Calcul numérique et littéral

I) Fractions (propriétés) : penser à simplifier tous les résultats trouvés

- **Fractions égales :**

Quels que soient les nombres réels a, b et k (avec b ≠ 0 et k ≠ 0)

$$\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

Remarque : $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

- **Somme de fractions :**

Quels que soient les nombres a, b et d avec d ≠ 0 :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$$

On peut ajouter des fractions quand elles ont le même dénominateur. Dans ce cas, on ajoute les numérateurs et on garde le même dénominateur.

⚠ *Dans le cas où les dénominateurs sont différents nous ne pouvons pas faire la somme des deux fractions comme dans le cas précédent, il faut d'abord mettre les deux fractions au même dénominateur.*

- **Produit de fractions :**

Quels que soient les nombres a, b, c et d avec b ≠ 0, c ≠ 0 et d ≠ 0 :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

On multiplie des fractions en multipliant leurs numérateurs entre eux et leurs dénominateurs entre eux.

- **Inverse d'un nombre réel non nul :**

Quels que soient les nombres a et b avec a ≠ 0 et b ≠ 0 :

L'inverse de a est $\frac{1}{a}$ et l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

- **Quotient de fractions :**

Quels que soient les nombres a, b, c et d avec b ≠ 0, c ≠ 0 et d ≠ 0 :

$$\frac{a}{\frac{c}{d}} = a \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b \times c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

II) Puissances :

Définition : **Soit un nombre réel a et un entier naturel n, on pose**

$a^1 = a$ et pour $n \geq 2$: a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Pour $a \neq 0$ et pour tout n entier naturel : $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Propriétés : ***Quels que soient les nombres réels a et b non nuls et les entiers relatifs m et n,***

- ***Produit de puissances :*** $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- ***Quotient de puissances :*** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- ***Puissance de puissance :*** $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$
- ***Puissance d'un produit :*** $(a \times b)^n = a^n \times b^n = a^n b^n$
- ***Puissance d'un quotient :*** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Puissances de 10 :

Un nombre est écrit en notation scientifique quand il est sous la forme :

$a \times 10^n$ *où* a *est un nombre décimal tel que* $1 \leq a < 10$ *et* n *est un nombre entier.*

10^n	Préfixe français	Symbole	Nombre décimal	Désignation
10^{12}	téra	T	1 000 000 000 000	Billion
10^9	giga	G	1 000 000 000	Milliard
10^6	méga	M	1 000 000	Million
10^3	kilo	k	1 000	Millier
10^2	hecto	h	100	Centaine
10^1	déca	da	10	Dizaine
10^0	(aucun)	(aucun)	1	Unité
10^{-1}	déci	d	0,1	Dixième
10^{-2}	centi	c	0,01	Centième
10^{-3}	milli	m	0,001	Millième
10^{-6}	micro	µ	0,000 001	Millionième
10^{-9}	nano	n	0,000 000 001	Milliardième
10^{-12}	pico	p	0,000 000 000 001	Billionième

Définition : *Pour a un nombre réel positif.*

*La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est égal à a.*

Exemples :

- $\sqrt{9}$ est le nombre positif dont le carré est égal à 9 donc $\sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel qui élevé au carré est égal à 2, $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

Règles : *Pour a et b deux nombres réel positifs*

• $\sqrt{ab} = \sqrt{\boldsymbol{a}} \times \sqrt{\boldsymbol{b}}$

• *Si* $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

III) Développement :

Définition : Développer un produit, c'est transformer un produit en une somme .

Pour factoriser une expression, on utilise aussi la distributivité et les identités remarquables mais dans l'autre sens.

Propriétés :

Quels que soient les nombres réels a, b, c, d et k :

Distributivité de la multiplication sur l'addition (ou soustraction)

$$k(a+b) = k \times a + k \times b = ka + kb$$

$$(a+b)(c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d = ac + ad + bc + bd$$

Identités remarquables

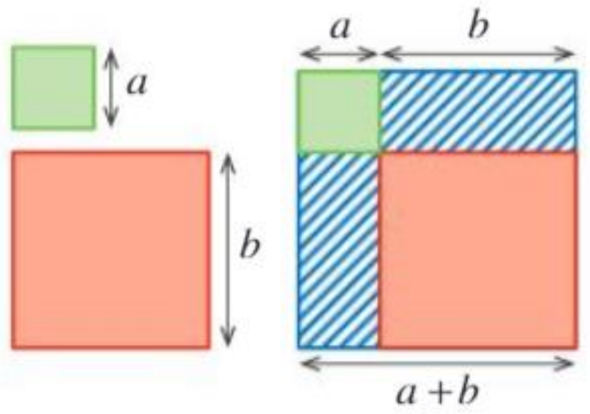
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Démonstration à connaître :

On utilise la géométrie pour tous réels a et b strictement positifs.



On considère 3 carrés : l'un de côté a, l'autre de côté b et le troisième de côté $(a+b)$.

On s'intéresse à l'aire de ces carrés et on pave le troisième carré avec les deux premiers carrés comme dessiné ci-dessus, on constate alors qu'il reste deux rectangles de mêmes dimensions et d'aire ab, donc on obtient :

$$A_{total} = A_1 + A_2 + 2 \times A_{rectangle}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Exemples :

$2a^2 - 3(a-5) + (3a-1)^2 = 2a^2 - 3\times a - 3\times(-5) + (3a)^2 - 2\times 3a\times 1 + (-1)^2$

$= 2a^2 - 3a + 15 + 3^2\times a^2 - 6a + 1$

$= 2a^2 + 9a^2 - 3a - 6a + 15 + 1$

$= \boxed{11a^2 - 9a + 16}$

IV) Factorisation :

Définition : **Factoriser une somme, c'est** ***transformer une somme en un produit***

Propriétés :

Quels que soient les nombres réels a, b et k :

On reconnaît un facteur commun :

$$ka + kb = k(a+b)$$

On reconnaît une identité remarquable :

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Exemples :

$9a^3 - 12a^2 + 4a = 9a^2\times a - 12a\times a + 4\times a$

$= a(9a^2 - 12a + 4)$

$= a(\ 3^2\times a^2 - 2\times 3a\times 2 + 2^2)$

$= a\ (\ (3a)^2 - 2\times 3a\times 2 + 2^2)$

$= \boxed{a(3a-2)^2}$

Conclusion :

.........Développer.............

$$k(a+b) \rightleftarrows ka + kb$$

............Factoriser............

V) Équations produit

Propriété : Un **produit de facteurs** est **nul** si et seulement si l'un des deux facteurs est nul

Exemples :

- Résoudre $(3x + 5)(6 - 2x) = 0$

$$\begin{aligned}(3x + 5)(6 - 2x) = 0 &\Leftrightarrow 3x + 5 = 0 \ ou \ 6 - 2x = 0\\ &\Leftrightarrow 3x = -5 \ ou \ -2x = -6\\ &\Leftrightarrow x = -\tfrac{5}{3} \quad ou \quad x = \tfrac{-6}{-2}\\ &\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3} \ \ ou \ \ x = 3\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{-\frac{5}{3}\,;3\right\}}$

- Résoudre $4x^2 - 9 = 0$

$$\begin{aligned}4x^2 - 9 = 0 &\Leftrightarrow (2x - 3)(2x + 3) = 0\\ &\Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \quad ou \quad 2x + 3 = 0\\ &\Leftrightarrow 2x = 3 \quad ou \quad 2x = -3\\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \ \ ou \ \ x = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\,;-\frac{3}{2}\right\}}$

Remarque : On utilise la factorisation pour résoudre des équations