

Advanced Mathematics

Qufu Normal University

目录

第一部分 高等数学	1
常用基础知识	5
第一章 函数极限连续	9
1.1 考点 1 常用函数及常用曲线 p4	9
1.1.1 函数的概念及一些常用函数	9
1.1.2 反函数、复合函数及初等函数	10
1.1.3 函数表达式的求解	12
1.1.4 常用曲线（这些曲线在以后会经常碰到）	13
1.2 考点 2 函数的几种特性（特别要记忆对这些特性总结的结论） p11	15
1.2.1 有界性	15
1.2.2 单调性	15
1.2.3 奇偶性	15
1.2.4 周期性	16
1.3 考点 3 极限的定义 p14	16
1.4 考点 4 极限的性质 p19	16
1.5 考点 5 无穷小与无穷大 p20	16
1.6 考点 6 极限的四则运算法则及两个重要极限 p25	16
1.6.1 极限的四则运算法则	16
1.6.2 极限的四则运算法则的推广	17
1.6.3 两个重要极限	17
1.7 考点 7 等价代换 p29	17
1.7.1 常用的等价无穷小	17
1.7.2 等价无穷替换原则	17
1.8 考点 8 洛必达法则	18
1.9 考点 9 泰勒公式（多项式的高次逼近） p35	18
1.9.1 泰勒公式	18
1.9.2 用泰勒公式求极限	18

1.10	考点 10 幂指数函数 $u(x)^{v(x)}$ 的极限 p38	18
1.11	考点 11 已知极限反求参数及无穷小阶数的比较 p40	18
1.12	考点 12 数列的极限 p43	18
1.12.1	先求和（积）再求极限	18
1.12.2	夹逼准则	19
1.13	考点 13 函数的连续性与间断点 p48	19
1.13.1	函数的连续性	19
1.13.2	函数的间断点及分类	20
1.13.3	连续的性质	20
1.14	考点 14 闭区间上连续函数的性质 p53	20
第二章 一元函数微分学		21
2.1	考点 15 导数定义	21
2.2	考点 16 四则、复合函数、反函数及对数求导法则 p62	21
2.3	考点 17 高阶导数 p65	21
2.4	考点 18 隐函数及由参数方程所确定的函数的求导法则 p67	21
2.5	考点 19 分段函数及绝对值函数求导 p70	21
2.6	考点 20 导数的几何、物理意义及相关变化率 p75	21
2.7	考点 21 函数的微分 p77	21
2.8	考点 22 中值定理 p80	21
2.9	考点 23 单调性与极值、最值 p91	21
2.10	考点 24 凹凸性与拐点 p99	21
2.11	考点 25 渐近线、曲率 p102	21
2.12	考点 26 函数图形的描绘 p105	21
2.13	考点 27 证明函数或常数不等式 p106	21
2.14	考点 28 用导数讨论方程的根 p109	21
第三章 一元函数积分学		23
3.1	考点 29 原函数与不定积分的概念、积分公式 p114	23
3.1.1	原函数与不定积分的概念	23
3.1.2	不定积分的性质	23
3.1.3	原函数存在定理	23
3.1.4	积分公式	23
3.2	考点 30 凑微分法求不定积分 p117	24
3.2.1	观察法凑微分	24
3.2.2	分子分母同乘（除）一个因子，再凑微分	24

3.2.3	先求导, 再凑微分	24
3.2.4	三角函数 ϕ 的凑微分	24
3.3	考点 31 换元法求不定积分 p120	24
3.3.1	第一类换元法 (凑微分法)	24
3.3.2	第二类换元法	25
3.3.3	根式代换	25
3.3.4	指数代换	25
3.3.5	倒代换	25
3.4	考点 32 分部积分法求不定积分 p121	25
3.4.1	分部积分法	25
3.5	考点 33 有理函数的积分 p124	26
3.6	考点 34 定积分的定义及性质 p125	26
3.7	考点 35 定积分的计算方法及若干技巧 p132	26
3.8	考点 36 变限积分函数及其求导原理 p140	26
3.9	考点 37 变限积分函数的综合题 p145	26
3.10	考点 38 定积分不等式的证明 p150	26
3.11	考点 39 定积分与极限的综合题 p154	26
3.12	考点 40 反常积分 p157	26
3.13	考点 41 平面图形的面积 p161	26
3.14	考点 42 空间图形的体积 p165	26
3.15	考点 43 平面曲线的弧长 p168	26
3.16	考点 44 旋转曲面的侧面积 p169	26
3.17	考点 45 定积分的物理应用 p170	26
第四章	向量代数与空间解析几何	27
4.1	考点 46 向量及其运算 p173	27
4.2	考点 47 平面及空间直线 p175	27
4.3	考点 48 曲面及空间曲线 p180	27
第五章	多元函数微分学	29
5.1	考点 49 二元函数的极限及连续 p185	29
5.2	考点 50 偏导数 p188	29
5.3	考点 51 全微分 p192	29
5.4	考点 52 复合函数的偏导数与全微分 p195	29
5.5	考点 53 隐函数的偏导数及全微分 p200	29
5.6	考点 54 极值与最值 p203	29

5.7	考点 55 多元函数微分学的几何应用 p209	29
5.8	考点 56 方向导数与梯度 p212	29
5.9	考点 57 二元函数的二阶泰勒公式 p214	29
第六章 多元函数积分学		31
6.1	考点 58 二重积分概念与几何意义 p217	31
6.2	考点 59 直角坐标计算二重积分 p221	31
6.3	考点 60 极坐标计算二重积分 p224	31
6.4	考点 61 换序及换系 p227	31
6.5	考点 62 需分区域计算的几种情况 p233	31
6.6	考点 63 先一后二法（投影法）与先二后一法（截面法） p236	31
6.7	考点 64 利用球面坐标计算三重积分 p240	31
6.8	考点 65 三重积分的性质及换序 p241	31
6.9	考点 66 第一类（平面、空间）曲线积分 p242	31
6.10	考点 67 第二类平面曲线积分 p246	31
6.11	考点 68 第一类曲面积分 p253	31
6.12	考点 69 第二类曲面积分 p256	31
6.13	考点 70 第二类空间曲线积分的计算 p262	31
6.14	考点 71 多元函数积分学的应用及场论初步 p264	31
第七章 无穷级数		33
7.1	考点 72 用定义和基本性质判断技术的敛散性 p270	33
7.2	考点 73 正项级数敛散性的判别方法 p272	33
7.3	考点 74 交错级数敛散性的判别方法 p276	33
7.4	考点 75 任意项级数敛散性的判别方法 p278	33
7.5	考点 76 收敛发散的证明题 p281	33
7.6	考点 77 幂级数的收敛半径及收敛域的求法 p282	33
7.7	考点 78 求一般函数项级数的收敛域 p286	33
7.8	考点 79 函数展开成幂级数 p286	33
7.9	考点 80 幂级数的和函数的求法 p290	33
7.10	考点 81 常数项级数的求和 p295	33
7.11	考点 82 傅立叶级数 p297	33
第八章 常微分方程		35
8.1	考点 83 微分方程的基本概念 p301	35
8.2	考点 84 一阶微分方程 p302	35
8.3	考点 85 二阶可降阶的微分方程 p307	35

8.4	考点 86 常系数线性微分方程及欧拉方程 p308	35
8.5	考点 87 已知方程的解反求方程及进一步研究方程的解 p312	35
8.6	考点 88 通过变形改造建立微分方程并求解 p318	35
8.7	考点 89 微分方程的应用 p323	35

第一部分

高等数学

开始于 2023 年 3 月 1 日高昆轮林德松

常用基础知识

数列

1. 等差数列

首项为 a_1 , 公差为 $d(d \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$

(a) 通项公式: $a_n = a_1 + (n-1)d$

(b) 前 n 项的和: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

2. 等比数列

首项为 a_1 , 公比为 $r(r \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1r, \dots, a_1r^{n-1}, \dots$

(a) 通项公式: $a_n = a_1r^{n-1}$

(b) 前 n 项的和 $S_n = \begin{cases} na_1 & r = 1 \\ \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \end{cases}$

(c) 一些常见数列前 n 项的和

i. $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(1+n)}{2}$

ii. $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

三角函数

1. 三角函数的基本关系

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

2. 重要公式

3. 倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1, \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

4. 半角公式

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha), \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$$
$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

5. 和差公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

6. 积化和差公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$
$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$
$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$
$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

7. 和差化积公式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

8. 万能公式

若 $u = \tan \frac{x}{2} (-\pi < x < \pi)$, 则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

指数运算法则

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$$
$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

对数运算法则

1. $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$
2. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$$3. \log_a^n = n \log_a M$$

$$4. \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$$

一元二次方程基础

$$1. \text{一元二次方程: } ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$$

$$2. \text{根的公式: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$3. \text{根和系数的关系: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$4. \text{判别式: } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$5. \text{抛物线定点坐标: } (-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$$

因式分解公式

$$1. (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$3. (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$$

$$4. (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3$$

$$5. a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$6. a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$7. a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$8. \text{二项式定理: } (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

阶乘和双阶乘

$$1. n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \text{ 规定 } 0! = 1$$

$$2. (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n) = 2^n n!$$

$$3. 2(n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$$

常用不等式

$$1. \text{ 设 } a, b \text{ 为实数, 则有:}$$

$$(a) |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

$$(b) ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

2. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} (a, b > 0)$
3. 设 $a > b > 0$, 则 $\begin{cases} \text{当 } n > 0 \text{ 时, } a^n > b^n \\ \text{当 } n < 0 \text{ 时, } a^n < b^n \end{cases}$
4. 若 $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$, 则 $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$
5. $\sin x < x < \tan x (0 < x < \frac{\pi}{2})$
6. $\sin x < x (x > 0)$
7. $\arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1)$
8. $e^x \geq x + 1 (\forall x)$
9. $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$
10. $\frac{1}{1+x} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x} (x > 0)$

第一章 函数极限连续

1.1 考点 1 常用函数及常用曲线 p4

1.1.1 函数的概念及一些常用函数

1. 常见函数

(a) 常数函数

$y = C$, C 为常数, 图形为平行于 x 轴的水平直线.

(b) 幂函数

$y = x^\mu$ (μ 是实数)

- i. 见到 \sqrt{u} , $\sqrt[3]{u}$, 用 u 来研究最值
- ii. 见到 $|u|$ 时, 用 u^2 来研究最值
- iii. 见到 $u_1 u_2 u_3$ 时, 用 $\ln(u_1 u_2 u_3) = \ln u_1 + \ln u_2 + \ln u_3$ 来研究最值
- iv. 见到 $\frac{1}{u}$ 时, 用 u 来研究最值

(c) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)

(d) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

常用公式: $x = e^{\ln x}$ ($x > 0$), $u^v = e^{\ln u^v} = e^{v \ln u}$ ($u > 0$)

(e) 三角函数

2. 绝对值函数

$y = |x|$ 在 $x=0$ 处连续, 但是是不可导的 (左导数不等于右导数)

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

重要公式 $|a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$

3. 最值函数

$$U = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

$$V = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

$$U + V = f(x) + g(x), U - V = |f(x) - g(x)|, U \cdot V = f(x)g(x)$$

4. 符号函数

对任何 x , 都有 $\sqrt{x^2} = |x| = x \operatorname{sgn}(x)$

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

5. 取整函数

$$[x + n] = [x] + n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x - 1 < [x] \leq x$$

6. 幂指函数

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x) \ln u(x)}$$

$$7. \text{狄利克雷函数 } D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^C \end{cases}$$

1.1.2 反函数、复合函数及初等函数

1. 反函数

(a) $y = \sin x$ 的反函数

当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $x = \arcsin y, y \in [0, 1]$

当 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, $x = \pi - \arcsin y, y \in [-1, 1]$

当 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ 时, $x = 2\pi + \arcsin y, y \in (-1, 0]$

2. 复合函数

3. 初等函数

(a) 反对幂三指

(b) 幂指函数是初等函数

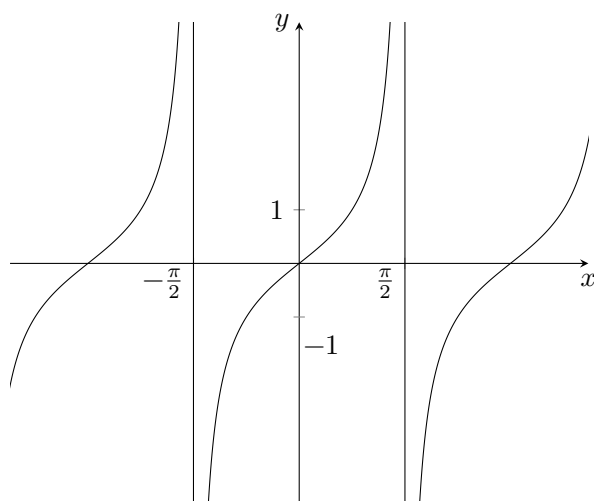
(c) 三角函数

i. 正弦函数和余弦函数

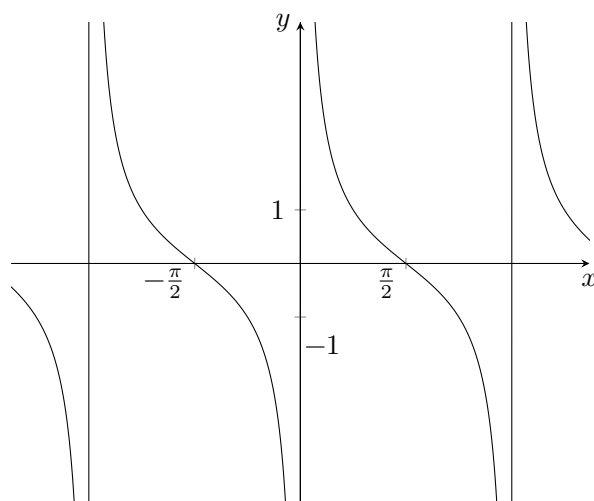
正弦函数 $y = \sin x$, 余弦函数 $y = \cos x$.

ii. 正切函数和余切函数

正切函数 $y = \tan x$, 余切函数 $y = \cot x$.



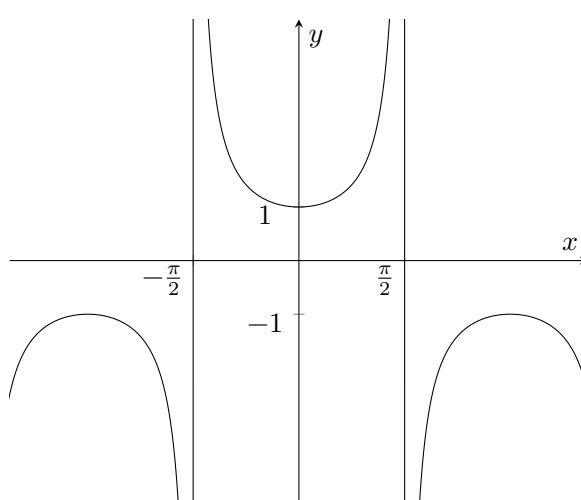
(a) 正切函数图像



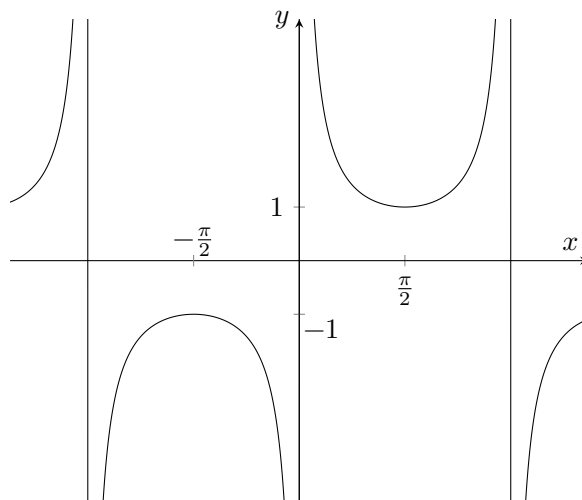
(b) 余切函数图像

iii. 正割函数和余割函数

正割函数 $y = \sec x$, 余割函数 $y = \csc x$.



(a) 正割函数图像



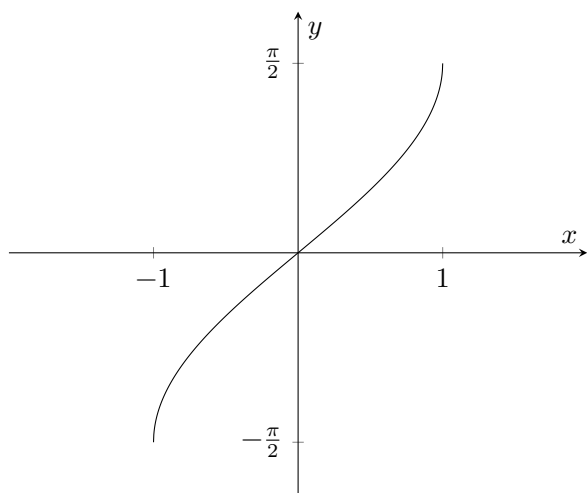
(b) 余割函数图像

(d) 反三角函数

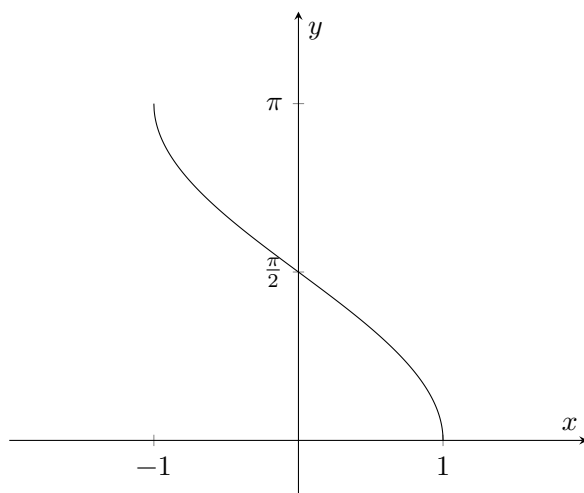
i. 反正弦函数和反余弦函数

反正弦函数 $y = \arcsin x$, 反余弦函数 $y = \arccos x$.

1.1 考点 1 常用函数及常用曲线 P4



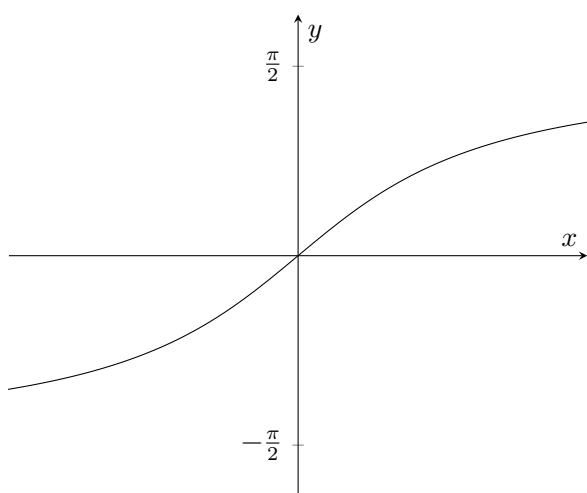
(a) 反正弦函数图像



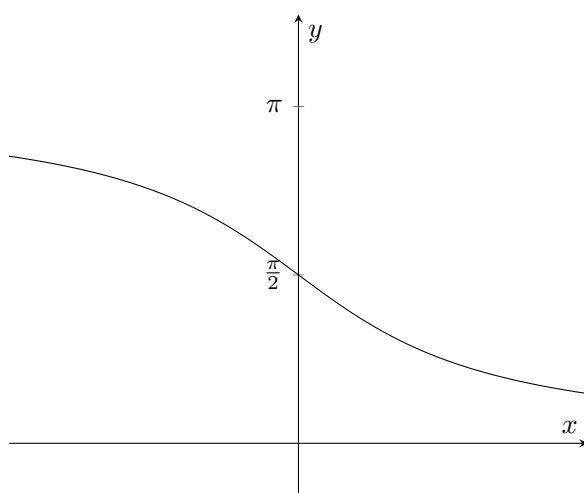
(b) 反余弦函数图像

ii. 反正切函数和反余切函数

反正切函数 $y = \arctan x$, 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



(a) 反正切函数图像



(b) 反余切函数图像

1.1.3 函数表达式的求解

1. 一般借助微分方程（第八章）求解
2. 注意 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $f'(x_0)$, $\int_a^b f(x)dx$ 等都是个数
3. 抓大头

重要公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

考点 12 例六

1.1.4 常用曲线 (这些曲线在以后会经常碰到)

1. 笛卡尔心形线

$$x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} - x) \text{ 或 } r = a(1 - \cos \theta) \text{ (桃屁股朝右)}$$

$$x^2 + y^2 = a(\sqrt{x^2 + y^2} + x) \text{ 或 } r = a(1 + \cos \theta) \text{ (桃屁股朝左)}$$

与 x 轴交点 $O, \mp 2a$, 与 y 轴交点 $\pm a$

$$r = a(1 - \cos \theta) (a > 0)$$

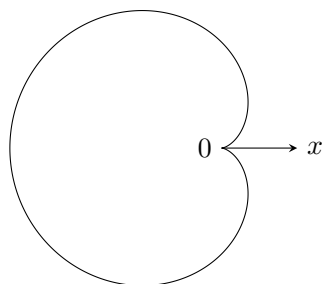


图 1.5: 心形线

2. 玫瑰线

$$r = a \sin 3\theta (a > 0)$$

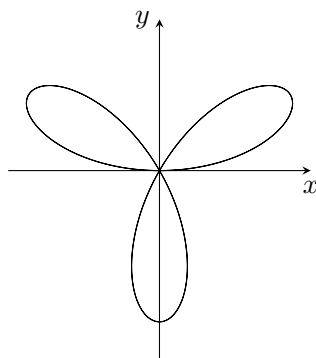


图 1.6: 玫瑰线

3. 阿基米德螺线

$$r = a\theta (a > 0, \theta \geq 0)$$

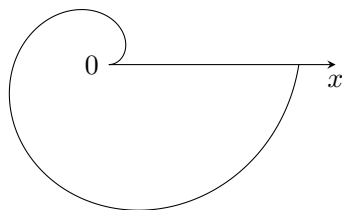


图 1.7: 阿基米德螺线

4. 伯努利双纽线

1.1 考点 1 常用函数及常用曲线 P4

$r^2 = a^2 \cos 2\theta (a > 0)$ 一二三四象限

$r^2 = a^2 \sin 2\theta (a > 0)$ 一三象限.

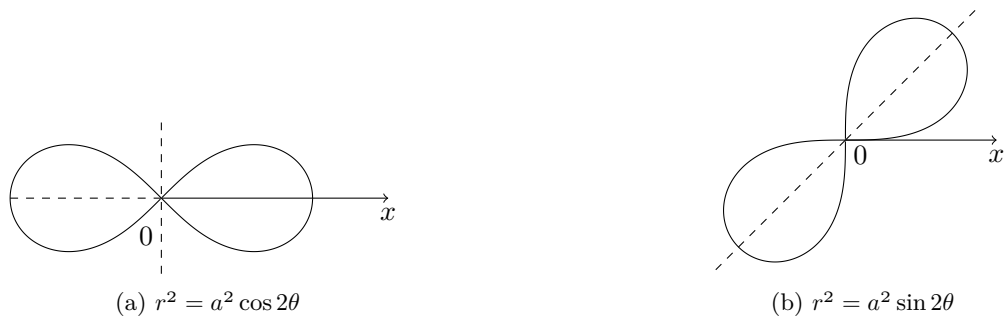


图 1.8: 伯努利双纽线

5. 摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

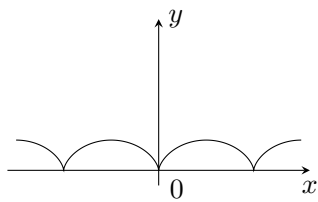


图 1.9: 摆线

6. 星形线

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

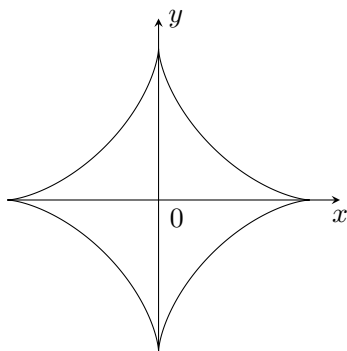


图 1.10: 星形线

7. 笛卡尔叶形线

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

渐近线 $y = x$ 和 $x + y = -a$

1.2 考点 2 函数的几种特性（特别要记忆对这些特性总结的结论） p11

1.2.1 有界性

1. 有界无界应在具体区间判断

2. 有界无界的判定方法

(a) 用定义

(b) 用结论

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 也存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界若存在 $c \in I$, 且 $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$, 则 $f(x)$ 在区间 I 上无界

1.2.2 单调性

1. 判定方法

(a) 用定义

(b) 用结论

导数大于（小于）0, $f(x)$ 单调增加（减少）复合函数同增异减

1.2.3 奇偶性

1. 常见的奇函数

- $x, \sin x, \tan x, \operatorname{sgn} x$
- $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
- $\frac{a^{kx} \pm 1}{a^{kx} \mp 1} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1, k \neq 0)$
- $\underline{f(x) - f(-x)}$

2. 常见的偶函数

- $C, x^2, |x|, \cos x$
- $\underline{f(x) + f(-x)}$

1.3 考点 3 极限的定义 P14

3. 判定方法

(a) 用定义

(b) 用结论

奇 \pm 奇 = 奇, 偶 \pm 偶 = 偶, 奇 \cdot 奇 = 奇, 偶 \cdot 偶 = 偶, 奇 \cdot 偶 = 奇
内偶则偶, 内奇看外, 外奇则奇, 外偶则偶

若 $f(x)$ 是可导的奇(偶)函数, 则 $f'(x)$ 是偶(奇)函数

若 $f(x)$ 是连续的奇(偶)函数, 则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶(奇)函数(下限必须为 0)

1.2.4 周期性

1. 判定方法

(a) 用定义

(b) 用结论

i. 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $f(ax+b)$ 以 $\frac{T}{|a|}$ 为周期

ii. 若 $g(x)$ 是周期函数, 则复合函数 $f[g(x)]$ 也是周期函数

iii. 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数, 则 $f'(x)$ 也以 T 为周期函数

iv. 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则只有在 $\int_0^T f(x)dx = 0$ 时, $\int_a^{a+T} f(t)dt$ 也以 T 为周期函数

2. 定义域关于原点对称的任一函数必可表示为一个偶函数与一个奇函数之和

1.3 考点 3 极限的定义 p14

1.4 考点 4 极限的性质 p19

1.5 考点 5 无穷小与无穷大 p20

1.6 考点 6 极限的四则运算法则及两个重要极限 p25

1.6.1 极限的四则运算法则

1. 若 $\lim f(x) = A(\exists)$, $\lim g(x) = B(\exists)$

(a) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$

(b) $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$

(c) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

2. 必须保证 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都**存在**，且运算项数为**有限项**
3. 若 $\lim f(x)$ 存在， $\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 必不存在
4. 若 $\lim f(x)$ 不存在， $\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不一定不存在（可能存在）
5. 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$ ，且 $\lim g(x) = 0$ ，则 $\lim f(x) = 0$ “**母为 0，推子为 0**”
6. 若 $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$ ，且 $\lim f(x) = 0$ ，则 $\lim g(x) = 0$ “**子为 0，推母为 0**”

1.6.2 极限的四则运算法则的推广

1. 在加减中存在极限的那部分 可以单独先算
2. 在乘除法中极限不为 0 的那部分 可以单独先算

1.6.3 两个重要极限

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
该极限呈现 $\frac{0}{0}$ 型未定式
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
该极限呈现 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

1.7 考点 7 等价代换 p29

1.7.1 常用的等价无穷小

- $\sin x \sim x$
- $\alpha^x - 1 \sim x \ln \alpha$
- $e^x - 1 \sim x$
- $1 - \cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2} x^2$
- $\arcsin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$

1.7.2 等价无穷替换原则

凡是在（**或处理后在**）同一个 \lim 里表现为乘除运算的无穷小都可对其使用等价代换

对于 $e^{f(x)} - e^{g(x)}$ ，往往采用**提公因子 $e^{g(x)}$** 的方式处理，即 $e^{f(x)} - e^{g(x)} = e^{g(x)}[e^{f(x)-g(x)} - 1]$

对 $A - B$ 应当先观察是否有公因子，若有，则将其提出

1.8 考点 8 洛必达法则

1.9 考点 9 泰勒公式 (多项式的高次逼近) p35

1.9.1 泰勒公式

泰勒公式表

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$
- $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^3)$

1.9.2 用泰勒公式求极限

1. $\frac{A}{B}$: 适用于“上下同阶”的原则

如果分母 (或者分子) 是 x 的 k 次幂, 则应该把分子 (或分母) 展开到 x 的 k 次幂.

2. $A - B$: 适用于幂次最低原则

将 A, B 分别展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂为止.

1.10 考点 10 幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的极限 p38

1.11 考点 11 已知极限反求参数及无穷小阶数的比较 p40

1.12 考点 12 数列的极限 p43

1.12.1 先求和 (积) 再求极限

重要公式

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

1.12.2 夹逼准则

走投无路时，柳暗花明 把握放缩的度

1. 利用简单的放大与缩小
2. 重要不等式

$$\begin{aligned} \sin x < x < \tan x, (0 < x < \frac{\pi}{2}) \\ \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \\ \arctan x \leq x \leq \arcsin x, 0 \leq x \leq 1 \\ e^x \geq x+1, \forall x \\ \ln x \leq x-1, x > 0 \\ x-1 < [x] \leq x \end{aligned}$$

重要公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$$

考点 12 例六

单调有界准则

利用结论证明梳理单调性

若 $f'(x) > 0, x \in I$ 则数列 x_n 单调, 且 $\begin{cases} \text{当 } x_2 > x_1 \text{ 时, 数列 } x_n \text{ 单调增} \\ \text{当 } x_2 < x_1 \text{ 时, 数列 } x_n \text{ 单调减} \end{cases}$.

若 $f'(x) < 0, x \in I$ 则数列 x_n 不单调

1.13 考点 13 函数的连续性与间断点 p48

1.13.1 函数的连续性

连续的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 且有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

左连续和右连续

1. 左连续: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
2. 右连续: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

充要条件

极限存在 (左极限 = 右极限) 且等于函数在这个点的函数值:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

1.13.2 函数的间断点及分类

只有无定义点及分段点 才可能成为间断点

1. 第一类间断点: 左极限和右极限都存在

(a) 可去间断点 (左极限 = 右极限 \neq 函数值): $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$

可通过补充定义使可去间断点连续

(b) 跳跃间断点 (左极限 \neq 右极限): $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

2. 第二类间断点: 左极限和右极限至少有一个不存在

(a) 无穷间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

(b) 振荡间断点: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 振荡不存在

1.13.3 连续的性质

1. 连续函数的和, 差, 积, 商 (分母不为 0) 及复合仍连续

2. 基本初等函数在其定义域内连续, 初等函数在其定义区间内连续

3. 有界性

4. 最值性

5. 介值性

6. 零点定理

1.14 考点 14 闭区间上连续函数的性质 p53

第二章 一元函数微分学

2.1 考点 15 导数定义

2.2 考点 16 四则、复合函数、反函数及对数求导法则 p62

2.3 考点 17 高阶导数 p65

2.4 考点 18 隐函数及由参数方程所确定的函数的求导法则 p67

2.5 考点 19 分段函数及绝对值函数求导 p70

2.6 考点 20 导数的几何、物理意义及相关变化率 p75

2.7 考点 21 函数的微分 p77

2.8 考点 22 中值定理 p80

2.9 考点 23 单调性与极值、最值 p91

2.10 考点 24 凹凸性与拐点 p99

2.11 考点 25 渐近线、曲率 p102

2.12 考点 26 函数图形的描绘 p105

2.13 考点 27 证明函数或常数不等式 p106

2.14 考点 28 用导数讨论方程的根 p109

第三章 一元函数积分学

3.1 考点 29 原函数与不定积分的概念、积分公式 p114

3.1.1 原函数与不定积分的概念

1. 可积必有界
2. 原函数可导, 可知原函数必连续 ($f(x)$ 未必连续)

3.1.2 不定积分的性质

- 1.

3.1.3 原函数存在定理

1. 如果 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上必有原函数
2. 如果 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上必没有原函数
3. $f(x)$ 有第二类间断点 (震荡间断点), 但是 $f(x)$ 可能有原函数

3.1.4 积分公式

- | | |
|---|---|
| • $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C (a \neq -1)$ | • $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$ |
| • $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ | • $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ |
| • $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$ | • $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$ |
| • $\int e^x dx = e^x + C$ | • $\int \sec x dx = \ln \sec x + \tan x + C$ |
| • $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | • $\int \csc x dx = -\ln \csc x + \cot x + C$ |
| • $\int \cos x dx = \sin x + C$ | • $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ |
| • $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ | • $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$ |

$$\begin{aligned}
& \bullet \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C & \bullet \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C \\
& \bullet \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C
\end{aligned}$$

3.2 考点 30 凑微分法求不定积分 p117

1. 常用的凑微分公式

$$(a) \sin 2x dx = 2 \sin x \cos x dx = \begin{cases} 2 \sin x d(\sin x) = d(\sin^2 x) \\ -2 \cos x d(\cos x) = -d(\cos^2 x) \end{cases}$$

$$(b) \cos 2x dx = \frac{1}{2} d(\sin 2x) = d(\cos x \sin x)$$

$$(c) (1 \pm \frac{1}{x^2}) dx = d(x \mp \frac{1}{x})$$

$$(d) (1 + \ln x) dx = d(x \ln x)$$

2. 对被积函数复杂部分，先求导，再试着凑微分

3.2.1 观察法凑微分

3.2.2 分子分母同乘（除）一个因子，再凑微分

3.2.3 先求导，再凑微分

3.2.4 三角函数的凑微分

对于 $\int f(\sin x, \cos x) dx$ 型的积分

1. 若 $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ ，一般凑 $d(\cos x)$

2. 若 $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$ ，一般凑 $d(\sin x)$

3. 若 $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$ ，一般凑 $d(\tan x)$

重要公式

$$\int \frac{3 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx = \int \frac{A(\sin x + 2 \cos x)' + B(\sin x + 2 \cos x)}{\sin x + 2 \cos x} dx$$

$$\text{可以推广到 } \int \frac{C \sin x + D \cos x}{A \sin x + B \cos x} dx$$

3.3 考点 31 换元法求不定积分 p120

3.3.1 第一类换元法（凑微分法）

若 $\int f(u) du = F(u) + C$ ，且 $\varphi(x)$ 可导，则：

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$$

3.3.2 第二类换元法

设函数 $x = \varphi(t)$ 可导, 且 $\varphi'(t) \neq 0$, 又设 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C$, 则:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

三种常用的变量代换:

1. 被积函数中含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 时, 令 $x = a \sin t$, 或者是 $x = a \cos t$
2. 被积函数中含有 $\sqrt{x^2 + a^2}$ 时, 令 $x = a \tan t$
3. 被积函数中含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$ 时, 令 $x = a \sec t$

3.3.3 根式代换

当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 等时, 一般可直接令 $\sqrt[n]{ax+b} = t$, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$

3.3.4 指数代换

当被积函数含有 a^x, e^x 时, 可考虑令 $a^x = t, e^x = t$

3.3.5 倒代换

当被积函数分母的幂次比分子的幂次高两次及以上时, 可考虑作倒代换 $x = \frac{1}{t}$

3.4 考点 32 分部积分法求不定积分 p121

3.4.1 分部积分法

设 $u(x), v(x)$ 有连续一阶导数, 则:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

1. 分部积分法常常用于被积函数为**两类不同函数相乘**时的不定积分
2. 积分的难易程度: 若函数积分后会简单些则取作 v , 若函数微分后会简单些则取作 u , 难易程度为 $\ln x, \arcsin x, \arctan x < P_n(x) < e^{kx}, \sin ax, \cos ax$, 越往左边越适合作为 u .
 - (a) 被积函数是 $P_n(x)e^{kx}, P_n(x)\sin ax, P_n(x)\cos ax$ 等形式的时候, 一般来说选取 $u = P_n(x)$
 - (b) 被积函数是 $e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx$ 等形式的时候, 一般来说选取两因子中的任意一个
 - (c) 被积函数是 $P_n \ln x, P_n(x)\arcsin x, P_n(x)\arctan x$ 等形式的时候, 一般来说选取 $u = \ln x, u = \arcsin x, u = \arctan x$

3.5 考点 33 有理函数的积分 p124

3.6 考点 34 定积分的定义及性质 p125

3.7 考点 35 定积分的计算方法及若干技巧 p132

3.8 考点 36 变限积分函数及其求导原理 p140

3.9 考点 37 变限积分函数的综合题 p145

3.10 考点 38 定积分不等式的证明 p150

3.11 考点 39 定积分与极限的综合题 p154

3.12 考点 40 反常积分 p157

3.13 考点 41 平面图形的面积 p161

3.14 考点 42 空间图形的体积 p165

3.15 考点 43 平面曲线的弧长 p168

3.16 考点 44 旋转曲面的侧面积 p169

3.17 考点 45 定积分的物理应用 p170

第四章 向量代数与空间解析几何

4.1 考点 46 向量及其运算 p173

4.2 考点 47 平面积空间直线 p175

4.3 考点 48 曲面及空间曲线 p180

第五章 多元函数微分学

5.1 考点 49 二元函数的极限及连续 p185

5.2 考点 50 偏导数 p188

5.3 考点 51 全微分 p192

5.4 考点 52 复合函数的偏导数与全微分 p195

5.5 考点 53 隐函数的偏导数及全微分 p200

5.6 考点 54 极值与最值 p203

5.7 考点 55 多元函数微分学的几何应用 p209

5.8 考点 56 方向导数与梯度 p212

5.9 考点 57 二元函数的二阶泰勒公式 p214

第六章 多元函数积分学

- 6.1 考点 58 二重积分概念与几何意义 p217
- 6.2 考点 59 直角坐标计算二重积分 p221
- 6.3 考点 60 极坐标计算二重积分 p224
- 6.4 考点 61 换序及换系 p227
- 6.5 考点 62 需分区域计算的几种情况 p233
- 6.6 考点 63 先一后二法（投影法）与先二后一法（截面法） p236
- 6.7 考点 64 利用球面坐标计算三重积分 p240
- 6.8 考点 65 三重积分的性质及换序 p241
- 6.9 考点 66 第一类（平面、空间）曲线积分 p242
- 6.10 考点 67 第二类平面曲线积分 p246
- 6.11 考点 68 第一类曲面积分 p253
- 6.12 考点 69 第二类曲面积分 p256
- 6.13 考点 70 第二类空间曲线积分的计算 p262
- 6.14 考点 71 多元函数积分学的应用及场论初步 p264

第七章 无穷级数

7.1 考点 72 用定义和基本性质判断技术的敛散性 p270

7.2 考点 73 正项级数敛散性的判别方法 p272

7.3 考点 74 交错级数敛散性的判别方法 p276

7.4 考点 75 任意项级数敛散性的判别方法 p278

7.5 考点 76 收敛发散的证明题 p281

7.6 考点 77 幂级数的收敛半径及收敛域的求法 p282

7.7 考点 78 求一般函数项级数的收敛域 p286

7.8 考点 79 函数展开成幂级数 p286

7.9 考点 80 幂级数的和函数的求法 p290

7.10 考点 81 常数项级数的求和 p295

7.11 考点 82 傅立叶级数 p297

第八章 常微分方程

8.1 考点 83 微分方程的基本概念 p301

1. 微分方程的通解与特解

不含任意常数的解称为特解

含独立任意常数个数与微分方程阶数相同的解称为微分方程的通解

阶数与个数相同

2. 线性与非线性微分方程

看与 y 有关的次方是几次，若大于等于 2 次即为非线性

8.2 考点 84 一阶微分方程 p302

8.3 考点 85 二阶可降阶的微分方程 p307

8.4 考点 86 常系数线性微分方程及欧拉方程 p308

8.5 考点 87 已知方程的解反求方程及进一步研究方程的解 p312

8.6 考点 88 通过变形改造建立微分方程并求解 p318

8.7 考点 89 微分方程的应用 p323