Chapitre 7 :

Fonction dérivée : théorie et applications

1. Du nombre dérivé à la fonction dérivé

Dans un chapitre précédent nous avons défini (et étudié les conditions d'existences) le nombre dérivé, d'une fonction f en un point a, comme étant le coefficient directeur de la tangente à C_f en a. Ainsi, à condition d'existence :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Cette condition d'existence précédemment cité est ce que nous avons nommé : être dérivable en a.

Nous avons, ainsi, construit une fonction, la fonction que l'on appellera la fonction dérivée de f !

En effet, en notant f' cette fonction dérivée de f (qui se lit : « f prime »), ce que nous avons fait c'est d'associer à chaque valeur a (qui le permet) une valeur finie. En résumé, pour a tel que f est dérivable :

$$f' : a \mapsto f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur D_f et $a \in D_f$, que doivent vérifier a et f pour pouvoir dire que f est dérivable en a ?

Exemple 1 : Appliquons cette introduction sur un exemple, la fonction carré

Considérons $f : x \mapsto x^2$, qui est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, étudions la dérivabilité de f en a. Pour cela regardons :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a}$$

Comme $x \to a$ on peut alors supposer que $x - a \neq 0$ donc :

$$= \lim_{x \to a} x + a = 2a$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $2a < +\infty$ donc : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(a) = 2a$.

Voici ce que nous avons conclu du chapitre précédent.

Ce que nous venons de faire c'est associer à tout $a \in \mathbb{R}$ (car f est dérivable sur $\mathbb{R}$) une valeur, finie, que nous avons appelé $f'(a)$ égale dans ce cas à $2a$.

Tout ceci revient à définir une fonction, ici, sur $\mathbb{R}$ tel que : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f' : x \mapsto f'(x) = 2x$

Et dans ce chapitre, on dire que la fonction dérivée de la fonction carré est la fonction qui à x lui associe $2x$.

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur D_f, considérons $I \subset D_f$ une partie de D_f.

On dit que f est dérivable sur I si : pour tout $x \in I$, f est dérivable en x

Exemple 2 :

Par l'exemple précédent nous avons que la fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$

Remarque importante : Attention

Une fonction n'est pas obligatoirement dérivable en tout point de son ensemble de définition.

En effet nous avons que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 tout en étant définie en 0.

Exercice 2 : Pouvez-vous donner un autre exemple de fonction qui n'est pas dérivable sur son ensemble de définition ? Justifier, sans rigueur, la non-dérivabilité de cette fonction en ce point particulier.

Définition 2 : Soit f une fonction dérivable sur I une partie de D_f.

On appelle fonction dérivée de f sur I la fonction notée f' tel que : pour tout $x \in I$

$$\boldsymbol{f'} : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{f'}(\boldsymbol{x})$$

Où $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en x.

Exercice 3 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction inverse

2. Fonction dérivée des fonctions usuelles

Dans les exercices du chapitre précédent sur la dérivation nous avons déterminé la fonction dérivée de la plupart des fonctions usuelles, rappelons les dans un tableau qu'il sera impératif de connaître par cœur !

Famille	$f(x)$	Domaine de définition	$f'(x)$	Domaine de dérivabilité
Constante	k	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
Affine	$ax+b$	$\mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
Carré	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
Cubique	x^3	$\mathbb{R}$	$3x^2$	$\mathbb{R}$
Puissance ($n \in \mathbb{N}$)	x^n	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
Racine carrée	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
Inverse	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
Puissance inverse	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$\mathbb{R}^*$

Vous trouverez la preuve de chacune des fonctions dérivées usuelles à la fin du chapitre.

Exercice 3 : Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f : x \mapsto 1$
2. $f : x \mapsto 0$
3. $f : x \mapsto \pi$
4. $f : x \mapsto 2x+3$
5. $f : x \mapsto \frac{2(x+2)}{\pi}$
6. $f : x \mapsto x^5$
7. $f : x \mapsto x^{103}$
8. $f : x \mapsto x^{-2}$
9. $f : x \mapsto x^{-37}$
10. $f : x \mapsto \frac{1}{x^{14}}$

3. Règles de calcul des fonctions dérivées

Maintenant que nous connaissons les dérivées des fonctions usuelles, amusons-nous avec les opérations élémentaires.

Étant donné le caractère systématique de cette partie le choix a été fait, pour faciliter l'apprentissage de ne pas intégrer les preuves de chaque propriété. Vous pourrez tout de même les retrouver à la fin du chapitre.

a. Somme

Propriété 1 :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I, la fonction $f+g$ est dérivable sur I, et on a :

$$(f+g)' = f' + g'$$

Remarque :

L'égalité $(f+g)' = f' + g'$ est égalité de fonctions (sur I), donc nous sommes en train de dire que :

Pour tout $x \in I$,

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

C'est-à-dire,

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$$

Exemple 3 :

Soit $f : x \mapsto x^4 + 2x + 5$,

Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = g(x) + h(x)$ où $g : x \mapsto x^4$ et $h : x \mapsto 2x + 5$. Ainsi $f = g + h$ (égalité de fonctions)

g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$, comme fonctions polynomiales, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (g+h)'(x) = g'(x) + h'(x) = 4x^3 + 2$$

Exercice 4 : Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f : x \mapsto x^3 + \frac{x}{2} + 6$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$
3. $f : x \mapsto \sqrt{x} + 2x + x^7$

b. Produit par un réel

Propriété 2 :

Soient $k \in \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I, la fonction kf est dérivable sur I, et on a :

$$(kf)' = kf'$$

Exemple 4 :

Soit $f : x \mapsto \frac{5}{x}$,

Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = 5g(x)$ où $g : x \mapsto \frac{1}{x}$. Ainsi $f = 5g$

Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ tel que :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = (5g)'(x) = 5g'(x) = 5 \times -\frac{1}{x^2} = -\frac{5}{x^2}$$

Exercice 5 : Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f : x \mapsto 2\sqrt{x}$
2. $f : x \mapsto \pi x^{-5}$
3. $f : x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{3x^2}$
4. $f : x \mapsto \sqrt{2x}$
5. $f : x \mapsto \frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^7}$
6. $f : x \mapsto 2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$

c. Produit

Propriété 3 :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I, la fonction uv est dérivable sur I, et on a :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Remarque : À partir d'ici les formules se compliquent… Ici **nous n'avons pas** $(fg)' = f'g'$

Pour s'en convaincre, voir l'exemple : $f: x \mapsto f(x)$ où f est une fonction quelconque qui est dérivable sur $\mathbb{R}$

Comme on peut décomposer $f = 1 \times f = hf$ où $h: x \mapsto 1$ et que l'on a $h'(x) = 0$ alors si la formule $(uv)' = u'v'$ était vraie on aura alors : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0 \times f'(x) = 0$.

En conclusion toutes les fonctions auraient comme fonction dérivée la fonction nulle (le chapitre devient trivialement inutile)

Exemple 5 :

Soit $f: x \mapsto x\sqrt{x}$,

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = g(x)h(x)$ où $g: x \mapsto x$ et $h: x \mapsto \sqrt{x}$. Ainsi $f = gh$

Comme g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ tel que :

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = (gh)'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Exercice 6 : Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f: x \mapsto (x^5 + 2x^2 + 3)(x^3 + 2)$
2. $f: x \mapsto \sqrt{\frac{5x}{9}} \times 2x^{-2}$
3. $f: x \mapsto 2\sqrt{x}\left(\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{5}\right)$

d. Quotient

Propriété 4 :

Soit f une fonction dérivable sur I tel que pour tout $x \in I$: $f(x) \neq 0$, la fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I, et on a :

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

Exemple 6 :

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$,

Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = \frac{1}{g(x)}$ où $g : x \mapsto x^2 + 1$. Ainsi $f = \frac{1}{g}$

Comme $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Exercice 7 : Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{3x^2}$
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x^3+x^4}$
3. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{2}{x}}$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x^{-4}-2x^3}$
5. $f : x \mapsto \frac{x-4}{x-5}$

Propriété 5 : Cas général

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I tel que pour tout $x \in I$: $g(x) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I, et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Exemple 7 :

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2+1}$,

Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut décomposer $f(x)$ de la façon suivante : $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ où $g : x \mapsto x^2 + 1$ et $h : x \mapsto x^3$.

Ainsi $f = \frac{h}{g}$, comme $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2}$$

Exercice 8 : Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

1. $f : x \mapsto \frac{x-4}{x-5}$
2. $f : x \mapsto \frac{-3x+1}{2x+5}$
3. $f : x \mapsto \frac{(-3x+1)(x-4)}{2x+5}$
4. $f : x \mapsto \frac{-3x+1}{(2x+5)(x-4)}$
5. $f : x \mapsto \frac{\frac{1}{x}+3}{2-\frac{3}{x}}$

e. Composée

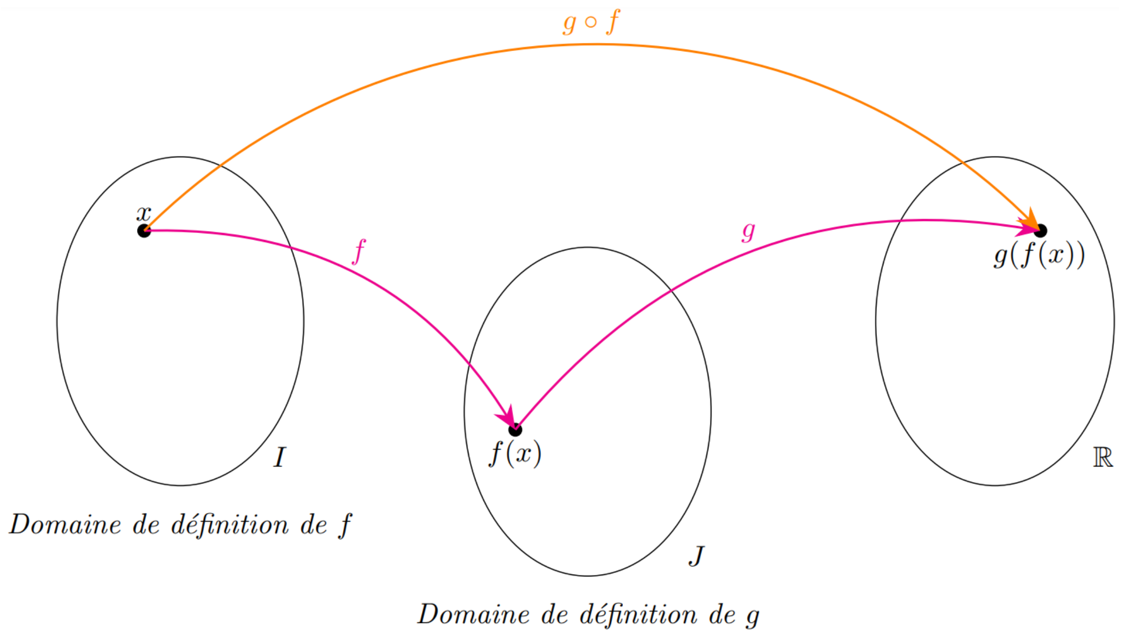
Définition 3 : Composée de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions tel que $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ où I et J sont deux parties de $\mathbb{R}$.

On définit la composée de f par g, que l'on notera $g \circ f$, de la façon suivante :

$$g \circ f : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

Prenons le temps de visualiser la situation :



Nous avons l'ensemble de définition de la seconde fonction qui doit être l'ensemble des images du premier.

Exemple 8 :

Soient $f : x \mapsto 2x + 1$ et $g : x \mapsto 5x - 3$,

On a bien $D_g = \mathbb{R} = f(D_f)$ étant donné que : $f : D_f \to f(D_f) = \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Alors $g \circ f$ est bien définie, et on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 5f(x) - 3 = 5(2x + 1) - 3 = 10x + 2$$

On a également, comme $D_f = D_g = \mathbb{R}$, que $f \circ g$ est définie, et on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 1 = 2(5x - 3) + 1 = 10x - 5$$

On remarque ainsi que $g \circ f \neq f \circ g$, l'opération de composition n'est pas commutative sur les fonctions.

Exercice 9 : Donner l'expression de $g \circ f$ et $f \circ g$ dans chacun des cas suivants :

1. $f : x \mapsto 2x + 3$ et $g \mapsto \frac{1}{x}$
2. $f : x \mapsto 5(x + 3)$ et $g : x \mapsto -2x^2 + 3x$
3. $f : x \mapsto x^2 + 3$ et $g : x \mapsto \frac{x^2}{x+4}$
4. $f : x \mapsto 2\sqrt{x}$ et $g : \mapsto x^2 + 1$

Exercice 10 : Pour étudier le domaine de définition de la composée de deux fonctions, il faut vérifier que les ensembles soient compatibles. En particulier, si f est une fonction dont le domaine de définition est noté D_f alors :

1. La fonction $\frac{1}{f} : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est définie sur...
2. La fonction $\sqrt{f} : x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est définie sur...

Propriété 6 : Dérivée d'une fonction composée

Soient f et g deux fonctions tel que $f : I \to J$ est dérivable et $g : J \to \mathbb{R}$ est dérivable où I et J sont deux parties de $\mathbb{R}$.

Alors $g \circ f$ est dérivable sur I tel que : pour tout $x \in I$

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'\big(f(x)\big)$$

Moyen mnémotechnique : La dérivée d'une composée $(g \circ f)$ est la dérivée de l'intérieur (f) fois la dérivée du tout (g) appliqué en l'intérieur (f)

Exemple 9 :

Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ et $g : x \mapsto x^4$,

f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ $g \circ f : \mathbb{R} \to_f \mathbb{R} \to_g \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = f(x)^4 = (3x^2 - 2x + 1)^4$$

En tant que telle, cette fonction n'est pas évidente à dériver… il faudrait développer puis dériver terme à terme. Mais avec la formule des dérivées composées tout se simplifie : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(g \circ f)'(x) = f'(x)g'\big(f(x)\big) = (6x - 2) \times 4(3x^2 - 2x + 1)^3 = 8(3x - 1)(3x^2 - 2x + 1)^3$$

Et voilà le tour est joué !

Exercice 11 : Donner l'expression de $f'(x)$ pour chacune des fonctions f suivantes :

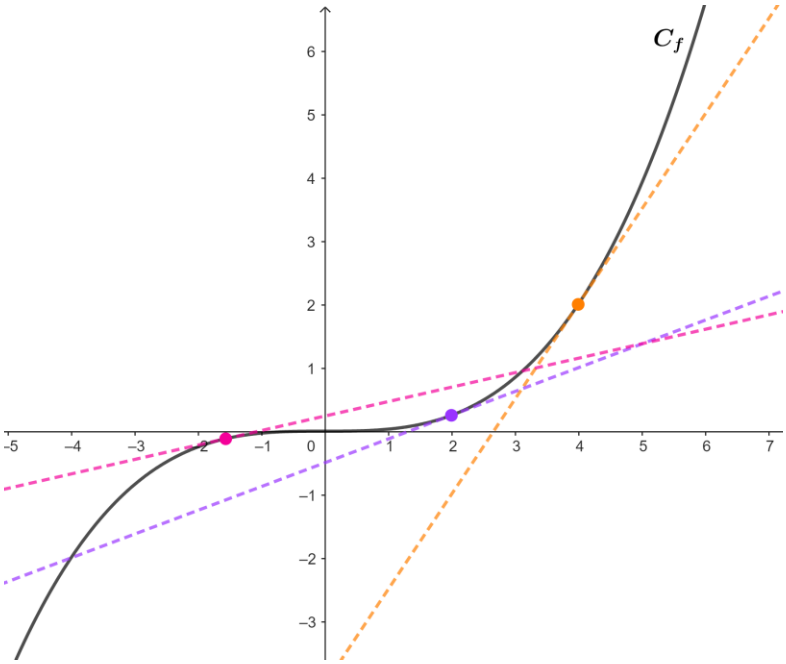
1. $f : x \mapsto \sqrt{4x^2 + 3x + 1}$
2. $f : x \mapsto 7\left(\frac{1}{x} + 2x\right)^2$
3. $f : x \mapsto \pi(x^{-5} + 3x^2)^6$
4. $f : x \mapsto (x^2 - 3x + 7)^{-2}$
5. $f : x \mapsto \sqrt{\frac{3x^2 - x}{x^5 - x^2}}$

Exercice 12 : Pour étudier le domaine de dérivabilité de la composée de deux fonctions, il faut vérifier que les ensembles soient compatibles. En particulier, si f est une fonction dont le domaine dérivable sur D_f' alors la fonction $\sqrt{f}: x \mapsto \sqrt{f(x)}$ est définie sur :

4. Applications de la fonction dérivée

a. Lien entre sens de variation d'une fonction et sa fonction dérivée

Considérons une fonction croissante, donc avec un graphe qui « monte ». Traçons également trois tangentes à C_f en trois points distincts.



On remarque que la tangente en tout point « monte », ce qui veut dire que le coefficient directeur de la tangente en tout point est positif.

Que l'on peut traduire en : le nombre dérivé en tout point est positif.

On conjecture que : si f est croissante alors sa fonction dérivée est positive.

On fait ainsi le lien entre sens de variation d'une fonction et signe de sa dérivée.

Cherchons à gagner en rigueur, ici ça ne mange pas de pain…

Soit f une fonction croissante sur I et dérivable sur I, une partie de $\mathbb{R}$. Considérons $a \in I$

On a alors pour tout $x \in I$ tel que $a < x$ que :

$$f(a) \leq f(x)$$

Ainsi $f(x) - f(a) \geq 0$ et $x - a > 0$ donc : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$.

On a pour tout $x > a$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$, donc pour des valeurs de x arbitrairement proche de a, de sorte que $x > a$ il reste toujours que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Il est donc clair que : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ i.e $f'(a) \geq 0$.

En bon mathématicien, on pourrait chercher à voir si la réciproque, c'est-à-dire : si la fonction dérivée est positive alors la fonction est croissante, est vraie ?

Malheureusement avec le seul programme de première il est impossible de démontrer la réciproque (il nous faut le théorème des accroissements finis).

On admettra tout même la réciproque pour avoir les équivalences suivantes :

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable sur I :

(i) f est croissante sur I si, et seulement si, $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$

(ii) f est strictement croissante sur I si, et seulement si, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$

(iii) f est décroissante sur I si, et seulement si, $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$

(iv) f est strictement décroissante sur I si, et seulement si, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$

(v) f est constante sur I si, et seulement si, $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Voici un théorème majeur de vos années de lycée en mathématiques. Jusqu'ici en seconde vous aviez deux grandes études :

- L'étude de signes d'une fonction
- L'étude du sens de variations d'une fonction

Ce théorème permet de faire le pont entre ces deux études ! Pour étudier les variations d'une fonction, il faut étudier le signe de sa fonction dérivée.

Et ça simplifie considérablement les choses, car l'étude de signe d'une fonction est, généralement, plus aisée que l'étude du sens de variations.

Exemple 10 : Étude du sens de variation d'une fonction que vous n'étiez jusqu'ici pas capable d'étudier

Soit $f : x \mapsto 2x^3 - x^2 - 5x + 9$,

f est défini sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale, on a alors : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6x^2 - 2x - 5$$

Étudions le signe de f' :

Comme fonction polynomiale de degré deux, déterminons son discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 6 \times (-5)$$

$$= 4 + 120 = 124$$

Ainsi les deux racines de f' sont : $x_1 = \frac{1-\sqrt{31}}{6}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{31}}{6}$

On a alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On combinera le tableau de signes de la dérivée et le tableau de variations de notre fonction

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 13 : Étudier le sens de variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{4x+5}{3x-4}$

b. Extrema

En reprenant le tableau de signes précédent, on remarque si la dérivée s'annule nous avons évidemment une tangente horizontale en ce point mais si en plus nous avons un changement de signe de la dérivée alors un extremum local.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2 : Soit f une fonction dérivable sur $I =]\alpha, \beta[$, un intervalle ouvert où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si f' s'annule et change de signe en a alors f admet un extremum local en a.

Remarque : Et la réciproque ?

La réciproque de ce théorème est fausse, pour vous en convaincre considérer la fonction $f: x \mapsto x$ sur $[0,1]$ elle admet un maximum local en $x = 1$ et un minimum local en $x = 0$ pourtant $f'(0) = f'(1) = 1 \neq 0$.

Ainsi ceci est une condition suffisante pour qu'une fonction dérivable admette un extremum local

Remarque : Et si on fait varier les conditions de ce théorème ?

Si on omet l'hypothèse de changement de signe de la dérivée, le théorème reste-t-il vrai ?

Considérer la fonction cube sur $\mathbb{R}$.

c. Approximation d'une fonction

Dans le premier chapitre sur le nombre dérivé, nous avons introduit la tangente à une courbe ou à un cercle comme étant une bonne approximation au voisinage du point de tangence de notre courbe. En d'autres termes pour des valeurs proche de celle du point de tangence notre fonction peut être approximé par une fonction affine (et tant donné que sa courbe peut être confondu à une droite).

Formalisons cela !

Considérons une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et $a \in I$

En revenant à la définition de la dérivée de f en a on a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Notons $\epsilon(h)$ la différence entre $f'(a)$ et $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, on a alors :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) - \epsilon(h)$$

où :

$$\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = \lim_{h \to 0} f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 0$$

Donc :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) - h\epsilon(h)$$

Comme on a $\lim_{h \to 0} hf'(a) = 0$ et $\lim_{h \to 0} h\epsilon(h) = 0$, on peut alors affirmer que si h est proche de 0 $f(a+h)$ est approché par la quantité $f(a) + hf'(a)$. Pour des h proche de 0 on a :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Propriété 7 : Soient f une fonction dérivable sur I et $a \in I$,

Pour des valeurs de h suffisamment proche de 0 on peut considérer que $f(a) + hf'(a)$ est une bonne approximation de $f(a+h)$.

C'est l'approximation affine de f en a ou alors le développement limité d'ordre 1 de f en a.

Exemple 11 : Une valeur approchée de $1{,}0000007^2$

Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2$,

On a $1{,}0000007 = 1 + 0{,}0000007$, posons alors $a = 1$ et $h = 0{,}0000007$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que : $f'(x) = 2x$, ainsi en utilisant **le développement limité d'ordre 1 de f en 1** on a :

$$f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$$

Ici :

$$(1 + 0{,}0000007)^2 \simeq 1^2 + 0{,}0000007 * 2 = 1 + {,}0000014 = 1{,}0000014$$

Ainsi : $1{,}0000007^2 \simeq 1{,}0000014$.

d. Résolution d'équation

i. Théorème des valeurs intermédiaires

Voyons un théorème aussi utile qu'intuitif :

Théorème 3 : Théorème des valeurs intermédiaire (TVI version faible)

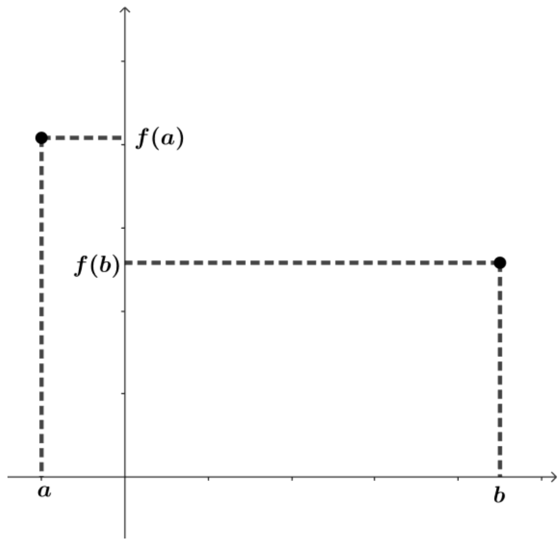
Soit f une fonction dérivable sur intervalle $[a, b]$,

Alors pour tout L compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = L$.

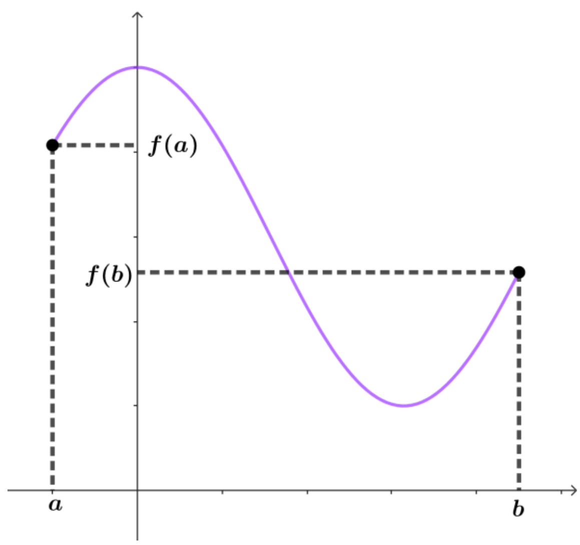
Autrement dit, la fonction f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Représentons ce théorème pour voir ce qu'il affirme :

Considérons un intervalle $[a, b]$ (et choisissons la valeur de l'image de chacune des deux bornes)



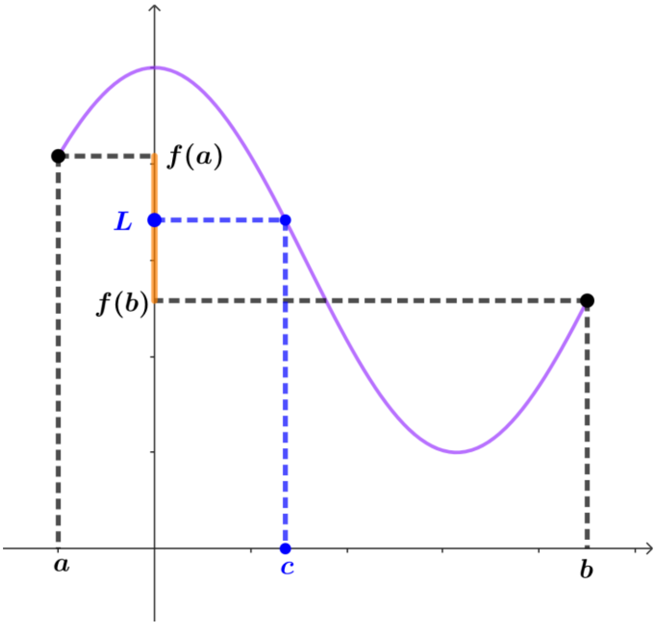
Traçons le graphe d'une fonction dérivable, on trace alors une courbe continue (suffit) sans « angle » (pour avoir la dérivabilité)



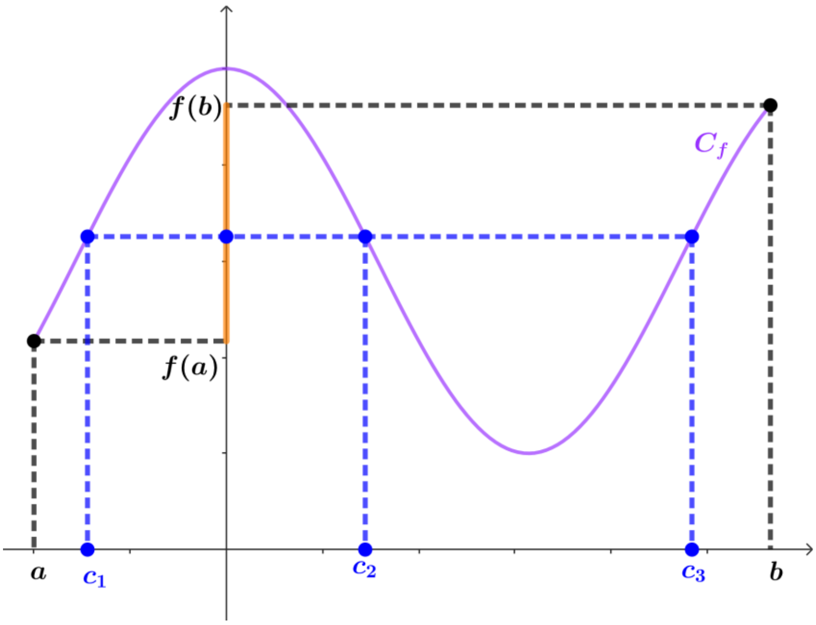
Ce que nous affirme le TVI c'est que pour toute valeur L compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (ici représenté en orange sur le graphique) il existe $c \in [a, b]$ tel que $L = f(c)$.

Pour tout L compris entre $f(a)$ et $f(b)$, L possède un antécédent sur $[a, b]$ par f.

Pour tout L compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = L$ possède au moins une solution sur $[a, b]$.



Attention, la solution n'est pas nécessairement unique !



Exercice 14 * : D'où vient le souci pour l'unicité de la solution pour l'équation $f(x) = L$? Que doit-on ajouter pour gagner l'unicité ?

On a alors :

Théorème 4 : Corollaire des valeurs intermédiaire (version faible) (ou Théorème de la bijection)

Soit f une fonction dérivable sur intervalle $[a, b]$,

Si f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors pour tout L compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = L$.

Autrement dit, la fonction f prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, une unique fois.

Remarque :

> C'est un théorème fondamental en mathématiques car il nous assure l'existence de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.
>
> Étant donné la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ on sait qu'elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$ tel que l'ensemble image sur $\mathbb{R}_+$ est également $\mathbb{R}_+$. Ainsi pour tout $y \in \mathbb{R}_+$ il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $y = x^2$, on associe à $y \in \mathbb{R}_+$ un unique $x \in \mathbb{R}_+$. De cette manière on défini la fonction racine carrée.

Un cas particulier très utile est le théorème de Bolzano :

Théorème 5 : (de Bolzano)

Soit f une fonction dérivable sur intervalle $[a, b]$,

Si $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Remarque :

> En effet $f(a)f(b) \leq 0$ signifie que 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Une jolie application de ce théorème est l'existence d'une racine pour tout polynôme de degré impair :

Théorème 6 :

Soit P une fonction polynomiale de degré impair, alors P admet une racine réelle.

Preuve :

> Si on admet que l'on sait montrer que $\lim_{x \to +\infty} P(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\lim_{x \to +\infty} P(x)$.
>
> Vous pouvez l'admettre comme boîte noire, promis ce n'est pas compliqué (mais ce n'est pas le sujet de ce chapitre). Vous pouvez même vous en persuader sans grande difficulté.
>
> On a alors que l'ensemble des images de P est $\mathbb{R}$, ainsi par le théorème de Bolzano il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :
>
> $$P(c) = 0$$

Une autre application très utile est pour la recherche de point fixe.

Théorème 7 :

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$,

Si $f(a) - a$ et $f(b) - b$ sont de signes contraires on alors que la fonction f admet un point fixe, c'est-à-dire il existe, au moins un, $c \in [a, b]$ tel $f(c) = c$

Preuve :

Et dans le cas général pour la résolution d'équation :

Théorème 8 :

Soient f et g deux fonctions dérivable sur $[a, b]$,

Si $f(a) - g(a)$ et $f(b) - g(b)$ sont de signes contraires on alors qu'il existe, au moins un, $c \in [a, b]$ tel

$$f(c) = g(c)$$

Preuve :

Ici vous voyez l'un des plus fameux théorèmes dits d'existence, c'est-à-dire un théorème qui affirme l'existence d'un objet mathématique sans jamais l'exhiber ! Il faudra faire appel aux mathématiques constructive pour résoudre ce souci, comme l'analyse numérique avec la méthode Newton qui est un algorithme pour trouver une approximation précise d'un zéro d'une fonction.

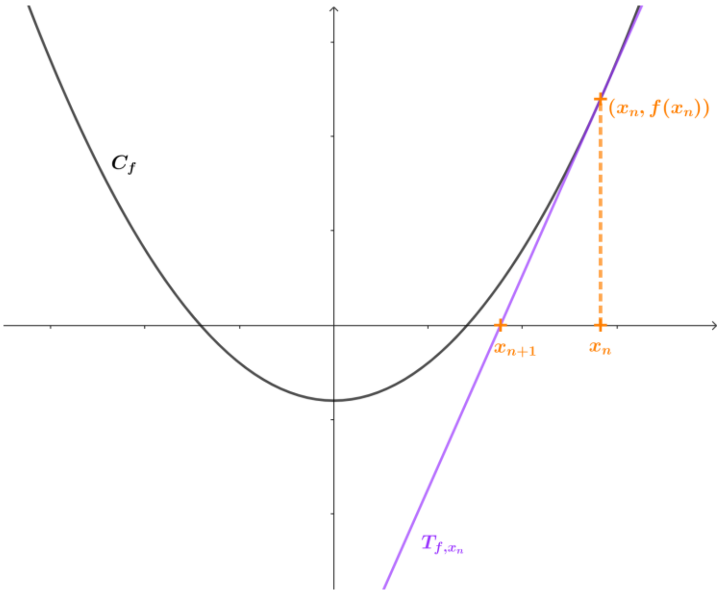
ii. Bonus : Méthode de Newton

La méthode de Newton (ou méthode de Newton-Raphson) est une méthode itérative permettant d’approcher un zéro d’une fonction dérivable. Elle est basée sur l'utilisation des tangentes pour trouver une meilleure approximation.

Explicitons, l’idée principale de cette méthode :

Soit f une fonction dérivable définie sur un intervalle I.

Si x_n est une approximation d'un zéro x^* de f, l'approximation suivante x_{n+1} est obtenue en utilisant l'intersection de la tangente à f en x_n avec l'axe des abscisses.



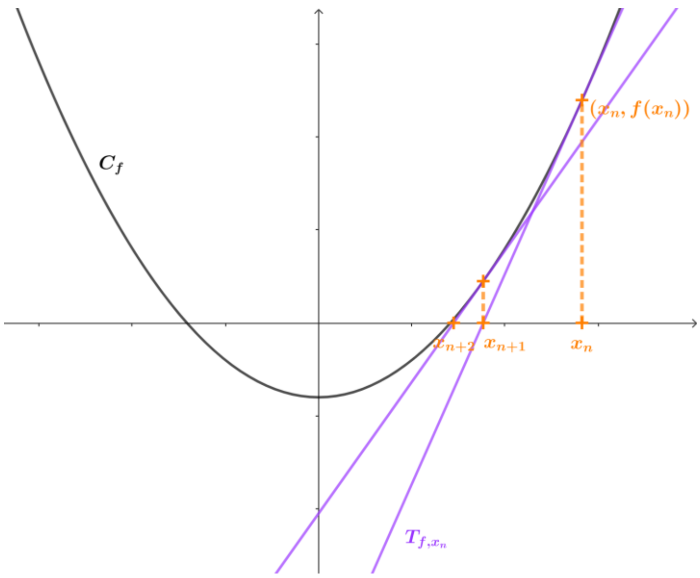
L'équation de la tangente à f en x_n est donnée par :

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

En posant $y = 0$, on obtient :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} f'(x_n)$$

On répète :



On pose alors la suite, définie par : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

L'algorithme de la méthode de Newton est le suivant :

Algorithme :

1. Choix du x_0 : Prendre une valeur initiale x_0 proche de la solution recherchée.

2. Application de la formule : Calculer successivement $x_1, x_2, \ldots$ à l'aide de la relation $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

3. Critère d'arrêt : Arrêter les itérations lorsque la différence $|x_{n+1} - x_n|$ devient inférieure à une tolérance fixée ou lorsque $|f(x_n)|$ est suffisament petit.

La méthode de Newton demande certaines conditions d'applications :

Conditions d'applications :

- La fonction f doit être dérivable sur l'intervalle considéré.
- La dérivée $f'(x)$ ne doit pas être nulle dans le voisinage du zéro cherché.
- Le point de départ x_0 doit être choisi suffisamment proche d'un zéro de f.

Comme toute méthode, la méthode de Newton a ses avantages et ses inconvénients :

Avantages :

- Convergence rapide si x_0 est bien choisi : à chaque étape, le nombre de décimales exactes doubles.
- Simple à implémenter

Limites :

- Peut échouer si $f'(x) = 0$ à un point d'itération.
- La convergence dépend du choix initial x_0.

Exemple 12 : Application la méthode de Newton à la recherche d'une racine de $x^2 - 2 = 0$

Posons $f : x \mapsto x^2 - 2$, on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2x$.

On sait localiser l'une des deux racines, ici on va chercher à approximer la racine strictement positive. Donc on va considérer notre fonction f sur $]0; +\infty[$ de telle sorte que $f'(x) \neq 0$ sur cet intervalle.

On pose $x_0 = 2$, on a alors :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$= 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

En itérant une nouvelle fois on obtient :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{f'\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4\times 3} = \frac{17}{12} \simeq 1{,}4166$$

Puis :

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$= \frac{17}{12} - \frac{f\left(\frac{17}{12}\right)}{f'\left(\frac{17}{12}\right)} = \frac{17}{12} - \frac{\frac{1}{144}}{\frac{17}{6}} = \frac{577}{408} \simeq 1{,}414214$$

Après trois itérations nous avons obtenu cinq décimales exactes !

5. Quelques preuves du chapitre

On essayera d'être le plus rigoureux possible dans les preuves qui vont suivre malgré l'absence de certaines notions fondamentales…

Preuve (Propriété 1) : Soient f et g deux fonctions dérivables sur I, et $a \in I$,

on a alors : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) < +\infty$ et $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) < +\infty$

Déterminons :

$$\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-\big(f(a)+g(a)\big)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= f'(a) + g'(a) < +\infty$$

Ainsi, pour tout $a \in I$ on a $f+g$ est dérivable en a et on a : $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

□

Preuve (Propriété 2) : Soient f une fonction dérivable sur I, $a \in I$ et $k \in \mathbb{R}$,

on a alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) < +\infty$

Déterminons :

$$\lim_{x\to a} \frac{kf(x)-kf(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} k\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = kf'(a) < +\infty$$

Ainsi, pour tout $a \in I$ on a kf est dérivable en a et on a $(kf)'(a) = kf'(a)$

□

Preuve (Propriété 3) : Soient f et g deux fonctions dérivables sur I et $a \in I$,

on a alors : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) < +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) < +\infty$

Déterminons :

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$$

Ici il faut remarquer que :

$$\frac{g(x)\big(f(x) - f(a)\big) + f(a)\big(g(x) - g(a)\big)}{x - a} = \frac{g(x)f(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$$
$$= \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$$

Donc :

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)\big(f(x) - f(a)\big) + f(a)\big(g(x) - g(a)\big)}{x - a}$$
$$= \lim_{x \to a} g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Nous allons supposer que pour g dérivable en a on a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$, ici nous avons besoin d'une notion encore inconnue en première qui est la notion de continuité d'une fonction. Dans le cas d'une fonction f continue en a nous avons : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ici nous retiendrons que la dérivabilité de f en a implique la continuité de f en a donc aucun problème dans notre cas.

Ainsi :

$$\lim_{x \to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = g(a)f'(a) + f(a)g'(a) < +\infty$$

Ainsi, pour tout $a \in I$ on a fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

□

Preuve (Propriété 4) : Soient f une fonction dérivable sur I tel que tout $x \in I$: $f(x) \neq 0$ et $a \in I$:

on a alors : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) < +\infty$

Déterminons :

$$\lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)(x - a)}$$
$$= \lim_{x \to a} -\frac{1}{f(x)f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

De la même manière que dans la dernière preuve, comme f est dérivable en a et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ alors $\lim\limits_{x} \frac{1}{f(x)f(a)} = \frac{1}{f(a)^2}$

Donc :

$$\lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x-a} = -\frac{1}{f(a)^2} f'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2} < +\infty$$

Ainsi, pour tout $a \in I$ on a $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$

□

Preuve (Propriété 5) : Soient f et g deux fonctions dérivable sur I tel que tout $x \in I$: $g(x) \neq 0$ et $a \in I$:

on a alors : $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$, ainsi d'après la propriété 3 nous avons : $\left(f \times \frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} + f \times \left(\frac{1}{g}\right)'$

De plus d'après la propriété 4 nous avons : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

D'où :

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} \\ &= \frac{f'g - fg'}{g^2}\end{aligned}$$

□

Preuve (Propriété 6) : Soient f et g deux fonctions tels que $f: I \to J$ et $g: J \to \mathbb{R}$ dérivable sur leur intervalle respectif et $a \in I$

On a alors : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) < +\infty$ et $f(a) \in J$ alors $\lim\limits_{y \to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} = g'(f(a)) < +\infty$

Déterminons :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{aligned}$$

De la même manière comme f est dérivable en a on a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ donc :

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g'(f(a))$$

Ainsi :

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x-a} = g'(f(a))f'(a)$$

Ainsi, pour tout $a \in I$ on a $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$

□