МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Курсовая работа
по дисциплине «Математический анализ»
на тему «Линейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. Их решение сведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений»

Направление подготовки – 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки – Математика

Выполнил студент: ___________ **Дыранова Ю.В.**
(подпись, дата) (Ф.И.О.)
Группа: **18ФПМ1**

Руководитель:
д.п.н., профессор каф.МО _________ **Яремко Н.Н.**
(подпись, дата) (Ф.И.О.)

Работа защищена с оценкой ___________

Преподаватели ___________

____

Дата защиты ___________

Пенза, 2020

Оглавление

Введение

Теория дифференциальных уравнений - раздел математики, который занимается изучением дифференциальных уравнений и связанных с ними задач. Её результаты применяются во многих естественных науках, особенно широко - в физике.

Неформально говоря, дифференциальное уравнение - это уравнение, в котором неизвестной величиной является некоторая функция. При этом в самом уравнении участвует не только неизвестная функция, но и различные производные от неё. Дифференциальным уравнением описывается связь между неизвестной функцией и её производными. Такие связи обнаруживаются в самых разных областях знания: в механике, физике, химии, биологии, экономике и др.

Различают обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) и дифференциальные уравнения в частных производных (УРЧП). Существуют также стохастические дифференциальные уравнения (СДУ), включающие случайные процессы.

Первоначально дифференциальные уравнения возникли из задач механики, в которых участвовали координаты тел, их скорости и ускорения, рассматриваемые как функции времени.

В работе рассматриваются понятия линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, а также системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется изучению линейных однородных, неоднородных и квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Цель курсовой работы – изучить понятие линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В связи с поставленной целью необходимо выполнить следующие задачи:

1) Изучение основных положений теории дифференциальных уравнений в частных производных.

2) Изучение решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка сведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

3) Решение практических задач.

Объект исследования: дифференциальные уравнения в частных производных.

Предмет исследования: решение линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Курсовая работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

1. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

1.1 Понятие линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Примеры простейших дифференциальных уравнений в частных производных

В самом общем виде дифференциальное уравнение первого порядка может быть записано в виде:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_m}\right) = 0, \quad (1)$$

где $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ - неизвестная функция.

Уравнение (1) называется линейным, если неизвестная функция и её частные производные входят в это уравнение в первой степени (линейно). Такое уравнение может быть приведено к виду:

$$\sum_{j=1}^{m} X_j(x_1, x_2, \dots, x_m)\frac{\partial u}{\partial x_j} + X_{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_m)\cdot u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (2)$$

Будем предполагать, что в уравнении (2) функции $f(x_1, x_2, \dots, x_m), X_j(x_1, x_2, \dots, x_m)(j = 1,2,\dots, m+1)$ непрерывны в некоторой области. Кроме того, функции $X_j(x_1, x_2, \dots, x_m)(j = 1,2,\dots, m)$ в этой области имеют ограниченные частные производные и ни в одной точке этой области не обращаются в нуль одновременно.

Если $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \equiv 0$, то уравнение (2) принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{m} X_j(x_1, x_2, \dots, x_m)\frac{\partial u}{\partial x_j} + X_{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_m)\cdot u = 0 \quad (3)$$

и называется однородным.

Соответственно уравнение (2) называется – неоднородным.

Рассмотрим некоторые примеры уравнений в частных производных.

1. Найти функцию $z = z(x, y)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$.

Интегрируя, получим $z = x + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ - произвольная функция. Это – общее решение данного дифференциального уравнения.

2. Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$, где $z = z(x, y)$.

Дважды интегрируя по y, получаем $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + \varphi(x)$, $z = y^3 + y \cdot \varphi(x) + \psi(x)$, где $\varphi(x), \psi(x)$ - произвольные функции.

3. Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

Интегрируя уравнение по x, имеем $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f(y)$. Проинтегрировав полученный результат по y, находим $z = \varphi(x) + \psi(y)$, где $\psi(y) = \int f(y)dy$.

1.2 Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка, в котором неизвестная функция является функцией двух переменных x и y, то есть $u(x_1, x_2) = z(x, y)$, и которое не содержит явно неизвестную функцию. В соответствии с (3) такое уравнение может быть записано в виде:

$$A(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

Наряду с уравнением (4) рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую принято называть характеристической системой для уравнения (4):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = A(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = B(x,y) \end{cases} \quad (5)$$

Функция $\varphi(x,y)$, не сводящаяся тождественно к постоянной, называется первым интегралом системы (5), если при подстановке в неё любого решения x(t), y(t) этой системы получается постоянная величина, зависящая только от выбора решения. Первый интеграл принято записывать в виде $\varphi(x,y) = C$. Для нахождения первого интеграла системы (5) поступают следующим образом. Исключают параметр t из системы (5). В результате получается эквивалентное системе (5) уравнение:

$$\frac{dx}{A(x,y)} = \frac{dy}{B(x,y)} \quad (6)$$

Если $y = y(x,C)$ - общее решение уравнения (6), то выразив постоянную величину C через x, y получают первый интеграл $\varphi(x,y) = C$ системы (5). Если решение уравнения (6) получается в виде общего интеграла $F(x,y,C) = 0$, то поступают аналогичным образом.

Теорема 1. Пусть $\varphi(x,y)=C$, где С – произвольная постоянная, является первым интегралом системы (5). Тогда функция $z=\varphi(x,y)$ является решением уравнения (4).

Доказательство.

Пусть x(t), y(t) – какое-нибудь решение системы (5). Тогда по определению первого интеграла $\varphi(x(t),y(t))=C$.

Продифференцируем это равенство. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции нескольких переменных:

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t),y(t))=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}=0 \quad (7)$$

С учетом (5) соотношение (7) принимает вид:

$$A(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad (8)$$

Как видим, выражение (8) и (4) с точностью до обозначений полностью совпадают. Кроме того, равенство (8) справедливо для любого решения системы (5), то есть оно справедливо для x, y из области определения уравнения (4). Следовательно, $z=\varphi(x,y)$ - решение (4).

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 2. Пусть $z=\varphi(x,y)$ - решение (4). Тогда $\varphi(x,y)=C$ является первым интегралом системы (5).

Доказательство.

Подставим в функцию $\varphi(x,y)$ какое-нибудь решение системы (5) и возьмем полную производную от полученного выражения:

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t),y(t))=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}A(x,y)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}B(x,y)$$

Так как $\varphi(x,y)$ - решение уравнения (4), то правая часть в последнем выражении тождественна равна нулю, то есть

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t),y(t))\equiv 0 \quad (9)$$

Но соотношение (9) является необходимым и достаточным условием того, чтобы $\varphi(x, y) = C$. Таким образом, $\varphi(x, y) = C$ - первый интеграл системы (5).

Известно, что если $\varphi(x, y) = C$ - первый интеграл системы (5), то $\Phi(\varphi) = C$, где Ф – произвольная функция, также является первым интегралом системы (5). Из доказанных теорем следует, что $z = \Phi(\varphi)$ - общее решение уравнения (4).

Теперь рассмотрим линейное неоднородное уравнение в частных производных первого порядка, в котором неизвестная функция z (x, y) является функцией двух переменных.

$$A(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + zD(x, y) = f(x, y) \quad (10)$$

Более общее уравнение:

$$A(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = C(x, y, z) \quad (11)$$

Это уравнение называется квазилинейным неоднородным уравнением в частных производных первого порядка. Это уравнение линейно относительно частных производных, но может быть нелинейным относительно неизвестной функции z (x, y). Если $A(x, y, z) = A(x, y)$ и $B(x, y, z) = B(x, y)$, то есть $A(x, y, z)$ и $B(x, y, z)$ не зависят от переменной z, а $C(x, y, z) = f(x, y) - zD(x, y)$, уравнение (11) переходит в (10).

2. Решение линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

2.1 Решение линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Примеры

Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка имеет вид:

$$X_1 \frac{df}{dx_1} + X_2 \frac{df}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{df}{dx_n} = 0, \quad (1)$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – заданные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - искомая функция.

Решение уравнения в частных производных (1) эквивалентно решению системы уравнений:

$$\frac{d(x_1)}{X_1} = \frac{d(x_2)}{X_2} = \ldots = \frac{d(x_n)}{X_n} \quad (2)$$

Действительно, (n-1) независимых первых интегралов этой системы дают общий интеграл:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1 \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1} \end{array}\right\} \quad (3)$$

Мы хотим иметь возможность принять любые из переменных за независимые, а остальные за искомые функции. Естественно потребовать от функций X_i непрерывности и существования непрерывных частных производных по всем аргументам $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Чтобы перейти от симметрической системы (3) к системе вида (2) нужно взять одну из переменных, например, x_n, в качестве независимой.

Система запишется в виде:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n} \quad (4)$$

Аналитическое условие того, чтобы каждый из интегралов (3) или вообще любое соотношение вида:

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \quad (5)$$

являлось первым интегралом системы, получается следующим образом.

Вдоль интегральной кривой системы функции ψ сохраняет постоянное значение; следовательно, её полный дифференциал, взятый вдоль кривой, равен нулю:

$$\frac{d\psi}{dx_1}dx_1 + \frac{d\psi}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{d\psi}{dx_n} = 0$$

Но вдоль кривой дифференциалы dx_k, в силу уравнений (2), пропорциональны значениям функций X_k; следовательно, вдоль каждой интегральной кривой имеем:

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{d\psi}{dx_1} + X_2\frac{d\psi}{dx_2} + \ldots + X_n\frac{d\psi}{dx_n}dx_n = 0 \quad (6)$$

Соотношение (6) выведено для значений x_1, x_2, …, x_n, представляющих (переменную) точку некоторой интегральной кривой, но так как это равенство справедливо для любого значения постоянной C в формуле (5), то равенство (6) выполняется для точек любой интегральной кривой.

Ввиду того, что через каждую точку рассматриваемой области проходит интегральная кривая (особые точки исключены), отсюда следует: соотношение (6) для левой части первого интеграла (5) выполняется тождественно и, обратно, всякая функция ψ, удовлетворяющая тождественно уравнению (6), дает первый интеграл, если её приравнять произвольной постоянной.

Алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

Общее решение линейного однородного уравнения вида:

$$\sum_{j=1}^{m} X_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad (1.1)$$

строится следующим образом.

1. Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \ldots = \frac{dx_m}{X_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)} \quad (1.2)$$

2. Решив систему (1.2), находим (m-1) независимых первых интегралов этой системы:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = C_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = C_{m-1} \end{cases} \quad (1.3)$$

Интегралы (1.3) называются независимыми (функционально независимыми), если между функциями $\varphi_j,\ j = 1,2,\ldots m-1$ не существует связи типа $\Psi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}) = 0.$ Из теории неявных функция следует, что достаточным условием независимости функций $\varphi_j,\ j = 1,2,\ldots m-1$ является отличие от нуля определителя Якоби из этих функций по каким-либо (m-1) переменным, то есть

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1})}{D(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{m-1}})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_1}} \cdots \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_{j_{m-1}}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_{j_1}} \cdots \dfrac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial x_{j_{m-1}}} \end{vmatrix} \neq 0$$

3. Общее решение уравнения (1.1) записывается в виде:

$$u = \Phi(\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_{m-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m)) \quad (1.4)$$

Замечание. Для нахождения нужного числа независимых первых интегралов системы (1.2) существует два основных метода: метод исключения и метод интегрируемых комбинаций. (Приложение 1)

Пример 1. Найти общее решение уравнения $(2x + y)\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

Составляем уравнение для определения характеристик:

$$\frac{dx}{2x + y} = \frac{dy}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x + y}$$

Получили обыкновенное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Решение этого уравнение ищем в виде $y = u(x)x$. Тогда $y' = u'x + u$. Последнее уравнение в результате такой замены принимает вид:

$$\frac{du}{dx}x = \frac{-u^2}{2+u}$$

Разделяем переменные:

$$-\frac{2+u}{u^2}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{2}{u} - \ln|ux| = C$$

Возвращаемся к прежним переменным:

$$C = \frac{2x}{y} - \ln|y|$$

Следовательно, $z = \Phi(\frac{2x}{y} - \ln|y|)$ - общее решение, где Ф – произвольная функция.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

Запишем систему для данного уравнения:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Интегрируя первую пару из этой системы, получим независимый первый интеграл:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{y}{x}$$

Теперь интегрируем вторую пару из системы и получим второй независимый интеграл системы:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Rightarrow C_2 = \frac{z}{x}$$

Общее решение исходного уравнения: $u = \Phi(\frac{y}{z}, \frac{x}{z})$, где Ф – произвольная функция.

2.2 Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Примеры

Уравнение вида:

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dz}{dx_n} = Y ,(7)$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – заданные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$; z, непрерывные и непрерывно дифференцируемые.

Линейное однородное уравнение (1) является частным случаем уравнений типа (7). Когда правая часть уравнения (1) является частным случаем уравнений типа (7), когда правая часть Y=0 и коэффициенты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ не зависят от искомой функции z.

Перепишем уравнение в виде:

$$X_1 p_1 + X_2 p_2 + \ldots + X_n p_n = Y \qquad (8)$$

где $p_k = \frac{dz}{dx_k}$ (k=1,2,…,n).

Будем искать удовлетворяющую уравнению (8) функцию z от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в неявном виде.

$$V(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \,(9)$$

Из равенства (9) получаются значения частных производных $\frac{dz}{dx_k}$:

$$p_k = -\frac{dV}{dx_k} / \frac{dV}{dz}, (k = 1,2,\ldots, n).$$

Внося эти выражения в данное уравнение (7) умножим обе части на $\frac{dV}{dz}$ и переноса все члены в левую часть, получим равенство:

$$X_1 \frac{dV}{dx_1} + X_2 \frac{dV}{dx_2} + \ldots + X_n \frac{dV}{dx_n} + Y \frac{dV}{dz} = 0 \ (10)$$

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая линейному уравнению (10) имеет вид:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Y} \ (11)$$

Эта система имеет n независимых первых интегралов:

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(z,x_1,x_2,\ldots,x_n)=C_1\\ \psi_2(z,x_1,x_2,\ldots,x_n)=C_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \psi_n(z,x_1,x_2,\ldots,x_n)=C_n\end{array}\right\}\ (12)$$

Общее решение (10) имеет вид:

$$V=F(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n),$$

где F – произвольная дифференцируемая функция.

Из предыдущего следует, что уравнение

$$F(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n)=0$$

Определяет Z как функцию от x_1, x_2, …, x_n, причем эта функция удовлетворяет данному уравнению (7).

Алгоритм решения квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\sum_{j=1}^{m}X_j(x_{1,}x_2,\ldots,x_m,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}=F(x_{1,}x_2,\ldots,x_m,u)\quad (2.1)$$

в котором неизвестная функция $u=u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ является функцией m переменных.

1. Написать характеристическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_{1,}x_2,\ldots,x_m)}=\frac{dx_2}{X_2(x_{1,}x_2,\ldots,x_m)}=\ldots=\frac{dx_m}{X_m(x_{1,}x_2,\ldots,x_m)}=\frac{du}{F(x_{1,}x_2,\ldots,x_m,u)}\ (2.2)$$

2. Найти m независимых первых интегралов этой системы:

$$\begin{cases}\varphi_1(x_{1,}x_2,\ldots,x_m,u)=C_1\\ \varphi_2(x_{1,}x_2,\ldots,x_m,u)=C_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_m(x_{1,}x_2,\ldots,x_m,u)=C_m\end{cases}\quad (2.3)$$

3. Общее решение уравнения (2.1) в неявном виде записывается так:

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m)=0\ (2.4)$$

где Ф – произвольная функция.

4. Если окажется, что переменная u входит только в один из первых интегралов, например в φ_1, то общее решение уравнения (2.1) можно записать в виде:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, u) = \Psi(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m) \quad (2.5)$$

где Ψ - произвольная функция.

Пример 1. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения:

$$(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (x+z)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = u$$

Характеристическая система имеет вид:

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y} = \frac{du}{u}$$

Используя первую, вторую и четвертую дроби, составляем первую интегрируемую комбинацию:

$$\frac{dx - dy}{y+z-(z+x)} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{d(x-y)}{-(x-y)} = \frac{du}{u} \Rightarrow \ln C_1 - \ln|x-y| \Rightarrow C_1 = u(x-y)$$

Используя вторую, третью и четвертую дроби, составляет вторую интегральную комбинацию:

$$\frac{du}{u} = \frac{d(z-y)}{-(z-y)} \Rightarrow C_2 = u(z-y)$$

Наконец, используя первую, вторую, третью и четвертую дроби, составляем третью интегрируемую комбинацию:

$$\frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \frac{du}{u}$$

Интегрируя это уравнение, находим третий независимый первый интеграл характеристической системы:

$$C_3 = \frac{x+y+z}{u^2}.$$

Следовательно,

$$\Phi(u(x-y), u(z-y), \frac{x+y+z}{u^2}) = 0$$

Пример 2. Найти общее решение квазилинейного уравнения

$$(u-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$$

Характеристическая система имеет вид:

$$\frac{dx}{u-x}=\frac{dy}{u-y}=\frac{dz}{-z}=\frac{du}{x+y}$$

Первую интегрируемую комбинацию получаем, используя первую, вторую и третью дроби:

$$\frac{dx-dy}{u-x-(u-y)}=\frac{dz}{-z}\Rightarrow\frac{d(x-y)}{x-y}=\frac{dz}{z}\Rightarrow\ln|x-y|=\ln|z|=\ln C_1$$

Следовательно, один первый интеграл имеет вид $C_1=\frac{x-y}{z}$.

Вторая интегрируемая комбинацию получается использованием всех дробей характеристической системы:

$$\frac{d(x+y+2u)}{u-x+u-y+2(x+y)}=-\frac{dz}{z}\Rightarrow\ln|x+y+2u|=-\ln|z|+\ln C_2 \quad (1)$$

Следовательно, второй независимый первый интеграл имеет вид:

Для получения третьего независимого первого интеграла поступим следующим образом. Из соотношения (1) находим:

$$x+y=\frac{C_2-2uz}{z}$$

Теперь подставим это выражение в четвертую дробь характеристической системы и рассмотрим уравнение

$$\frac{dz}{z}=\frac{zdu}{2uz-C_2}\Rightarrow\frac{du}{dz}=\frac{2u}{z}-\frac{C_2}{z^2}.$$

Полученное уравнение является линейным неоднородным уравнением, если в нём рассматривать u, как функцию аргумента z. Будем решать это уравнение методом Бернулли. Положим

$$u(z)=t(z)w(z)\Rightarrow u'=t'w+w't.$$

В этом случае последнее уравнение примет вид:

$$t'w+(w't-\frac{2tw}{z})=-\frac{C_2}{z^2}\Rightarrow\begin{cases}w'-\frac{2w}{z}=0\\ t'w=-\frac{C_2}{z^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w=z^2\\ t'=-\frac{C_2}{z^4}\Rightarrow t=\frac{C_2}{3z^3}+C_3\end{cases}$$

Следовательно,

$$u = tw = C_3 z^2 + \frac{C_2}{3z} \Rightarrow C_3 = \frac{3uz - C_2}{3z^3} = \frac{u - x - y}{3z^2}$$

В качестве третьего независимого первого интеграла возьмем:

$$\overline{C_3} = 3C_3 = \frac{u - x - y}{z^2}$$

Значит, общее решение уравнения имеет вид:

$$\Phi(\frac{x-y}{z}, z(x+y+2u), \frac{u-x-y}{z^2}) = 0$$

Другие примеры по решению линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (Приложение 2).

Заключение

В рамках данной работы проведено изучение основных положений теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Отдельно были рассмотрены линейные однородные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, и линейные неоднородные и квазилинейные дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, их примеры.

Дифференциальные уравнения имеют огромное прикладное значение, являясь мощным орудием исследования многих задач естествознания и техники: они широко используются в механике, астрономии, физике, во многих задачах химии, биологии.

Дифференциальные уравнения применяются для математического описания природных явлений. Так, например, в биологии дифференциальные уравнения применяются для описания популяции; в физике многие законы можно описать с помощью дифференциальных уравнений. Широкое применение находят дифференциальные уравнения и в моделях экономической динамики. В данных моделях отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени.

Это объясняется тем, что весьма часто законы, которым подчиняются те или иные процессы, записываются в форме дифференциальных уравнений, а сами эти уравнения, таким образом, являются средством для количественного выражения этих законов.

Список литературы

1. Арнольд В.И, Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука,1972

2. А.В. Глушко, Учебно-методическое пособие для вузов, /А.В. Глушко,

В.П. Глушко, Н.А. Митягина; Уравнения с частными производными, Часть 1. – М: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета 2008, 42 с.

3. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М: РУДН, 1997

4. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М: Главная редакция физико-математической литературы, 1976

5. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.М:МГУ, 1948

6. Родионов, Михаил Александрович. Дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных : учебное пособие / М. А. Родионов, Н. Н. Яремко, А. В. Везденева ; Пензенский гос. пед. ун-т им. В. Г. Белинского. - Пенза : ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2008. - 144 с.

7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений: учебник / В. В. Степанов. 11-е изд., исправленное. М.: Издательство ЛКИ, 2016. 512 с.

8. Тихонов А. А. Уравнения математической физики: учебное пособие / А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. Изд. 7-е. М.: Изд-во МГУ, 2004. 798 с.

9. Курс высшей математики и математической физики. Дифференциальные уравнения./ Под ред. Тихонова А.Н., Ильина В. А., Свешникова А.Н. – М.:Наука, 1980

10. Хватцев, А. А., Строчков, И. А. Дифференциальные уравнения в частных производных : Учебное пособие. — Псков : Псковский государственный университет, 2016. — 80 с.

11. Интернет-источник: http://lmph.cs.msu.ru/Lekcii_files/DE1.pdf

Приложения

Приложение 1.

Метод исключения заключается в сведении системы (1.2) к одному уравнению (m-1) порядка или к одному уравнению порядка k(k < m-1) и некоторой системе независимых уравнений. Такое сведение достигается дифференцированием одного из уравнений (1.2) и использованием всех уравнений этой системы. Обычно приходится дифференцировать (m-2) раза, но бывают случаи, когда достаточно продифференцировать только r(r < m-2) раз. В результате получается некоторое число r тождеств, из которых, исключая r-1 переменную, получаем одно уравнение относительно одной из неизвестных функций. Если это уравнение может быть проинтегрировано, все остальные неизвестные находятся с помощью дифференцирования и алгебраических преобразований.

Пример: $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{y(z+1)} = \frac{dz}{(z+1)^2}$

Представим эту систему в виде:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z+1 \\ \frac{dz}{dx} = \frac{(z+1)^2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = z+1 \\ z' = \frac{(y')^2}{y} \end{cases}$$

Первое из этих уравнений продифференцируем по x: $y'' = z'$. Теперь воспользуемся вторым уравнением и получим:

$$y'' = \frac{(y')^2}{y}$$

Порядок этого уравнения можно понизить на единицу введение новой функции $y' = p(y(x)), y'' = pp'$. Получим:

$$pp' = \frac{p^2}{y} \Rightarrow \begin{cases} p = 0 \\ p'y = p \end{cases}$$

Уравнение p=0 означает, что $y' = 0 \Rightarrow z = -1$, то есть получается тривиальное решение.

Общее решение определяется уравнением с разделяющимся переменными $p'y = p$. Проинтегрировав это уравнение, получаем

$$\ln|p| = \ln|y| + \ln C_1 \Rightarrow p = y' = C_1 y \Rightarrow \ln|y| = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = e^{C_1 x + C_2}$$

Так как $y' = z + 1$, тогда независимых первых интегралов системы определяются соотношениями:

$$C_1 = \frac{z+1}{y} \text{ и } C_2 = \ln|y| - \frac{(z+1)x}{y}$$

Второй метод нахождения нужного числа независимых первых интегралов системы (1.2) заключается в выделении так называемых интегрируемых комбинаций, то есть в получении уравнений, которые являются следствиями уравнений этой системы, но могут быть уже проинтегрируемы непосредственно.

При использовании симметричной записи (2.1) нормальной системы дифференциальных уравнений для получения интегрируемых комбинаций часто используют свойство равных отношений. Суть этого свойства заключается в следующем. Пусть выполняется отношение:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_k}{b_k} = \lambda \quad (*)$$

Тогда, $\dfrac{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k}{\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_k b_k} = \lambda$ (**)

В самом деле. Из соотношения (*) находим $a_j = \lambda b_j,\ j = 1,2,\ldots,k$. Теперь подставим найденные значения a_j в (**). В результате получим :

$$\frac{(\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_k b_k)\lambda}{\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_k b_k} = \lambda$$

Коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_к$ линейных комбинаций в (**) являются числа или выражения. Они подбираются таким образом, чтобы выражение в числителе полученной дроби являлось дифференциалом выражения, стоящего в знаменателе, или чтобы знаменатель дроби обратился в нуль. Каждая интегрируемая комбинация дает один первый интеграл.

Пример: $\frac{dx}{x-z} = \frac{dy}{y-z} = \frac{dz}{2z}$

Складывая числители и знаменатели первой и третьей дробей и числители и знаменатели третьей и второй дробей, получаем две интегрируемые комбинации:

$$\frac{dx+dz}{x+z} = \frac{dz}{2z}, \frac{dy+dz}{y+z} = \frac{dz}{2z}$$

Интегрируя первую комбинацию, находим первый интеграл:

$$\frac{dx+dz}{x+z} = \frac{dz}{2z} \Rightarrow \frac{d(z+x)}{z+x} = \frac{1}{2}\frac{dz}{z} \Rightarrow 2\ln|z+x| = \ln|z| + \ln C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{(x+z)^2}{z}$$

Аналогично, из второй комбинации получаем еще один первый интеграл:

$$C_2 = \frac{(y+z)^2}{z}$$

Следует также помнить, что при решении многих задач приходится комбинировать эти два метода: часть интегралов находят, например, методом исключения, а другую часть отыскивают методом интегрируемых комбинаций или при составлении интегрируемых комбинаций используют найденные уже первые интегралы.

Приложение 2.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

Составляем уравнение для определения характеристик:

$$\frac{dx}{x+2y} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow ydx + (x+2y)dy = 0$$

Полученное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, так как $\frac{\partial}{\partial x}(x+2y) = \frac{\partial}{\partial y}(y)$. Решение этого уравнения имеет вид u(x,y)=C, причем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y$$

Из первого соотношения находим $u = xy + \varphi(y)$. Имеем,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y = x + \varphi' \Rightarrow \varphi' = 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^2$$

Следовательно, $u(x,y) = xy + y^2, z = \psi(xy + y^2)$

где ψ - произвольная функция, общее решение рассматриваемого уравнения в неявном виде.

Пример 2. Найти общее решение квазилинейного уравнения:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z+u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

Составляем характеристическую систему уравнения:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+u} = \frac{du}{xy}$$

Возьмем первую пару из этой системы и получим первый интеграл:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + \ln C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{x}{y}$$

Перепишем характеристическую систему в виде:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + u \\ u' = xy \end{cases} \Rightarrow u'' = x'y + xy' = 2xy = 2u' \Rightarrow (u' - 2u)' = 0 \Rightarrow u' - 2u = C_2$$

Подставим теперь в последнее уравнение xy вместо u'. Получим второй независимый первый интеграл: $C_2 = xy - 2u$. Для нахождения еще одного первого интеграла в последнюю дробь характеристической системы подставим $xy = C_2 + 2u$ и рассмотрим интегрируемую комбинацию:

$$\frac{dz - du}{z + u - (C_2 + 2u)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{d(z - u - C_{2)}}{z - u - C} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z - u - C_2| = \ln|x| + \ln C_3 \Rightarrow$$

$$C_3 = \frac{z - u - C_2}{x} \Leftrightarrow C_3 = \frac{z + u - xy}{x}$$

Следовательно, уравнение $\Phi(\frac{x}{y}, xy - 2u, \frac{z + u - xy}{x}) = 0$ определяет общее решение в неявной форме.

Пример 3. Найти общее решение уравнения:

$$(y^3 x - 2x^4)\frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3 y)\frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3)$$

Составим характеристическую систему:

$$\frac{dx}{y^3 x - 2x^4} = \frac{dy}{2y^4 - x^3 y} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}$$

1) $(x^3 y - 2y^4)dx + (xy^3 - 2x^4)dy = 0,$

$$\frac{(x^3 y - 2y^4)dx + (xy^3 - 2x^4)dy}{x^3 y^3} = 0,$$

$$\frac{dx}{y^2} - \frac{2xdx}{y^3} + \frac{dy}{x^2} - \frac{2ydx}{x^3} = \frac{y^2 dx - 2xydy}{y^4} + \frac{x^2 dy - 2xydy}{x^4} = d(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}) = 0,$$

$$\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} = C_1$$

2) $$\frac{ydx + xdy}{y^4 x - 2yx^4 + 2y^4 x - x^4 y} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}$$

$$\frac{ydx + xdy}{3xy(y^3 - x^3)} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}$$

$$3(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}) + \frac{dz}{z} = 0$$

$$\frac{d(x^3y^3)}{x^3y^3}+\frac{dz}{z}=0 \qquad z\cdot x^3y^3=C_2$$

$$F(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}, zx^3y^3)=0$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$$

Линейное уравнение $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{x+y}$

1) $\frac{d(x-y)}{x+y}=\frac{dz}{x+y}, z=x-y+C_1$

2) $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}, xy=C_2$

$$F(z+y-x, xy)=0$$

Пример 5. Найти общий интеграл уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

Рассмотрим систему уравнений $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$.

Решая уравнение $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, получим $\frac{y}{x}=C_1$; решение уравнения $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$ есть $\frac{z}{x}=C_2$.

Теперь можно найти общий интеграл заданного уравнения:

$$\Phi(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0 \quad \text{или} \quad \frac{z}{x}=\psi(\frac{y}{x}),$$

то есть $z=x\psi(\frac{y}{x})$, где ψ - произвольная функция.