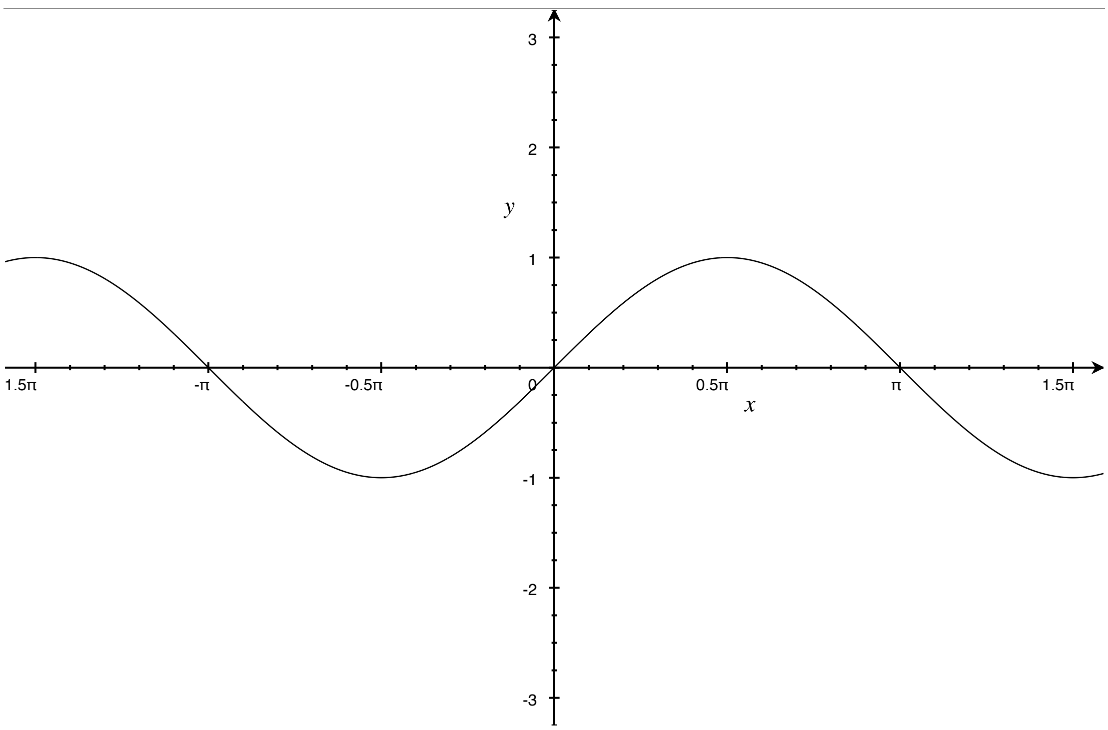
$$\int_{birth}^{death} Study\ dt = life$$

Advanced Mathematics

@desonglll



目录

第一部分

剑指 150 高等数学

开始于 2023 年 3 月 1 日高昆轮林德松

常用基础知识

数列

1. 等差数列

   首项为 a_1，公差为 $d(d \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d, ...$

   (a) 通项公式: $a_n = a_1 + (n-1)d$

   (b) 前 n 项的和: $S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

2. 等比数列

   首项为 a_1, 公比为 $r(r \neq 0)$ 的数列 $a_1, a_1r, ..., a_1r^{n-1}, ...$

   (a) 通项公式: $a_n = a_1 r^{n-1}$

   (b) 前 n 项的和 $S_n = \begin{cases} na_1 & r=1 \\ \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} & r \neq 1 \end{cases}$

   (c) 一些常见数列前 n 项的和

      i. $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n(1+n)}{2}$

      ii. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

      iii. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

三角函数

1. 三角函数的基本关系

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},\ \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ 1+\tan^2\alpha = \sec^2\alpha,\ 1+\cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

2. 重要公式

3. 倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1,\ \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

4. 半角公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha),\ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

5. 和差公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

6. 积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

7. 和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

8. 万能公式

若 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$, 则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$, $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

指数运算法则

$$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta},\ \frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta}$$
$$(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta},\ (ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha,\ (\frac{a}{b})^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

对数运算法则

1. $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

2. $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

3. $\log_a^n = n\log_a M$

4. $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n}\log_a M$

一元二次方程基础

1. 一元二次方程: $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$

2. 根的公式: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

3. 根和系数的关系: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$

4. 判别式: $\Delta=b^2-4ac$

5. 抛物线定点坐标: $(-\frac{b}{2a},c-\frac{b^2}{4a})$

因式分解公式

1. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

2. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$

3. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3b^2a+b^3$

4. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3b^2a-b^3$

5. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

6. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

7. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

8. 二项式定理: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$

阶乘和双阶乘

1. $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$, 规定 $0!=1$

2. $(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot (2n)=2^n n!$

3. $2(n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)$

常用不等式

1. 设 a,b 为实数, 则有:

   (a) $|a\pm b|\leq |a|+|b|$

   (b) $||a|-|b||\leq |a-b|$

2. $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}(a, b > 0)$

3. 设 $a > b > 0$, 则 $\begin{cases} 当n > 0时, a^n > b^n \\ 当n < 0时, a^n < b^n \end{cases}$

4. 若 $0 < a < x < b, 0 < c < y < d$, 则 $\frac{c}{b} < \frac{y}{x} < \frac{d}{a}$

5. $\sin x < x < \tan x (0 < x < \frac{\pi}{2})$

6. $\sin x < x (x > 0)$

7. $\arctan x \leq x \leq \arcsin x (0 \leq x \leq 1)$

8. $e^x \geq x + 1 (\forall x)$

9. $x - 1 \geq \ln x (x > 0)$

10. $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} (x > 0)$

第一章　函数极限连续

1.1　考点 1 常用函数及常用曲线 p4

1.1.1　函数的概念及一些常用函数

1. 常见函数

   (a) 常数函数

   $y = C, C$ 为常数, 图形为平行于 x 轴的水平直线.

   (b) 幂函数

   $y = x^{\mu}$ (μ 是实数)

   i. 见到 $\sqrt{u}, \sqrt[3]{u}$, 用 u 来研究最值

   ii. 见到 $|u|$ 时, 用 u^2 来研究最值

   iii. 见到 $u_1u_2u_3$ 时, 用 $ln(u_1u_2u_3) = lnu_1 + lnu_2 + lnu_3$ 来研究最值

   iv. 见到 $\frac{1}{u}$ 时, 用 u 来研究最值

   (c) 指数函数 $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

   (d) 对数函数 $y = log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

   常用公式: $x = e^{lnx}$ $(x > 0), u^v = e^{lnu^v} = e^{vlnu}$ $(u > 0)$

   (e) 三角函数

2. 绝对值函数

   y=|x| 在 x=0 处连续，但是是不可导的（左导数不等于右导数）

$$y = |x| = \begin{cases} x,\ x \geq 0 \\ -x,\ x < 0 \end{cases}$$

重要公式$|a_1 \pm a_2 \pm ... \pm a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$

3. 最值函数

   $U = max\{f(x), g(x)\} = \dfrac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$

   $V = min\{f(x), g(x)\} = \dfrac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$

   $U + V = f(x) + g(x), U - V = |f(x) - g(x)|, U \cdot V = f(x)g(x)$

4. 符号函数

   对任何 x，都有 $\sqrt{x^2} = |x| = xsgn(x)$

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1,\ x > 0 \\ 0,\ x = 0 \\ -1,\ x < 0 \end{cases}$$

5. 取整函数

   $[x+n] = [x] + n,\ \ n\ \ , x - 1 < [x] \leq x$

6. 幂指函数

   $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)lnu(x)}$

7. 狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^C \end{cases}$

1.1.2 反函数、复合函数及初等函数

1. 反函数

   (a) $y = \sin x$ 的反函数

   当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时，$x = \arcsin y, y \in [0, 1]$

   当 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 时，$x = \pi - \arcsin y, y \in [-1, 1)$

   当 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ 时，$x = 2\pi + \arcsin y, y \in (-1, 0]$

2. 复合函数

3. 初等函数

   (a) 反对幂三指

   (b) 幂指函数是初等函数

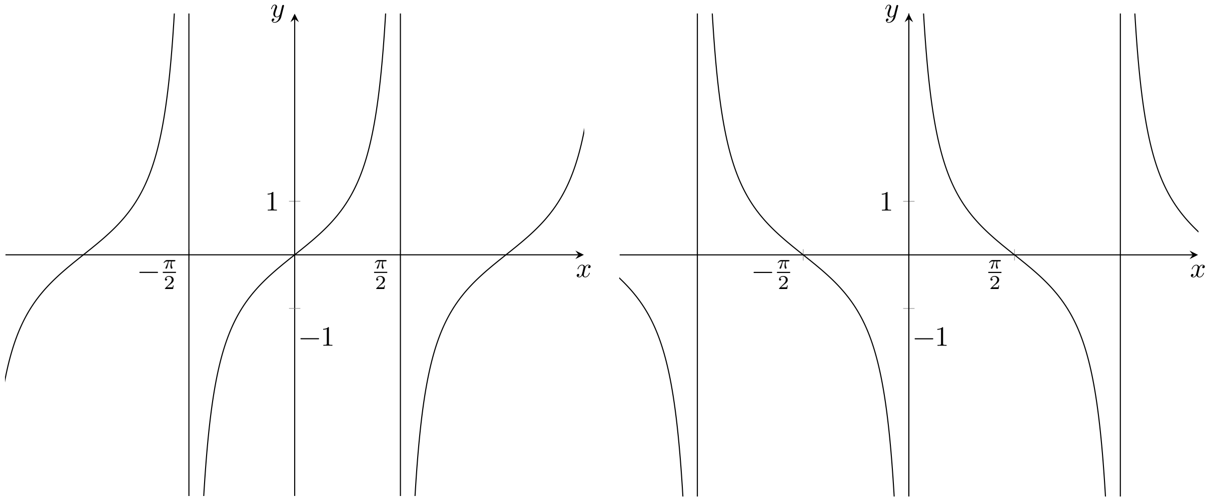
   (c) 三角函数

   i. 正弦函数和余弦函数

   正弦函数 $y = \sin x$, 余弦函数 $y = \cos x$.

   ii. 正切函数和余切函数

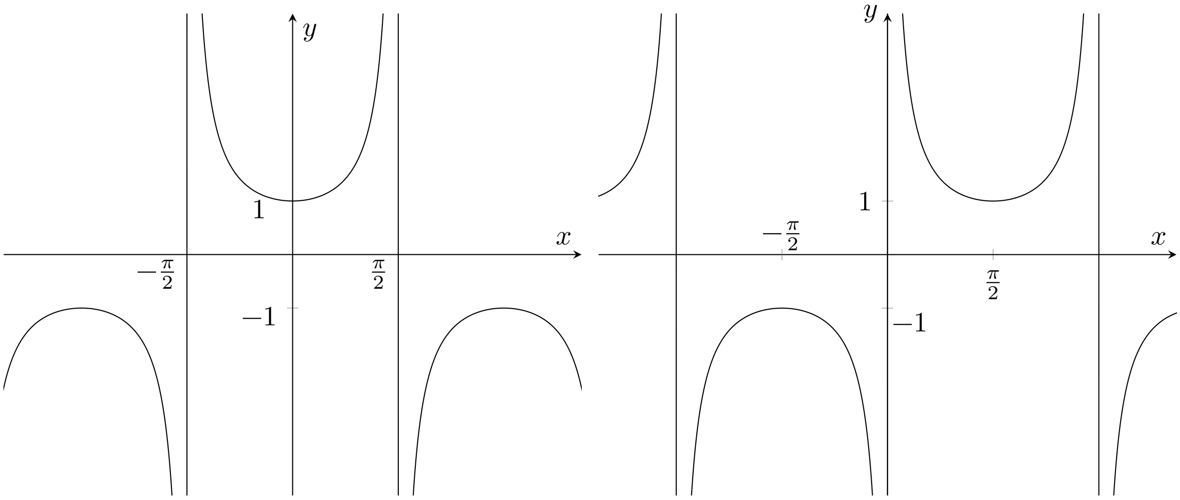
   正切函数 $y = \tan x$, 余切函数 $y = \cot x$.



(a) 正切函数图像　(b) 余切函数图像

iii. 正割函数和余割函数

正割函数 $y = \sec x$, 余割函数 $y = \csc x$.

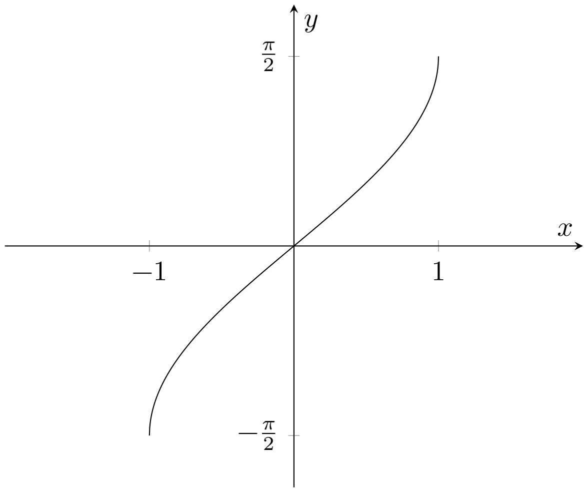


(a) 正割函数图像　(b) 余割函数图像

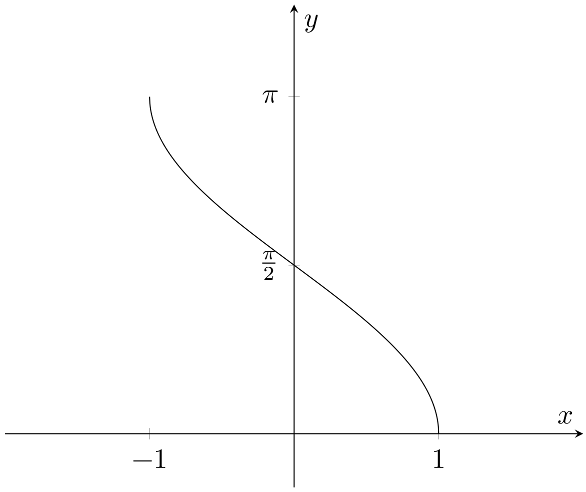
(d) 反三角函数

i. 反正弦函数和反余弦函数

反正弦函数 $y = \arcsin x$, 反余弦函数 $y = \arccos x$.



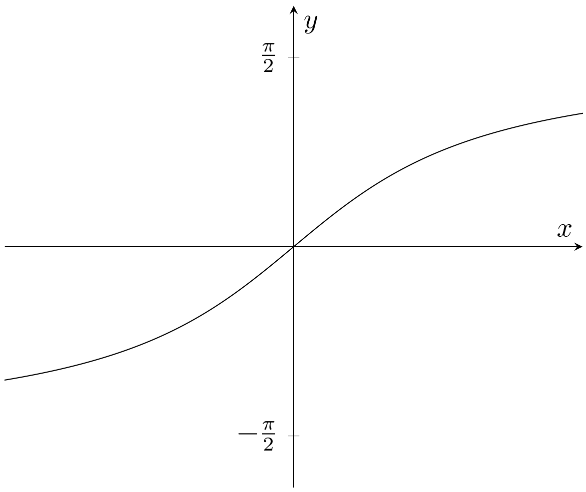
(a) 反正弦函数图像



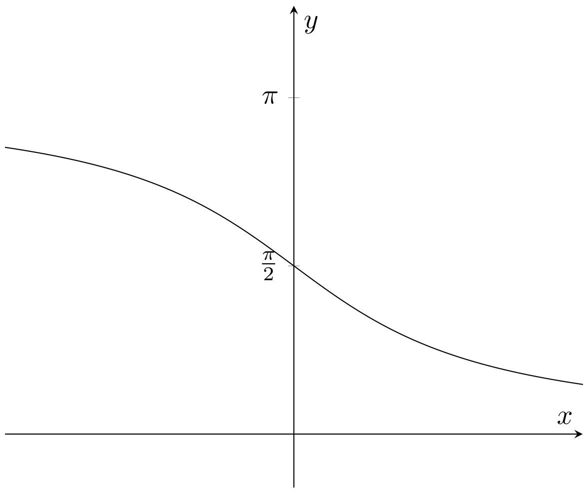
(b) 反余弦函数图像

ii. 反正切函数和反余切函数

反正切函数 $y = \arctan x$, 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$



(a) 反正切函数图像



(b) 反余切函数图像

1.1.3 函数表达式的求解

1. 一般借助微分方程（第八章）求解

2. 注意 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x), f'(x_0), \int_a^b f(x)dx$ 等都是一个数

3. 抓大头

重要公式

$\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{a_1^n + a_2^n + ... + a_m^n} = max\{a_1, a_2, ..., a_m\}$

考点 12 例六

1.1.4 常用曲线（这些曲线在以后会经常碰到）

1. 笛卡尔心形线

   $x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}-x)$ 或 $r=a(1-\cos\theta)$（桃屁股朝右）

   $x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$ 或 $r=a(1+\cos\theta)$（桃屁股朝左）

   与 x 轴交点 $O,\mp 2a$, 与 y 轴交点 $\pm a$

   $r=a(1-\cos\theta)(a>0)$

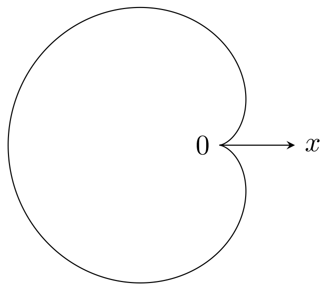


图 1.5: 心形线

2. 玫瑰线

   $r=a\sin 3\theta(a>0)$

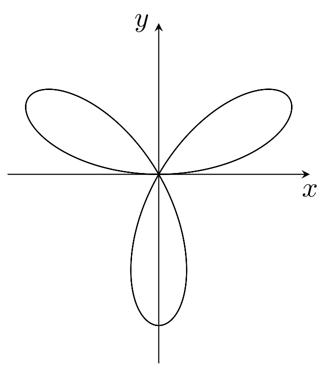


图 1.6: 玫瑰线

3. 阿基米德螺线

   $r=a\theta(a>0,\theta\geq 0)$

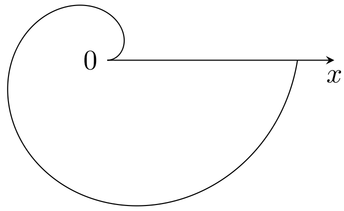
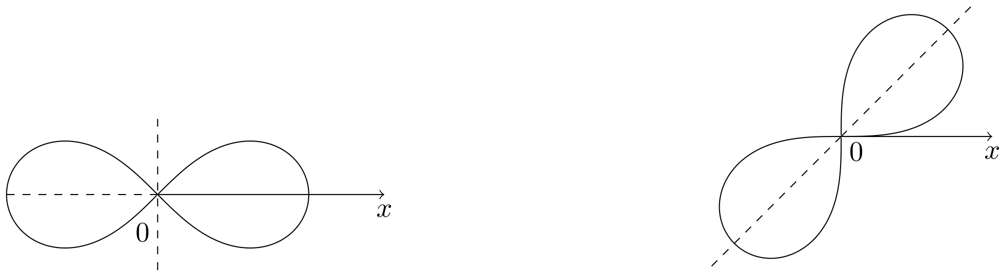


图 1.7: 阿基米德螺线

4. 伯努利双纽线

$r^2 = a^2 \cos 2\theta (a > 0)$ 一二三四象限

$r^2 = a^2 \sin 2\theta (a > 0)$ 一三象限.



(a) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (b) $r^2 = a^2 \sin 2\theta$

图 1.8: 伯努利双纽线

5. 摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

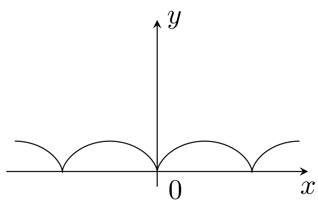


图 1.9: 摆线

6. 星形线

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

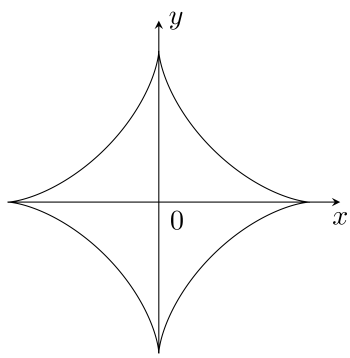


图 1.10: 星形线

7. 笛卡尔叶形线

$x^3+y^3-3axy=0$ 或 $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

渐近线 $y=x$ 和 $x+y=-a$

1.2　考点 2 函数的几种特性（特别要记忆对这些特性总结的结论）p11

1.2.1　有界性

1. 有界无界应在具体区间判断

2. 有界无界的判定方法

   (a) 用定义

   (b) 用结论

   若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

   若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 也存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界

   若存在 $c\in I$，且 $\lim\limits_{x\to c^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to c^+}f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在区间 I 上无界

1.2.2　单调性

1. 判定方法

   (a) 用定义

   (b) 用结论

   导数大于（小于）0，$f(x)$ 单调增加（减少）

   复合函数<u>同增异减</u>

1.2.3　奇偶性

1. 常见的奇函数

   - $x,\sin x,\tan x,sgnx$
   - $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$
   - $\dfrac{a^{kx}\pm1}{a^{kx}\mp1}(a>0$ 且 $a\neq1,k\neq0)$
   - $\underline{f(x)-f(-x)}$

2. 常见的偶函数

   - $C,x^2,|x|,\cos x$
   - $\underline{f(x)+f(-x)}$

3. 判定方法

   (a) 用定义

   (b) 用结论

   奇 ± 奇 = 奇，偶 ± 偶 = 偶，奇 · 奇 = 奇 = 偶，偶 · 偶 = 偶，奇 · 偶 = 奇

   内偶则偶，内奇看外，外奇则奇，外偶则偶

   若 $f(x)$ 是可导 的奇（偶）函数，则 $f'(x)$ 是偶（奇）函数

   若 $f(x)$ 是连续 的奇（偶）函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶（奇）函数（下限必须为 0）

1.2.4 周期性

1. 判定方法

   (a) 用定义

   (b) 用结论

      i. 若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\dfrac{T}{|a|}$ 为周期

      ii. 若 $g(x)$ 是周期函数，则复合函数 $f[g(x)]$ 也是周期函数

      iii. 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数，则 $f'(x)$ 也以 T 周期函数

      iv. 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则只有在 $\displaystyle\int_0^T f(x)dx = 0$ 时，$\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 也以 T 周期函数

2. 定义域关于原点对称的任一函数必可表示为一个偶函数与一个奇函数之和

1.3 考点 3 极限的定义 p14

1.4 考点 4 极限的性质 p19

1.5 考点 5 无穷小与无穷大 p20

1.6 考点 6 极限的四则运算法则及两个重要极限 p25

1.6.1 极限的四则运算法则

1. 若 $\lim f(x) = A(\exists)$，$\lim g(x) = B(\exists)$

   (a) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm g(x) = A \pm B$

   (b) $\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

   (c) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$

2. 必须保证 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都**存在**，且运算项数为**有限项**

3. 若 $\lim f(x)$ 存在，$\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 必不存在

4. 若 $\lim f(x)$ 不存在，$\lim g(x)$ 不存在，则 $\lim[f(x) \pm g(x)]$ 不一定不存在（可能存在）

5. 若 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$, 且 $\lim g(x) = 0$，则 $\lim f(x) = 0$ **"母为 0，推子为 0"**

6. 若 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, 且 $\lim f(x) = 0$，则 $\lim g(x) = 0$ **"子为 0，推母为 0"**

1.6.2 极限的四则运算法则的推广

1. 在加减中存在极限的那部分 可以单独先算

2. 在乘除法中极限不为 0 的那部分 可以单独先算

1.6.3 两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
   该极限呈现 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
   该极限呈现 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式

1.7 考点 7 等价代换 p29

1.7.1 常用的等价无穷小

- $\sin x \sim x$
- $\alpha^x - 1 \sim x \ln a$
- $e^x - 1 \sim x$
- $1 - \cos^\alpha x \sim \frac{\alpha}{2} x^2$
- $\arcsin x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$
- $\ln(1+x) \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$

1.7.2 等价无穷替换原则

凡是在（**或处理后在**）同一个 lim 里表现为乘除运算的无穷小都可对其使用等价代换

对于 $e^{f(x)} - e^{g(x)}$，往往采用**提公因子 $\boldsymbol{e^{g(x)}}$**的方式处理，即 $e^{f(x)} - e^{g(x)} = e^{g(x)}[e^{f(x)-g(x)} - 1]$

对 $A - B$ 应当先观察是否有公因子，若有，则将其提出

1.8　考点 8 洛必达法则

1.9　考点 9 泰勒公式（多项式的高次逼近）p35

1.9.1　泰勒公式

泰勒公式表

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $\arcsin x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$
- $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$
- $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + o(x^3)$
- $ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^3)$

1.9.2　用泰勒公式求极限

1. $\frac{A}{B}$: 适用于 “上下同阶” 的原则

   如果分母 (或者分子) 是 x 的 k 此幂, 则应该把分子 (或分母) 展开到 x 的 k 次幂.

2. $A - B$: 适用于幂次最低原则

   将 A, B 分别展开到它们的系数不相等的 x 的最低次幂为止.

1.10　考点 10 幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的极限 p38

1.11　考点 11 已知极限反求参数及无穷小阶数的比较 p40

1.12　考点 12 数列的极限 p43

1.12.1　先求和（积）再求极限

重要公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

1.12.2 夹逼准则

走投无路时，柳暗花明 把握放缩的度

1. 利用简单的放大与缩小

2. 重要不等式

$$\sin x < x < \tan x, (0 < x < \frac{\pi}{2})$$
$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$
$$\arctan x \le x \le \arcsin x, 0 \le x \le 1$$
$$e^x \ge x+1, \forall A$$
$$\ln x \le x-1, x>0$$
$$x-1 < [x] \le x$$

重要公式
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_1^n + a_2^n + ... + a_m^n} = max\{a_1, a_2, ..., a_m\}$$
考点 12 例六

单调有界准则

利用结论证明梳理单调性

$$\text{若 } f'(x) > 0, x \in I \text{ 则数列 } x_n \text{ 单调，且} \begin{cases} \text{当 } x_2 > x_1 \text{ 时，数列 } x_n \text{ 单调增} \\ \text{当 } x_2 < x_1 \text{ 时，数列 } x_n \text{ 单调减} \end{cases}.$$

若 $f'(x) < 0, x \in I$ 则数列 x_n 不单调

1.13 考点 13 函数的连续性与间断点 p48

1.13.1 函数的连续性

连续的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 且有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

左连续和右连续

1. 左连续: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

2. 右连续: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

充要条件

极限存在 (左极限 = 右极限) 且等于函数在这个点的函数值:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

1.13.2 函数的间断点及分类

只有<u>无定义点及分段点</u> 才可能成为间断点

1. 第一类间断点: 左极限和右极限都存在
   (a) 可去间断点 (左极限 = 右极限 ≠ 函数值): $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$

   > 可通过补充定义使可去间断点连续

   (b) 跳跃间断点 (左极限 ≠ 右极限): $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
2. 第二类间断点: 左极限和右极限至少有一个不存在
   (a) 无穷间断点: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$
   (b) 振荡间断点: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 振荡不存在

1.13.3 连续的性质

1. 连续函数的和, 差, 积, 商 (分母不为 0) 及复合仍连续
2. 基本初等函数在其定义域内连续, 初等函数在其定义区间内连续
3. 有界性
4. 最值性
5. 介值性
6. 零点定理

1.14 考点 14 闭区间上连续函数的性质 p53

第二章　一元函数微分学

2.1　考点 15 导数定义

2.2　考点 16 四则、复合函数、反函数及对数求导法则 p62

2.3　考点 17 高阶导数 p65

2.4　考点 18 隐函数及由参数方程所确定的函数的求导法则 p67

2.5　考点 19 分段函数及绝对值函数求导 p70

2.6　考点 20 导数的几何、物理意义及相关变化率 p75

2.7　考点 21 函数的微分 p77

2.8　考点 22 中值定理 p80

2.8.1　有界与最值定理

$m \leq f(x) \leq M$, 其中, m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

2.8.2　介值定理

当 $m \leq \mu \leq M$ 时, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \mu$.

2.8.3　平均值定理

当 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ 的时候, 在 $[x_1, x_2]$ 内至少存在一点 ξ, 使得

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

2.8.4　零点定理

当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

2.8.5 费马定理

设 $f(x)$ 满足在点 x_0 处①可导②取极值, 则 $f'(x_0)=0$.

2.8.6 罗尔定理

设 $f(x)$ 满足①在 $[a,b]$ 上连续②在 (a,b) 内可导③$f(a)=f(b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

2.8.7 拉格朗日中值定理

设 $f(x)$ 满足①在 $[a,b]$ 上连续②在 (a,b) 内可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 或 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2.8.8 柯西中值定理

设 $f(x)$ 满足①在 $[a,b]$ 上连续②在 (a,b) 内可导③$g'(x)\neq 0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

2.8.9 泰勒公式

带拉格朗日余项的泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内 $n+1$ 阶的导数存在, 则对该邻域内的任意点 x, 有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

其中 ξ 介于 x,x_0 之间.

带佩亚诺余项的泰勒公式

设 $f(x)$ 在点 x_0 处 n 阶可导, 则存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任意点 x, 有:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

当 $x_0=0$ 时的泰勒公式成为麦克劳林公式.

1. $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, 其中 ξ 介于 0 和 x 之间
2. $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

2.8.10 积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$$

2.9 考点 23 单调性与极值、最值 p91

2.10 考点 24 凹凸性与拐点 p99

2.11 考点 25 渐近线、曲率 p102

2.12 考点 26 函数图形的描绘 p105

2.13 考点 27 证明函数或常数不等式 p106

2.14 考点 28 用导数讨论方程的根 p109

2.14 考点 28 用导数讨论方程的根 P109

第三章　一元函数积分学

3.1　考点 29 原函数与不定积分的概念、积分公式 p114

3.1.1　原函数与不定积分的概念

1. 无界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内一定不存在定积分
2. 原函数可导，可知原函数必连续（$f(x)$ 未必连续）

3.1.2　不定积分的性质

1.

3.1.3　原函数存在定理

1. 如果 $f(x)$ 在区间 I 上连续，那么 $f(x)$ 在区间 I 上必有原函数
2. 如果 $f(x)$ 在区间 I 上有第一类间断点，那么 $f(x)$ 在区间 I 上必没有原函数
3. $f(x)$ 有第二类间断点（震荡间断点），但是 $f(x)$ 可能有原函数
4. <u>$f(x)$ 可积，即函数连续或者存在震荡间断点</u>
5. <u>$f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，至多有有限个间断点</u>

3.1.4　积分公式

- $\int x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C(a \neq -1)$
- $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1)$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + C$
- $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + C$
- $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + C$
- $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + C$

- $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$
- $\int \csc x \mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x| + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln|\frac{a+x}{a-x}| + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$

3.2 考点 30 凑微分法求不定积分 p117

1. 常用的凑微分公式

   (a) $\sin 2xdx = 2\sin x\cos xdx = \begin{cases} 2\sin xd(\sin x) = d(\sin^2 x) \\ -2\cos xd(\cos x) = -d(\cos^2 x) \end{cases}$

   (b) $\cos 2xdx = \frac{1}{2}d(\sin 2x) = d(\cos x\sin x)$

   (c) $(1 \pm \frac{1}{x^2})dx = d(x \mp \frac{1}{x})$

   (d) $(1+\ln x)dx = d(x\ln x)$

2. 对被积函数复杂部分，先求导，再试着凑微分

3.2.1 观察法凑微分

3.2.2 分子分母同乘（除）一个因子，再凑微分

3.2.3 先求导，再凑微分

3.2.4 三角函数の凑微分

对于 $\int f(\sin x, \cos x)dx$ 型的积分

1. 若 $f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x)$，一般凑 $d(\cos x)$
2. 若 $f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x)$，一般凑 $d(\sin x)$
3. 若 $f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x)$，一般凑 $d(\tan x)$

重要公式

$$\int \frac{3\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x}dx = \int \frac{A(\sin x + 2\cos x)' + B(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x}dx$$

可以推广到 $\int \frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}dx$

3.3 考点 31 换元法求不定积分 p120

3.3.1 第一类换元法 (凑微分法)

若 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u)+C$, 且 $\varphi(x)$ 可导, 则:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x) = F(\varphi(x))+C$$

3.3.2 第二类换元法

设函数 $x=\varphi(t)$ 可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$, 又设 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t)+C$, 则:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi^{-1}(x))+C$$

三种常用的变量代换:

1. 被积函数中含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时, 令 $x=a\sin t$, 或者是 $x=a\cos t$
2. 被积函数中含有 $\sqrt{x^2+a^2}$ 时, 令 $x=a\tan t$
3. 被积函数中含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时, 令 $x=a\sec t$

3.3.3 根式代换

当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ 等时，一般可直接令 $\sqrt[n]{ax+b}=t$, $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$

3.3.4 指数代换

当被积函数含有 a^x, e^x 时，可考虑令 $a^x=t, e^x=t$

3.3.5 倒代换

当被积函数分母的幂次比分子的幂次高两次及以上时，可考虑作倒代换 $x=\frac{1}{t}$

3.4 考点 32 分部积分法求不定积分 p121

3.4.1 分部积分法

设 $u(x), v(x)$ 有连续一阶导数, 则:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

1. 分部积分法常常用于被积函数为**两类不同函数相乘**时的不定积分
2. 积分的难易程度: 若函数积分后会简单些则取作 v, 若函数微分后会简单些则取作 u,
   难易程度为 $\ln x, \arcsin x, \arctan x < P_n(x) < e^{kx}, \sin ax, \cos ax$, 越往左边越适合作为 u.
   (a) 被积函数是 $P_n(x)e^{kx}, P_n(x)\sin ax, P_n(x)\cos ax$ 等形式的时候, 一般来说选取 $u = P_n(x)$
   (b) 被积函数是 $e^{ax}\sin bx, e^{ax}\cos bx$ 等形式的时候, 一般来说选取两因子中的任意一个
   (c) 被积函数是 $P_n \ln x, P_n(x)\arcsin x, P_n(x)\arctan x$ 等形式的时候,
   一般来说选取 $u = \ln x, u = \arcsin x, u = \arctan x$

3.5　考点 33 有理函数的积分 p124

3.6　考点 34 定积分的定义及性质 p125

3.7　考点 35 定积分的计算方法及若干技巧 p132

3.8　考点 36 变限积分函数及其求导原理 p140

3.9　考点 37 变限积分函数的综合题 p145

3.10　考点 38 定积分不等式的证明 p150

3.11　考点 39 定积分与极限的综合题 p154

3.12　考点 40 反常积分 p157

3.13　考点 41 平面图形的面积 p161

3.14　考点 42 空间图形的体积 p165

3.15　考点 43 平面曲线的弧长 p168

3.16　考点 44 旋转曲面的侧面积 p169

3.17　考点 45 定积分的物理应用 p170

第四章　向量代数与空间解析几何

4.1　考点 46 向量及其运算 p173

4.2　考点 47 平面积空间直线 p175

4.3　考点 48 曲面及空间曲线 p180

4.3.1　质心公式

1. $\bar{x} = \dfrac{\int_a^b x\rho(x)ds}{\int_a^b \rho(x)ds}$
2. $\bar{y} = \dfrac{\int_a^b y\rho(x)ds}{\int_a^b \rho(x)ds}$

4.3.2　形心公式

1. $\bar{x} = \dfrac{\iint xdS}{S}$
2. $\bar{y} = \dfrac{\iint ydS}{S}$

第五章　多元函数微分学

第六章　多元函数积分学

6.1　考点 58 二重积分概念与几何意义 p217

6.2　考点 59 直角坐标计算二重积分 p221

6.3　考点 60 极坐标计算二重积分 p224

6.4　考点 61 换序及换系 p227

6.5　考点 62 需分区域计算的几种情况 p233

6.6　考点 63 先一后二法（投影法）与先二后一法（截面法）p236

6.7　考点 64 利用球面坐标计算三重积分 p240

6.7.1　球面坐标

与 z 轴的夹角为 φ（范围是 $0 \leq \varphi \leq \pi$），与 x 轴的夹角为 θ

$x = r\sin\varphi\cos\theta$

$y = r\sin\varphi\cos\theta$

$z = r\cos\varphi$

6.7.2　球面坐标下的三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \iiiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$$

记住 $\underline{\iiint_{\Omega:x^2+y^2+z^2\leq R}(x^2+y^2+z^2)dv = \dfrac{4\pi R^5}{5}}$

6.8 考点 65 三重积分的性质及换序 p241

6.9 考点 66 第一类（平面、空间）曲线积分 p242

6.10 考点 67 第二类平面曲线积分 p246

6.11 考点 68 第一类曲面积分 p253

6.12 考点 69 第二类曲面积分 p256

6.13 考点 70 第二类空间曲线积分的计算 p262

6.14 考点 71 多元函数积分学的应用及场论初步 p264

第七章　无穷级数

第八章　常微分方程

8.1　考点 83 微分方程的基本概念 p301

1. 微分方程的通解与特解

   不含任意常数的解称为特解

   含独立任意常数个数与微分方程阶数相同的解称为微分方程的通解

   阶数与个数相同

2. 线性与非线性微分方程

   看与 y 有关的次方是几次，若大于等于 2 次即为非线性

8.2　考点 84 一阶微分方程 p302

8.3　考点 85 二阶可降阶的微分方程 p307

8.4　考点 86 常系数线性微分方程及欧拉方程 p308

8.5　考点 87 已知方程的解反求方程及进一步研究方程的解 p312

8.6　考点 88 通过变形改造建立微分方程并求解 p318

8.7　考点 89 微分方程的应用 p323