Les ensembles de nombres : définitions

I) Les entiers naturels :

Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif.

L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4...\}$. Le $\mathbb{N}$ vient de l'italien "Naturale"

Exemples : $4 \in \mathbb{N}$; $-2 \notin \mathbb{N}$

II) Les entiers relatifs :

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.

L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{...-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3...\}$. Le $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand "Zahl"

Exemples : $-2 \in \mathbb{Z}$; $5 \in \mathbb{Z}$; $0{,}33 \notin \mathbb{Z}$

III) Les nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre de la forme $\frac{a}{10^p}$, où a est un entier et p un entier naturel. Il s'écrit sous forme décimale avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$. Le $\mathbb{D}$ vient du français "Décimale"

Exemples : $0{,}56 \in \mathbb{D}$; $3 \in \mathbb{D}$; $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ mais $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$ car $\frac{3}{4} = 0{,}75$

Preuve : Prouvons que $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$, i.e (c'est-à-dire) que le nombre $\frac{1}{3}$ ne s'écrit pas sous la forme $\frac{a}{10^p}$ où a est un entier et p un entier naturel.

Pour prouver cela nous allons faire une preuve par l'absurde, i.e que nous allons supposer le résultat vrai et aboutir à une absurdité. Ce qui va vous vouloir dire que ce que l'on a supposé vrai au départ est faux.

Ici nous allons supposer que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$.

Ainsi on peut écrire $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

On a alors $10^p = 3a$ ce qui veut dire que 10^p est divisible par 3 ce qui est **ABSURDE** car la somme des chiffres composant 10^p est 1 qui n'est pas divisible par 3 donc 10^p n'est pas divisible par 3 non plus.

Nous avons abouti à une absurdité ce qui nous permet de conclure que l'hypothèse $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$ est fausse.

D'où $\boxed{\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}}$

IV) Les nombres rationnels

Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Le $\mathbb{Q}$ vient de l'italien "Quotiente"

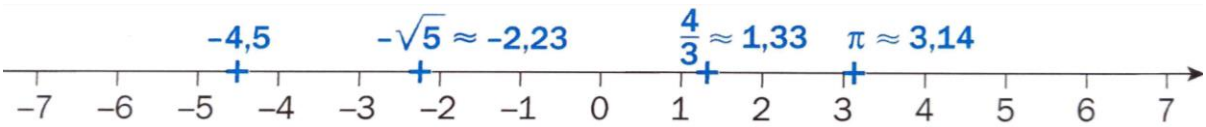
Exemples : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $4 \in \mathbb{Q}$; $-4{,}8 \in \mathbb{Q}$; $\pi \notin \mathbb{Q}$.

V) Les nombres réels

L'ensemble des abscisses des points d'une droite numérique est appelé l'ensemble des nombres réels. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Le $\mathbb{R}$ vient de l'allemand "Real"

Exemples : $-4{,}5 \in \mathbb{R}$, $-\sqrt{5} \in \mathbb{R}$, $\frac{4}{3} \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$.



Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

Exemple : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve : Prouvons que $\sqrt{2}$ est irrationnel

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ n'est pas irrationnel i.e est rationnel, il existe alors $p \in \mathbb{Z}$ et q un entier naturel différent de 0 tel que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ tel que ce soit une fraction irréductible.

Ainsi : $2 = \frac{p^2}{q^2}$ i.e $p^2 = 2q^2$ donc p^2 est pair ainsi p est également pair i.e $p = 2k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On a alors $4k^2 = 2q^2$ i.e $2k^2 = q^2$ et donc pour les mêmes raisons q est pair.

Comme p et q sont pairs ils ont un diviseur commun, qui est 2, et donc $\frac{p}{q}$ n'est pas une fraction irréductible ce qui est **ABSURDE**.

Donc $\boxed{\sqrt{2} \text{ est irrationnel}}$

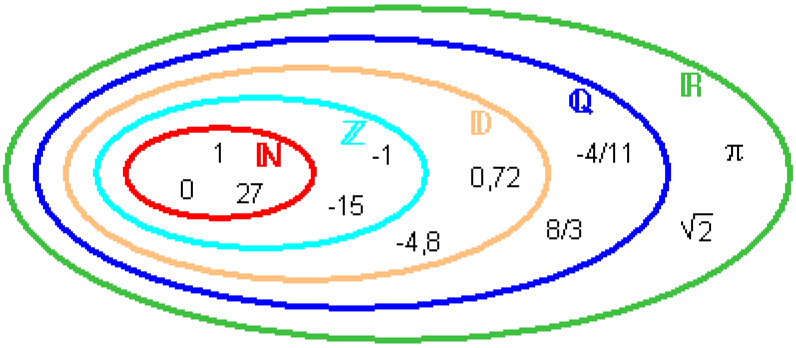
VI) Inclusions

Tous les nombres de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ sont des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est **inclus** dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a également les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Voici un diagramme de Venn qui montre toutes les relations logiques entre les ensembles de nombres :



VII) Encadrement

Propriété :

Pour tout nombre réel x, il existe un nombre décimal d et un entier naturel n tel que :

$$d \leq x < d + 10^{-n} .$$

Il s'agit d'un encadrement décimal de x à 10^{-n} près.

Exemple : Encadrement décimal de π à 10^{-2} près : $3{,}14 \leq \pi < 3{,}14+10^{-2}=3{,}14+0{,}01=3{,}15$.

Remarque : Dans les calculs approchés, il est conseillé d'arrondir en ne gardant qu'un nombre de chiffres significatifs adapté à la situation.

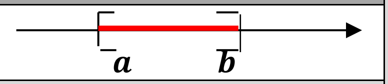
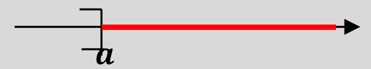
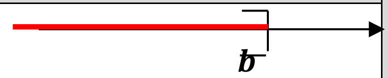
Les intervalles : définitions

Soit deux nombres réels a et b tels que $a < b$.

L'<u>intervalle</u> noté $[a\,;b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.

Soit un nombre réel a.

L'<u>intervalle</u> noté $[a\,;+\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.

L'intervalle noté …	est l'ensemble des réels x tels que…	Il est représenté par ……
$[\,a\,;\,b]$	$a \leq x \leq b$	
$]\,a\,;\,b\,[$	$a < x < b$	
$[\,a\,;\,b\,[$	$a \leq x < b$	
$]\,a\,;\,b\,]$	$a < x \leq b$	
$[\,a\,;+\infty\,[$	$x \geq a$	
$]\,a\,;+\infty\,[$	$x > a$	
$]-\infty\,;\,b\,]$	$x \leq b$	
$]-\infty\,;\,b\,[$	$x < b$	

∞ se lit « infini ».

$-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres ; ce sont des symboles.

$[\,a\,;\,b\,]$, $[\,a\,;\,b\,[$, $]\,a\,;\,b\,]$ et $]\,a\,;\,b\,[$ sont des intervalles d'extrémités a et b.

$]\,a\,;\,b\,]$ est un intervalle tel que b appartient à l'intervalle mais pas a.

Par convention, du côté de $-\infty$ et , le crochet est toujours ouvert.

L'amplitude de l'intervalle $[a\,;b]$ est $b - a$.

Le centre de l'intervalle $[a\,;b]$ est l'abscisse du milieu des points d'abscisses a et b sur la droite numérique, c'est-à-dire $\frac{a+b}{2}$.

Soit un nombre réel a. L'<u>intervalle</u> noté $[a\,;+\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.

Cas particuliers :

$]-\infty\,;\,+\infty[\, = \mathbb{R}$

$]-\infty\,;\,0] = \mathbb{R}_-$

$[0\,;\,+\infty[\, = \mathbb{R}_+$

Intervalle privé d'un ensemble fini de valeurs :

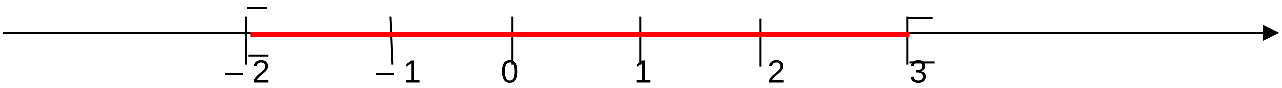
Le symbole \ est « *setminus* » qui signifie « privé de ».

$\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$

$[-2\,;\,4] \setminus \{1\,;\,3\}$

Exemples :

♣ [- 2 ; 3 [est l'ensemble des réels x tels que $-\ 2 \leq x < 3$. Il est représenté par :



Compléter avec ∈ ou ∉ : 0 ∈ [- 2 ; 3 [et 3 ∉ [- 2 ; 3 [.

♣] -∞ ; $\sqrt{3}$] est l'ensemble des réels x tels que $x \leq \sqrt{3}$. Il est représenté par :

Compléter avec ∈ ou ∉ : - 1 ∈] -∞ ; $\sqrt{3}$] et 2 ∉] -∞ ; $\sqrt{3}$].

Réunion et intersection d’ensembles

Dans la suite, A et B désignent deux ensembles.

I) Intersection

En mathématiques, le sens du **connecteur logique** « **et** » est le sens du langage courant.

Exemple de connecteur logique additif : et ; puis ; de plus. Exemple de connecteur logique conclusion : Ainsi ; Donc ; Enfin

Exemple : $x \in]1\,;3[$ si et seulement si x est strictement supérieur à 1 **et** strictement inférieur à 3.

Définition :

L ’intersection de A et de B est l’ensemble des éléments communs à A **et** à B.

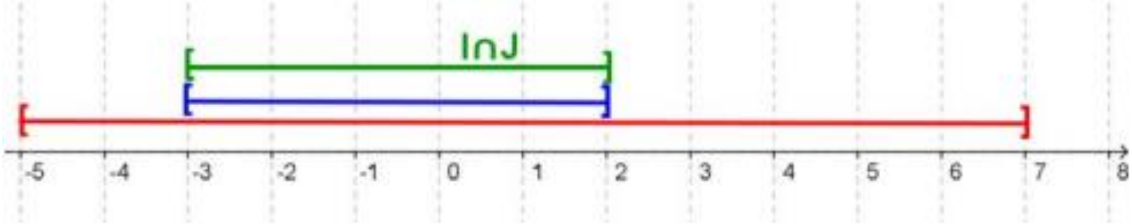
On note cet ensemble $\boldsymbol{A \cap B}$ et on lit « $\boldsymbol{A}$ **inter** $\boldsymbol{B}$ ».

Exemples :

• Si $A = \{2; 3; 5; 9\}$ et $B \ = \{3\ ;5\}$, alors $A \cap B = \{3; 5\}$.

Pour déterminer l’intersection de deux intervalles, on peut représenter ces deux intervalles sur le même axe gradué et on repère la partie commune à ces deux intervalles.

• Si $I = [-5; 7]$ et $J = [-\,3\,; 2]$ alors $I \cap J = [-3\,; 2]$



• Si $I = [-3; 5]$ et $J = [-\,2\,; 8]$ alors $I \cap J = [-2\,; 5]$

II) Réunion :

Dans le langage courant la conjonction « **ou** » est **exclusif** : si un menu affiche « fromage ou dessert », le client peut prendre soit du fromage, soit du dessert, mais pas les deux à la fois.
En mathématiques, le **connecteur logique** « **ou** » est **inclusif**, c'est-à-dire qu'il accepte le cas « fromage et dessert »

Exemples :

• « pour tous nombres a et b, si $a = 0$ **ou** $b = 0$ alors $ab = 0$ » signifie que $ab = 0$ lorsque $a = 0$, ou bien lorsque $b = 0$ ou encore lorsque à la fois $a = 0$ et $b = 0$.

Définition :

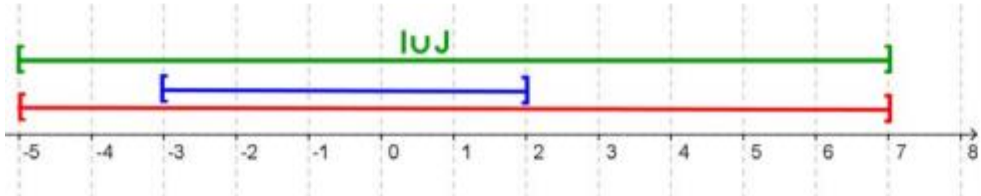
La réunion de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B.
On note cet ensemble $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ et on lit « $\boldsymbol{A}$ **union** $\boldsymbol{B}$ ».

Exemples :

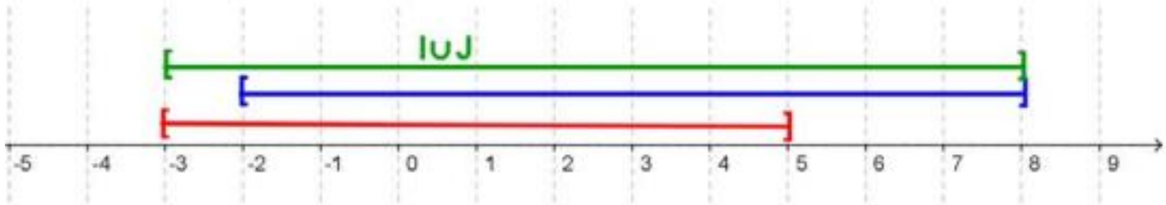
• Si $A = \{2; 3; 5; 9\}$ et B = {3 ;5 ;11}, alors $A \cup B = \{2; 3; 5; 9; 11\}$.

Pour déterminer la réunion de deux intervalles, on peut représenter ces deux intervalles sur le même axe gradué et on repère les points du premier intervalle plus tous les points du second intervalle.

• Si $I = [-5; 7]$ et $J = [-3\,; 2]$ alors $I \cup J = [-5\,; 7]$



• Si $I = [-3; 5]$ et $J = [-2\,; 8]$ alors $I \cup J = [-3\,; 8]$



III) Connecteurs logiques « et », « ou »

Définition :

Soit P et Q deux propositions.

La proposition P et Q est vraie lorsque P et Q sont simultanément vraies.

La proposition P ou Q est vraie lorsque P est vraie ou quand Q est vraie ou quand les deux propositions sont vraies.

Exemple :

Soit P la proposition « $3 \leq 4$ » et Q la proposition « $4 > 5$ ».

La proposition P est vraie et la proposition Q est fausse.

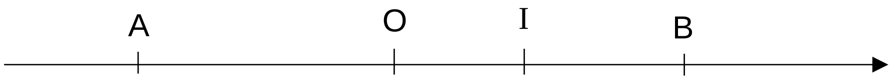
La proposition P et Q , c'est-à-dire « $3 \leq 4$ et $4 > 5$ », est fausse.

La proposition P ou Q , c'est-à-dire « $3 \leq 4$ ou $4 > 5$ », est vraie.

Valeur absolue d'un nombre réel

Définition :

La distance entre deux réels a et b est la distance des points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite numérique (la distance AB est un nombre réel toujours positif).



Exemple : la distance de $2{,}29$ et $-4{,}5$ est $d(2{,}29; -4{,}5) = AB = 2{,}29 - (-4{,}5) = 6{,}79$.

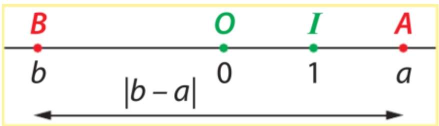
Propriété :

La distance de a à b est égale à « $b - a$ » si $b \geq a$, et est égale à « $a - b$ » si $a \geq b$.

On la note $|a - b|$ et on lit « valeur absolue de $a - b$ ».

Remarque : AB $= |b - a| = |a - b|$ **, évidemment car la distance de a à b est la même que la distance de b à a**

Ainsi : $\begin{cases} \text{si } a \geq b, \text{alors } |a - b| = a - b \\ \text{et si } a \leq b \text{, alors } |a - b| = b - a \end{cases}$



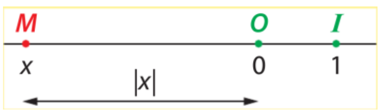
Exemple :

La distance de 3 à 7 est $|3 - 7| = 7 - 3 = 4$ car $7 > 3$.

Définition :

La valeur absolue d'un nombre réel x est la distance de ce réel à 0. On la note : $|x|$.

Ainsi : $\begin{cases} \text{si } x \geq 0 \text{ alors } |x| = x \\ \text{et si } x \leq 0 \text{ alors } |x| = -x \end{cases}$



Propriétés :

Pour tout nombre réel x : $|x| \geq 0$ et $|-x| = |x|$.

Exemples : $|5| = 5$; $|-2{,}5| = 2{,}5$.

Propriété :

L'intervalle $[\boldsymbol{a} - \boldsymbol{r}\,;\boldsymbol{a} + \boldsymbol{r}]$ est l'ensemble des nombres réels $\boldsymbol{x}$ tels $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \leq \boldsymbol{r}$.

Démonstration :

Par définition, l'intervalle $[a - r\,; a + r]$ est l'ensemble des réels x tels que $a - r \leq x \leq a + r$.

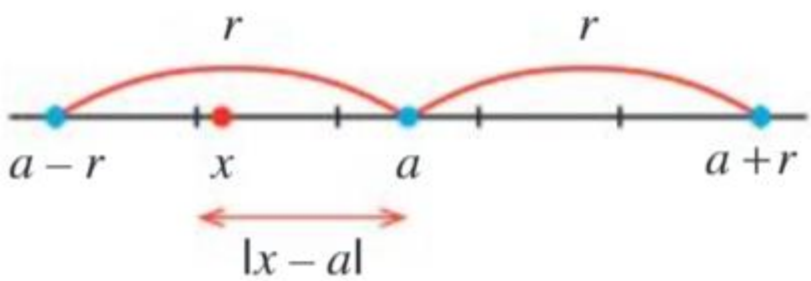
Or $a - r \leq x \leq a + r \Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r$ on soustrait a à tous les membres des inégalités

De plus $|x - a| \leq r \Leftrightarrow x - a \leq r$ et $a - x \leq r$

$\Leftrightarrow x - a \leq r$ et $x - a \geq -r$ on multiplie par (-1) toute l'inégalité

$\Leftrightarrow -r \leq x - a \leq r$.

Ainsi L'intervalle $[a - r\,; a + r]$ est l'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leq r$.



Remarque :

Le centre de l'intervalle $[a - r\,; a + r]$ est a.

On dit que cet intervalle est un **intervalle centré en $\boldsymbol{a}$**.

Son amplitude est égale à $(a + r) - (a - r) = 2r$.