

Прикладные задачи в анализе данных

Домашнее задание 3

Попов Дмитрий Олегович,

517 группа

Задача

Назовём сетью с негативными связями взвешенный граф, в котором веса могут принимать только значения -1 и 1 . Будем называть рёбра такой сети связями. Сеть с негативными связями называется сбалансированной, если для любой её клики размера 3 произведение весов рёбер этой клики равно 1 .

Доказать, что полная сбалансированная сеть с негативными связями либо полностью положительна (то есть все веса 1), либо разбивается на два подмножества вершин так, что связи, соединяющие вершины внутри подмножества, положительны, а соединяющие вершины между подмножествами — отрицательны.

Решение

Сформулированное условие взвешенности означает, что любой треугольник имеет чётное число негативных связей, то есть либо 0 , либо 2 .

Полнота сети и бинарность весов каждого ребра позволяет рассматривать вместо такой сети обычный граф без весов. Образует по данной сети граф с теми же вершинами так, что ребро в графе существует тогда и только тогда, когда соответствующая связь в сети негативна. Покажем, что полученный граф двудолен.

Граф двудолен тогда и только тогда, когда в нём нет циклов нечётной длины. По условию сбалансированности исходной сети в нашем графе нет циклов длины 3 . Предположим, что в графе есть цикл нечётной длины больше 3 , пусть это $2n+1$, n – натуральное, $n > 1$. Рассмотрим тройку из следующих вершин на этом цикле: произвольную и две на расстоянии n от неё. Две последние вершины смежны, значит, в этой тройке должно быть ещё одно ребро. Вне зависимости от его расположения оно порождает ещё два цикла с длинами $n+1$ и $n+2$. Эти числа имеют разную чётность и оба меньше $2n+1 \Rightarrow$ получили нечётный цикл меньшей длины. Также заметим, что оба этих числа больше 1 . В силу вполне упорядоченности множества натуральных чисел (что то же самое, что возможность применить математическую индукцию) за конечное число шагов мы придём к циклу длины 3 , что противоречит условию.

Следовательно, в графе нет циклов нечётной длины, значит, граф двудолен. В терминах полной сети с негативными связями это значит, что она разбивается на два подмножества вершин, соответствующих долям, так, что негативные связи существуют только между этими подмножествами. В вырожденном случае вся сеть соответствует одной доле, тогда граф пустой, а в сети все связи положительны. Это доказывает исходное утверждение.