi, pour prouver un énoncé de la forme $\forall\ x\ P(x)$ est vrai, fournir un exemple de x tel que $P(x)$ est vrai ne suffit pas. Il faut montrer que la proposition $P(x)$ est vraie pour toutes les valeurs de x, ce qui peut s'avérer particulièrement **difficile lorsque U est un ensemble infini**. Il en va de même losqu'on veut prouver qu'un énoncé de la forme $\exists\ x\ P(x)$ est faux.

Table 2.15: Comment prouver qu'un énoncé quantifié est vrai ou faux quand l'univers du discours U est infini.

Pour prouver que	est **vrai**	est **faux**
$\exists\, x\ P(x)$	il suffit de fournir **un exemple**: un x de U tel que $P(x)$ est vrai.	il faut fournir un argument général pour montrer que $P(x)$ est faux quel que soit x de U.
$\forall\, x\ P(x)$	il faut fournir un argument général pour montrer que $P(x) est vrai quel que soit x de U.	il suffit de fournir un **contre-exemple**: un x de U tel que $P(x)$ est faux.

Exemple 2.11. Si l'univers du discours est l'ensemble des nombres réels et

$P(x)$ désigne $x \geq 0$
$Q(x)$ désigne x est un nombre premier
$R(x)$ désigne $3^x + 4^x = 5^x$
$S(x)$ désigne $x \geq 100$

dites si chacun des énoncés suivants est une proposition vraie, une proposition fausse ou n'est pas une proposition. Donnez un exemple ou un contre-exemple le cas échéant. Dans le cas contraire, indiquez qu'un argument général est requis.

a. $\forall\ x\ P(x)$
b. $\forall\ x\ \neg P(x)$
c. $\forall\ x\ P(x^2)$
d. $\exists\ x\ P(x)$
e. $\exists\ x\ \neg P(x)$
f. $\exists\ x\ Q(x)$
g. $\exists\ x\ Q(x^2)$
h. $\forall\ x\ R(x)$
i. $P(x)$
j. $\forall\ x\ (S(x) \to P(x))$
k. $(\forall\ x\ P(x)) \to (\forall\ x\ S(x))$
l. $\forall\ x\ S(x + 100)$
m. $\forall\ x\ S(x^2 + 100)$

Théorème 2.1 (Lois de De Morgan pour les quantificateurs)**.**

$$\neg\exists\ x\ P(x) \equiv \forall\ x\ \neg P(x) \qquad \neg\forall\ x\ P(x) \equiv \exists\ x\ \neg P(x)$$

Exemple 2.12. Si l'univers du discours est l'ensemble des étudiants du programme Sciences Informatique et Mathématique (ScIM) et $M(x)$ désigne l'énoncé *l'étudiant x peut modifier les fichiers du répertoire U*, traduisez clairement les propositions suivantes à l'aide des quantificateurs.

a. Tous les étudiants de ScIM peuvent modifier les fichiers du répertoire U.
b. Il est faux que tous les étudiants de ScIM peuvent modifier les fichiers du répertoire U.
c. Au moins un étudiant de ScIM peut modifier les fichiers du répertoire U.
d. Il est faux qu'au moins un étudiant de ScIM peut modifier les fichiers du répertoire U.
e. Aucun étudiant de ScIM ne peut modifier les fichiers du répertoire U.
f. Au moins un étudiant de ScIM ne peut pas modifier les fichiers du répertoire U.

De plus, déterminez les propositions ci-dessus qui sont équivalentes.

Exemple 2.13. Si l'univers du discours est l'ensemble des billes contenues dans un bol, et si

- $G(x)$ désigne *la bille x est grosse*
- $J(x)$ désigne *la bille x est jaune*
- $R(x)$ désigne *la bille x est rouge*
- $B(x)$ désigne *la bille x est bleue*

traduisez clairement les propositions suivantes en prenant soin de bien formuler les phrases.

a. $\forall\ x\ (R(x) \vee J(x))$
b. $(\forall\ x\ R(x)) \vee (\forall\ x\ J(x))$
c. Les propositions a. et b. sont-elles équivalentes?
d. $\exists\ x\ B(x)$

e. $\neg(\exists\ x\ B(x))$
f. Utilisez le quantificateur universel $\forall$ pour écrire une proposition équivalente à la précédente.
g. $\neg(\forall\ x\ R(x))$
h. Utilisez le quantificateur existentiel $\exists$ pour écrire une proposition équivalente à la précédente.
i. $\forall\ x\ (G(x) \to B(x))$
j. $\exists\ x\ (G(x) \wedge B(x))$
k. $(\exists\ x\ G(x)) \wedge (\exists\ x\ B(x))$
l. Les deux propositions précédentes sont-elles équivalentes?
m. Les deux propositions suivantes sont-elles équivalentes?

$$(\exists\ x\ R(x)) \vee (\exists\ x\ J(x)) \qquad \text{et} \qquad \exists\ x\ (R(x) \vee J(x))$$

n. Les deux propositions suivantes sont-elles équivalentes?

$$(\forall\ x\ R(x)) \wedge (\forall\ x\ G(x)) \qquad \text{et} \qquad \forall\ x\ (R(x) \wedge G(x))$$

2.4 Opérations bit à bit

2.5 Problèmes de logique

Les problèmes suivants se déroulent sur une île imaginaire où tous les habitants sont soit des **chevaliers**, qui disent toujours la vérité, soit des **fripons**, qui mentent toujours. Ces énigmes implique un visiteur qui rencontre un petit groupe d'habitants de l'île. La plupart du temps, le but du visiteur est de *déduire* les types des habitants à partir de leurs énoncés.

Voici un exemple type de problème possible.

Déduisez!

En vous promenant sur l'île, vous rencontrez trois habitants gardant un pont. Pour passer, vous devez déduire le type de chaque habitant. Chaque individu dit un seul énoncé:

- Individu A: Si je suis un fripon, alors il y a exactement deux chevaliers ici.
- Individu B: L'individu A ment.
- Individu C: Soit nous sommes tous des fripons ou alors au moins l'un d'entre nous est un chevalier.

Quels sont les types des trois individus?

Stratégies

Voici quelques stratégies que vous pouvez utiliser pour résoudre ce genre de problème:

- Commencez en supposant qu'un individu est d'un certain type. Soyez stratégique avec votre supposition, tentez de résoudre un énoncé **ET**.
  - Si un individu dit **ET**, supposez qu'il est un chevalier;
  - Si un individu dit **OU**, supposez qu'il est un fripon;
  - Si un individu dit **SI/ALORS**, supposez qu'il est un fripon;
  - Si un individu dit **SI ET SEULEMENT SI**, attendez de connaître la valeur de vérité de leur énoncé avant de faire une supposition.

- Lorsqu'un individu est un chevalier, vous pouvez continuer leur énoncé.
- Lorsqu'un individu est un fripon, vous pouvez continuer la négation de leur énoncé.
  - Partie 1 **ET** Partie 2 → **NON** Partie 1 **OU NON** Partie 2
  - Partie 1 **OU** Partie 2 → **NON** Partie 1 **ET NON** Partie 2
  - **SI** Partie 1, alors Partie 2 → Partie 1 **ET NON** Partie 2
- Soyez prudents avec les *si et seulement si*
  - Lorsqu'un *si et seulement si* est `VRAI`, alors les deux parties ont la **même** valeur de vérité.
  - Lorsqu'un *si et seulement si* est `FAUX`, alors les deux parties ont des valeurs de vérités **différentes**.
- Lorsque vous avez prouvé l'identité d'un individu, vous pouvez utiliser cette information partout dans le reste de l'énigme.
- Si vous avez suffisament d'information pour confirmer que l'énoncé d'un individu est `VRAI`, alors ils doivent être un chevalier.
- Si vous avez suffisament d'information pour confirmer que l'énoncé d'un individu est `FAUX`, alors ils doivent être un fripon.

2.5.1 Trois énoncés différents

Nous pouvons, dans la plupart des problèmes, regrouper les énoncés des habitants de l'île en trois formes distinctes.

2.5.1.1 Accusations et affirmations

Dans une accusation, un habitant A dit par exemple B *est un fripon* ou un énoncé équivalent comme B *ment toujours*. Dans une affirmation, l'habitant A dit par exemple B *est un chevalier* ou alors B *dit toujours la vérité*.

Exemple 2.14. Que pouvez-vous conclure si A et B sont reliés par une **accusation**?

Exemple 2.15. Que pouvez-vous conclure si A et B sont reliés par une **affirmation**?

2.5.1.2 Conjonctions de fripons

Un exemple de conjonction de fripons est lorsque A dit que B *est un chevalier ou je suis un fripon*, ou alors C *est un fripon et je suis un fripon*

Exemple 2.16. Que pouvez-vous conclure si A et B sont reliés par **ou je suis un fripon**?

Exemple 2.17. Que pouvez-vous conclure si A et B sont reliés par **et je suis un fripon**?

2.5.1.3 Énoncés de différences ou de similarités

Parfois un habitant A dira B *est de mon type* ou peut-être C *n'est pas de mon type*.

Exemple 2.18. Que pouvez-vous conclure si A dit que B *est de son type*?

Exemple 2.19. Que pouvez-vous conclure si A dit que C *n'est pas de son type*?

Il est intéressant de comparer ces énoncés avec ceux d'accusations et d'affirmations. Ces deux types d'énoncés sont réciproques en quelque sorte. Lorsqu'un habitant dit directement de quel type est un autre habitant (dans une accusation ou une affirmation), tout ce qu'on apprend c'est que la source et la cible sont similaires ou différents, sans apprendre leur type. Par contre, lorsqu'un habitant dit un énoncé par rapport aux similitudes ou aux différences, nous apprenons exactement de quel type la cible est, sans apprendre si elle est similaire ou différente de la source.

Exemple 2.20. Vous rencontrez trois habitants de l'île.

- A dit: B ne ment jamais.
- A dit: C est un chevalier ou je suis un fripon.

Exemple 2.21. Vous rencontrez trois habitants de l'île.

- A dit: B ment toujours.
- B dit: A n'est pas de mon type.

3 Théorie des ensembles

3.1 Notions de base sur les ensembles

Définition 3.1 (Ensemble, élément)**.** Un **ensemble** est un collection non ordonnée d'objets. Les objets sont appelés **éléments** de l'ensemble et on dit qu'ils appartiennent à l'ensemble.

Notation : $x \in F$ signifie que x est un élément de l'ensemble F. On dit aussi que x appartient à l'ensemble F.

Définition 3.2 (Ensemble fini ou infini, cardinalité)**.** Soit A un ensemble composé de n éléments distincts. On dit que A est un **ensemble fini** de **cardinalité** n et on note $|A| = n$. Un ensemble est dit **infini** s'il n'est pas fini.

Exemple 3.1. Soit l'ensemble $F = \{2, \pi, 7\}$. Utilisez les symboles introduits pour traduire les énoncés suivants: l'ensemble F contient 3 éléments, π appartient à F, 5 n'appartient pas à F.

On peut décrire un ensemble **en extension** (on énumère ses éléments que l'on place entre accolades)

$$A = \{5, 7, 9, 11\} \qquad B = \{1, 8, 27, 64\}$$

ou en **compréhension**, comme ceci:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \text{ est impair}) \wedge (5 \leq x \leq 11)\} \qquad B = \{x \in \mathbb{N} \mid (x \leq 64) \wedge (\exists\, y \in \mathbb{N},\ y^3 = x)\}$$

Pour créer un ensemble dans `Python`, nous allons utiliser une paire d'accolades `{ }` et placer les différents éléments de notre ensemble entre ces accolades en les séparant avec une virgule. De plus, nous pouvons vérifier si un élément appartient à l'ensemble en utilisant la commande `in`.

```
A={-2,0,1,4}
print(A, 1 in A, 5 in A)
```

```
{0, 1, 4, -2} True False
```

Pour calculer la cardinalité d'un ensemble dans `Python`, vous utilisez la fonction `len()`. En `Python`, il faut être prudent si on souhaite utiliser l'ensemble vide, $\emptyset$. Si vous utilisez `{}` pour décrire l'ensemble vide, `Python` va plutôt l'interpréter comme un *dictionnaire* vide. Vous devez plutôt utiliser la fonction `set()`.

```
A = {2,3,5,8}
B = set()
C = {0}
print(len(A), len(B), len(C))
```

```
4 0 1
```

3.2 Ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

Nous détaillerons dans la Table 3.1, les ensembles de nombres les plus communs.

Table 3.1: Ensembles de nombres usuels.

Ensemble	**Description**
$\emptyset = \{\ \}$	Ensemble vide (ne contient aucun élément $\mid \emptyset \mid = 0$)
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$	Ensemble des nombres naturels
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$	Ensemble des nombres naturels strictement positifs
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$	Ensemble des nombres entiers
$\mathbb{Z}^* = \{..., -2, -1, 1, 2, ...\}$	Ensemble des entiers non nuls
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0\}$	Ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$	Ensemble des nombres réels positifs
$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$ avec $i^2 = -1$	Ensemble des nombres complexes

Exemple 3.2. Établissez un lien entre les ensembles décrits par compréhension aux parties a. à f. avec le même ensemble décrit par extension aux parties 1 à 6.

a. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 1\}$
b. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 = 1\}$
c. $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$
d. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 4\}$
e. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < |x|\}$
f. $\{x \in \mathbb{Z} \mid (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1\}$

1. $\{-1, 0, 1\}$
2. $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
3. $\{1\}$
4. $\{..., -3, -2, -1\}$
5. $\{-1, 1\}$
6. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

> **Note**
>
> Lorsqu'il y a trop d'éléments dans un ensemble pour être en mesure de tous les écrire, nous utilisons souvent les trois-points (...) lorsque la suite d'éléments est claire. Par exemple,

nous avons:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

En `Python`, si vous avez un ensemble décrit par compréhension, il est particulièrement facile de le créer avec une `compréhension de liste`. L'idée est simple: simplifier le code pour le rendre plus lisible et donc plus rapide à écrire et plus simple à maintenir. La syntaxe est la suivante:

```
new_list = [function(item) for item in list if condition(item)]
new_list = {function(item) for item in list if condition(item)}
```

Par exemple, si vous voulez créer l'ensemble $\{x^3 \mid 0 \leq x < 10\}$, nous pouvons le faire en `Python` de la manière suivante:

```
ensemble = {x**3 for x in range(10)}
liste = [x**3 for x in range(10)]
print(ensemble, liste)
```

```
{0, 1, 64, 512, 8, 343, 216, 729, 27, 125} [0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729]
```

> **Note**
>
> Remarquez que dans l'ensemble, les éléments ne sont pas ordonnés, tandis qu'ils le sont dans la liste.

Définition 3.3 (Égalité d'ensembles)**.** Deux ensembles sont dits égaux si et seulement s'ils contiennent exactement les mêmes éléments.

$$A = B \leftrightarrow \forall\ x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Exemple 3.3. Les ensembles suivants sont-ils égaux?

$$\{1, 3, 5\} \stackrel{?}{=} \{3, 5, 1\}$$
$$\{1, 3, 5\} \stackrel{?}{=} \{\{1\}, \{3\}, \{5\}\}$$

Définition 3.4 (Sous-ensemble)**.** L'ensemble A est **sous-ensemble** de l'ensemble B si et seulement si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall\ x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

L'ensemble A est **sous-ensemble strict (ou propre)** de l'ensemble B si et seulement si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B et A n'est pas égal à B:

$$A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge\ A \neq B$$

Exemple 3.4. Convainquez-vous des affirmations suivantes.

$$\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$$
$$\{1,2\} \subset \{1,2,3,4,5\}$$
$$\{2k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0,2,4,6,...\} \subset \mathbb{N}$$

Table 3.2: Notation de la théorie des ensembles.

Notation	Description
$\in$	$2 \in \{1,2,3\}$ indique que 2 est **un élément de** l'ensemble $\{1,2,3\}$.
$\notin$	$4 \notin \{1,2,3\}$ indique que 4 **n'est pas un élément de** l'ensemble $\{1,2,3\}$.
$\subseteq$	$A \subseteq B$ indique que A est un **sous-ensemble** de B: chaque élément de A est aussi un élément de B.
$\subset$	$A \subset B$ indique que A est un **sous-ensemble propre** de B: chaque élément de A est aussi un élément de B, mais $A \neq B$.

Théorème 3.1. *Pour tout ensemble A, on a :*

1. $\emptyset \subseteq A$
2. $A \subseteq A$

Théorème 3.2. *$A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.*

En `Python`, nous pouvons utiliser la fonction `issubset` pour vérifier qu'un ensemble est sous-ensemble d'un autre.

```
A = {2,4,6,8,10,12}
B = {4,8,12}
print(A.issubset(B), B.issubset(A))
```

```
False True
```

3.3 Produit cartésien

Définition 3.5 (Produit cartésien)**.** Le **produit cartésien** des ennsembles A et B, noté $A \times B$, est L'ensemble de tous les couples (paires ordonnées) dont le premier élément appartient à A et le second, à B:

$$A \times B = \{(a,b) \mid \ a \in A \text{ et } b \in B\}$$

On généralise cette définition au produit cartésien de n ensembles:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid \ a_1 \in A_1, ..., a_n \in A_n\}$$

Exemple 3.5. Décrivez en extension les produits cartésiens $A \times B$ et $B \times A$, où $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{a, c\}$.

Définition 3.6 (Relation)**.** Une **relation** entre les ensembles A et B est un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$.

Exemple 3.6. Soit $A={0,1,2} et $B={a,c}. L'ensemble

$$R = \{(0, a), (1, c), (2, a)\} \subseteq A \times B$$

est une relation de A dans B.

Définition 3.7. L'**ensmeble des parties** de A, noté $\mathcal{P}(A)$, est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A.

$$B \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow B \subseteq A$$

Exemple 3.7. Décrivez $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des parties de A, où $A = \{0, 1, 2\}$.

k	**Sous-ensembles de A ayant k éléments**	**Nombre de sous-ensembles**
0	$\emptyset$	1
1	$\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$	3
2	$\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$	3
3	$\{0, 1, 2\}$	1

Exemple 3.8. Décrivez $\mathcal{P}(A)$, l'ensemble des parties de A, où $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

k	**Sous-ensembles de A ayant k éléments**	**Nombre de sous-ensembles**
0		
1		
2		
3		
4		

3.4 Opérations sur les ensembles ∩, ∪, ⊕, −

Soit U l'ensemble universel et A et B des sous-ensembles de U. Les opérations suivantes génèrent des sous-ensembles de U.

Table 3.5: Les diverses opérations sur les ensembles.

Opération	**Forme mathématique**
Union	$\{x \in U \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$
Intersection	$\{x \in U \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$
Différence	$\{x \in U \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\} = A \ \ B$
Différence symétrique	$\{x \in U \mid x \in A \ \oplus \ x \in B\}$
Complément	$\{x \in U \mid x \notin A\} = U - A$

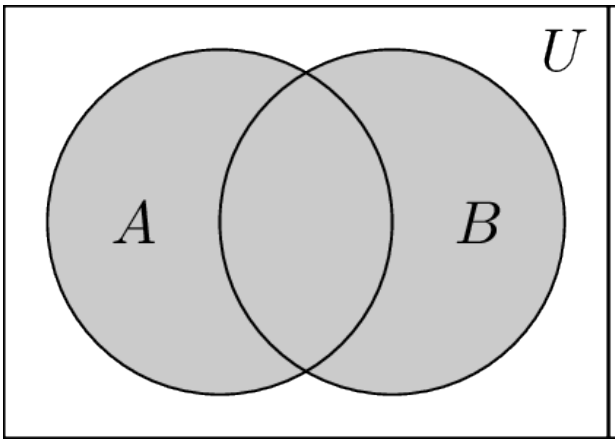


Figure 3.1: Union

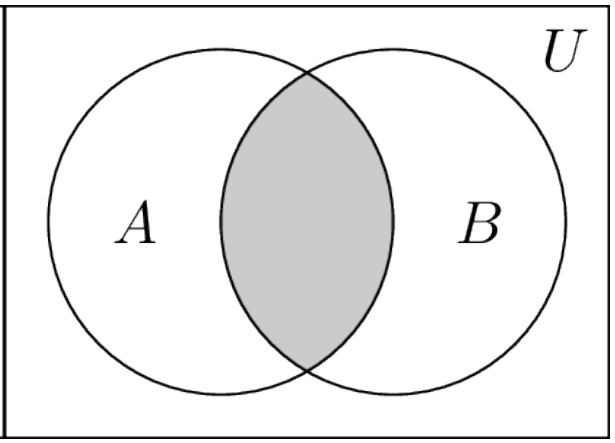


Figure 3.2: Intersection

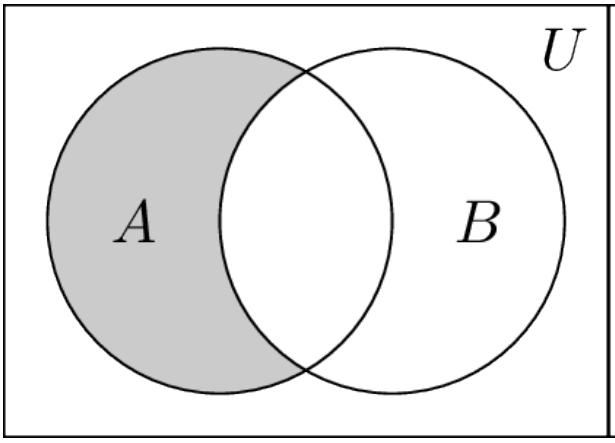


Figure 3.3: Différence

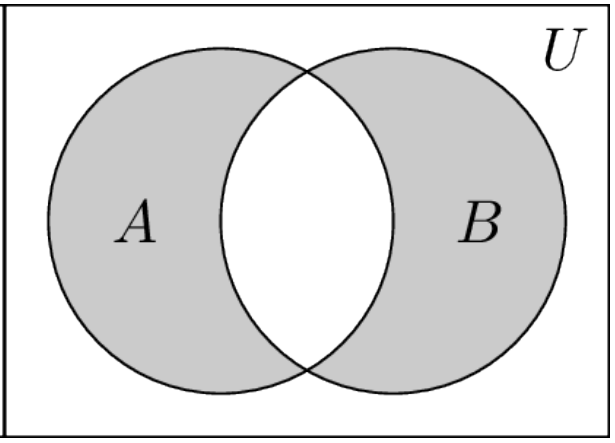


Figure 3.4: Différence symétrique

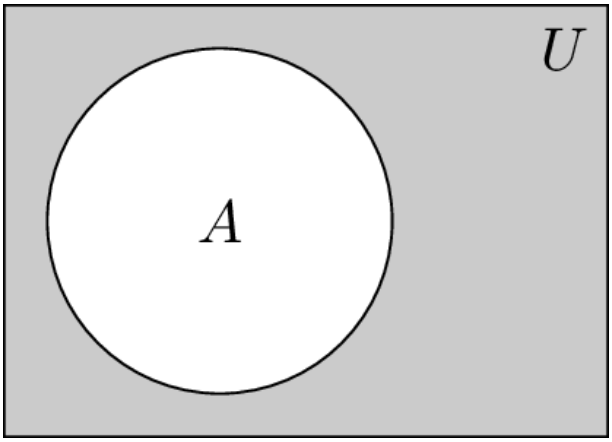


Figure 3.5: Complément

Vous pouvez effectuer ces opérations dans `Python` à l'aide des commandes suivantes:

Table 3.6: Les opérations sur les ensembles dans `Python`.

Opération	**Commande** `Python`
Union	`union`
Intersection	`intersection`
Différence	`difference`

```
A = {-3,-1,2,5}
B = {-1, 0, 2}
print(A.union(B))
```

```
{0, 2, 5, -3, -1}
```

```
A = {-3,-1,2,5}
B = {-1, 0, 2}
print(A.intersection(B))
```

```
{2, -1}
```

```
A = {-3,-1,2,5}
B = {-1, 0, 2}
print(A.difference(B))
```

```
{5, -3}
```

3.5 Représentation de sous-ensembles par trains de bits

3.6 Polygones convexes avec des opérations sur les ensembles

4 Fonctions

Définition 4.1 (Fonction)**.** Une **fonction** f d'un ensemble A vers un ensemble B est une règle qui, à chaque élément a de l'ensemble A, associe un et un seul élément b de l'ensemble B. Cet élément b est noté $f(a)$. On écrit parfois $(a, b) \in f$.

La notation usuelle pour désigner une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B est

$$f : A \to B$$

L'ensemble A est appelé le **domaine** de la fonction f, noté $\mathbf{dom}(f)$, et le sous-ensemble B formé des éléments atteints par f est appelé l'**image** de f, noté $\mathbf{ima}(f)$.

$$\mathbf{ima}(f) = \{b \in B \ \mid \ \exists a \in A, \ f(a) = b\} \subseteq B$$

Par ailleurs, on peut aussi voir une fonction f de A vers B comme un sous-ensemble du produit cartésien $A \times B$ ayant la propriété suivante:

$$\forall \ a \in A, \ \exists! b \in B, \ (a, b) \in f$$

où le symbole $\exists!$ désigne **il existe**

4.1 Fonctions plancher et plafond

UTILE LORSQUE NOUS FERONS DE LA THÉORIE DES NOMBRES

4.2 Fonctions en `Python`

DEVRAIT-ON PARLER DE ÇA????

DICTIONNAIRE, HACHAGE…

Exemple 4.1. Fonction de hachage dans Python

Hachage Python

Dictionnary in Python

A checksum is used to determine if something is the same.

If you have download a file, you can never be sure if it got corrupted on the way to your machine. You can use cksum to calculate a checksum (based on CRC-32) of the copy you now have and can then compare it to the checksum the file should have. This is how you check for file integrity.

A hash function is used to map data to other data of fixed size. A perfect hash function is injective, so there are no collisions. Every input has one fixed output.

A cryptographic hash function is used for verification. With a cryptographic hash function you should to not be able to compute the original input.

A very common use case is password hashing. This allows the verification of a password without having to save the password itself. A service provider only saves a hash of a password and is not able to compute the original password. If the database of password hashes gets compromised, an attacker should not be able to compute these passwords as well. This is not the case, because there are strong and weak algorithms for password hashing. You can find more on that on this very site.

TL;DR:

Checksums are used to compare two pieces of information to check if two parties have exactly the same thing.

Hashes are used (in cryptography) to verify something, but this time, deliberately only one party has access to the data that has to be verified, while the other party only has access to the hash.

4.3 Injection, surjection et bijection

4.3.1 Fonction de hachage est une fonction injective? surjective?

5 Notation grand O

5.1 Mesurer un temps de calcul avec une fonction

5.2 Notation grand-O

5.3 Sommations

5.4 Établir la complexité d'un algorithme

5.5 Calculabilité et complexité

5.6 P vs NP

6 Introduction aux algorithmes

6.1 Bogo sort

```
from random import shuffle
from random import seed
from random import randint

def is_sorted(data) -> bool:
    """Determine whether the data is sorted."""
    return all(a <= b for a, b in zip(data, data[1:]))

def bogosort(data) -> list:
    """Shuffle data until sorted."""
    N = 0
    while not is_sorted(data):
        shuffle(data)
        N = N + 1
    return data, N

seed(1234)
N = 8
data = [randint(1,10) for x in range(N)]
bogosort(data)
```

```
([1, 1, 2, 2, 2, 2, 8, 10], 1552)
```

6.2 Exemples d'algorithmes

6.3 Fouille linéaire

6.4 Bubble sort

6.5 Insertion sort

6.6 Binary search

6.7 Heap sort

6.8 Complexité algorithmique

7 Théorie des nombres

7.1 Arithmétique modulaire

7.1.1 Division entière

7.1.2 Congruence modulo m

7.2 Entiers et algorithmes

7.2.1 Algorithme d'exponentiation modulaire efficace

7.2.2 Nombres premiers et PGCD

7.2.3 Algorithme d'Euclide et théorème de Bézout

7.2.4 Inverse modulo m

7.2.5 Résolution de congruence

7.2.6 Petit théorème de Fermat

7.3 Cryptographie à clé secrète

7.3.1 Chiffrement par décalage

7.3.2 Permutation de l'alphabet

7.3.3 Masque jetable

7.3.4 Chiffrement affine

7.4 Cryptographie à clé publique

7.4.1 Chiffrement RSA

8 Preuves et raisonnement mathématique

8.1 Méthodes de preuve

8.1.1 Preuve directe

Exemple 8.1. LE PRODUIT DE NOMBRES PAIRS ET IMPAIRS

Exemple 8.2. RACINE DE NOMBRES PAIRS

Exemple 8.3. PREUVE QUE n^2 EST PAIR

Exemple 8.4. Soit a, b et c des entiers. Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$.

8.1.2 Preuve indirecte (par contraposée)

Exemple 8.5. Montrez que si n^2 est pair alors n est pair.

Exemple 8.6. Montrez que si $a + b$ est impair, alors a est impair ou b est impair.

Exemple 8.7. Soit p un nombre premier. Si $p \neq 2$ alors p est impair.

8.1.3 Preuve par contradiction

Exemple 8.8. EXISTE-T-IL UN PLUS PETIT NOMBRE RATIONNEL POSITIF?

Exemple 8.9. PREUVE QUE $\sqrt{2}$ EST IRRATIONNEL

Exemple 8.10. PREUVE QUE QU'IL EXISTE UNE INFINITÉ DE NOMBRES PREMIERS

Exemple 8.11. Il n'existe pas d'entiers x et y tels que $x^2 = 4y + 2$.

8.1.4 Principe des tiroirs de Dirichlet

Exemple 8.12 (Fonction de hachage)**.** Une fonction de hachage est une fonction qui transforme une suite de bits de longueur arbitraire en une chaîne de longueur fixe. Du fait qu'il y a plus de chaînes possibles en entrée qu'en sortie découle par le principe des tiroirs l'existence de collisions : plusieurs chaînes distinctes ont le même haché. Rendre ces collisions difficiles à déterminer efficacement est un enjeu important en cryptographie.

8.2 Principe de l'induction

8.2.1 Preuve par récurrence

Exemple 8.13. PREUVE QUE $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemple 8.14. PREUVE QUE $n < 2^n$

Exemple 8.15. PREUVE QUE 6 EST UN DIVISEUR DE $7^n - 1$

Exemple 8.16. MONTRER QUE NOUS POUVONS UTILISER DES T-GONES POUR REMPLIR UNE GRILLE $2^n \times 2^n$

Exemple 8.17. MONTRER QUE LA FACTORIELLE CROÎT PLUS RAPIDEMENT QUE L'EXPONENTIELLE

8.2.2 Algorithmes récursifs

8.2.2.1 Fonctions récursives

8.2.2.2 Algorithmes de type diviser pour régner

9 Dénombrement

9.1 Notions de base

9.2 Principe des nids de pigeon (principe des tiroirs de Dirichlet)

9.3 Permutations et combinaisons

9.4 Relations de récurrence et dénombrement

10 Graphes

10.1 Terminologie et types de graphes

10.2 Représentation des graphes

10.2.1 Représentation par listes d'adjacence

10.2.2 Représentation par matrice d'adjacence

10.3 Chemins dans un graphe

10.3.1 Chemins, circuits, cycles

10.3.2 Dénombrement de chemins

10.3.3 Chemins et circuits eulériens

10.3.4 Chemins et circuits hamiltoniens

10.4 Problème du plus court chemin

11 Arbres

11.1 Introduction aux arbres

11.2 Applications des arbres

11.3 Parcours d'un arbre

11.4 Arbres et tri

11.5 Arbres et recouvrement

11.6 Arbres générateurs de coût minimal

Références