Inversion de Möbius et principe d'inclusion-exclusion

Bruno Winckler

Prérequis :
– coefficient binomial ;
– nombres premiers ;
– indicatrice d'Euler (dispensable) ;
– algèbre linéaire et/ou matricielle (dispensable) ;
– séries convergentes (dispensable).

Soit $\mu : \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ la fonction nommée d'après Möbius qui, à un entier n, associe 0 s'il n'est pas *quadratfrei* (c'est-à-dire s'il est divisible par le carré d'au moins un nombre premier), 1 s'il est *quadratfrei* et a un nombre pair de facteurs premiers, -1 dans les autres cas. Plus précisément, si $n \geq 1$ a pour décomposition en facteurs premiers $\prod_{i=1}^{r} p_i$, alors $\mu(n) = (-1)^r$. À noter que comme 1 est le produit de zéro nombre premier, on a $\mu(1) = (-1)^0 = 1$.

La fonction de Möbius joue un rôle central en arithmétique, plus particulièrement en théorie analytique des nombres. Par exemple, si on note $M(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \mu(n)$ la fonction de Mertens, le fait que M soit négligeable devant la fonction identité au voisinage de l'infini est équivalent au théorème des nombres premiers, qui énonce que la quantité $\pi(x)$ qui dénombre l'ensemble des nombres premiers inférieurs à x est équivalente à $\frac{x}{\ln(x)}$ au voisinage de l'infini. Pour plus de détails, voir [Win], ou [Ell] pour un exposé plus complet. Ici, je vais simplement parler de la formule qui est à la base de l'inversion de Möbius, et montrer comment elle implique le principe d'inclusion-d'exclusion de Moivre, qu'on appelle aussi formule du crible. Ce principe d'inclusion-d'exclusion sera illustré avec trois exemples. Dans la suite de l'exposé, la notation $a|b$ signifie que a divise b, et si x est un réel, alors $[x]$ désigne sa partie entière.

1 Inversion de Möbius

L'inversion de Möbius dit que la fonction de Möbius est l'inverse de la fonction identiquement égale à 1 pour le produit de convolution, défini sur l'ensemble des fonctions arithmétiques (c'est-à-dire définies de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$) par $f * g : n \mapsto \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \sum_{ij=n} f(i)g(j)$, où $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions arithmétiques. Autrement dit :

Proposition 1 (Inversion de Möbius) *On a* $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = 1, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$

Dans le langage des produits de convolution de fonctions arithmétiques, cette proposition s'écrit : $1 * \mu = e$, où $e : \mathbb{N}^* \to \{0, 1\}$ est l'élément neutre pour cette opération, défini par $e(1) = 1$, $e(n) = 0$ si $n \geq 2$.

Preuve. Si $n = 1$, le résultat est évident. Supposons donc $n \geq 2$, et écrivons sa décomposition en facteurs premiers $\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$, où les α_i sont des entiers non nuls. On a alors :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|p_1 \cdots p_r} \mu(d) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j = (1 + (-1))^r = 0,$$

la première égalité provenant du fait que $\mu(d) = 0$ dès que d admet un facteur carré p_i^2, et la deuxième égalité s'expliquant par un dénombrement du nombre de diviseurs de $p_1 \cdots p_r$: il y a $\binom{r}{j}$ façons de choisir j nombres premiers parmi ces p_i, et chacun de ces choix fournit un diviseur avec j facteurs, dont l'évaluation de la fonction de Möbius est donc $(-1)^j$. La troisième égalité est issue du binôme de Newton. □

On parle de formule d'inversion, parce qu'elle permet d'inverser quelques égalités dites de convolution : si $g(n) = \sum_{d|n} f(d) = (f*1)(n)$ pour tout $n \geq 1$, alors $f(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(n/d) = (g*\mu)(n)$ pour tout $n \geq 1$. La preuve, élémentaire, utilise de manière sous-jacente l'associativité de la loi $*$, et la formule d'inversion ci-dessus. En voici un exemple d'application :

Proposition 2 *Soit φ l'indicatrice d'Euler, qui à n associe le nombre d'entiers k inférieurs à n qui lui sont étrangers (*i.e. $\operatorname{pgcd}(k,n) = 1$*). Alors*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \sum_{1\leq n\leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}.$$

Cette proposition dit, en substance, que le nombre « moyen » d'entiers inférieurs à n et qui lui sont étrangers est de l'ordre de $\frac{3}{\pi^2}n \simeq 0,3n$. Attention, la preuve de cette proposition nécessite de connaître quelques résultats d'analyse qui sont au-dessus du niveau de cet exposé. On peut la sauter en première lecture.

Preuve. On sait que pour tout entier n non nul, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$; si on ne le sait pas, il est bon de savoir qu'elle traduit le fait que l'unique groupe cyclique à n éléments (à isomorphisme près) a exactement un sous-groupe d'ordre d pour chaque d divisant n. Comme chaque élément est d'un ordre d divisant n, il engendre l'unique sous-groupe d'ordre d, et un tel groupe a $\varphi(d)$ générateurs. En faisant le compte, on retrouve les n éléments du groupe. On peut aussi prouver cette formule de manière purement calculatoire, en procédant par récurrence et en remarquant que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux (c'est, par exemple, une conséquence du lemme des restes chinois).

Alors, grâce au commentaire précédent sur l'inversion de Möbius, on en déduit que $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d)d$ pour tout entier n non nul [*]. On poursuit :

$$\sum_{1\leq n\leq x} \varphi(n) = \sum_{1\leq n\leq x} \sum_{ij=n} \mu(i)j = \sum_{ij\leq x} \mu(i)j = \sum_{1\leq i\leq x} \sum_{1\leq j\leq x/i} \mu(i)j = \sum_{1\leq i\leq x} \mu(i) \sum_{1\leq j\leq x/i} j,$$

et on sait que $\sum_{1\leq j\leq x/i} j$ égale $\frac{1}{2}\left[\frac{x}{i}\right] \cdot \left(\left[\frac{x}{i}\right] + 1\right)$: c'est une somme d'entiers consécutifs. Alors,

$$\sum_{1\leq n\leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2} \sum_{1\leq i\leq x} \mu(i) \left(\left[\frac{x}{i}\right] + \left[\frac{x}{i}\right]^2\right),$$

puis, en écrivant $\left[\frac{x}{i}\right] = \frac{x}{i} - \left\{\frac{x}{i}\right\}$ (où $\left\{\frac{x}{i}\right\}$ s'appelle la partie fractionnaire de $\frac{x}{i}$, et est entre 0 et 1) et en développant :

$$\sum_{1\leq n\leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2}\left(x \sum_{1\leq i\leq x} \frac{\mu(i)}{i} + x^2 \sum_{1\leq i\leq x} \frac{\mu(i)}{i^2} - \sum_{1\leq i\leq x} \mu(i)\left\{\frac{x}{i}\right\} - 2x \sum_{1\leq i\leq x} \frac{\mu(i)}{i}\left\{\frac{x}{i}\right\} + \sum_{1\leq i\leq x} \mu(i)\left\{\frac{x}{i}\right\}^2\right).$$

Seule la somme derrière le x^2 (qui est convergente, car converge absolument à l'aide du $\frac{1}{i^2}$) compte : comme $|\mu(i)\{\frac{x}{i}\}| \leq 1$, la troisième somme de la parenthèse est inférieure à x en valeur absolue, donc se laisse abattre par le x^2. La dernière somme aussi, pour les mêmes raisons. Pour la première somme, on va faire une comparaison série-intégrale pour l'évaluer : comme $\left|\frac{\mu(i)}{i}\right| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x \geq i$ (on a $|\mu(i)| \leq 1$), on a $\left|\frac{\mu(i)}{i}\right| = \int_i^{i+1} \left|\frac{\mu(i)}{i}\right| \mathrm{d}x \leq \int_i^{i+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$, puis

$$\left|\sum_{1\leq i\leq x} \frac{\mu(i)}{i}\right| \leq \sum_{1\leq i\leq x} \left|\frac{\mu(i)}{i}\right| \leq \sum_{1\leq i\leq x} \int_i^{i+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^{x+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(x+1),$$

[*]. En fait, on peut prouver cette égalité directement, toujours grâce à l'inversion de Möbius. On a $\varphi(n) = \sum_{m=1}^{n} e(\operatorname{pgcd}(m,n)) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{d|\operatorname{pgcd}(m,n)} \mu(d) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{\substack{m=1\\ d|m}}^{n} 1 = \sum_{d|n} \mu(d)(n/d)$.

et ce n'est pas un $x\ln(x+1)$ qui va menacer notre x^2 †. De la même manière, l'avant-dernière somme ne pèse pas lourd.

Enfin, on peut calculer la limite de $\sum_{1\leq i\leq x}\frac{\mu(i)}{i^2}$, provisoirement notée $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(i)}{i^2}$, encore une fois grâce à l'inversion de Möbius. En effet, comme les séries de terme général $\frac{\mu(i)}{i^2}$ et $\frac{1}{i^2}$ convergent absolument, leur produit aussi (par un théorème de Cauchy), et en particulier on peut permuter les termes de la série qui en résulte, sans changer la valeur de la somme. Alors,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(i)}{i^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\mu(i)}{(ij)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{ij=n}\mu(i)}{n^2},$$

en regroupant les i et j tels que $ij=n$. Par l'inversion de Möbius, on sait que cette dernière somme vaut 1. Donc $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(i)}{i^2}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\right)^{-1}$. La somme de la série sous la puissance a été calculée par Euler, résolvant ainsi le problème de Bâle, et vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Utilisez votre méthode d'analyse favorite pour le prouver (on peut en trouver une particulièrement élémentaire dans [Rai]), ma méthode préférée se base sur la double identité suivante :

$$\sin(x)=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

la première identité étant le produit de Weierstrass du sinus (on « factorise » le sinus tel un polynôme, grâce à ses racines $\pm\pi n$) qui peut aussi se prouver grâce à la théorie des séries de Fourier, et la deuxième identité étant le développement en série entière du sinus. En comparant le terme devant x^3 dans chaque égalité, on obtient

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2n^2}=-\frac{1}{6}.$$

En combinant tout ce qu'on vient de raconter, on trouve la limite annoncée dans la proposition. □

2 Principe d'inclusion-exclusion de Moivre

La formule suivante donne, de manière un peu déguisée, comment calculer le cardinal d'une union d'ensembles. On sait que si on a deux ensembles finis A et B, alors $A\cup B$ est fini, et le cardinal de $A\cup B$ égale $\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$: on compte les éléments dans A et B, et on doit enlever ceux qu'on a comptés deux fois, c'est-à-dire ceux à la fois dans A et B.

S'il y a plus que deux ensembles finis, c'est plus délicat : si on a, par exemple, trois ensembles finis, pour compter le nombre d'éléments de leur réunion, on compte le nombre d'éléments de ces trois ensembles. Mais on doit retirer ceux comptés au moins deux fois : ceux qui sont dans deux ensembles à la fois. Mais en faisant ça, on en a peut-être trop enlevé : si un élément est dans les trois ensembles à la fois, il a été décompté une fois de trop, et on doit le rajouter. D'où

$$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C).$$

On peut faire de même pour n ensembles, et l'identité qui en est issue s'appelle principe d'inclusion-exclusion de Moivre, ou formule du crible. Je vais donner le résultat sous une forme sensiblement différente, mais qui fera apparaître plus clairement la fonction de Möbius.

Proposition 3 (Principe d'inclusion-exclusion de Moivre) *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de cardinal fini N, $\mathcal{P}=\{(1),\ldots,(k)\}$ un ensemble de propriétés à vérifier ‡, et $A(I)$ le nombre d'éléments de*

†. On peut montrer, mais c'est difficile, que $\lim_{x\to\infty}\sum_{1\leq i\leq x}\frac{\mu(i)}{i}=0$. C'est, en fait, équivalent au théorème des nombres premiers, et suggéré par le fait que la fonction ζ a un pôle en 1.

‡. Chaque (i) est un ensemble, et on dit que x vérifie (i) s'il appartient à (i).

$\mathcal{A}$ satisfaisant toutes les propriétés dans $I \subseteq \mathcal{P}$. Alors :

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = N + \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \sum_{\substack{I \subseteq P \\ \mathrm{card}(I)=s}} A(I),$$

où $S(\mathcal{A}, \mathcal{P})$ est l'ensemble des éléments ne vérifiant pas la moindre propriété dans $\mathcal{P}$.

En effet, pour vérifier aucune propriété de $\mathcal{P}$, on commence par prendre en compte les N éléments de $\mathcal{A}$, et à retirer tous ceux qui ne vérifient pas une propriété. En faisant ça, on a retiré trop souvent ceux qui ne vérifient pas deux propriétés, donc on les rajoute pour compenser. Et ainsi de suite.

Preuve. Soient $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ les k plus petits nombres premiers, et écrivons $P = \prod_{i=1}^{k} p_i$. Pour chaque élément a de $\mathcal{A}$, on associe l'entier $F(a) = \prod_{a \in (i)} p_i$. Alors,

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = \sum_{a \in \mathcal{A}} e(F(a)) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \sum_{d | F(a)} \mu(d) = \sum_{d | P} \mu(d) \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ d | F(a)}} 1.$$

Si $d = \prod_{(i) \in I} p_i$, alors on a bien sûr

$$\mu(d) = (-1)^{\mathrm{card}(I)} \text{ et } \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ d | F(a)}} 1 = A(I),$$

d'où le résultat. $\square$

3 Applications

Je donne quatre applications variées du principe d'inclusion-exclusion de Moivre.

Proposition 4 *Soit φ l'indicatrice d'Euler introduite dans la section précédente. Alors pour tout entier n non nul, on a $\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.*

Preuve. Écrivons n sous la forme $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers inférieurs à n, (i) la propriété « être divisible par p_i ». Les entiers premiers à n sont ceux divisibles par aucun des p_i. Alors,

$$\varphi(n) = S(\mathcal{A}, \mathcal{P}) = n + \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \sum_{\substack{I \subseteq P \\ \mathrm{card}(I)=s}} A(I),$$

où $A(I)$ représente l'ensemble des nombres divisibles par chacun des p_i indiqués par l'ensemble I, c'est-à-dire l'ensemble des multiples du produit $p_{i_1} \cdots p_{i_s}$, en posant $I = \{(i_1), \ldots, (i_s)\} \subseteq \mathcal{P}$. Or, il y a exactement $\frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}$ multiples de $p_{i_1} \cdots p_{i_s}$ inférieurs à n. Je vous laisse vous convaincre qu'en développant le produit $n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, on obtient bien des coefficients de la forme $(-1)^s \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_s}}$. $\square$

Cette formule se montre aussi facilement à partir de la multiplicativité de la fonction φ, dont il a déjà été question, et de l'égalité simple $\varphi(p^\nu) = p^\nu - p^{\nu-1}$ pour p premier et $\nu \geq 1$ (ça revient à compter le nombre de multiples de p inférieurs à p^ν).

Proposition 5 *Soient n et k deux entiers tels que $n \geq k$, et s_{nk} le nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$. Alors $s_{nk} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} \binom{k}{s} s^n$.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, k]\!]$, et soit (i) la propriété « i n'est pas dans l'image de l'application », définie ainsi pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. Une application surjective contient tous les $i \in [\![1, k]\!]$ dans son image, donc vérifie aucune des propriétés (i). Ainsi,

$$s_{nk} = k^n + \sum_{s=1}^{k} (-1)^s \sum_{\substack{I \subseteq P \\ \mathrm{card}(I)=s}} A(I),$$

où $\sum_{\substack{I\subseteq P\\ \mathrm{card}(I)=s}} A(I)$ est le nombre d'applications n'atteignant pas (au moins) s points de $[\![1,k]\!]$. Il est clair que ça revient à dénombrer le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ dans un ensemble à $k-s$ éléments (il y en a $(k-s)^n$), ce qu'on doit encore multiplier par le nombre d'ensembles à $k-s$ éléments dans $[\![1,k]\!]$ (il y en a $\binom{k}{k-s}$). En faisant le changement d'indice de sommation $s\mapsto k-s$ dans la somme, on obtient le résultat voulu. □

Proposition 6 *Soit D_n le nombre de permutations sans point fixe de $[\![1,n]\!]$. Alors $D_n = n!\sum_{s=1}^{n}\frac{(-1)^{s+1}}{s!}$.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$; il y en a $n!$. Notons (i) la propriété « i est un point fixe ». Comme dans la preuve précédente, on doit calculer les $\sum_{\substack{I\subseteq P\\ \mathrm{card}(I)=s}} A(I)$, qui ici représentent le nombre de permutations qui fixent (au moins) s points. Une permutation de $[\![1,n]\!]$ qui laisse fixe s points définit une permutation du complémentaire de ces s points, et il y a $(n-s)!$ tels permutations. Pour avoir $\sum_{\substack{I\subseteq P\\ \mathrm{card}(I)=s}} A(I)$, on doit encore multiplier $(n-s)!$ par le nombre de choix de s points dans $[\![1,n]\!]$, et il y a $\binom{n}{s}$ tels choix. Comme $(n-s)!\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!}$, on obtient le résultat désiré. □

Remarque. Comme D_n et s_{nk} vérifient les relations $n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$ (pour construire une permutation, on choisit k points fixes sur les n de $[\![1,n]\!]$, fournissant $\binom{n}{k}$ possibilités, puis on fait une permutation sans point fixe sur le complémentaire, d'où la multiplication par D_{n-k}) et $n^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}s_{nj}$ (pour construire une application de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$, on détermine le cardinal j de son image, puis on choisit l'image en question parmi les $\binom{k}{j}$ possibles, et on définit une surjection de $[\![1,n]\!]$ sur cette image ; il y en a s_{nj}). On pouvait alors en déduire D_n et s_{nk} grâce à une autre formule d'inversion :

Lemme 7 *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites vérifiant les relations $b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$ pour tout $n\geq 0$. Alors $a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}b_k$ pour tout $n\geq 0$.*

Cette démonstration tient en peu de choses matricellement : elle dit que si A est la matrice de $P\mapsto P(X+1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, Y le vecteur colonne avec b_n en coefficients, et X le vecteur colonne avec a_n en coefficients, alors $Y = {}^tAX$ implique $X = {}^tA^{-1}Y$.

Preuve. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n, et soit $\Phi : \mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par $\Phi(P(X)) = P(X+1)$. Elle admet une application réciproque, et $\Phi^{-1}(P(X)) = P(X-1)$, comme on peut le vérifier immédiatement. Remarquons qu'on a :

$$\Phi(X^n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k,\quad \Phi^{-1}(X^n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}X^k,$$

grâce au binôme de Newton, encore lui. Les applications ${}^t\Phi : \begin{cases}\mathrm{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R}) & \to \mathrm{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})\\ f & \mapsto f\circ\Phi\end{cases}$ et ${}^t\Phi^{-1} : \begin{cases}\mathrm{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R}) & \to \mathrm{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})\\ f & \mapsto f\circ\Phi^{-1}\end{cases}$ sont elles aussi inverses l'une de l'autre, et les hypothèses du lemme disent que

$${}^t\Phi(a_ne_n^* + \cdots + a_0e_0^*) = b_ne_n^* + \cdots + b_0e_0^*,$$

où e_i^* est l'application qui, à un polynôme, associe sa i-ième coordonnée. En appliquant ${}^t\Phi^{-1}$ à gauche et à droite, je vous laisse vérifier qu'on obtient la conclusion du lemme. □

Avec ce lemme, on retrouve les formules pour D_n et s_{nk}. Enfin, une dernière application, arithmétique cette fois, du principe d'inclusion-exclusion :

Proposition 8 *Soit $G(x)$ le nombre de couples d'entiers inférieurs à x qui sont premiers entre eux. Alors,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Autrement dit, la densité des couples de nombres premiers entre eux tend vers $\frac{6}{\pi^2}$.

Ébauche de preuve. Le principe d'inclusion-exclusion aboutit à

$$G(x) = \sum_{n\leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right]^2 = x^2 \sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n^2} + O\left(x \sum_{n\leq x} \frac{1}{x}\right),$$

et on a vu précédemment que la somme $\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n^2}$ converge, ayant pour limite $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}$. □

Références

[Ell] William J. Ellison, *Les nombres premiers*, 442 pages, Hermann, 1975.

[Rai] Martin Aigner, Gunter M. Ziegler, *Raisonnements divins*, 270 pages, Springer, 2006.

[Win] Bruno Winckler, *La distribution des nombres premiers* (TIPE), 7 pages, 2008.