



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»



**НГТУ
НЭТИ** | **Факультет прикладной
математики и информатики**

Кафедра прикладной математики и информатики
Учебная практика

РЕШЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Группа ПМ-92 АРТЮХОВ РОМАН

Преподаватели ДОМНИКОВ П.А.

Новосибирск, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи	3
2. Теоретическая часть	4
2.1. Вариационная постановка	4
2.2. Конечноэлементная дискретизация	5
2.3. Локальные матрицы и векторы прямоугольных EDGE-элементов	6
3. Метод решения СЛАУ	9
4. Тесты и исследования	10
4.1. Тест №1 (Полином первой степени)	10
4.2. Тест №2 (Полином второй степени)	11
4.3. Тест №3 (Полином третьей степени)	12
4.4. Тест №4 (Полином четвертой степени)	13
4.5. Исследование №1 (Оценка порядка аппроксимации)	14

1. Постановка задачи

Векторный МКЭ для двумерной краевой задачи с гармоническими по времени источниками в декартовой системе координат. Базисные вектор-функции на прямоугольнике.

Уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} + i\sigma\omega \vec{A} = \vec{J}, \quad (1.1)$$

Уравнение 1.1 задано в некоторой области Ω с границей S и краевым условием:

$$\left(\vec{A} \times \vec{n} \right) \Big|_S = \vec{A}^g \times \vec{n}, \quad (1.2)$$

2. Теоретическая часть

2.1. Вариационная постановка

Вариационная формулировка в форме Галёркина для уравнения 1.1 с краевым условием 1.2 имеет вид:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} \operatorname{rot} \vec{\Psi} d\Omega + \int_{\Omega} \iota \sigma \omega \vec{A} \vec{\Psi} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{J} \vec{\Psi} d\Omega \quad \forall \vec{\Psi} \in \mathbb{H}_0^{rot}, \quad (2.1)$$

Преобразуем первое слагаемое вариационного уравнения 2.1 с использованием векторной формулы Грина:

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} \right) \vec{\Psi} d\Omega + \int_{\Omega} \iota \sigma \omega \vec{A} \vec{\Psi} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{J} \vec{\Psi} d\Omega \quad \forall \vec{\Psi} \in \mathbb{H}_0^{rot}, \quad (2.2)$$

Поскольку пробные вектор-функции $\vec{\Psi}$ являются произвольными элементами \mathbb{H}_0^{rot} , мы можем выбирать из них вектор-функции $\vec{\Psi}^0$, касательные составляющие которых равны нулю на всей границе S . Тогда уравнение 2.2 принимает вид:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} \right) \vec{\Psi} + \iota \sigma \omega \vec{A} - \vec{J} \right) \vec{\Psi}^0 d\Omega \\ \forall \vec{\Psi}^0 \in \mathbb{H}_0^{rot} : \vec{\Psi}^0 \times \vec{n} \Big|_S = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

Краевое же условие 1.2 выполняется по определению пространства \mathbb{H}_g^{rot} , в котором ищется решение \vec{A} .

2.2. Конечноэлементная дискретизация

По условию задачи, область исследования разбивается на подобласти, которыми являются прямоугольные элементы.

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент $\Omega_{rs} = [x_r, x_{r+1}] \times [y_s, y_{s+1}]$, изображённый на рисунке 2.1. Определим на нем четыре локальные базисные вектор-функции:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_{r+1}-x}{h_x} \end{pmatrix}, & \hat{\psi}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x-x_r}{h_x} \end{pmatrix}, \\ \hat{\psi}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{y_{s+1}-y}{h_y} \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\psi}_4 &= \begin{pmatrix} \frac{y-y_s}{h_y} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Базисные вектор-функции $\hat{\psi}_1$ и $\hat{\psi}_2$ направлены вдоль оси y и их модули $|\hat{\psi}_1|$ и $|\hat{\psi}_2|$ меняются линейно вдоль оси x .

Так $|\hat{\psi}_1|$ меняется от единицы на ребре 1 до нуля на ребре 2, а $|\hat{\psi}_2|$ меняется от единицы на ребре 2 до нуля на ребре 1.

Аналогично базисные вектор-функции $\hat{\psi}_3$ и $\hat{\psi}_4$ направлены вдоль оси x и их модули меняются линейно вдоль оси y .

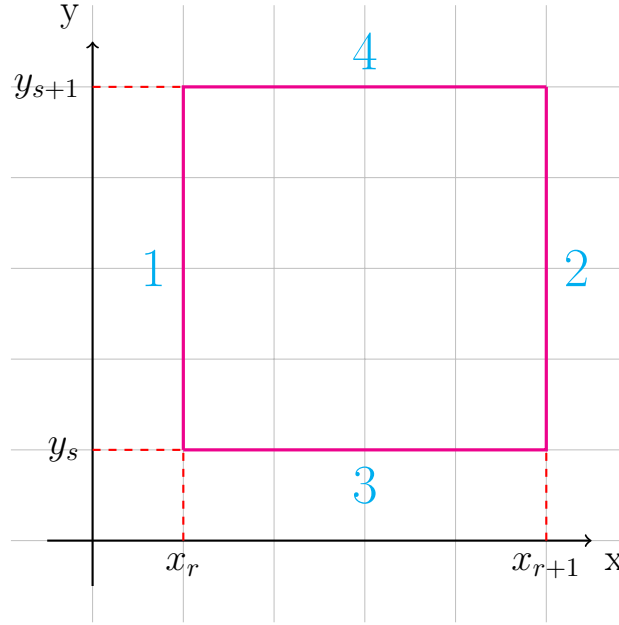


Рисунок 2.1 – Локальная нумерация рёбер и базисных вектор-функций на прямоугольном конечном элементе

Каждая из базисных вектор-функций 2.4 только на одном ребре прямоугольника Ω_{rs} имеет ненулевую касательную составляющую:

- $\hat{\psi}_1$ - на ребре 1,
- $\hat{\psi}_2$ - на ребре 2,
- $\hat{\psi}_3$ - на ребре 3,
- $\hat{\psi}_4$ - на ребре 4.

2.3. Локальные матрицы и векторы прямоугольных EDGE-элементов

Получим формулы для вычисления локальных матриц прямоугольного конечного элемента $\Omega_{rs} = [x_r, x_{r+1}] \times [y_s, y_{s+1}]$ с базисом 2.4.

Сначала вычислим роторы локальных базисных вектор-функций на Ω_{rs} :

$$\begin{aligned} \text{rot}_z \hat{\psi}_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x_{r+1} - x}{h_x} = -\frac{1}{h_x}, & \text{rot}_z \hat{\psi}_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x_r}{h_x} = \frac{1}{h_x}, \\ \text{rot}_z \hat{\psi}_3 &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{y_{s+1} - y}{h_y} = \frac{1}{h_y}, & \text{rot}_z \hat{\psi}_4 &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y_s}{h_y} = -\frac{1}{h_y}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Тогда локальная матрица жёсткости этого элемента имеет вид:

$$G = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{h_y}{h_x} & -\frac{h_y}{h_x} & -1 & 1 \\ -\frac{h_y}{h_x} & \frac{h_y}{h_x} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{h_x}{h_y} & -\frac{h_x}{h_y} \\ 1 & -1 & -\frac{h_x}{h_y} & \frac{h_x}{h_y} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Локальная матрицы массы выглядит следующим образом:

$$M = \sigma\omega \frac{h_x h_y}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Чтобы вычислить компоненты локального вектора правой части в конечном элементе Ω_{rs} , сначала нужно представить правую часть \vec{J} дифференциального уравнения 1.1 в виде интерполянта.

$$\begin{aligned} \vec{J} \approx & J_y \left(x_r, y_{s+\frac{1}{2}} \right) \hat{\vec{\psi}}_1 + J_y \left(x_{r+1}, y_{s+\frac{1}{2}} \right) \hat{\vec{\psi}}_2 + \\ & + J_x \left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_s \right) \hat{\vec{\psi}}_3 + J_x \left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_{s+1} \right) \hat{\vec{\psi}}_4, \text{ где } J_y \left(x_r, y_{s+\frac{1}{2}} \right), \\ & J_y \left(x_{r+1}, y_{s+\frac{1}{2}} \right), J_x \left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_s \right), J_x \left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_{s+1} \right) - \text{значения} \\ & \text{касательной составляющей } \vec{J} \text{ в серединах рёбер.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Локальный вектор правой части \vec{b} при использовании представления \vec{J} в виде 2.8 может быть вычислен с помощью локальной матрицы M^1 :

$$b = M^1 \begin{pmatrix} J_y \left(x_r, y_{s+\frac{1}{2}} \right) \\ J_y \left(x_{r+1}, y_{s+\frac{1}{2}} \right) \\ J_x \left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_s \right) \\ J_x \left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_{s+1} \right) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где M^1 матрица массы, определяемая соотношением 2.7 при значении коэффициентов σ и ω , равными единице.

3. Метод решения СЛАУ

Локально-оптимальная схема с диагональным
предобуславливанием матрицы

$L^{-1} = U^{-1}$ – диагональная матрица неполной факторизации.

Выбирается начальное приближение \mathbf{x}^0 и полагается:

$$\tilde{r}^0 = L^{-1} (f - Ax^0),$$

$$\hat{z}^0 = U^{-1}\tilde{r}^0, \quad \hat{p}^0 = L^{-1}A\hat{z}^0$$

Далее для $\mathbf{k} = 1, 2, \dots$ производятся следующие вычисления:

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{(\hat{p}^{k-1}, \tilde{r}^{k-1})}{(\hat{p}^{k-1}, \hat{p}^{k-1})},$$

$$x^k = x^{k-1} + \tilde{\alpha}_k \hat{z}^{k-1},$$

$$\tilde{r}^k = \tilde{r}^{k-1} - \tilde{\alpha}_k \hat{p}^{k-1},$$

$$\tilde{\beta}_k = -\frac{(\hat{p}^{k-1}, L^{-1}AU^{-1}\tilde{r}^k)}{(\hat{p}^{k-1}, \hat{p}^{k-1})},$$

$$\hat{z}^k = U^{-1}\tilde{r}^k + \tilde{\beta}_k \hat{z}^{k-1},$$

$$\hat{p}^k = L^{-1}AU^{-1}\tilde{r}^k + \tilde{\beta}_k \hat{p}^{k-1}.$$

Выход из итерационного процесса осуществляется:

1. По условию малости относительной невязки: $\frac{\|\mathbf{r}^k\|}{\|\mathbf{f}\|} < \varepsilon$, где \mathbf{f} – вектор правой части.
2. (Аварийно) По превышению максимального допустимого числа итераций.

4. Тесты и исследования

4.1. Тест №1 (Полином первой степени)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Сетка:} & [0, 1] \times [0, 1] \\ \text{Шаги:} & (h_x, h_y) = (0.2, 0.8) \\ \text{Коэффициент разрядки:} & (k_x, k_y) = (5, 1.1) \\ \vec{A} = & \begin{pmatrix} 2x + 3y + \iota(6x + 7y) \\ 3x - 2y + \iota(x + y) \end{pmatrix} \\ \sigma = & [1, 2] \\ \omega = & 1 \\ \mu_0 = & 2 \\ \vec{J} = & \frac{1}{\mu_0} + \iota\sigma\omega \vec{A} \end{array} \right.$$

Solution			
$ A^*$	$ A$	$ A^* - A $	$ A^* - A $
$\langle 2,000E-001; 6,000E-001 \rangle$	$\langle 2,000E-001; 6,000E-001 \rangle$	$\langle 2,776E-017; 1,110E-016 \rangle$	$ 1,285E-015 $
$\langle 1,200E+000; 3,600E+000 \rangle$	$\langle 1,200E+000; 3,600E+000 \rangle$	$\langle 0,000E+000; 4,441E-016 \rangle$	$ $
$\langle -8,000E-001; 4,000E-001 \rangle$	$\langle -8,000E-001; 4,000E-001 \rangle$	$\langle 0,000E+000; 5,551E-017 \rangle$	$ $
$\langle -2,000E-001; 6,000E-001 \rangle$	$\langle -2,000E-001; 6,000E-001 \rangle$	$\langle 3,220E-015; 3,331E-015 \rangle$	$ $
$\langle 2,200E+000; 1,400E+000 \rangle$	$\langle 2,200E+000; 1,400E+000 \rangle$	$\langle 4,441E-016; 2,220E-016 \rangle$	$ $
$\langle 2,600E+000; 6,200E+000 \rangle$	$\langle 2,600E+000; 6,200E+000 \rangle$	$\langle 1,421E-014; 1,155E-014 \rangle$	$ $
$\langle 3,600E+000; 9,200E+000 \rangle$	$\langle 3,600E+000; 9,200E+000 \rangle$	$\langle 3,553E-015; 3,553E-015 \rangle$	$ $
$\langle -1,800E+000; 9,000E-001 \rangle$	$\langle -1,800E+000; 9,000E-001 \rangle$	$\langle 0,000E+000; 1,110E-016 \rangle$	$ $
$\langle -1,200E+000; 1,100E+000 \rangle$	$\langle -1,200E+000; 1,100E+000 \rangle$	$\langle 1,066E-014; 1,110E-014 \rangle$	$ $
$\langle 1,200E+000; 1,900E+000 \rangle$	$\langle 1,200E+000; 1,900E+000 \rangle$	$\langle 2,220E-016; 2,220E-016 \rangle$	$ $
$\langle 3,200E+000; 7,600E+000 \rangle$	$\langle 3,200E+000; 7,600E+000 \rangle$	$\langle 0,000E+000; 0,000E+000 \rangle$	$ $
$\langle 4,200E+000; 1,060E+001 \rangle$	$\langle 4,200E+000; 1,060E+001 \rangle$	$\langle 0,000E+000; 0,000E+000 \rangle$	$ $

4.2. Тест №2 (Полином второй степени)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Сетка:} & [0, 1] \times [0, 1] \\ \text{Шаги:} & (h_x, h_y) = (0.2, 0.8) \\ \text{Коэффициент разрядки:} & (k_x, k_y) = (5, 1.1) \\ \vec{A} = & \begin{pmatrix} 2x^2 + 3y^2 + \iota (6x^2 + 7y^2) \\ 3x^2 - 2y^2 + \iota (x^2 + y^2) \end{pmatrix} \\ \sigma = & [1, 2] \\ \omega = & 1 \\ \mu_0 = & 2 \\ \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \cdot & \begin{pmatrix} -6 + \iota (-14) \\ -6 + \iota (-2) \end{pmatrix} + \iota \sigma \omega \vec{A} \end{array} \right.$$

Solution			
A^*	A	$ A^* - A $	$ A^* - A $
$\langle 2.000E-002; 6.000E-002 \rangle$	$\langle 2.000E-002; 6.000E-002 \rangle$	$\langle 0.000E+000; 0.000E+000 \rangle$	$5.381E-016$
$\langle 7.200E-001; 2.160E+000 \rangle$	$\langle 7.200E-001; 2.160E+000 \rangle$	$\langle 0.000E+000; 0.000E+000 \rangle$	
$\langle -3.200E-001; 1.600E-001 \rangle$	$\langle -3.200E-001; 1.600E-001 \rangle$	$\langle 5.551E-017; 2.776E-017 \rangle$	
$\langle -2.000E-001; 2.000E-001 \rangle$	$\langle -2.000E-001; 2.000E-001 \rangle$	$\langle 3.886E-016; 3.608E-016 \rangle$	
$\langle 2.680E+000; 1.160E+000 \rangle$	$\langle 2.680E+000; 1.160E+000 \rangle$	$\langle 4.441E-016; 0.000E+000 \rangle$	
$\langle 1.940E+000; 4.540E+000 \rangle$	$\langle 1.940E+000; 4.540E+000 \rangle$	$\langle 4.219E-015; 3.553E-015 \rangle$	
$\langle 2.640E+000; 6.640E+000 \rangle$	$\langle 2.640E+000; 6.640E+000 \rangle$	$\langle 1.332E-015; 8.882E-016 \rangle$	
$\langle -1.620E+000; 8.100E-001 \rangle$	$\langle -1.620E+000; 8.100E-001 \rangle$	$\langle 0.000E+000; 1.110E-016 \rangle$	
$\langle -1.500E+000; 8.500E-001 \rangle$	$\langle -1.500E+000; 8.500E-001 \rangle$	$\langle 3.109E-015; 5.218E-015 \rangle$	
$\langle 1.380E+000; 1.810E+000 \rangle$	$\langle 1.380E+000; 1.810E+000 \rangle$	$\langle 0.000E+000; 2.220E-016 \rangle$	
$\langle 3.020E+000; 7.060E+000 \rangle$	$\langle 3.020E+000; 7.060E+000 \rangle$	$\langle 0.000E+000; 8.882E-016 \rangle$	
$\langle 3.720E+000; 9.160E+000 \rangle$	$\langle 3.720E+000; 9.160E+000 \rangle$	$\langle 4.441E-016; 1.776E-015 \rangle$	

4.3. Тест №3 (Полином третьей степени)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Сетка:} & [0, 1] \times [0, 1] \\ \text{Шаги:} & (h_x, h_y) = (0.2, 0.8) \\ \text{Коэффициент разрядки:} & (k_x, k_y) = (5, 1.1) \\ \vec{A} = & \begin{pmatrix} 2x^3 + 3y^3 + \iota(6x^3 + 7y^3) \\ 3x^3 - 2y^3 + \iota(x^3 + y^3) \end{pmatrix} \\ \sigma = & [1, 2] \\ \omega = & 1 \\ \mu_0 = & 2 \\ \vec{J} = & \frac{1}{\mu_0} \cdot \begin{pmatrix} -18y + \iota(-42y) \\ -18x + \iota(-6x) \end{pmatrix} + \iota\sigma\omega \vec{A} \end{array} \right.$$

Solution			
A^*	A	$\ A^* - A\ $	$\ \ A^* - A\ \ $
$\langle 2.000E-003; 6.000E-003 \rangle$	$\langle 2.000E-003; 6.000E-003 \rangle$	$\langle 4.337E-019; 8.674E-019 \rangle$	$7.174E-016$
$\langle 4.320E-001; 1.296E+000 \rangle$	$\langle 4.320E-001; 1.296E+000 \rangle$	$\langle 5.551E-017; 2.220E-016 \rangle$	
$\langle -1.280E-001; 6.400E-002 \rangle$	$\langle -1.280E-001; 6.400E-002 \rangle$	$\langle 0.000E+000; 0.000E+000 \rangle$	
$\langle -1.040E-001; 7.200E-002 \rangle$	$\langle -1.040E-001; 7.200E-002 \rangle$	$\langle 1.568E-015; 1.596E-015 \rangle$	
$\langle 2.872E+000; 1.064E+000 \rangle$	$\langle 2.872E+000; 1.064E+000 \rangle$	$\langle 0.000E+000; 0.000E+000 \rangle$	
$\langle 1.538E+000; 3.590E+000 \rangle$	$\langle 1.538E+000; 3.590E+000 \rangle$	$\langle 2.442E-015; 4.885E-015 \rangle$	
$\langle 1.968E+000; 4.880E+000 \rangle$	$\langle 1.968E+000; 4.880E+000 \rangle$	$\langle 4.441E-016; 1.776E-015 \rangle$	
$\langle -1.458E+000; 7.290E-001 \rangle$	$\langle -1.458E+000; 7.290E-001 \rangle$	$\langle 2.220E-016; 0.000E+000 \rangle$	
$\langle -1.434E+000; 7.370E-001 \rangle$	$\langle -1.434E+000; 7.370E-001 \rangle$	$\langle 5.551E-015; 5.884E-015 \rangle$	
$\langle 1.542E+000; 1.729E+000 \rangle$	$\langle 1.542E+000; 1.729E+000 \rangle$	$\langle 2.220E-016; 0.000E+000 \rangle$	
$\langle 3.002E+000; 7.006E+000 \rangle$	$\langle 3.002E+000; 7.006E+000 \rangle$	$\langle 4.441E-016; 8.882E-016 \rangle$	
$\langle 3.432E+000; 8.296E+000 \rangle$	$\langle 3.432E+000; 8.296E+000 \rangle$	$\langle 0.000E+000; 0.000E+000 \rangle$	

4.4. Тест №4 (Полином четвертой степени)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Сетка:} & [0, 1] \times [0, 1] \\ \text{Шаги:} & (h_x, h_y) = (0.2, 0.8) \\ \text{Коэффициент разрядки:} & (k_x, k_y) = (5, 1.1) \\ \vec{A} = & \begin{pmatrix} 2x^4 + 3y^4 + \iota (6x^4 + 7y^4) \\ 3x^4 - 2y^4 + \iota (x^4 + y^4) \end{pmatrix} \\ \sigma = & [1, 2] \\ \omega = & 1 \\ \mu_0 = & 2 \\ \vec{J} = & \frac{1}{\mu_0} \cdot \begin{pmatrix} -36y^2 + \iota (-84y^2) \\ -36x^2 + \iota (-12x^2) \end{pmatrix} + \iota \sigma \omega \vec{A} \end{array} \right.$$

Solution			
A`	A	A` - A	A` - A
<2,000E-004; 6,000E-004>	<2,000E-004; 6,000E-004>	<0,000E+000; 1,084E-019>	7,372E-002
<2,592E-001; 7,776E-001>	<2,592E-001; 7,776E-001>	<0,000E+000; 0,000E+000>	
<-5,120E-002; 2,560E-002>	<-5,120E-002; 2,560E-002>	<0,000E+000; 3,469E-018>	
<-4,640E-002; 2,720E-002>	<-3,192E-001; -2,904E-002>	<2,728E-001; 5,624E-002>	
<2,949E+000; 1,026E+000>	<2,949E+000; 1,026E+000>	<4,441E-016; 0,000E+000>	
<1,229E+000; 2,868E+000>	<8,412E-001; 2,318E+000>	<3,878E-001; 5,501E-001>	
<1,488E+000; 3,645E+000>	<1,186E+000; 3,105E+000>	<3,017E-001; 5,394E-001>	
<-1,312E+000; 6,561E-001>	<-1,312E+000; 6,561E-001>	<2,220E-016; 0,000E+000>	
<-1,307E+000; 6,577E-001>	<-1,495E+000; 6,232E-001>	<1,881E-001; 3,453E-002>	
<1,688E+000; 1,656E+000>	<1,688E+000; 1,656E+000>	<0,000E+000; 2,220E-016>	
<3,000E+000; 7,001E+000>	<3,000E+000; 7,001E+000>	<4,441E-016; 1,776E-015>	
<3,259E+000; 7,778E+000>	<3,259E+000; 7,778E+000>	<4,441E-016; 0,000E+000>	

4.5. Исследование №1 (Оценка порядка аппроксимации)

Таблица 4.1 – Оценка порядка аппроксимации на тесте №4

(h_x, h_y)	$\ A' - A\ $	$\frac{(\ A' - A\)_{i-1}}{(\ A' - A\)_i}$	k
(0.2,0.8)	5,975E-002	-	-
(0.1,0.4)	2,864E-002	2,0862	1,061
(0.05,0.2)	1,046E-002	2,7380	1,453
(0.025,0.1)	2,933E-003	3,5663	1,834
(0.0125,0.05)	7,819E-004	3,7511	1,907