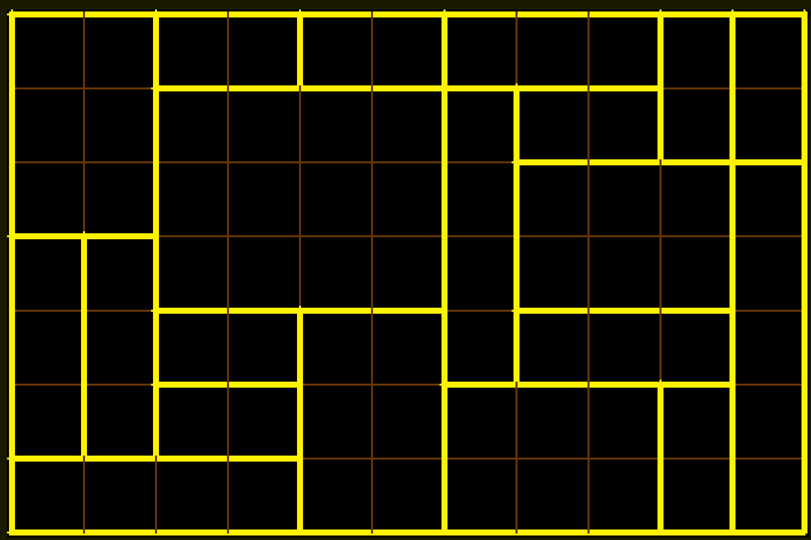
Rectangles, Parties 1-2-3

On s'intéresse au nombre de manières possibles de remplir un rectangle $m \times n$ en utilisant des rectangles non-carrés. Voici un exemple de remplissage légal d'un rectangle 7×11:



Soit $f(m, n)$ le nombre de manières de couvrir un rectangle $m \times n$ avec des rectangles non-carrés. En guise d'exemple (vous devriez essayer de confirmer ces résultats avec papier/crayon pour vous réchauffer):

$$\begin{aligned} f(1,2) =& 1 \\ f(2,2) =& 2 \\ f(2,3) =& 5 \\ f(3,3) =& 18 \end{aligned}$$

Note: pour chacune des trois questions, le flag est dans le format `FLAG-XYZ...`, où `XYZ...` est la réponse.

Question 1 - **Calculez** $f(5, 5)$

Question 2 - **Calculez** $f(2, 20203)$ **mod** 999999937

Question 3 - **Calculez** $f(7, 11)$

Note: pour chacune des trois questions, le flag est dans le format `FLAG-XYZ...`, où `XYZ...` est la réponse.

Matrices twadolicieuses partie 1

Définissons une matrice n-twadolicieuse commme une matrice carrée $n \times n$ telle que chacune de ses lignes et colonnes contient exactement deux "1" et $n-2$ "0". Voici 3 exemples de matrices 5-twadolicieuses:

1 0 0 1 0	0 1 1 0 0	0 1 0 0 1
0 0 1 0 1	0 0 1 1 0	1 0 1 0 0
1 1 0 0 0	1 1 0 0 0	0 0 0 1 1
0 0 1 1 0	0 0 0 1 1	0 1 0 1 0
0 1 0 0 1	1 0 0 0 1	1 0 1 0 0

Nommons $tot(n)$ le nombre de matrices n-twadolicieuses possibles. Exemples: $tot(2) = 1$, $tot(3) = 6$, $tot(5) = 2040$.

Calculez $tot(25)$.

Matrices twadolicieuses partie 2

Deux matrices n-twadolicieuses seront dites twado-semblables s'il est possible de passer de l'une à l'autre en effectuant des permutations de rangées et des permutations de colonnes (peu importe le nombre de permutations et leur ordre). Deux matrices n-twadolicieuses non-twado-semblables seront dites fortement distinctes.

Dans l'exemple de la question précédente,

1 0 0 1 0	0 1 1 0 0	0 1 0 0 1
0 0 1 0 1	0 0 1 1 0	1 0 1 0 0
1 1 0 0 0	1 1 0 0 0	0 0 0 1 1
0 0 1 1 0	0 0 0 1 1	0 1 0 1 0
0 1 0 0 1	1 0 0 0 1	1 0 1 0 0

les deux premières matrices sont twado-semblables, puisqu'il est possible de passer de la première à la deuxième matrice en effectuant dans l'ordre les trois opérations suivantes:

1. Permuter les rangées 1 et 5
2. Permuter les colonnes 4 et 5
3. Permuter les colonnes 3 et 4

Toutefois, des permutations de lignes et des permutation colonnes ne permettent pas d'obtenir la troisième matrice à partir de l'une des deux premières. La troisième matrice est donc fortement distincte des deux autres.

Soit $ceq(n)$ le nombre maximal de matrices n-twadolicieuses toutes fortement distinctes entre elles qu'on peut trouver.

Voici un tableau contenant plusieurs valeurs comme exemple:

n	ceq(n)	tot(n)
2	1	1
3	1	6
5	2	2040
7	4	3110940
11	14	158815387962000
18	88	HUGE

Calculez la valeur de $ceq(666)$**.**

Matrices twadolicieuses partie 3

Maintenant, on s'intéresse au nombre de matrices n-twadolicieuses dans la même classe d'équivalence qu'une matrice n-twadolicieuse (i.e, pour une certaine matrice n-twadolicieuse, combien y a-t-il de matrices twado-semblabless à celle-ci).

En prenant (une fois de plus) le même exemple que d'habitude,

1 0 0 1 0	0 1 1 0 0	0 1 0 0 1
0 0 1 0 1	0 0 1 1 0	1 0 1 0 0
1 1 0 0 0	1 1 0 0 0	0 0 0 1 1
0 0 1 1 0	0 0 0 1 1	0 1 0 1 0
0 1 0 0 1	1 0 0 0 1	1 0 1 0 0

Les deux premières matrices sont dans la même classe d'équivalence, qui contient 1440 matrices. La troisième matrice est dans la seule autre classe d'équivalence qui existe, qui contient plutôt 600 matrices, ce qui fait un nombre total de $tot(5) = 1440 + 600 = 2040$ matrices 5-twadolicieuses, ce qui concorde avec le tableau affiché à la question précédente.

Le fichier twadomatrix.txt contient une matrice 2020-twadolicieuse. Soit x le nombre de matrices dans sa classe d'équivalence. Puisque x est trop grand, on ne vous demande pas calculer x directement mais plutôt de **donner la valeur de** x **mod** 999999937.

Note: 999999937 est un nombre premier.

Note: Afin d'économiser de l'espace, twadomatrix.txt indique, pour chacune de ses rangées, dans quelles deux colonnes se trouvent les "1" de cette rangée.