МИНИСТЕРСТВО НАУКИ
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

НГТУ НЭТИ | Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра прикладной математики и информатики
Учебная практика

**РЕШЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ**

Группа ПМ-92 АРТЮХОВ РОМАН

Преподаватели ДОМНИКОВ П.А.

Новосибирск, 2022

# СОДЕРЖАНИЕ

# 1. Постановка задачи

Векторный МКЭ для двумерной краевой задачи с гармоническими по времени источниками в декартовой системе координат. Базисные вектор-функции на прямоугольнике.

Уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} + \iota\sigma\omega \ \vec{A} = \vec{J}, \tag{1.1}$$

Уравнение 1.1 задано в некторой области $\Omega$ с границей S и краевым условием:

$$\left(\vec{A} \times \vec{n}\right)\Big|_S = \vec{A^g} \times \vec{n}, \tag{1.2}$$

# 2. Теоретическая часть

## 2.1. Вариационная постановка

Вариационная формулировка в форме Галёркина для уравнения 1.1 с краевым условием 1.2 имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} \operatorname{rot} \vec{\Psi} d\Omega + \int\limits_{\Omega} \iota\sigma\omega \; \vec{A}\vec{\Psi} \; d\Omega = \int\limits_{\Omega} \vec{J}\vec{\Psi} \; d\Omega \quad \forall \; \vec{\Psi} \in \mathbb{H}_0^{rot}, \tag{2.1}$$

Преобразуем первое слагаемое вариационного уравнения 2.1 с использованием векторной формулы Грина:

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} \right) \vec{\Psi} \; d\Omega + \int\limits_{\Omega} \iota\sigma\omega \; \vec{A}\vec{\Psi} \; d\Omega = \int\limits_{\Omega} \vec{J}\vec{\Psi} \; d\Omega \quad \forall \; \vec{\Psi} \in \mathbb{H}_0^{rot}, \tag{2.2}$$

Поскольку пробные вектор-функции $\vec{\Psi}$ являются произвольными элементами $\mathbb{H}_0^{rot}$, мы можем выбирать из них вектор-функции $\vec{\Psi}^0$, касательные составляющие которых равны нулю на всей границе $S$. Тогда уравнение 2.2 принимает вид:

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega} \left( \operatorname{rot} \left( \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} \right) \vec{\Psi} + \iota\sigma\omega \; \vec{A} - \vec{J} \right) \vec{\Psi}^0 \; d\Omega \\ \forall \; \vec{\Psi}^0 \in \mathbb{H}_0^{rot} \; : \vec{\Psi}^0 \times \vec{n} \Big|_S = 0, \end{gathered} \tag{2.3}$$

Краевое же условие 1.2 выполняется по определению пространства $\mathbb{H}_g^{rot}$, в котором ищется решение $\vec{A}$.

## 2.2. Конечноэлементная дискретизация

По условию задачи, область исследования разбивается на подобласти, которыми являются прямоугольные элементы.

Рассмотрим прямоугольный конечный элемент $\Omega_{rs} = [x_r, x_{r+1}] \times [y_s, y_{s+1}]$, изображённый на рисунке 2.1. Определим на нем четыре локальные базисные вектор-функции:

$$
\begin{aligned}
\hat{\vec{\psi}}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x_{r+1}-x}{h_x} \end{pmatrix}, & \hat{\vec{\psi}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{x-x_r}{h_x} \end{pmatrix}, \\
\hat{\vec{\psi}}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{y_{s+1}-y}{h_y} \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\vec{\psi}}_4 &= \begin{pmatrix} \frac{y-y_s}{h_y} \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Базисные вектор-функции $\hat{\vec{\psi}}_1$ и $\hat{\vec{\psi}}_2$ направлены вдоль оси $y$ и их модули $|\vec{\psi}_1|$ и $|\vec{\psi}_2|$ меняются линейно вдоль оси $x$.

Так $|\hat{\vec{\psi}}_1|$ меняется от единицы на ребре 1 до нуля на ребре 2, а $|\hat{\vec{\psi}}_2|$ меняется от единицы на ребре 2 до нуля на ребре 1.

Аналогично базисные вектор-функции $\hat{\vec{\psi}}_3$ и $\hat{\vec{\psi}}_4$ направлены вдоль оси $x$ и их модули меняются линейно вдоль оси $y$.

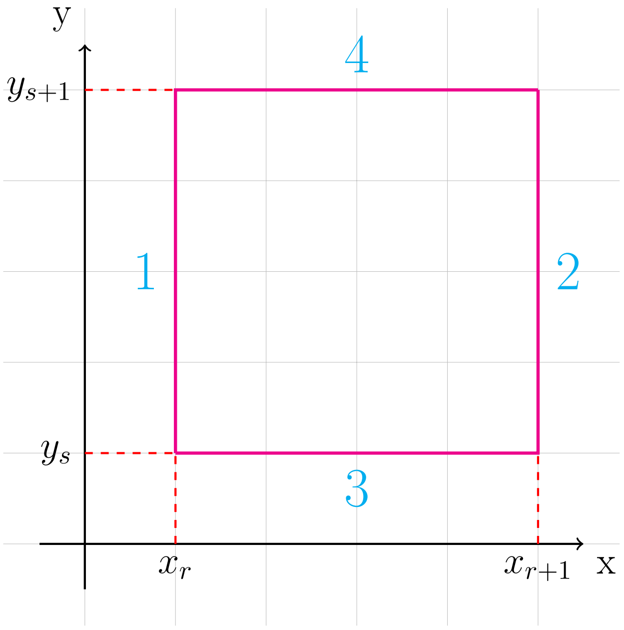


Рисунок 2.1 – Локальная нумерация рёбер и базисных вектор-функций на прямоугольном конечном элементе

Каждая из базисных вектор-функций 2.4 только на одном ребре прямоугольника $\Omega_{rs}$ имеет ненулевую касательную составляющую:

$\vec{\hat{\psi}}_1$ - на ребре 1,

$\vec{\hat{\psi}}_2$ - на ребре 2,

$\vec{\hat{\psi}}_3$ - на ребре 3,

$\vec{\hat{\psi}}_4$ - на ребре 4.

## 2.3. Локальные матрицы и векторы прямоугольных EDGE-элементов

Получим формулы для вычисления локальных матриц прямоугольного конечного элемента $\Omega_{rs} = [x_r, x_{r+1}] \times [y_s, y_{s+1}]$ с базисом 2.4.

Сначала вычислим роторы локальных базисных вектор-функций на $\Omega_{rs}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_z \vec{\hat{\psi}}_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x_{r+1} - x}{h_x} = -\frac{1}{h_x}, & \operatorname{rot}_z \vec{\hat{\psi}}_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x - x_r}{h_x} = \frac{1}{h_x}, \\ \operatorname{rot}_z \vec{\hat{\psi}}_3 &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{y_{s+1} - y}{h_y} = \frac{1}{h_y}, & \operatorname{rot}_z \vec{\hat{\psi}}_4 &= -\frac{\partial}{\partial y} \frac{y - y_s}{h_y} = -\frac{1}{h_y}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Тогда локальная матрица жёсткости этого элемента имеет вид:

$$G = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{h_y}{h_x} & -\frac{h_y}{h_x} & -1 & 1 \\ -\frac{h_y}{h_x} & \frac{h_y}{h_x} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & \frac{h_x}{h_y} & -\frac{h_x}{h_y} \\ 1 & -1 & -\frac{h_x}{h_y} & \frac{h_x}{h_y} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Локальная матрицы массы выглядит следующим образом:

$$M = \sigma\omega \frac{h_x h_y}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Чтобы вычислить компоненты локального вектора правой части b конечного элемента $\Omega_{rs}$, сначала нужно представить правую часть $\overrightarrow{J}$ дифференциального уравнения 1.1 в виде интерполянта.

$$\begin{gathered} \overrightarrow{J} \approx J_y\left(x_r, y_{s+\frac{1}{2}}\right)\hat{\overrightarrow{\psi}}_1 + J_y\left(x_{r+1}, y_{s+\frac{1}{2}}\right)\hat{\overrightarrow{\psi}}_2 + \\ + J_x\left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_s\right)\hat{\overrightarrow{\psi}}_3 + J_x\left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_{s+1}\right)\hat{\overrightarrow{\psi}}_4, \text{ где } J_y\left(x_r, y_{s+\frac{1}{2}}\right), \\ J_y\left(x_{r+1}, y_{s+\frac{1}{2}}\right), J_x\left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_s\right), J_x\left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_{s+1}\right) - \text{ значения} \\ \text{касательной составляющей } \overrightarrow{J} \text{ в серединах рёбер.} \end{gathered} \tag{2.8}$$

Локальный вектор правой части b при использовании представления $\vec{J}$ в виде 2.8 может быть вычислен с помощью локальной матрицы $M^1$:

$$b = M^1 \begin{pmatrix} J_y\left(x_r, y_{s+\frac{1}{2}}\right) \\ J_y\left(x_{r+1}, y_{s+\frac{1}{2}}\right) \\ J_x\left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_s\right) \\ J_x\left(x_{r+\frac{1}{2}}, y_{s+1}\right) \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

где $M^1$ матрица массы, определяемая соотношением 2.7
при значении коэффициентов $\sigma$ и $\omega$, равными единице.

# 3. Метод решения СЛАУ

### Локально-оптимальная схема с диагональным предобуславливанием матрицы

$\boldsymbol{L^{-1} = U^{-1}}$ – диагональная матрица неполной факторизации.

Выбирается начальное приближение $\boldsymbol{x^0}$ и полагается:

$$\tilde{r}^0 = L^{-1}\left(f - Ax^0\right),$$

$$\hat{z}^0 = U^{-1}\tilde{r}^0, \qquad \hat{p}^0 = L^{-1}A\hat{z}^0$$

Далее для $\boldsymbol{k = 1, 2, \ldots}$ производятся следующие вычисления:

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{\left(\hat{p}^{k-1}, \tilde{r}^{k-1}\right)}{\left(\hat{p}^{k-1}, \hat{p}^{k-1}\right)},$$

$$x^k = x^{k-1} + \tilde{\alpha}_k \hat{z}^{k-1},$$

$$\tilde{r}^k = \tilde{r}^{k-1} - \tilde{\alpha}_k \hat{p}^{k-1},$$

$$\tilde{\beta}_k = -\frac{\left(\hat{p}^{k-1}, L^{-1}AU^{-1}\tilde{r}^k\right)}{\left(\hat{p}^{k-1}, \hat{p}^{k-1}\right)},$$

$$\hat{z}^k = U^{-1}\tilde{r}^k + \tilde{\beta}_k \hat{z}^{k-1},$$

$$\hat{p}^k = L^{-1}AU^{-1}\tilde{r}^k + \tilde{\beta}_k \hat{p}^{k-1}.$$

Выход из итерационного процесса осуществляется:

1. По условию малости относительной невязки: $\boldsymbol{\frac{\|r^k\|}{\|f\|} < \varepsilon}$, где $\mathbf{f}$ – вектор правой части.
2. (Аварийно) По превышению максимального допустимого числа итераций.

# 4. Тесты и исследования

## 4.1. Тест №1 (Полином первой степени)

$$
\begin{cases}
\text{Сетка:} & [0,1]\times[0,1] \\
\text{Шаги:} & (h_x, h_y) = (0.2, 0.8) \\
\text{Коэффициент разрядки:} & (k_x, k_y) = (5, 1.1) \\
\vec{A} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + \iota\,(6x + 7y) \\ 3x - 2y + \iota\,(x + y) \end{pmatrix} & \\
\sigma = [1, 2] & \\
\omega = 1 & \\
\mu_0 = 2 & \\
\vec{A} = \frac{1}{\mu_0} + \iota\sigma\omega\,\vec{A} &
\end{cases}
$$

| Solution | | | |
|---|---|---|---|
| A` | A | \|A` - A\| | \|\|A` - A\|\| |
| <2,000E-001; 6,000E-001> | <2,000E-001; 6,000E-001> | <2,776E-017; 1,110E-016> | 1,285E-015 |
| <1,200E+000; 3,600E+000> | <1,200E+000; 3,600E+000> | <0,000E+000; 4,441E-016> | |
| <-8,000E-001; 4,000E-001> | <-8,000E-001; 4,000E-001> | <0,000E+000; 5,551E-017> | |
| <-2,000E-001; 6,000E-001> | <-2,000E-001; 6,000E-001> | <3,220E-015; 3,331E-015> | |
| <2,200E+000; 1,400E+000> | <2,200E+000; 1,400E+000> | <4,441E-016; 2,220E-016> | |
| <2,600E+000; 6,200E+000> | <2,600E+000; 6,200E+000> | <1,421E-014; 1,155E-014> | |
| <3,600E+000; 9,200E+000> | <3,600E+000; 9,200E+000> | <3,553E-015; 3,553E-015> | |
| <-1,800E+000; 9,000E-001> | <-1,800E+000; 9,000E-001> | <0,000E+000; 1,110E-016> | |
| <-1,200E+000; 1,100E+000> | <-1,200E+000; 1,100E+000> | <1,066E-014; 1,110E-014> | |
| <1,200E+000; 1,900E+000> | <1,200E+000; 1,900E+000> | <2,220E-016; 2,220E-016> | |
| <3,200E+000; 7,600E+000> | <3,200E+000; 7,600E+000> | <0,000E+000; 0,000E+000> | |
| <4,200E+000; 1,060E+001> | <4,200E+000; 1,060E+001> | <0,000E+000; 0,000E+000> | |

## 4.2. Тест №2 (Полином второй степени)

$$
\begin{cases}
\text{Сетка:} & [0,1]\times[0,1] \\
\text{Шаги:} & (h_x,h_y)=(0.2,0.8) \\
\text{Коэффициент разрядки:} & (k_x,k_y)=(5,1.1) \\
\vec{A}=\begin{pmatrix} 2x^2+3y^2+\iota\left(6x^2+7y^2\right) \\ 3x^2-2y^2+\iota\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix} & \\
\sigma=[1,2] & \\
\omega=1 & \\
\mu_0=2 & \\
\vec{A}=\frac{1}{\mu_0}\cdot\begin{pmatrix} -6+\iota\,(-14) \\ -6+\iota\,(-2) \end{pmatrix}+\iota\sigma\omega\,\vec{A} &
\end{cases}
$$

| Solution | | | |
|---|---|---|---|
| A` | A | \|A` - A\| | \|\|A` - A\|\| |
| <2,000E-002; 6,000E-002> | <2,000E-002; 6,000E-002> | <0,000E+000; 0,000E+000> | 5,381E-016 |
| <7,200E-001; 2,160E+000> | <7,200E-001; 2,160E+000> | <0,000E+000; 0,000E+000> | |
| <-3,200E-001; 1,600E-001> | <-3,200E-001; 1,600E-001> | <5,551E-017; 2,776E-017> | |
| <-2,000E-001; 2,000E-001> | <-2,000E-001; 2,000E-001> | <3,886E-016; 3,608E-016> | |
| <2,680E+000; 1,160E+000> | <2,680E+000; 1,160E+000> | <4,441E-016; 0,000E+000> | |
| <1,940E+000; 4,540E+000> | <1,940E+000; 4,540E+000> | <4,219E-015; 3,553E-015> | |
| <2,640E+000; 6,640E+000> | <2,640E+000; 6,640E+000> | <1,332E-015; 8,882E-016> | |
| <-1,620E+000; 8,100E-001> | <-1,620E+000; 8,100E-001> | <0,000E+000; 1,110E-016> | |
| <-1,500E+000; 8,500E-001> | <-1,500E+000; 8,500E-001> | <3,109E-015; 5,218E-015> | |
| <1,380E+000; 1,810E+000> | <1,380E+000; 1,810E+000> | <0,000E+000; 2,220E-016> | |
| <3,020E+000; 7,060E+000> | <3,020E+000; 7,060E+000> | <0,000E+000; 8,882E-016> | |
| <3,720E+000; 9,160E+000> | <3,720E+000; 9,160E+000> | <4,441E-016; 1,776E-015> | |

## 4.3. Тест №3 (Полином третьей степени)

$$
\begin{cases}
\text{Сетка:} & [0,1] \times [0,1] \\
\text{Шаги:} & (h_x, h_y) = (0.2, 0.8) \\
\text{Коэффициент разрядки:} & (k_x, k_y) = (5, 1.1) \\
\vec{A} = \begin{pmatrix} 2x^3 + 3y^3 + \iota \left(6x^3 + 7y^3\right) \\ 3x^3 - 2y^3 + \iota \left(x^3 + y^3\right) \end{pmatrix} & \\
\sigma = [1, 2] & \\
\omega = 1 & \\
\mu_0 = 2 & \\
\vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \begin{pmatrix} -18y + \iota \left(-42y\right) \\ -18x + \iota \left(-6x\right) \end{pmatrix} + \iota \sigma \omega \vec{A} &
\end{cases}
$$

<table>
<tr><th colspan="4">Solution</th></tr>
<tr><th>A`</th><th>A</th><th>|A` - A|</th><th>||A` - A||</th></tr>
<tr><td><2,000E-003; 6,000E-003></td><td><2,000E-003; 6,000E-003></td><td><4,337E-019; 8,674E-019></td><td>7,174E-016</td></tr>
<tr><td><4,320E-001; 1,296E+000></td><td><4,320E-001; 1,296E+000></td><td><5,551E-017; 2,220E-016></td><td></td></tr>
<tr><td><-1,280E-001; 6,400E-002></td><td><-1,280E-001; 6,400E-002></td><td><0,000E+000; 0,000E+000></td><td></td></tr>
<tr><td><-1,040E-001; 7,200E-002></td><td><-1,040E-001; 7,200E-002></td><td><1,568E-015; 1,596E-015></td><td></td></tr>
<tr><td><2,872E+000; 1,064E+000></td><td><2,872E+000; 1,064E+000></td><td><0,000E+000; 0,000E+000></td><td></td></tr>
<tr><td><1,538E+000; 3,590E+000></td><td><1,538E+000; 3,590E+000></td><td><2,442E-015; 4,885E-015></td><td></td></tr>
<tr><td><1,968E+000; 4,880E+000></td><td><1,968E+000; 4,880E+000></td><td><4,441E-016; 1,776E-015></td><td></td></tr>
<tr><td><-1,458E+000; 7,290E-001></td><td><-1,458E+000; 7,290E-001></td><td><2,220E-016; 0,000E+000></td><td></td></tr>
<tr><td><-1,434E+000; 7,370E-001></td><td><-1,434E+000; 7,370E-001></td><td><5,551E-015; 5,884E-015></td><td></td></tr>
<tr><td><1,542E+000; 1,729E+000></td><td><1,542E+000; 1,729E+000></td><td><2,220E-016; 0,000E+000></td><td></td></tr>
<tr><td><3,002E+000; 7,006E+000></td><td><3,002E+000; 7,006E+000></td><td><4,441E-016; 8,882E-016></td><td></td></tr>
<tr><td><3,432E+000; 8,296E+000></td><td><3,432E+000; 8,296E+000></td><td><0,000E+000; 0,000E+000></td><td></td></tr>
</table>

## 4.4. Тест №4 (Полином четвертой степени)

$$
\begin{cases}
\text{Сетка:} & [0,1]\times[0,1] \\
\text{Шаги:} & (h_x,h_y)=(0.2,0.8) \\
\text{Коэффициент разрядки:} & (k_x,k_y)=(5,1.1) \\
\vec{A}=\begin{pmatrix} 2x^4+3y^4+\iota\left(6x^4+7y^4\right) \\ 3x^4-2y^4+\iota\left(x^4+y^4\right) \end{pmatrix} & \\
\sigma=[1,2] & \\
\omega=1 & \\
\mu_0=2 & \\
\vec{A}=\frac{1}{\mu_0}\cdot\begin{pmatrix} -36y^2+\iota\left(-84y^2\right) \\ -36x^2+\iota\left(-12x^2\right) \end{pmatrix}+\iota\sigma\omega\,\vec{A} &
\end{cases}
$$

| Solution | | | |
|---|---|---|---|
| A` | A | \|A` - A\| | \|\|A` - A\|\| |
| <2,000E-004; 6,000E-004> | <2,000E-004; 6,000E-004> | <0,000E+000; 1,084E-019> | 7,372E-002 |
| <2,592E-001; 7,776E-001> | <2,592E-001; 7,776E-001> | <0,000E+000; 0,000E+000> | |
| <-5,120E-002; 2,560E-002> | <-5,120E-002; 2,560E-002> | <0,000E+000; 3,469E-018> | |
| <-4,640E-002; 2,720E-002> | <-3,192E-001; -2,904E-002> | <2,728E-001; 5,624E-002> | |
| <2,949E+000; 1,026E+000> | <2,949E+000; 1,026E+000> | <4,441E-016; 0,000E+000> | |
| <1,229E+000; 2,868E+000> | <8,412E-001; 2,318E+000> | <3,878E-001; 5,501E-001> | |
| <1,488E+000; 3,645E+000> | <1,186E+000; 3,105E+000> | <3,017E-001; 5,394E-001> | |
| <-1,312E+000; 6,561E-001> | <-1,312E+000; 6,561E-001> | <2,220E-016; 0,000E+000> | |
| <-1,307E+000; 6,577E-001> | <-1,495E+000; 6,232E-001> | <1,881E-001; 3,453E-002> | |
| <1,688E+000; 1,656E+000> | <1,688E+000; 1,656E+000> | <0,000E+000; 2,220E-016> | |
| <3,000E+000; 7,001E+000> | <3,000E+000; 7,001E+000> | <4,441E-016; 1,776E-015> | |
| <3,259E+000; 7,778E+000> | <3,259E+000; 7,778E+000> | <4,441E-016; 0,000E+000> | |

## 4.5. Исследование №1 (Оценка порядка аппроксимации)

Таблица 4.1 – Оценка порядка аппроксимации на тесте №4

| $(h_x, h_y)$ | $\|A^{'} - A\|$ | $\frac{(\|A^{'}-A\|)_{i-1}}{(\|A^{'}-A\|)_i}$ | k |
|---|---|---|---|
| (0.2,0.8) | 5,975E-002 | - | - |
| (0.1,0.4) | 2,864E-002 | 2,0862 | 1,061 |
| (0.05,0.2) | 1,046E-002 | 2,7380 | 1,453 |
| (0.025,0.1) | 2,933E-003 | 3,5663 | 1,834 |
| (0.0125,0.05) | 7,819E-004 | 3,7511 | 1,907 |