

DSP homework

Карамышев Антон

11 июня 2022 г.

Перед вами сборка домашек по курсу ЦОСа за 2021-2022 учебный год. Номер главы отвечает номеру учебной недели в каждом семестре. Дальше сами разберётесь.

Увы, открытый доступ к этому файлу скорее всего приведёт к полному обесцениванию домашек по этому курсу, за что я должен извиниться перед теми немногими, кто собирался делать эти задания самостоятельно. Однако надеюсь, что решённые задачи помогут кому-то при решении регулярных контрольных и/или письменной части экзамена.

Работа не избавлена от опечаток и авторских неточностей, так что если Вы заметите что-то подобное, то во благо следующих поколений можете написать в telegram по QR-коду ниже. Если кому-то вдруг понадобятся исходники картинок (в большинстве случаев это код на питоне), то также имеет смысл написать в telegram, возможно мне удастся что-то найти.

При большом желании можете просто написать спасибо :) Всем добра!



Оглавление

I Fall term	4
1.1	5
1.2	6
1.3	7
2.1	8
2.2	9
2.3	9
2.4	10
3.1	11
3.2	12
3.3	13
4.1	14
4.2	14
4.3	14
5.1	15
5.2	16
5.3	16
8.1	19
8.2	19
8.3	20
8.1	19
8.2	19
8.3	20
9.1	21
9.2	21
9.3	22
10.1	23
10.2	24
10.3	24
10.4	25
11.1	26
11.2	27
11.3	29
12.1	30
12.2	30
12.3	31
13.1	33
13.2	34
13.3	35

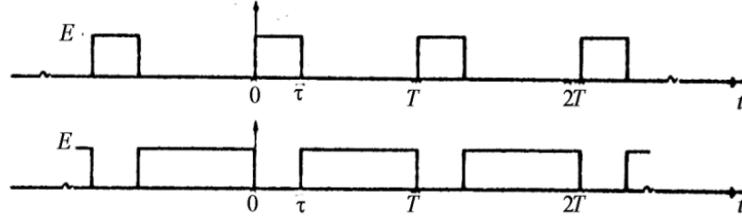
II Spring term	36
1.1	37
1.2	38
1.3	39
2.1	40
2.2	41
2.3	41
3.1	42
3.2	43
3.3	44
4.1	45
4.2	46
4.3	47
5.1	48
5.2	49
5.3	50
6.1	51
9.1	52
9.2	53
9.3	55
10.1	56
10.2	56
10.3	56
10.4	57
11.1	58
11.2	59
11.3	60

Часть I

Fall term

1.1

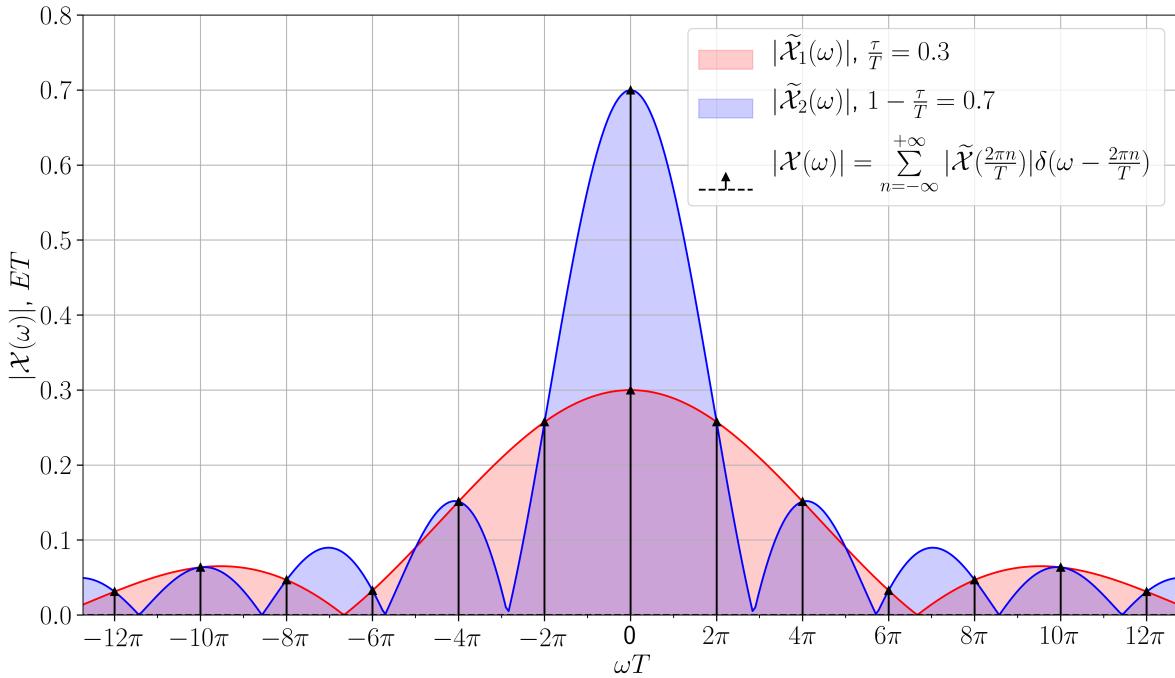
Изобразить на одном чертеже модули спектров двух последовательностей с одинаковым периодом T . Указать значение максимальной спектральной плотности.



Огибающие спектров этих последовательностей:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{X}}_1(\omega) &= \int_0^T x_1(t)e^{-j\omega t} dt = E \int_0^\tau e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} \left(e^{-j\omega\tau} - 1 \right) = \\ &= \frac{2E}{\omega} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \left(\frac{e^{+j\frac{\omega\tau}{2}} - e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}}{2j} \right) = ET \frac{\tau}{T} e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{X}}_2(\omega) &= \int_0^T x_2(t)e^{-j\omega t} dt = E \int_\tau^T e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} \left(e^{-j\omega T} - e^{-j\omega\tau} \right) = \\ &= \frac{2E}{\omega} e^{-j\frac{\omega}{2}(T+\tau)} \left(\frac{e^{+j\frac{\omega}{2}(T-\tau)} - e^{-j\frac{\omega}{2}(T-\tau)}}{2j} \right) = ET \left(1 - \frac{\tau}{T} \right) e^{-j\frac{\omega}{2}(T+\tau)} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega(T-\tau)}{2}\right).\end{aligned}$$



Максимальные значения спектральной плотности достигаются при $\omega = \omega_n = 0$, пропорциональны параметру скважности и соответственно равны $ET \cdot \frac{\tau}{T}$, $ET \cdot \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)$.

1.2

Определить спектр окна Ханна длительностью $\tau = 2T$:

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi t}{T} \right) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(e^{-j\frac{\pi t}{T}} + e^{j\frac{\pi t}{T}} \right), & \text{если } |t| < T \\ 0, & \text{если } |t| \geq T \end{cases}$$

Найти отношение уровней первого бокового и главного лепестков.

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-T}^{+T} e^{-j\omega t} dt + \frac{1}{4} \int_{-T}^{+T} e^{-j(\omega + \frac{\pi}{T})t} dt + \frac{1}{4} \int_{-T}^{+T} e^{-j(\omega - \frac{\pi}{T})t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{D}_T(\omega) + \frac{1}{4} \mathcal{D}_T\left(\omega + \frac{\pi}{T}\right) + \frac{1}{4} \mathcal{D}_T\left(\omega - \frac{\pi}{T}\right)^1 = \frac{\sin(\omega T)}{\omega} + \frac{T \sin(\omega T + \pi)}{2(\omega T + \pi)} + \frac{T \sin(\omega T - \pi)}{2(\omega T - \pi)} = \\ &= \frac{\sin(\omega T)}{\omega} - \frac{T \sin(\omega T)}{2(\omega T + \pi)} - \frac{T \sin(\omega T)}{2(\omega T - \pi)} = \frac{-(\pi T)^2 \sin(\omega T)}{\omega T ((\omega T)^2 - \pi^2)}. \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathcal{W}(\omega)}{d\omega} = 0, \Rightarrow \omega \in \{0, \pm 7.4202, \pm 10.706, \pm 13.9175, \dots\}.$$

$$\left| \frac{\mathcal{W}(\omega_1)}{\mathcal{W}(\omega_0)} \right|^2 = \left| \mathcal{W}(7.4202) \right|^2 = 0.02671^2 = 0.0007133 = -31.47 \text{ dB}.$$

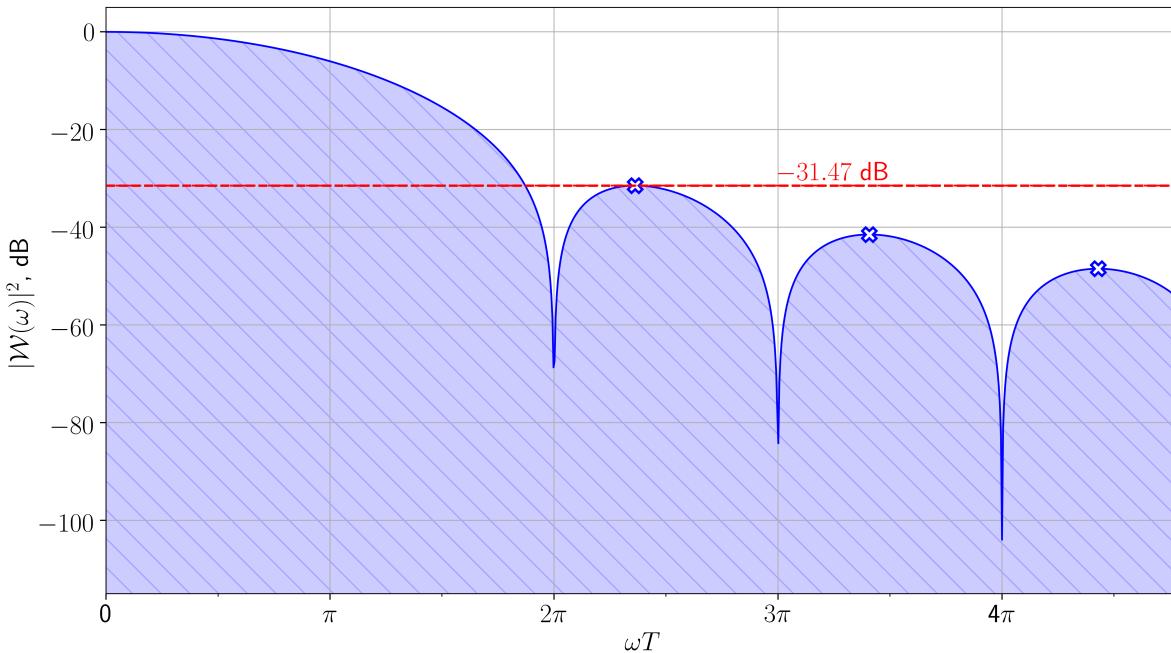


Рис. 1.1: Спектр окна Ханна.

¹ $\mathcal{D}_T(\omega)$ – спектр прямоугольного окна длительностью $\tau = 2T$.

1.3

Найти спектр функции отсчетов, используемых в теореме Котельникова.

$$\phi_k(t) = \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_B}.$$

Доказать их ортогональность, используя равенство Парсеваля для прямоугольного импульса и дуализм времени и частоты преобразования Фурье.

$$\begin{aligned} \Phi_k(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi f_B(t - k\Delta t))}{2\pi f_B(t - k\Delta t)} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{e^{j2\pi f k \Delta t}}{2\pi f_B} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} e^{-ju \frac{f}{f_B}} du = \\ &= \frac{e^{j2\pi f k \Delta t}}{2\pi f_B} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} e^{ju \vartheta} d\vartheta \right) e^{-ju \frac{f}{f_B}} du = \frac{1}{2} \frac{e^{j2\pi f k \Delta t}}{2\pi f_B} \int_{-1}^{+1} d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\vartheta - \frac{f}{f_B})u} du = \frac{1}{2} \frac{e^{j2\pi f k \Delta t}}{2\pi f_B} \int_{-1}^{+1} d\vartheta \cdot 2\pi \delta\left(\vartheta - \frac{f}{f_B}\right) = \\ &= \pi \frac{e^{j2\pi f k \Delta t}}{2\pi f_B} \left[\Theta\left(1 - \frac{f}{f_B}\right) - \Theta\left(-1 - \frac{f}{f_B}\right) \right] = \pi \frac{e^{j2\pi f k \Delta t}}{2\pi f_B} \left[\Theta\left(f + f_B\right) - \Theta\left(f - f_B\right) \right]. \end{aligned}$$

Согласно равенству Парсеваля:

$$\begin{aligned} \langle \phi_k | \phi_n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_k(t) \phi_n(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_k(f) \Phi_n^*(f) df = \frac{\pi^2}{(2\pi f_B)^2} \int_{-f_B}^{f_B} e^{j2\pi f(k-n)\Delta t} df = \\ &= \frac{\pi^2}{(2\pi f_B)^2} \frac{e^{j2\pi f_B(k-n)\Delta t} - e^{-j2\pi f_B(k-n)\Delta t}}{j2\pi(k-n)\Delta t} = \frac{\pi^2}{(2\pi f_B)^2} \frac{\sin(2\pi f_B(k-n)\Delta t)}{\pi(k-n)\Delta t} = \frac{\sin(\pi(k-n))}{2\pi f_B(k-n)} = 0. \\ \langle \phi_k | \phi_k \rangle &= \frac{\pi^2}{(2\pi f_B)^2} \int_{-f_B}^{f_B} e^{j2\pi f(k-k)\Delta t} df = \frac{1}{2f_B} = \Delta t. \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \phi_k | \phi_n \rangle = \delta_{kn} \Delta t.}$$

2.1

Гармонический сигнал $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 500$ кГц дискретизован с частотой $f_d = 2$ МГц. Изобразить как функцию нормированной частоты $\nu = f/f_d$ в диапазоне $|\nu| \leq 2$

- модуль спектра исходного сигнала;
- модуль спектра дискретизованного сигнала;
- модуль спектра последовательности $z(k) = x(k) \cdot 2 \cos(k\pi/2)$.

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_d \nu_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_d \nu_0 t}, \quad \text{где } \nu_0 = \frac{f_0}{f_d} = \frac{0.5}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$z(k) = \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi \nu_0 k} + e^{-j2\pi \nu_0 k} \right) \left(e^{j\frac{\pi k}{2}} + e^{-j\frac{\pi k}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(e^{j2\pi \frac{1}{2}k} + 2e^0 + e^{-j2\pi \frac{1}{2}k} \right).$$

Спектр исходного и дискретизованного сигналов:¹

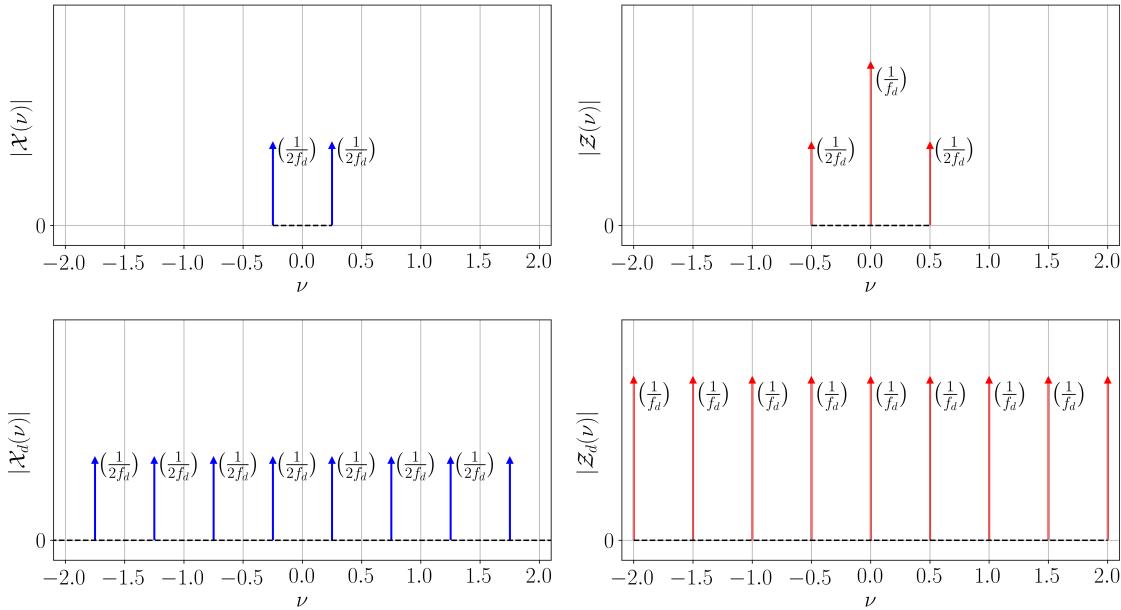
$$\mathcal{X}(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \Leftrightarrow \mathcal{X}(\nu) = \frac{1}{2f_d}(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)).$$

$$\mathcal{X}_d(f) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\delta(f - f_0 - mf_d) + \delta(f + f_0 - mf_d)) \Leftrightarrow \mathcal{X}_d(\nu) = \frac{1}{2f_d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (\delta(\nu - \nu_0 - m) + \delta(\nu + \nu_0 - m)).$$

Спектры последовательности $z(k)$:

$$\mathcal{Z}(\nu) = \frac{1}{2f_d} \left[\delta\left(\nu + \frac{1}{2}\right) + 2\delta(\nu) + \delta\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \right].$$

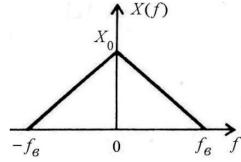
$$\mathcal{Z}_d(\nu) = \frac{1}{2f_d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\delta\left(\nu + \frac{1}{2} - m\right) + 2\delta(\nu - m) + \delta\left(\nu - \frac{1}{2} - m\right) \right] = \frac{1}{f_d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\delta\left(\nu - \frac{1}{2} - m\right) + \delta(\nu - m) \right].$$



¹Часто нормировка весов дельта-функций на $\frac{1}{f_d}$ подразумевается автоматически и может быть опущена.

2.2

Сигнал $x(t)$ имеет финитный спектр треугольного вида. Определить коэффициенты ряда Котельникова этого сигнала, полагая, что $\Delta t = \frac{1}{2f_b}$.



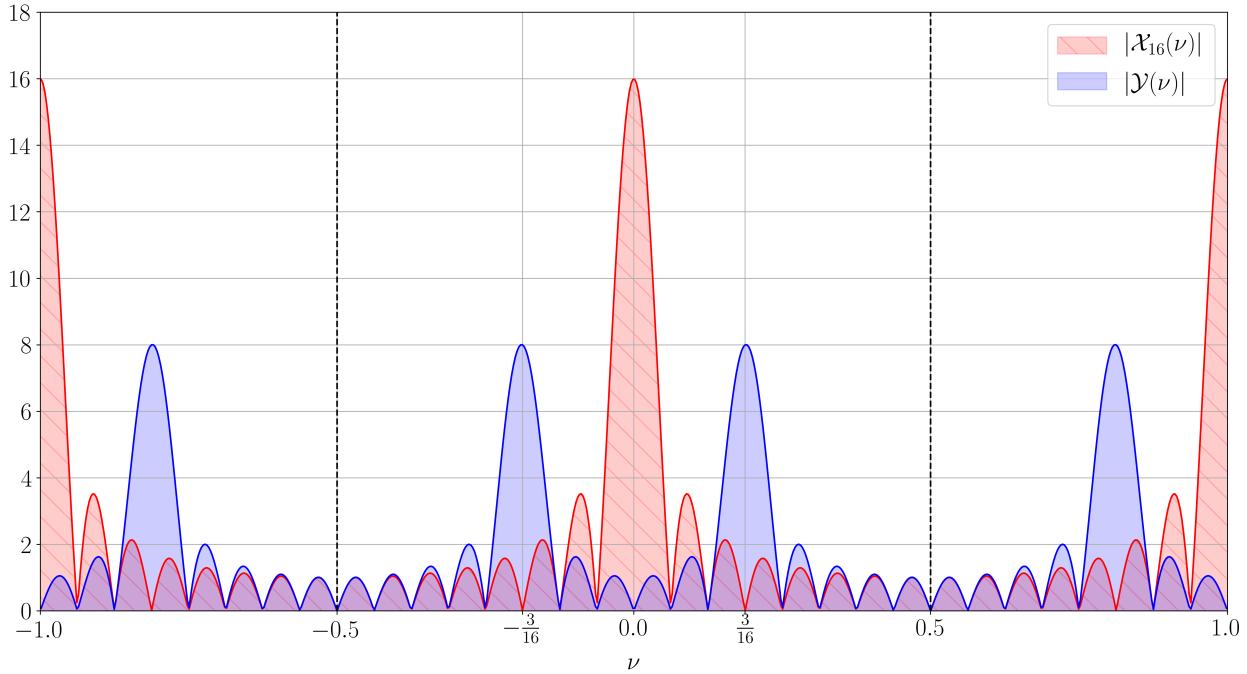
$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{\langle x|\phi_k \rangle}{\langle \phi_k|\phi_k \rangle} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{\sin(2\pi f_b(t - k\Delta t))}{2\pi f_b(t - k\Delta t)} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(f) \Phi_k(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(f) e^{j2\pi f k \Delta t} \Theta(-f_b \leq f \leq f_b) df = \\
&= \int_{-f_b}^{+f_b} \mathcal{X}(f) e^{j2\pi f k \Delta t} df = \frac{\mathcal{X}_0}{f_b} \left\{ \int_{-f_b}^0 (f_b + f) e^{j2\pi f k \Delta t} df + \int_0^{f_b} (f_b - f) e^{j2\pi f k \Delta t} df \right\} = \\
&= \frac{\mathcal{X}_0}{j2\pi k f_b \Delta t} \left\{ (f_b + f) e^{j2\pi f k \Delta t} \Big|_{-f_b}^0 + (f_b - f) e^{j2\pi f k \Delta t} \Big|_0^{f_b} - \int_{-f_b}^0 e^{j2\pi f k \Delta t} df + \int_0^{f_b} e^{j2\pi f k \Delta t} df \right\} = \\
&= \frac{\mathcal{X}_0}{j\pi k} \left\{ f_b - f_b + \frac{1}{j2\pi k \Delta t} \left(e^{j2\pi f k \Delta t} \Big|_0^{f_b} - e^{j2\pi f k \Delta t} \Big|_{-f_b}^0 \right) \right\} = \frac{\mathcal{X}_0}{(j\pi k)^2 2\Delta t} \left\{ -2 + e^{j2\pi f_b k \Delta t} + e^{-j2\pi f_b k \Delta t} \right\} = \\
&= \frac{\mathcal{X}_0}{(\pi k)^2 \Delta t} - \frac{\mathcal{X}_0}{(\pi k)^2 \Delta t} \cos(2\pi f_b k \Delta t) = \frac{\mathcal{X}_0}{(\pi k)^2 \Delta t} - \frac{\mathcal{X}_0}{(\pi k)^2 \Delta t} \cos(\pi k) = \frac{2\mathcal{X}_0}{(\pi k)^2 \Delta t} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right) = \frac{4\mathcal{X}_0 f_b}{(\pi k)^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{2}\right).
\end{aligned}$$

2.3

Найти и изобразить по модулю ДВПФ 16-точечных последовательностей:

$$x(k) = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}(k-m) \quad \text{и} \quad y(k) = x(k)z(k), \quad \text{где } z(k) = \cos\left(2\pi k \frac{3}{16}\right).$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_N(\nu) &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi\nu k} = \frac{1 - e^{-j2\pi\nu N}}{1 - e^{-j2\pi\nu}} = \frac{e^{-j\pi\nu N}}{e^{-j\pi\nu}} \frac{e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N}}{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}} = e^{-j\pi\nu(N-1)} \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}. \\
\mathcal{Z}(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(k) e^{-j2\pi\nu k} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\left(\nu - \frac{3}{16}\right)k} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi\left(\nu + \frac{3}{16}\right)k} = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\delta\left(\nu - \frac{3}{16} - m\right) + \delta\left(\nu + \frac{3}{16} - m\right) \right]. \\
\mathcal{Y}(\nu) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{X}_{16}(\tilde{\nu}) \mathcal{Z}(\nu - \tilde{\nu}) d\tilde{\nu} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathcal{X}_{16}(\tilde{\nu}) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\delta\left(\nu - \tilde{\nu} - \frac{3}{16} - m\right) + \delta\left(\nu - \tilde{\nu} + \frac{3}{16} - m\right) \right] d\tilde{\nu} = \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{X}_{16}\left(\nu - \frac{3}{16}\right) + \frac{1}{2} \mathcal{X}_{16}\left(\nu + \frac{3}{16}\right) = e^{-j\pi 15(\nu - \frac{3}{16})} \frac{\sin(16\pi(\nu - \frac{3}{16}))}{2 \sin(\pi(\nu - \frac{3}{16}))} + e^{-j\pi 15(\nu + \frac{3}{16})} \frac{\sin(16\pi(\nu + \frac{3}{16}))}{2 \sin(\pi(\nu + \frac{3}{16}))}.
\end{aligned}$$



2.4

Сформулировать и доказать теорему о свёртке последовательностей для ДВПФ.

Теорема:

Пусть $\mathcal{X}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j2\pi\nu k}$ и $\mathcal{Y}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k)e^{-j2\pi\nu k}$, тогда дискретной свёртке двух сигналов $z(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)y(k-m)$ отвечает произведение их спектров $\mathcal{Z}(\nu) = \mathcal{X}(\nu)\mathcal{Y}(\nu)$.

Доказательство:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\nu) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(k)e^{-j2\pi\nu k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)y(k-m)e^{-j2\pi\nu m}e^{-j2\pi\nu(k-m)} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)e^{-j2\pi\nu m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-j2\pi\nu n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)e^{-j2\pi\nu m}\mathcal{Y}(\nu) = \mathcal{X}(\nu)\mathcal{Y}(\nu). \end{aligned}$$

3.1

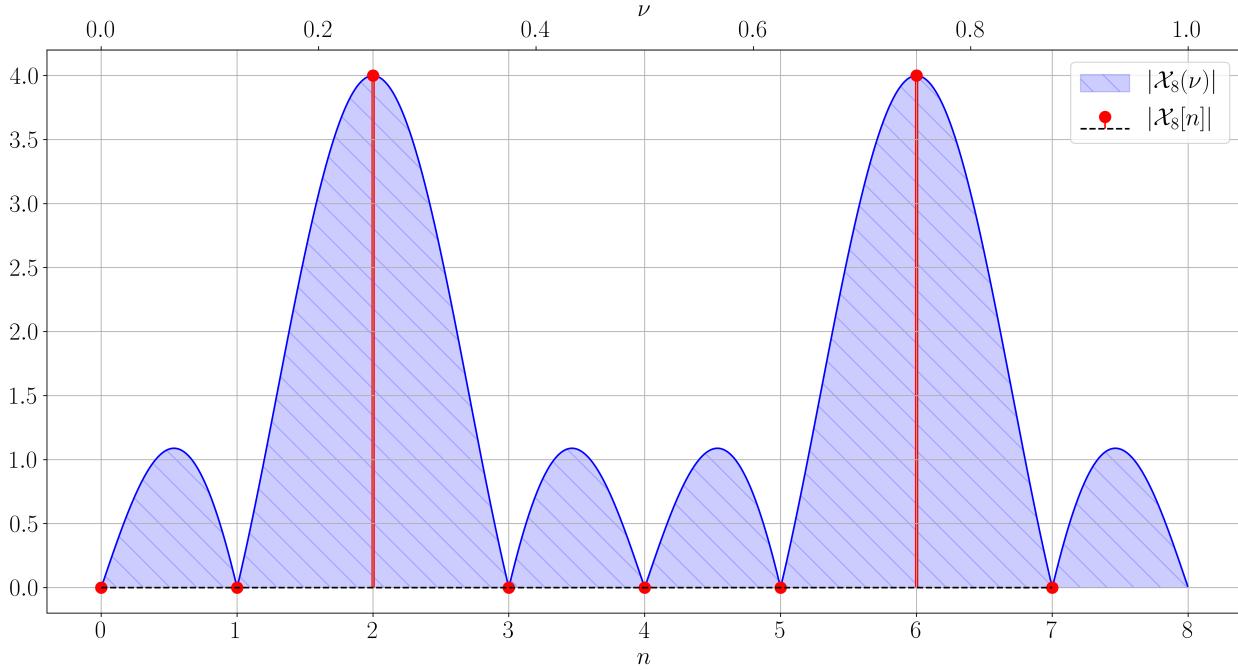
Гармонический сигнал $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $f_0 = 35$ Гц, дискретизован с частотой дискретизации $f_d = 140$ Гц. Найти и изобразить по модулю ДПФ и ДВПФ отрезка сигнала из восьми отсчётов.

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f_0 t},$$

$$\mathcal{X}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(\nu - \nu_0 - m) + \delta(\nu + \nu_0 - m)], \text{ где } \nu_0 = \frac{f_0}{f_d} = \frac{35}{140} = \frac{1}{4}.$$

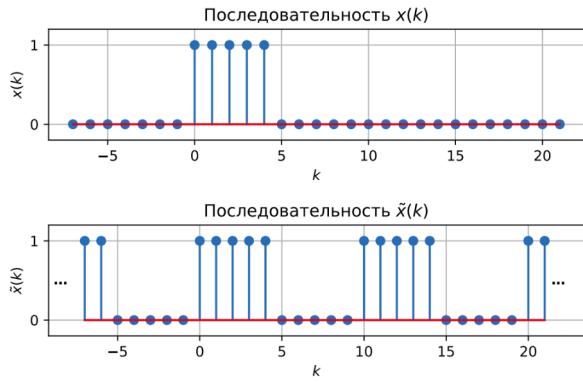
$$\mathcal{X}_8(\nu) = \mathcal{X}(\nu) \otimes \mathcal{D}_8(\nu)^2 = \frac{1}{2} [\mathcal{D}_8(\nu - \nu_0) + \mathcal{D}_8(\nu + \nu_0)] = \frac{1}{2} \left[e^{-j7\pi(\nu-\nu_0)} \frac{\sin(8\pi(\nu-\nu_0))}{\sin(\pi(\nu-\nu_0))} + e^{-j7\pi(\nu+\nu_0)} \frac{\sin(8\pi(\nu+\nu_0))}{\sin(\pi(\nu+\nu_0))} \right].$$

$$\mathcal{X}_8[n] = \sum_{k=0}^7 \cos(2\pi\nu_0 k) e^{-j2\pi \frac{n}{8} k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^7 [e^{j2\pi k(2-n)/8} + e^{-j2\pi k(2+n)/8}] = \begin{cases} 4, & \text{если } n \% 8 \in \{2, 6\}, \\ 0, & \text{если } n \% 8 \notin \{2, 6\}. \end{cases}$$



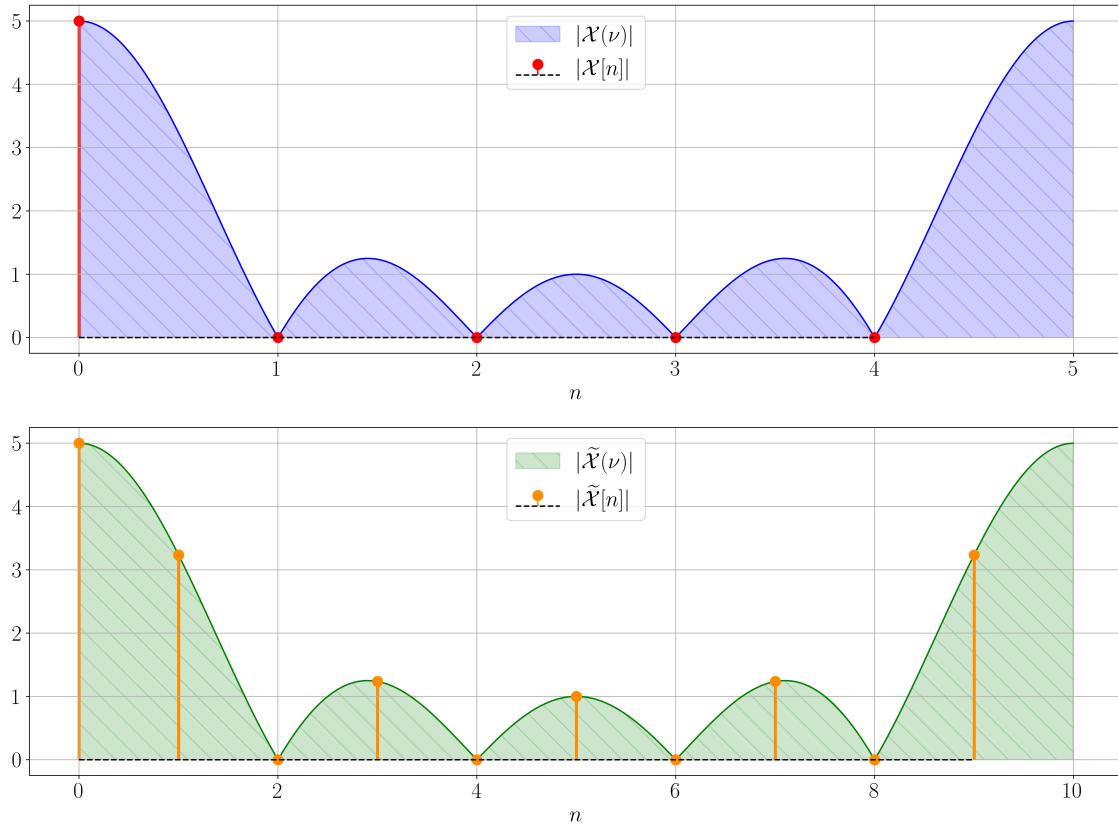
² $\mathcal{D}_8(\nu)$ – ДВПФ прямоугольного окна длительностью 8.

3.2



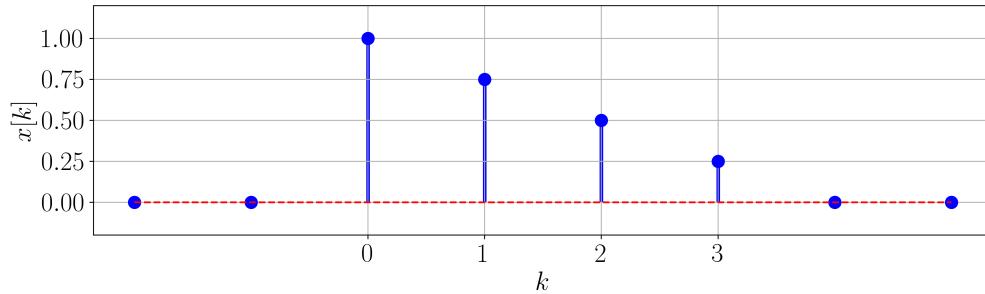
Изобразить модули коэффициентов ДПФ 5-точечной последовательности $x[k]$ (пятиточечного) и её периодического продолжения $\tilde{x}[k]$ с периодом 10.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[n] &= \sum_{k=0}^4 x[k] e^{-j2\pi \frac{n}{5}k} = \sum_{k=0}^5 e^{-j2\pi \frac{n}{5}k} = \frac{1 - e^{-j2\pi n}}{1 - e^{-j2\pi \frac{n}{5}}} = \frac{e^{-j\pi n}}{e^{-j\pi \frac{n}{5}} \sin(\frac{\pi n}{5})} = \begin{cases} 5, & \text{если } n \% 5 = 0, \\ 0, & \text{если } n \% 5 \neq 0. \end{cases} \\ \tilde{\mathcal{X}}[n] &= \sum_{k=0}^9 x[k] e^{-j2\pi \frac{n}{10}k} = \sum_{k=0}^4 e^{-j2\pi \frac{n}{10}k} = \frac{1 - e^{-j2\pi \frac{n}{2}}}{1 - e^{-j2\pi \frac{n}{10}}} = \frac{e^{-j\pi \frac{n}{2}}}{e^{-j\pi \frac{n}{10}} \sin(\frac{\pi n}{10})}. \end{aligned}$$



3.3

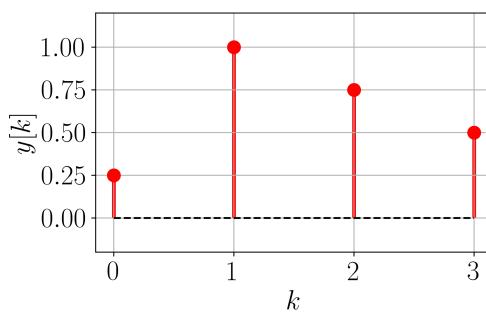
Пусть $\mathcal{X}[n]$ – четырёхточечное ДПФ последовательности $x[k]$, изображённой на графике.



Изобразить последовательность $y[k]$, ДПФ которой имеет вид $\mathcal{Y}[n] = \exp\left(-j\frac{2\pi}{4}n\right)\mathcal{X}[n]$.
По теореме запаздывания имеем:

$$\mathcal{Y}[n] = \exp\left(-j\frac{2\pi}{4}n\right)\mathcal{X}[n] \xleftrightarrow{DFT} x[k-1]_4 = y[k].$$

То есть последовательность $y[k]$ получается путём циклического сдвига $x[k]$ на 1 отсчёт вправо.



4.1

Используется 16-разрядный биполярный АЦП и фильтр Баттервортса третьего порядка с частотой среза $f_c = 10$ KHz и амплитудно частотной характеристикой:

$$|\mathcal{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^6}}.$$

Предположим, что входной сигнал является широкополосным.

Оценить минимальное затухание в полосе подавления \mathcal{A}_{\min} для фильтра защиты от наложения.

Оценить минимальную частоту дискретизации f_d .

Используя формулу для относительного шума квантования, получим:

$$\mathcal{A}_{\min} = -\gamma_{16} = (6.02n + 1.76) \Big|_{n=16} = 98.08 \text{ dB.}$$

$$\frac{1}{\mathcal{A}_{\min}^2} = \frac{1}{1 + (f_{\max}/f_c)^6}, \quad \Rightarrow f_{\max} = f_c \sqrt[6]{\mathcal{A}_{\min}^2 - 1} \approx f_c \cdot \mathcal{A}_{\min}^{1/3} = 10^{\frac{98.08}{3 \cdot 20}} \cdot f_c \approx 43.12f_c \approx 431.2 \text{ KHz.}$$

$$f_d = 2f_{\max} = 862.2 \text{ KHz.}$$

4.2

Аналоговый фильтр Чебышёва I рода 3-го порядка с частотой среза $f_c = 40$ Hz имеет величину пульсаций 0.5 dB. Определить ослабление, вносимое этим фильтром на частоте $2f_c$.

$$|\mathcal{H}(\nu_c)|^2 = 10 \lg \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \mathcal{T}_3^2(\nu_c)} = -0.5 \text{ dB}, \quad \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{10^{0.5/10} - 1}{\mathcal{T}_3^2(\nu_c)} = 10^{0.05} - 1 = 0.122018.$$

$$|\mathcal{H}(2\nu_c)|^2 = 10 \lg \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \mathcal{T}_3^2(2\nu_c)}^3 = 10 \lg \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [4(2\nu_c)^3 - 3(2\nu_c)]^2} = 10 \lg \frac{1}{1 + 0.122018 \cdot 26^2} = -19.216 \text{ dB.}$$

4.3

Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_b = 10$ KHz (f_b – верхняя граничная частота) дискретизуется с минимально возможной частотой дискретизации в соответствии с теоремой отсчётов. В результате получается последовательность $x(k)$. Обозначим через $\mathcal{X}[n]$ 1000-точечное ДПФ последовательности $x(k)$.

- (a) Каким частотам (в Hz) в ДВПФ последовательности $x(k)$ соответствуют частоты ДПФ с номерами $n_1 = 100$ и $n_2 = 850$?
- (b) Каким частотам (в Hz) в спектре исходного сигнала $x(t)$ соответствуют индексы $n_1 = 100$ и $n_2 = 850$ в последовательности $\mathcal{X}[n]$?

Частота дискретизации должна быть равна $f_d = 2f_b = 10$ KHz.

- (a) Для дискретизованного сигнала:

$$f_1 = \frac{n_1 f_d}{N} = 1 \text{ KHz}, \quad f_2 = \frac{n_2 f_d}{N} = 8.5 \text{ KHz.}$$

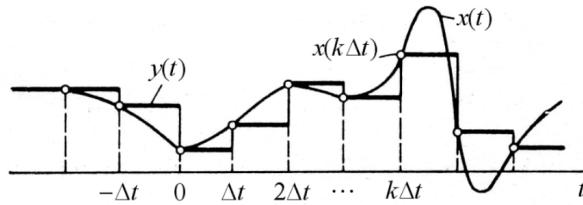
- (b) Для исходного аналогового сигнала:

$$f_1 = \frac{n_1 f_d}{N} = 1 \text{ KHz}, \quad f_2 = \frac{(n_2 - N)f_d}{N} = -1.5 \text{ KHz.}$$

³ $\mathcal{T}_3(\nu) = 2\nu\mathcal{T}_2(\nu) - \mathcal{T}_1(\nu) = 2\nu[2\nu\mathcal{T}_1(\nu) - \mathcal{T}_0(\nu)] - \mathcal{T}_1(\nu) = 4\nu^3 - 3\nu.$

5.1

Рассмотрим сигнал $y(t)$, полученный путём фиксации на время, равное шагу дискретизации Δt , мгновенных значений исходного сигнала $x(t)$ с помощью ЦАП.



Пусть $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, $-\infty < t < +\infty$ и шаг дискретизации $\Delta t = \frac{1}{10f_0} = \frac{1}{f_d}$.

Определить частоты, амплитуды и фазы гармонических компонент на выходе фиксатора. Получить аналитическое выражение для выходного сигнала фиксатора как суперпозицию этих компонент.

Частотная характеристика интерполятора:

$$\mathcal{H}(f) = \frac{\sin(\pi f \Delta t)}{\pi f} e^{-j\pi f \Delta t} = \frac{\sin(\pi f / f_d)}{\pi f} e^{-j\pi f / f_d}.$$

Спектр дискретизованного сигнала на входе:

$$\mathcal{X}_d(f) = \frac{1}{2j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(f - f_0 + mf_d) - \delta(f + f_0 + mf_d)].$$

Спектр выходного сигнала (по теореме о свёртке):

$$\mathcal{Y}(f) = \mathcal{H}(f) \cdot \mathcal{X}_d(f) = \frac{\sin(\pi f / f_d)}{\pi f} \frac{e^{-j\pi f / f_d}}{2j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(f - f_0 + mf_d) - \delta(f + f_0 + mf_d)].$$

Выходной сигнал:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta t \frac{\sin(\pi f / f_d)}{\pi f / f_d} \frac{e^{-j\pi f / f_d}}{2j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(f - f_0 + mf_d) - \delta(f + f_0 + mf_d)] e^{j2\pi f} df = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Delta t \left\{ \frac{\sin(\pi(f_0 + mf_d) / f_d)}{\pi(f_0 + mf_d) / f_d} \right\} \sin \left(2\pi(f_0 + mf_d)t - \pi(f_0 + mf_d) / f_d \right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Delta t \left\{ \frac{\sin(\pi(f_0 + mf_d) / f_d)}{\pi(f_d + mf_d) / f_d} \right\} \sin \left(2\pi(f_0 + mf_d) \left(t - \frac{1}{2}\Delta t \right) \right) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{10f_0} \left\{ \frac{\sin(\pi(m + 0.1))}{\pi(m + 0.1)} \right\} \sin \left(2\pi f_0 (1 + 10m) \left(t - \frac{1}{20f_0} \right) \right). \end{aligned}$$

Выходной сигнал представляет собой суперпозицию гармоник:

- с частотами $f_m = f_0(1 + 10m)$,
- с амплитудами $A_m = \left| \frac{1}{10f_0} \frac{\sin(\pi(m + 0.1))}{\pi(m + 0.1)} \right|$,
- с фазами $\phi_m = -\pi(m + 0.1)$.

5.2

Последовательность $x[k]$ из 1000 элементов получена в результате дискретизации непрерывного сигнала $x(t)$ с частотой $f_d = 20480$ Hz. Обозначим через $\mathcal{X}[n]$ 1024-точечное ДПФ ($N = 1024$) последовательности $x[k]$ (дополненной нулевыми отсчётами). Определить расстояние (в Hz) между непрерывными частотами, которые соответствуют соседним отсчётам ДПФ.

Расстояние между соседними бинами ДПФ равно:

$$\Delta f = \frac{1}{N} f_d = \frac{20480 \text{ Hz}}{1024} = 20 \text{ Hz.}$$

5.3

Вещественный сигнал $x(t)$ с полосой $2f_b = 10$ KHz (f_b – верхняя граничная частота) дискретизуется с шагом Δt . В результате получается последовательность отсчётов $x[k]$. Вычисляется N -точечное ДПФ, где $N = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Определить минимальное значение m , при котором анализ возможен, а расстояние между отсчётами ДПФ по оси частот в герцах будет меньше 5 Hz. Для этого значения m определить допустимые пределы для частоты дискретизации $f_{\min} < f_d < f_{\max}$.

Чтобы разрешение по частоте оказалось меньше $\Delta f = 5$ Hz, необходимо:

$$\Delta f > \frac{f_d}{N} = \frac{f_d}{2^m} \Leftrightarrow m > \log_2 \left(\frac{f_d}{\Delta f} \right).$$

Чтобы анализ был возможен $f_d = f_{\min} = 2f_b = 10$ KHz, тогда $m = 11$.

Теперь для фиксированного m найдём максимально возможную частоту дискретизации $f_d = f_{\max}$:

$$\Delta f > \frac{f_d}{N} = \frac{f_d}{2^m} \Leftrightarrow f_d < \Delta f \cdot 2^m = 10240 \text{ Hz.}$$

В итоге: $m = 11$, $f_{\min} = 10000$ Hz, $f_{\max} = 10240$ Hz.

7.1

Используя теорему о свёртке во временной области для ДВПФ, определите линейную дискретную свёртку последовательностей:

$$h[k] = \frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k}, \quad \nu_c = 0.2; \quad x[k] = \cos(2\pi\nu_1 k) + \cos(2\pi\nu_2 k), \quad \nu_1 = 0.1, \nu_2 = 0.3.$$

Интерпретируйте результат как прохождение сигнала $x[k]$ через фильтр с импульсной характеристической $h[k]$. Является ли такой фильтр $h[k]$ физически реализуемым?

$$h[k] \xrightarrow{DTFT} \mathcal{H}(\nu) = \Theta(|\nu| \leq \nu_c) = \begin{cases} 1, & \text{если } m - \nu_c \leq \nu \leq m + \nu_c, m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$x[k] \xrightarrow{DTFT} \mathcal{X}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m) + \delta(\nu - \nu_2 + m) + \delta(\nu + \nu_2 + m)].$$

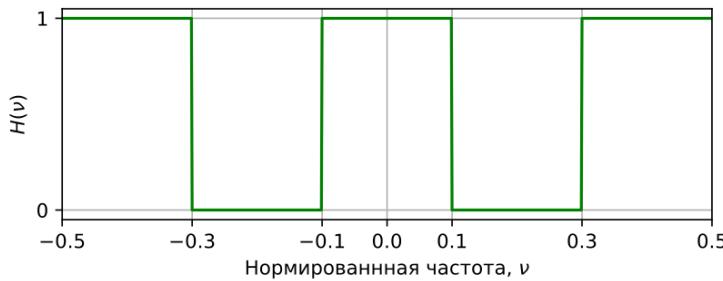
$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\nu) &= \mathcal{X}(\nu) \cdot \mathcal{H}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Theta_m (|\nu| \leq \nu_c) [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m) + \delta(\nu - \nu_2 + m) + \delta(\nu + \nu_2 + m)] = \\ &= \left/ \nu_1 < \nu_c, \nu_c < \nu_2 \right/ = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m)] \xrightarrow{DTFT} y[k] = \cos(2\pi\nu_1 k) = h[k] \otimes x[k]. \end{aligned}$$

Мы имеем дело с идеальным фильтром нижних частот. Заметим, что $h[k]$ некаузальна (не обращается тождественно в нуль при $k < 0$, т.е. ее выходное воздействие зависит в том числе и от «будущего»). Это означает, что идеальный фильтр нижних частот физически не реализуем в системе реального времени.

7.2

Запишите импульсные характеристики перечисленных ниже фильтров. Являются ли такие фильтры физически реализуемыми в реальном времени?

- Идеальный режекторный фильтр, частотная характеристика которого изображена на рисунке.

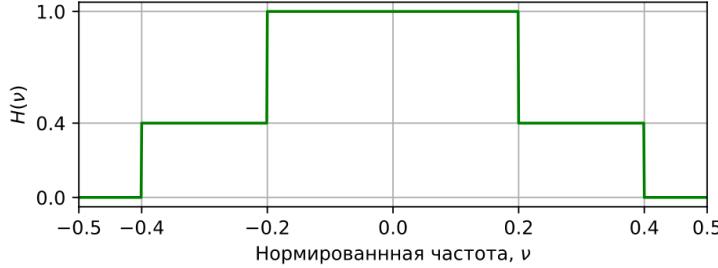


Заметим, что $\mathcal{H}(\nu) = 1 - \mathcal{H}_\ell^{\nu_1}(\nu) + \mathcal{H}_\ell^{\nu_2}(\nu)$, где $\mathcal{H}_\ell^{\nu_c}(\nu)$ – частотная характеристика идеального фильтра нижних частот с частотой среза ν_c , $\nu_1 = 0.3$ и $\nu_2 = 0.1$. В силу линейности ДВПФ справедливо, что $h[k] = \mathbf{1}[k] - h_\ell^{\nu_1}[k] + h_\ell^{\nu_2}[k]$, где $h_\ell^{\nu_c}[k]$ – импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот с частотой среза ν_c . В итоге получим:

$$h[k] = \mathbf{1}[k] - h_\ell^{\nu_1}[k] + h_\ell^{\nu_2}[k] = \mathbf{1}[k] - \frac{\sin(2\pi\nu_1 k)}{\pi k} + \frac{\sin(2\pi\nu_2 k)}{\pi k} = \mathbf{1}[k] - \frac{2 \sin(\pi(\nu_1 - \nu_2)k) \cos(\pi(\nu_1 + \nu_2)k)}{\pi k}.$$

$h[k]$ не обращается тождественно в нуль при $k < 0$, т.е. не является каузальной. Это означает, что данный фильтр физически не реализуем в системе реального времени.

- Идеальный фильтр с нулевой фазовой задержкой, частотная характеристика которого изображена на рисунке.



Заметим, что $\mathcal{H}(\nu) = 0.4 \cdot \mathcal{H}_\ell^{\nu_1}(\nu) + 0.6 \cdot \mathcal{H}_\ell^{\nu_2}(\nu)$, где $\nu_1 = 0.4$ и $\nu_2 = 0.2$. В силу линейности ДВПФ справедливо, что $h[k] = 0.4 \cdot h_\ell^{\nu_1}[k] + 0.6 \cdot h_\ell^{\nu_2}[k]$. В итоге получим:

$$h[k] = 0.4 \cdot h_\ell^{\nu_1}[k] + 0.6 \cdot h_\ell^{\nu_2}[k] = \frac{4 \sin(2\pi\nu_1 k) + 6 \sin(2\pi\nu_2 k)}{10\pi k}.$$

$h[k]$ не обращается тождественно в нуль при $k < 0$, т.е. не является каузальной. Это означает, что данный фильтр физически не реализуем в системе реального времени.

7.3

Определить реакцию на входное воздействие $x[k] = \cos(2\pi\nu_1 k) + \cos(2\pi\nu_2 k)$, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.3$ системы с нулевой фазовой задержкой и амплитудно-частотной характеристикой, изображённой на рисунке (частотная характеристика принимает неотрицательные значения).



$$x[k] \xrightarrow{DTFT} \mathcal{X}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m) + \delta(\nu - \nu_2 + m) + \delta(\nu + \nu_2 + m)].$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\nu) &= \mathcal{X}(\nu) \cdot \mathcal{H}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(\nu) [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m) + \delta(\nu - \nu_2 + m) + \delta(\nu + \nu_2 + m)] = \\ &= \left/ \mathcal{X}(\nu_1) = \frac{1}{2}, \mathcal{X}(\nu_2) = 0 \right/ = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m)] \xrightarrow{DTFT} y[k] = \frac{1}{2} \cos(2\pi\nu_1 k). \end{aligned}$$

8.1

Используя теорему о свёртке во временной области для ДВПФ, определите линейную дискретную свёртку последовательностей:

$$h[k] = \frac{\sin(2\pi\nu_c k)}{\pi k}, \quad \nu_c = 0.2; \quad x[k] = \cos(2\pi\nu_1 k) + \cos(2\pi\nu_2 k), \quad \nu_1 = 0.1, \nu_2 = 0.3.$$

Интерпретируйте результат как прохождение сигнала $x[k]$ через фильтр с импульсной характеристикой $h[k]$. Является ли такой фильтр $h[k]$ физически реализуемым?

$$h[k] \xrightarrow{DTFT} \mathcal{H}(\nu) = \Theta(|\nu| \leq \nu_c) = \begin{cases} 1, & \text{если } m - \nu_c \leq \nu \leq m + \nu_c, m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$x[k] \xrightarrow{DTFT} \mathcal{X}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m) + \delta(\nu - \nu_2 + m) + \delta(\nu + \nu_2 + m)].$$

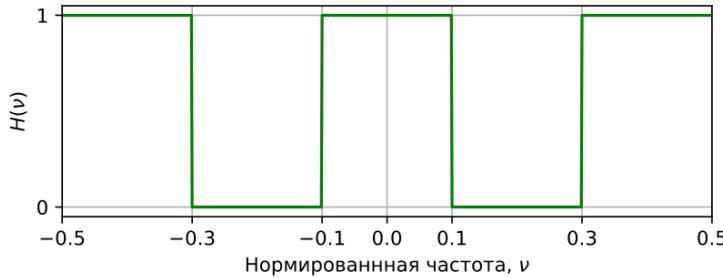
$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\nu) &= \mathcal{X}(\nu) \cdot \mathcal{H}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Theta_m (|\nu| \leq \nu_c) [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m) + \delta(\nu - \nu_2 + m) + \delta(\nu + \nu_2 + m)] = \\ &= \left/ \nu_1 < \nu_c, \nu_c < \nu_2 \right/ = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m)] \xrightarrow{DTFT} y[k] = \cos(2\pi\nu_1 k) = h[k] \otimes x[k]. \end{aligned}$$

Мы имеем дело с идеальным фильтром нижних частот. Заметим, что $h[k]$ некаузальна (не обращается тождественно в нуль при $k < 0$, т.е. ее выходное воздействие зависит в том числе и от «будущего»). Это означает, что идеальный фильтр нижних частот физически не реализуем в системе реального времени.

8.2

Запишите импульсные характеристики перечисленных ниже фильтров. Являются ли такие фильтры физически реализуемыми в реальном времени?

- Идеальный режекторный фильтр, частотная характеристика которого изображена на рисунке.

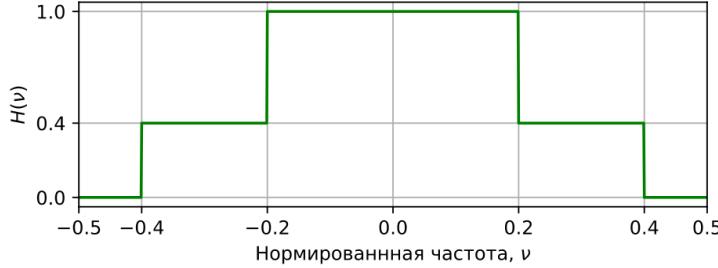


Заметим, что $\mathcal{H}(\nu) = 1 - \mathcal{H}_\ell^{\nu_1}(\nu) + \mathcal{H}_\ell^{\nu_2}(\nu)$, где $\mathcal{H}_\ell^{\nu_c}(\nu)$ – частотная характеристика идеального фильтра нижних частот с частотой среза ν_c , $\nu_1 = 0.3$ и $\nu_2 = 0.1$. В силу линейности ДВПФ справедливо, что $h[k] = \mathbf{1}[k] - h_\ell^{\nu_1}[k] + h_\ell^{\nu_2}[k]$, где $h_\ell^{\nu_c}[k]$ – импульсная характеристика идеального фильтра нижних частот с частотой среза ν_c . В итоге получим:

$$h[k] = \mathbf{1}[k] - h_\ell^{\nu_1}[k] + h_\ell^{\nu_2}[k] = \mathbf{1}[k] - \frac{\sin(2\pi\nu_1 k)}{\pi k} + \frac{\sin(2\pi\nu_2 k)}{\pi k} = \mathbf{1}[k] - \frac{2 \sin(\pi(\nu_1 - \nu_2)k) \cos(\pi(\nu_1 + \nu_2)k)}{\pi k}.$$

$h[k]$ не обращается тождественно в нуль при $k < 0$, т.е. не является каузальной. Это означает, что данный фильтр физически не реализуем в системе реального времени.

- Идеальный фильтр с нулевой фазовой задержкой, частотная характеристика которого изображена на рисунке.



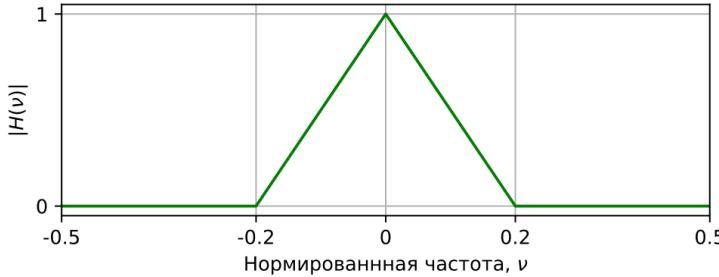
Заметим, что $\mathcal{H}(\nu) = 0.4 \cdot \mathcal{H}_\ell^{\nu_1}(\nu) + 0.6 \cdot \mathcal{H}_\ell^{\nu_2}(\nu)$, где $\nu_1 = 0.4$ и $\nu_2 = 0.2$. В силу линейности ДВПФ справедливо, что $h[k] = 0.4 \cdot h_\ell^{\nu_1}[k] + 0.6 \cdot h_\ell^{\nu_2}[k]$. В итоге получим:

$$h[k] = 0.4 \cdot h_\ell^{\nu_1}[k] + 0.6 \cdot h_\ell^{\nu_2}[k] = \frac{4 \sin(2\pi\nu_1 k) + 6 \sin(2\pi\nu_2 k)}{10\pi k}.$$

$h[k]$ не обращается тождественно в нуль при $k < 0$, т.е. не является каузальной. Это означает, что данный фильтр физически не реализуем в системе реального времени.

8.3

Определить реакцию на входное воздействие $x[k] = \cos(2\pi\nu_1 k) + \cos(2\pi\nu_2 k)$, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0.3$ системы с нулевой фазовой задержкой и амплитудно-частотной характеристикой, изображённой на рисунке (частотная характеристика принимает неотрицательные значения).



$$x[k] \xrightarrow{DTFT} \mathcal{X}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m) + \delta(\nu - \nu_2 + m) + \delta(\nu + \nu_2 + m)].$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\nu) &= \mathcal{X}(\nu) \cdot \mathcal{H}(\nu) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(\nu) [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m) + \delta(\nu - \nu_2 + m) + \delta(\nu + \nu_2 + m)] = \\ &= \left/ \mathcal{X}(\nu_1) = \frac{1}{2}, \mathcal{X}(\nu_2) = 0 \right/ = \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [\delta(\nu - \nu_1 + m) + \delta(\nu + \nu_1 + m)] \xrightarrow{DTFT} y[k] = \frac{1}{2} \cos(2\pi\nu_1 k). \end{aligned}$$

9.1

Пусть \mathcal{Z} -преобразование (двуихстороннее) дискретного сигнала $x[k]$ имеет вид $\mathcal{X}(z) = (z^2 + 2z + 1)/z$. Найти ненулевые отсчётные значения этого сигнала. Определить, является ли такой сигнал казуальным.

$$\mathcal{X}(z) = (z^2 + 2z + 1)/z = z + 2 + z^{-1} = x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[k]z^{-k},$$

$$x[1] = x[-1] = 1, \quad x[0] = 2.$$

При этом $x[-1] = 1 \neq 0$, то есть сигнал не является каузальным.

9.2

Найти импульсную характеристику $h[k]$ фильтра с передаточной функцией

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}}$$

1. вычислением обратного \mathcal{Z} -преобразования;
2. реакцией на единичный импульс $\mathbf{1}[k]$ при начальном условии $y[-1] = 0$.

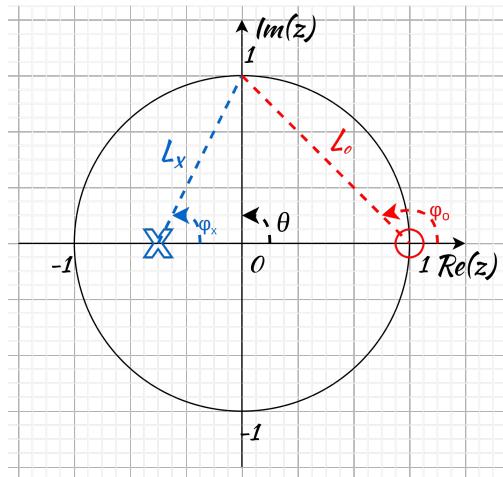
Сравнить результаты. Исследовать фильтр на устойчивость.

Методом геометрических построений определить значения АЧХ и ФЧХ фильтра в точке $\nu_0 = \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &= \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} \xrightarrow{\mathcal{Z}} h[k] = \left(-\frac{1}{2}\right)^k u[k] - \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} u[k-1] = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^k (u[k] + 2u[k-1]), \quad \text{ROC} = \{z : |z| > 0.5\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[k] = \mathbf{1}[k] &\xrightarrow{\mathcal{Z}} \mathcal{X}(z) = 1, \quad \mathcal{Y}(z) = \mathcal{X}(z) \cdot \mathcal{H}(z) = \mathcal{H}(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}} y[k] = h[k] = \left(-\frac{1}{2}\right)^k (u[k] + 2u[k-1]), \\ &\text{ROC} = \{z : |z| > 0.5\}. \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1}} = \frac{z - 1}{z + 0.5}, \quad \Rightarrow z_{\times} = -0.5, z_o = 1.$$



$$\theta = 2\pi\nu_0 = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\varphi(\nu_0) = \varphi(\theta) = \varphi_o - \varphi_x = \frac{3\pi}{4} - \arctg(2) = 1.249 = 0.397\pi.$$

$$|\mathcal{H}(\nu_0)| = |\mathcal{H}(\theta)| = \frac{L_o}{L_x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + (0.5)^2}} = \sqrt{\frac{8}{5}} = 1.265.$$

Единственный полюс $z_X = -0.5$ лежит внутри единичного круга на комплексной плоскости, то есть система является устойчивой по входу.

9.3

Рассмотрите рекурсивный фильтр, заданный разностным уравнением

$$y[k] = (1 - \lambda)x[k] + \lambda y[k - 1], \quad y[-1] = 0.$$

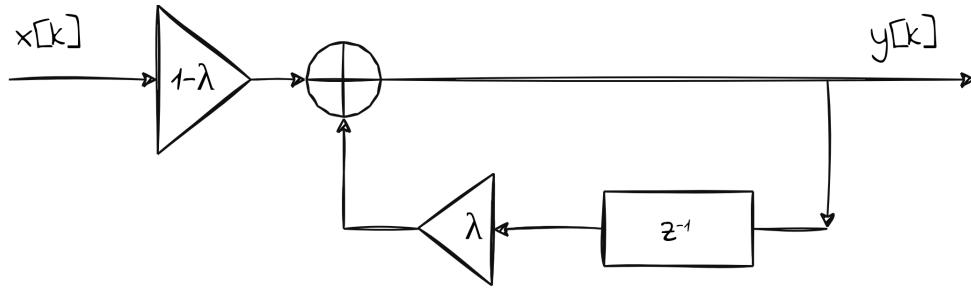
При $\lambda \approx 1$, $\lambda < 1$ эта система является квазинтегратором (leaky integrator). Определите импульсную характеристику этой системы и исследуйте систему на устойчивость для случаев $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0.9$. Постройте блок-схему для реализации данной системы.

$$(1 - \lambda)x[k] = y[k] - \lambda y[k - 1], \quad y[-1] = 0.$$

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}} = \frac{(1 - \lambda)z}{z - \lambda} \xrightarrow{z} h[k] = (1 - \lambda)\lambda^k u[k], \quad \text{ROC} = \{z : |z| > \lambda\}.$$

При $\lambda_1 = 1$ единственный полюс $z_X = \lambda_1 = 1$ находится на границе единичного круга комплексной плоскости, а не внутри него. Значит, система не является устойчивой по входу.

В случае $\lambda_1 = 0.9$ полюс $z_X = \lambda_1 = 0.9$ находится внутри единичного круга, то есть система будет устойчивой по входу.



10.1

Передаточная функция цифрового фильтра имеет вид

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}.$$

Изобразить блок-схемы цифрового фильтра в прямой и канонической формах и записать соответствующие разностные уравнения (алгоритмы цифровой фильтрации).

$$\mathcal{H}(z)^4 = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(z) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right) &= \mathcal{X}(z) \left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right) \xrightarrow{z} y[k] - \frac{1}{2}y[k-1] - \frac{1}{2}y[k-2] = x[k] - 2x[k-1] + x[k-2]. \\ y[k] &= x[k] - 2x[k-1] + x[k-2] + \frac{1}{2}y[k-1] + \frac{1}{2}y[k-2]. \end{aligned}$$

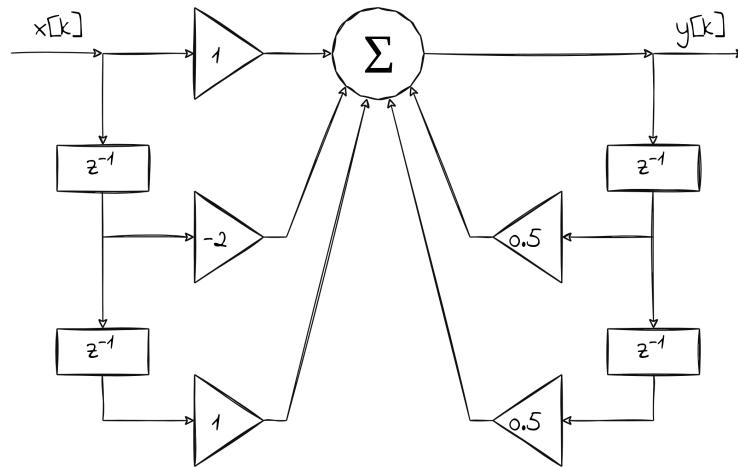


Рис. 10.2: Прямая форма фильтра.

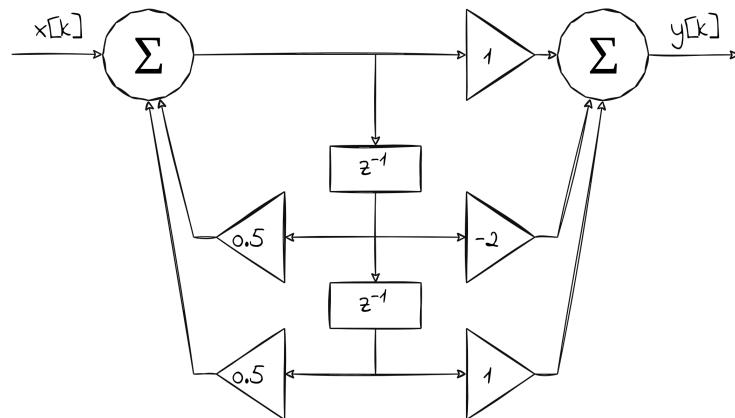


Рис. 10.3: Каноническая (прямая) форма фильтра.

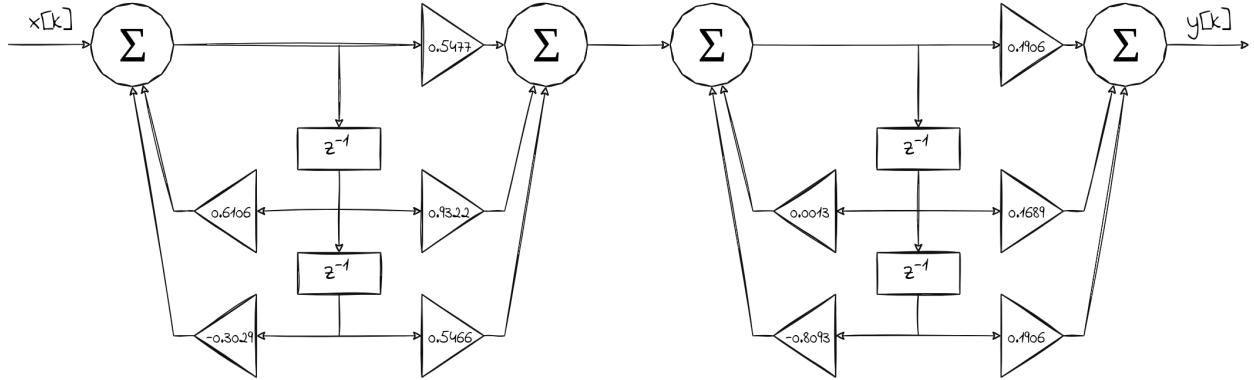
⁴В данном случае $\mathcal{H}(z)$ содержит компенсирующие друг друга нуль и полюс. Иными словами, передаточная функция допускает упрощение. Однако схемы реализации построены для исходного вида $\mathcal{H}(z)$, так как после сокращения формально получится другая передаточная функция.

10.2

Изобразить блок-схему одной из возможных реализаций фильтра с передаточной функцией

$$\mathcal{H}(z) = \frac{0.5477 + 0.9322z^{-1} + 0.5466z^{-2}}{1 - 0.6106z^{-1} + 0.3029z^{-2}} \cdot \frac{0.1906 + 0.1689z^{-1} + 0.1906z^{-2}}{1 - 0.0013z^{-1} + 0.8093z^{-2}}$$

в виде каскада двух биквадратных блоков. Для биквадратных блоков выбрать прямую каноническую форму реализации.

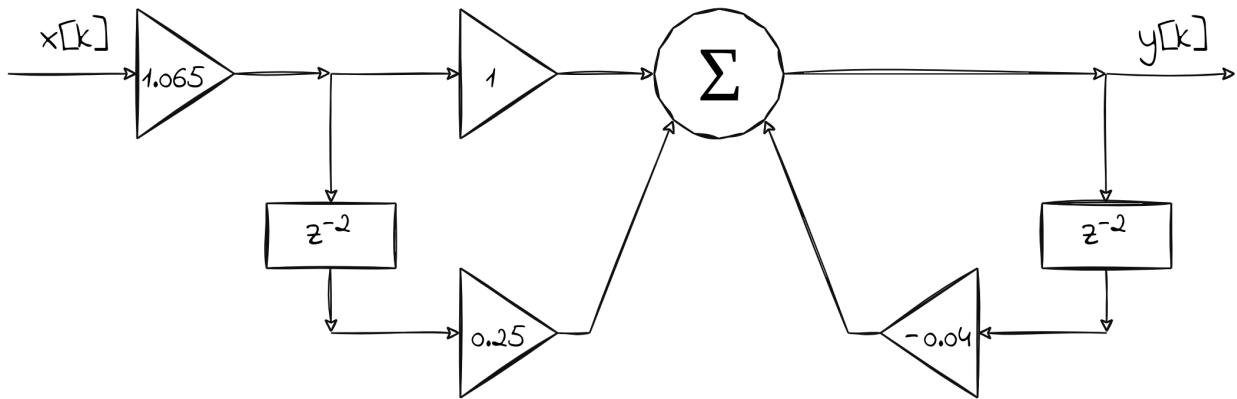


10.3

Изобразить в прямой форме блок-схему реализации цифрового фильтра второго порядка, у передаточной функции которого два комплексно-сопряжённых нуля $z_{1,2} = \pm 0.5j$ и два комплексно-сопряжённых полюса $z_{3,4} = \pm 0.2j$, а значение частотной характеристики на частоте 0 равно 1.28.

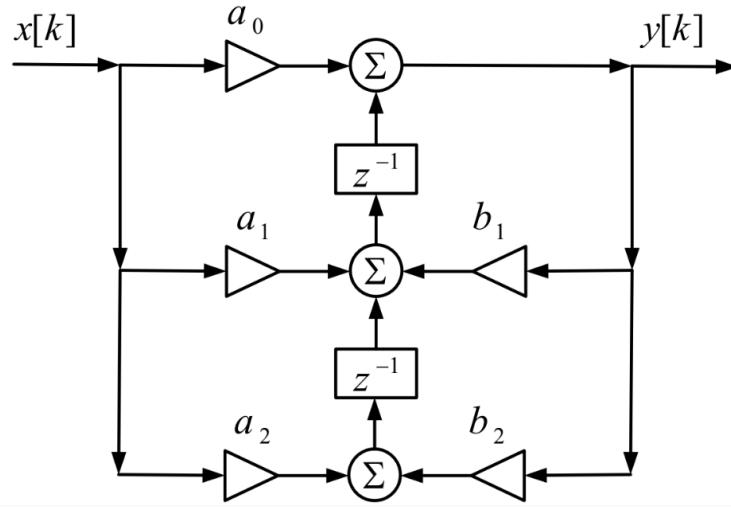
$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &= k \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - z_3)(z - z_4)} = k \frac{(z - z_1)(z - z_1^*)}{(z - z_3)(z - z_3^*)} = k \frac{z^2 + |z_1|^2}{z^2 + |z_3|^2} = k \frac{1 + |z_1|^2 z^{-2}}{1 + |z_3|^2 z^{-2}} = k \frac{1 + 0.25 \cdot z^{-2}}{1 + 0.04 \cdot z^{-2}}. \\ \mathcal{H}(z)|_{\nu=0} &= \mathcal{H}(z)|_{z=1} = k \frac{1 + 0.25}{1 + 0.04} = k \cdot 1.2019 = 1.28, \quad \Rightarrow k = 1.0650. \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(z) = 1.0650 \cdot \frac{1 + 0.25 \cdot z^{-2}}{1 + 0.04 \cdot z^{-2}}.$$



10.4

Описать переход от прямой формы реализации биквадратного блока к форме, представленной ниже.

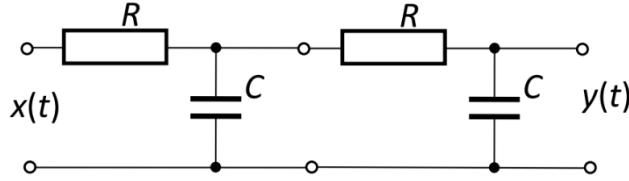


Чтобы получить представленную форму реализации биквадратного блока, необходимо:

- поменять в прямой форме реализации последовательность вычисления операций умножения и задержки, используя в каждой ветви отдельную линию задержки на нужное количество тактов;
- разделить общий единый сумматор на несколько двухходовых сумматоров;
- при этом, рассмотрев любую пару соседних сумматоров, можно заметить, что суммируемые ими сигналы претерпевают некоторую общую задержку. Это дает возможность поменять местами операции суммирования и задержки.

11.1

Методом инвариантной импульсной характеристики получить цифровой аналог каскада из двух RC-цепочек интегрирующего типа. Записать разностное уравнение, передаточную функцию и построить блок-схему одной из реализаций получившегося фильтра.



Уравнение для одной интегрирующей RC-цепочки:

$$RC \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t).$$

В случае $y(0) = 0$ преобразование Лапласа принимает вид:

$$RCp\mathcal{Y}(p) + \mathcal{Y}(p) = \mathcal{X}(p).$$

Передаточная функции одной RC-цепочки и каскада из двух RC-цепочек соответственно:

$$\mathcal{H}_1(p) = \frac{\mathcal{Y}(p)}{\mathcal{X}(p)} = \frac{1}{1+RCp}, \quad \mathcal{H}_2(p) = (\mathcal{H}_1(p))^2 = \frac{1}{(1+RCp)^2}.$$

Вычислим обратное преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} h_a(t) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \mathcal{H}_2(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{e^{pt} dp}{(1+RCp)^2} = \underset{p_p=-1/RC}{\text{res}} \left\{ \frac{e^{pt}}{(1+RCp)^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{(RC)^2} \underset{p_p=-1/RC}{\text{res}} \left\{ \frac{e^{pt}}{(p - (-\frac{1}{RC}))^2} \right\} = \frac{1}{(RC)^2} \lim_{p \rightarrow -1/RC} \left\{ \frac{de^{pt}}{dp} \right\} = \frac{t}{(RC)^2} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \end{aligned}$$

Получим импульсную характеристику цифрового фильтра:

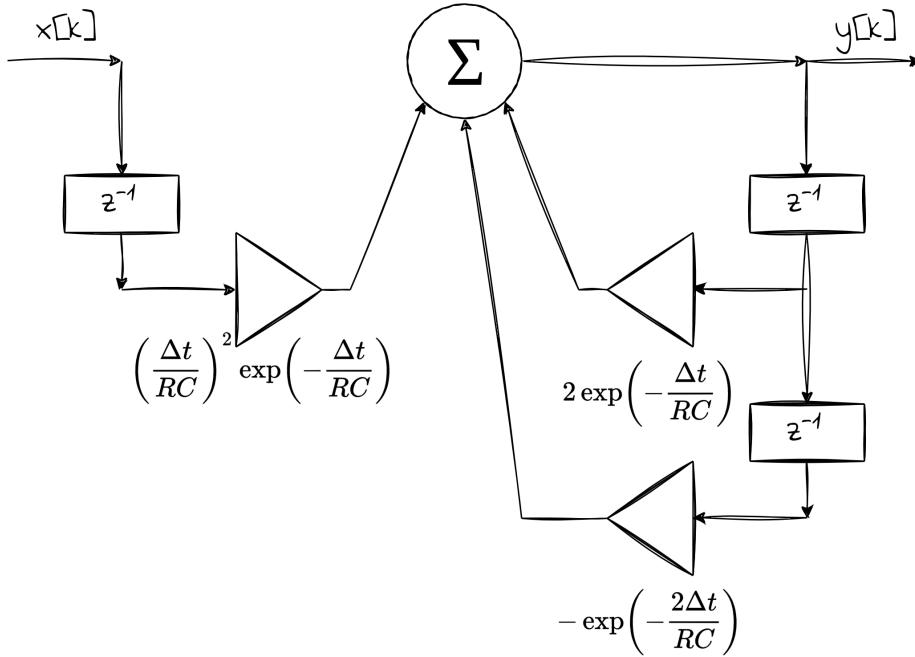
$$h[k] = \Delta t \cdot h_a(k\Delta t) = \frac{k(\Delta t)^2}{(RC)^2} \exp\left(-\frac{k\Delta t}{RC}\right).$$

Наконец, передаточная функция искомого цифрового фильтра:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} h[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\Delta t^2}{(RC)^2} \exp\left(-\frac{k\Delta t}{RC}\right) z^{-k} = \left(\frac{\Delta t}{RC}\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right) z^{-1}\right)^k = \\ &= \left(\frac{\Delta t}{RC}\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} k \alpha^k = \left(\frac{\Delta t}{RC}\right)^2 \frac{d}{d\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \right\} = \left(\frac{\Delta t}{RC}\right)^2 \frac{d}{d\alpha} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \right\} = \left(\frac{\Delta t}{RC}\right)^2 \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} = \\ &= \left(\frac{\Delta t}{RC}\right)^2 \frac{\exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right) z^{-1}}{\left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right) z^{-1}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\Delta t}{RC}\right)^2 \exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right) z^{-1}}{1 - 2 \exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right) z^{-1} + \exp\left(-\frac{2\Delta t}{RC}\right) z^{-2}}, \quad \left| \exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right) z^{-1} \right| < 1. \end{aligned}$$

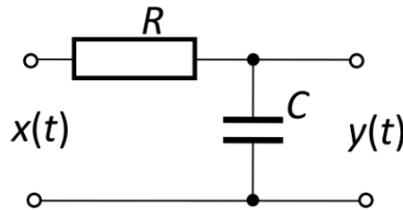
Разностное уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{\Delta t}{RC}\right)^2 \exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right) x[k-1] = y[k] - 2 \exp\left(-\frac{\Delta t}{RC}\right) y[k-1] + \exp\left(-\frac{2\Delta t}{RC}\right) y[k-2], \quad y[-2] = y[-1] = 0.$$



11.2

Методом билинейного \mathcal{Z} -преобразования получить цифровой аналог RC-цепочки интегрирующего типа. Записать разностное уравнение, передаточную функцию, изобразить нуль-полюсную диаграмму и построить блок-схему одной из реализаций получившегося фильтра.



Уравнение для одной интегрирующей RC-цепочки:

$$RC \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t).$$

В случае $y(0) = 0$ преобразование Лапласа принимает вид:

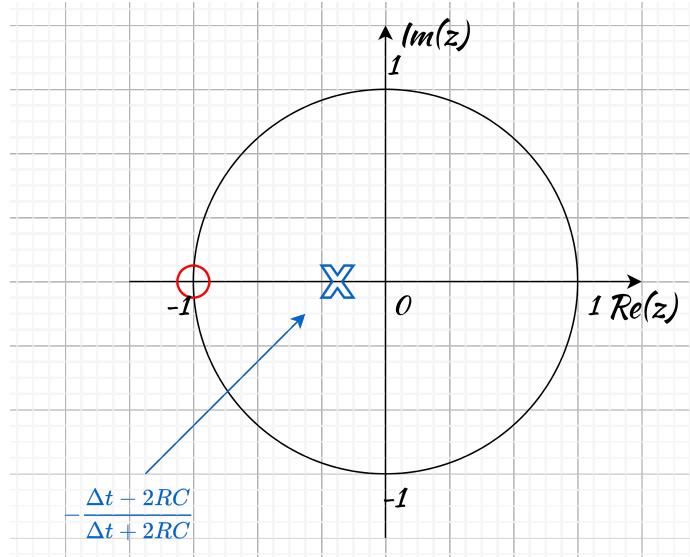
$$RCp\mathcal{Y}(p) + \mathcal{Y}(p) = \mathcal{X}(p).$$

Передаточная функция одной интегрирующей RC-цепочки:

$$\mathcal{H}_1(p) = \frac{\mathcal{Y}(p)}{\mathcal{X}(p)} = \frac{1}{1 + RCp}.$$

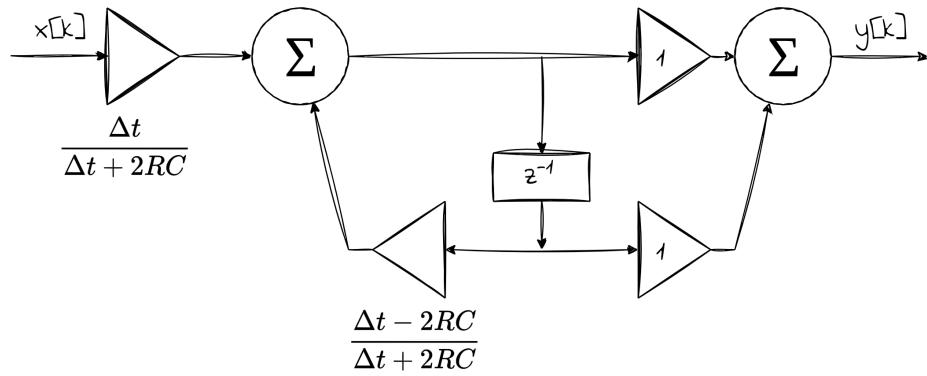
Согласно методу билинейного \mathcal{Z} -преобразования делаем замену $p = \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$:

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{1 + RC \frac{2}{\Delta t} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{1 + z^{-1}}{\left(1 + \frac{2RC}{\Delta t}\right) + \left(1 - \frac{2RC}{\Delta t}\right)z^{-1}} = \left(\frac{\Delta t}{\Delta t + 2RC}\right) \frac{1 + z^{-1}}{1 + \frac{\Delta t - 2RC}{\Delta t + 2RC}z^{-1}}.$$



Разностное уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta t + 2RC} \right) (x[k] + x[k-1]) = y[k] + \left(\frac{\Delta t - 2RC}{\Delta t + 2RC} \right) y[k-1], \quad y[-1] = 0.$$



11.3

Получить выражения для частотной характеристики, АЧХ и ФЧХ фильтра, заданного разностным уравнением

$$y[k] = (1 - \mathcal{A})x[k] + \mathcal{A} \cdot y[k - 1], \quad y[-1] = 0,$$

где $0 < \mathcal{A} < 1$ (квазинтегратор).

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) &= \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = \frac{1 - \mathcal{A}}{1 - \mathcal{A}z^{-1}} \\ \mathcal{H}(\nu) &= \mathcal{H}(z)|_{z=\exp(j2\pi\nu)} = \frac{1 - \mathcal{A}}{1 - \mathcal{A}\exp(-j2\pi\nu)} = \frac{1 - \mathcal{A}}{(1 - \mathcal{A}\cos(2\pi\nu)) + j\mathcal{A}\sin(2\pi\nu)}. \\ |\mathcal{H}(\nu)| &= \frac{1 - \mathcal{A}}{\sqrt{(1 - \mathcal{A}\cos(2\pi\nu))^2 + \mathcal{A}^2\sin^2(2\pi\nu)}} = \frac{1 - \mathcal{A}}{\sqrt{1 + \mathcal{A}^2 - 2\mathcal{A}\cos(2\pi\nu)}}. \\ \arg\{\mathcal{H}(\nu)\} &= -\arg\{(1 - \mathcal{A}\cos(2\pi\nu)) + j\mathcal{A}\sin(2\pi\nu)\} = -\arctg\left\{\frac{\mathcal{A}\sin(2\pi\nu)}{1 - \mathcal{A}\cos(2\pi\nu)}\right\}. \end{aligned}$$

12.1

Пусть выходные отсчёты нерекурсивного фильтра 1-ого порядка получаются усреднением текущего и предшествующего входных отсчётов

$$y[k] = 0.5x[k] + 0.5x[k-1].$$

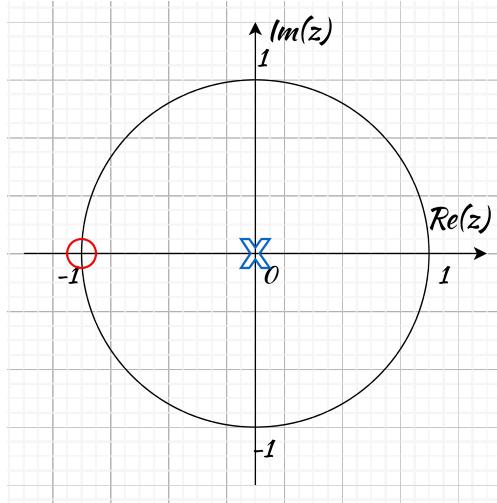
Найти импульсную характеристику $h[k]$ и переходную характеристику фильтра $g[k]$, определить время установления по переходной характеристике. Построить нуль-полюсную диаграмму и исследовать фильтр на устойчивость.

$$\mathcal{H}(z) = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{X}(z)} = 0.5(1 + z^{-1}) = h[0] + h[1]z^{-1}, \Rightarrow h[k] = \begin{cases} 0.5, & \text{если } k = 0 \text{ или } k = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$g[k] = \sum_{m=0}^{+\infty} h[k+m] = \begin{cases} 0.5, & \text{если } k = 0, \\ 1, & \text{если } k \geq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Время установления – 1 такт (если считать с нулевого).

$$\mathcal{H}(z) = 0.5(1 + z^{-1}) = \frac{1+z}{2z}, \Rightarrow z_p = 0, z_o = -1.$$



Единственный полюс $z_p = 0$ лежит внутри единичного круга на комплексной плоскости, то есть система является устойчивой по входу.

12.2

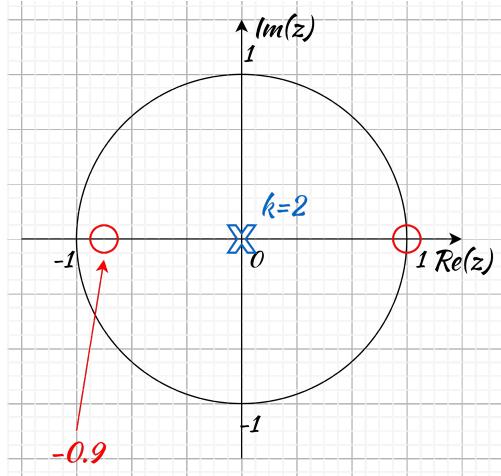
Для нерекурсивного фильтра второго порядка с передаточной функцией

$$\mathcal{H}(z) = 1 - 0.1z^{-1} - 0.9z^{-2}$$

построить блок-схему реализации в прямой форме и в виде последовательного соединённых нерекурсивных фильтров первого порядка. Построить нуль-полюсную диаграмму и исследовать фильтр на устойчивость. Определить импульсную характеристику $h[k]$ и переходную характеристику $g[k]$ фильтра.

$$\mathcal{H}(z) = 1 - 0.1z^{-1} - 0.9z^{-2} = \left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + \frac{9}{10}z^{-1}\right) = \frac{(z-1)(z+\frac{9}{10})}{z^2},$$

$$z_p = 0, k_p = 2, z_{o_1} = 1, z_{o_2} = -\frac{9}{10}.$$



$$\mathcal{H}(z) = 1 - 0.1z^{-1} - 0.9z^{-2} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2}, \Rightarrow h[k] = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ -0.1, & \text{если } k = 1, \\ -0.9, & \text{если } k = 2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$g[k] = \sum_{m=0}^{+\infty} h[k+m] = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 0.9, & \text{если } k = 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

12.3

Записать разностное уравнение нерекурсивного фильтра второго порядка, передаточная функция которого содержит два комплексно-сопряженных нуля, расположенных на мнимой оси, а частотная характеристика фильтра $\mathcal{H}(\theta)$ равна нулю в точках $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ и единице в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Определить АЧХ и ФЧХ фильтра. Вычислить импульсную характеристику такого фильтра. Определить, будет ли ФЧХ такого фильтра линейной.

Определить, к какому классу частотно-избирательных фильтров его можно отнести:

- (a) фильтры нижних частот,
- (b) фильтры верхних частот,
- (c) полосовые фильтры,
- (d) режекторные фильтры.

Передаточная функция имеет два комплексно-сопряженных нуля, расположенных на мнимой оси. Без ограничения общности, $z_o = jy$, $y \in \mathbb{R}$. Пусть $k \in \mathbb{R}$ – множитель в приведённой форме $\mathcal{H}(z)$.

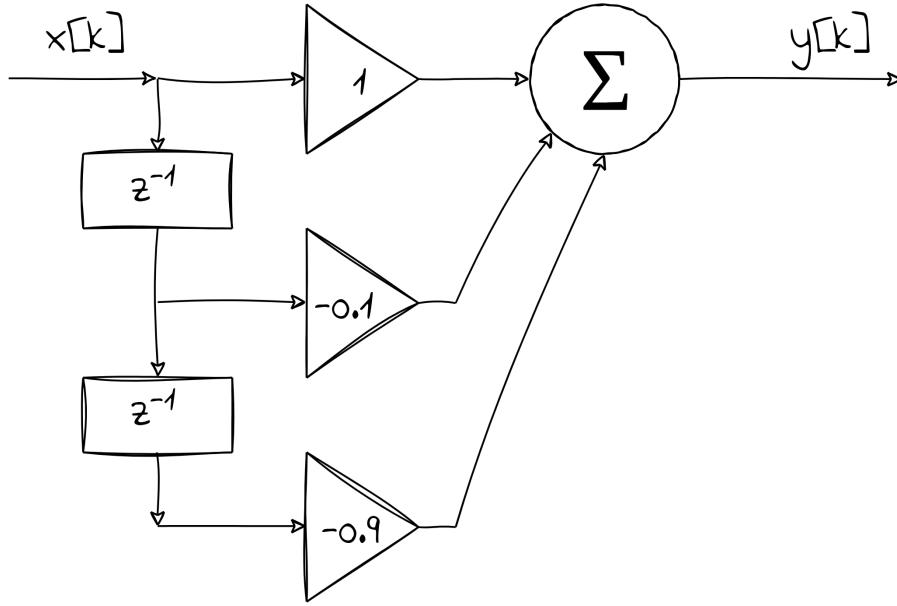


Рис. 12.4: Блок-схема фильтра в прямой форме.

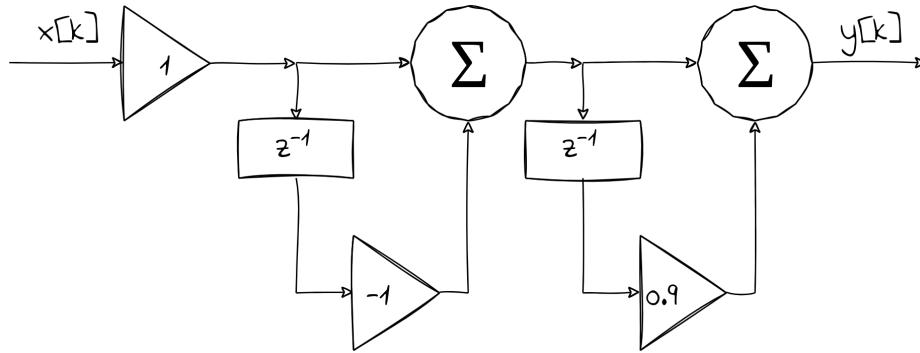


Рис. 12.5: Блок-схема фильтра в виде последовательного соединения нерекурсивных фильтров первого порядка.

$$\mathcal{H}(z) = h(z - z_o)(z - z_o^*) = h(z - jy)(z + jy) = h(z^2 + y^2), \Rightarrow \mathcal{H}(\theta) = \mathcal{H}(z)|_{z=e^{j\theta}} = h(e^{2j\theta} + y^2).$$

$$\mathcal{H}(0) = \mathcal{H}(\pi) = \mathcal{H}(\theta)|_{\theta=0} = h(1 + y^2) = 1.$$

$$\mathcal{H}(\pm\pi/2) = \mathcal{H}(\theta)|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = h(-1 + y^2) = 0.$$

$$\begin{cases} h(+1 + y^2) = 1 \\ h(-1 + y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ h = 0.5 \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(\theta) = 0.5(1 + e^{2j\theta}) = 0.5e^{-j\theta}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = e^{-j\theta} \cos \theta.$$

$$|\mathcal{H}(\theta)| = |\cos \theta|, \arg\{\mathcal{H}(\theta)\} = \arg\{e^{-j\theta}\} = -\theta, \Rightarrow \text{ФЧХ линейная.}$$

Этот фильтр относится к гребенчатым фильтрам, поскольку его АЧХ имеет гребенчатую структуру. Если же рассматривать главный период, то его можно отнести к режекторным фильтрам.

13.1

Для нерекурсивного фильтра первого порядка, заданного разностным уравнением

$$y[k] = x[k] + ax[k - 1]$$

найти значения a , при которых

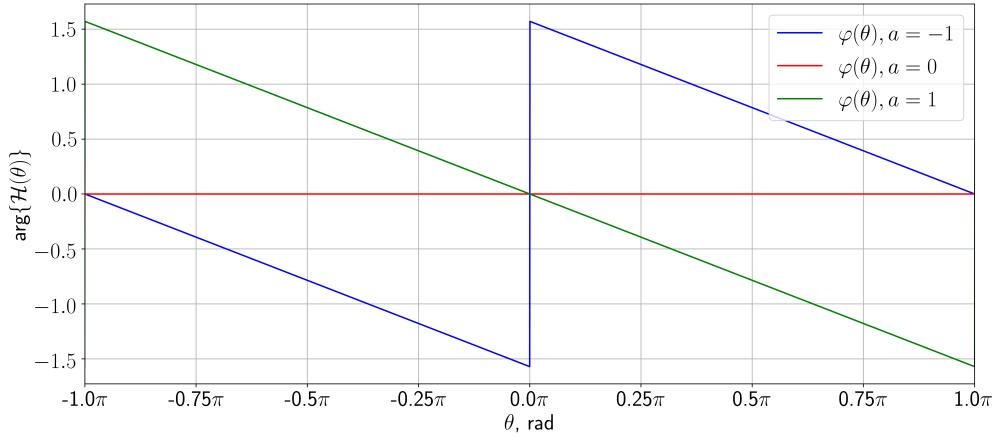
- (a) для всех частот одинаковая фазовая задержка $\tau_{ph}(\theta) = \text{const}$,
- (b) для всех частот одинаковая групповая задержка $\tau_{gr}(\theta) = \text{const}$.

Изобразить ФЧХ для этих случаев на отрезке $\theta \in [-\pi; \pi]$.

$$\mathcal{H}(z) = 1 + az^{-1} \Big|_{z=e^{j\theta}} = 1 + ae^{-j\theta} = (1 + a \cos \theta) - ja \sin \theta, \quad \Rightarrow \varphi(\theta) = \arg\{\mathcal{H}(\theta)\} = -\arctg\left(\frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta}\right).$$

$$\tau_{ph}(\theta) = -\frac{\varphi(\theta)}{\theta} \Delta t = \frac{\Delta t}{\theta} \arctg\left(\frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta}\right), \quad \tau_{gr}(\theta) = -\frac{d\varphi(\theta)}{d\theta} \Delta t = \Delta t \frac{d}{d\theta} \left\{ \arctg\left(\frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta}\right) \right\}.$$

$$\begin{aligned} \tau_{ph}(\theta) = \text{const} &\Leftrightarrow a \in \{0, 1\}, \\ \tau_{gr}(\theta) = \text{const} &\Leftrightarrow a \in \{-1, 0, 1\}. \end{aligned}$$



13.2

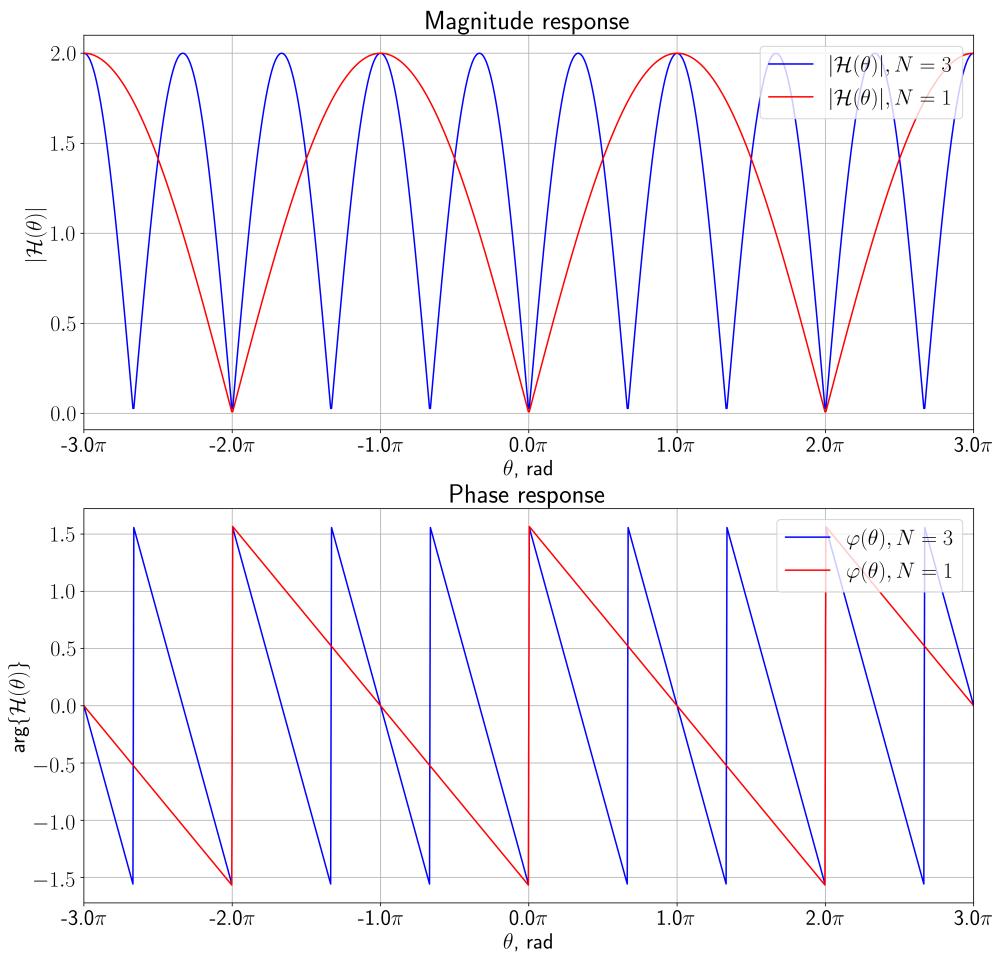
Определить АЧХ и ФЧХ гребенчатого фильтра $y[k] = x[k] - x[k - N]$. Является ли ФЧХ линейной?

$$\mathcal{H}(z) = 1 - z^{-N} \Big|_{z=e^{j\theta}} = 1 - \exp(-jN\theta) = 2j \exp\left(-j\frac{N\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{N\theta}{2}\right) = 2 \exp\left(j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{N\theta}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{N\theta}{2}\right).$$

$$|\mathcal{H}(\theta)| = 2 \left| \sin\left(\frac{N\theta}{2}\right) \right|,$$

$$\varphi(\theta) = \frac{\pi}{2} - \frac{N\theta}{2}, \text{ где } 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{N} \text{ с периодом } T_\theta = \frac{2\pi}{N}. \quad (\text{С учётом смены знака синусом.})$$

ФЧХ данного фильтра является линейной (кусочно-линейной).



13.3

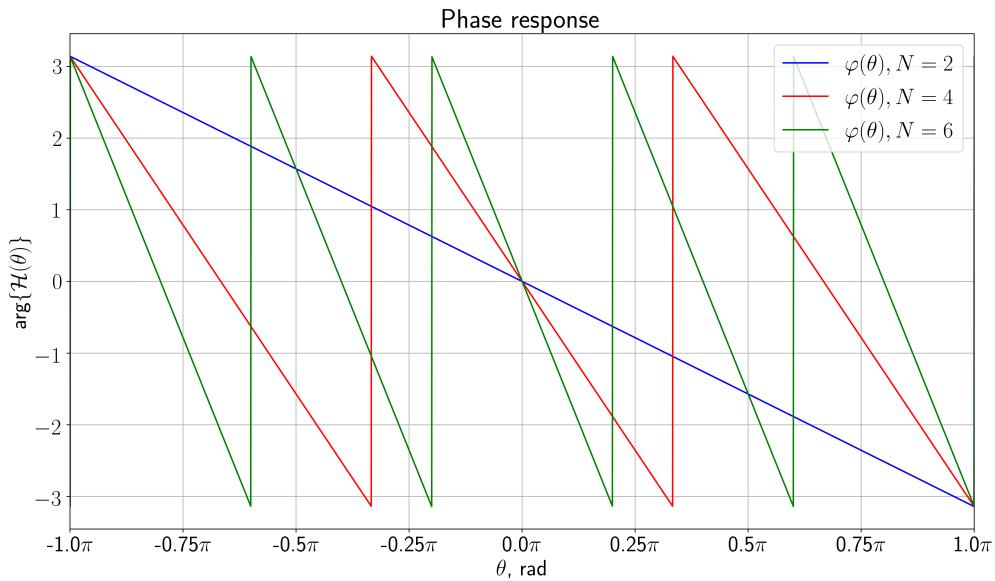
Определить ФЧХ СИС-фильтра с передаточной функцией

$$\mathcal{H}_2(z) = \left(\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right)^2.$$

Будет ли ФЧХ такого фильтра линейной на $\theta \in [-\pi; \pi]$? Как это соотносится с видом импульсной характеристики такого фильтра?

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2(z) &= \left(\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \right)^2 \Big|_{z=e^{j\theta}} = \left(\frac{1 - e^{-jN\theta}}{1 - e^{-j\theta}} \right)^2 = \frac{e^{-jN\theta}}{e^{-j\theta}} \frac{\sin^2\left(\frac{N\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{-j(N-1)\theta} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \\ \varphi(\theta) &= -j(N-1)\theta + \frac{2\pi}{(N-1)m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

ФЧХ данного фильтра является линейной (кусочно-линейной). Это означает, что импульсная характеристика должна иметь симметричный или антисимметричный вид. Действительно, импульсная характеристика данного фильтра содержит $2N - 1$ ненулевых отсчётов и является дискретной свёрткой двух последовательностей единичных импульсов длины N . Такая свёртка имеет симметричный треугольный вид.



Часть II

Spring term

1.1

Вычислить ДПФ и ДВПФ для окна Хэмминга (окна для ДПФ) длины $N = 16$

$$\omega[k] = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right), & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Построить графики действительной и мнимой части коэффициентов ДПФ на одном периоде.

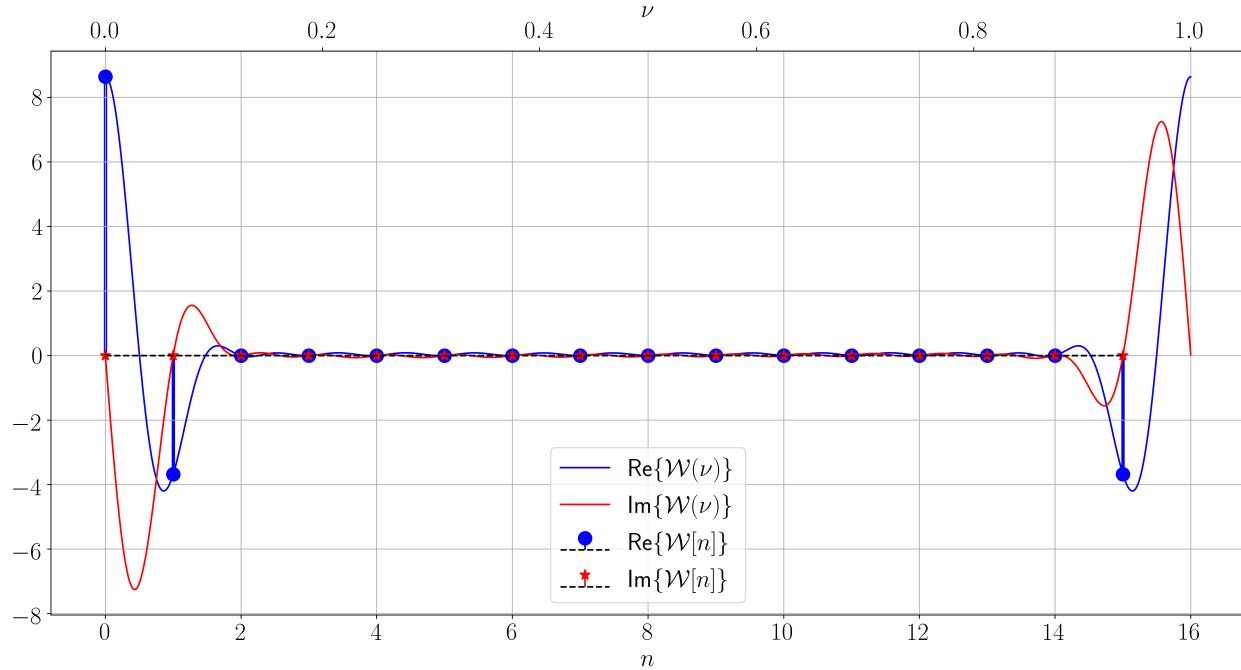
$$\omega[k] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = 0.54 - 0.23 \cdot \left[\exp\left(+j\frac{2\pi k}{N}\right) + \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}\right) \right], \quad k \in [0, N-1].$$

По теореме смещения для ДВПФ, получим, что

$$\mathcal{W}(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} \omega[k] e^{-j2\pi\nu k} = 0.54\mathcal{W}_D(\nu) - 0.23 \cdot \left[\mathcal{W}_D\left(\nu - \frac{1}{N}\right) + \mathcal{W}_D\left(\nu + \frac{1}{N}\right) \right]^5.$$

Аналогичным образом получаем ДПФ окна Хэмминга:

$$\mathcal{W}[n] = \begin{cases} +0.54N, & \text{если } n = mN, m \in \mathbb{Z}, \\ -0.23N, & \text{если } n = mN \pm 1, m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



⁵ $\mathcal{W}_D(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} e^{-j(N-1)\pi\nu}$ – ДВПФ прямоугольного окна (окна Дирихле) из N отсчётов.

1.2

Предположим, что требуется провести ДПФ-анализ сигнала $x[k]$ с использованием окна Ханна $w[k]$. Размерность ДПФ, длина окна и длина сигнала равны N . Доказать, что для вычисления ДПФ $\mathcal{Y}[n]$ сигнала $x[k]w[k]$ достаточно провести $2N$ сдвигов на один двоичный разряд и $2N$ сложений для коэффициентов ДПФ $\mathcal{X}[n]$ последовательности $x[k]$, т.е. показать, что

$$\mathcal{Y}[n] = \frac{1}{2} \left(\mathcal{X}[n] - \frac{1}{2} (\mathcal{X}[n-1]_N + \mathcal{X}[n+1]_N) \right).$$

$$\begin{aligned} y[k] &= x[k]w[k] = x[k] \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) = \frac{1}{2} x[k] \left(1 - \frac{1}{2} \left[\exp \left(+j \frac{2\pi k}{N} \right) + \exp \left(-j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(x[k] - \frac{1}{2} \left[x[k] \exp \left(+j \frac{2\pi k}{N} \right) + x[k] \exp \left(-j \frac{2\pi k}{N} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Тогда с применением теоремы смещения для ДПФ получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} y[k] \exp \left(-j \frac{2\pi}{N} nk \right) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) \exp \left(-j \frac{2\pi}{N} nk \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp \left(-j \frac{2\pi}{N} nk \right) - \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp \left(-j \frac{2\pi}{N} (n-1)k \right) + \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp \left(-j \frac{2\pi}{N} (n+1)k \right) \right] \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{X}[n] - \frac{1}{2} \left[\mathcal{X}[n-1]_N + \mathcal{X}[n+1]_N \right] \right). \end{aligned}$$

1.3

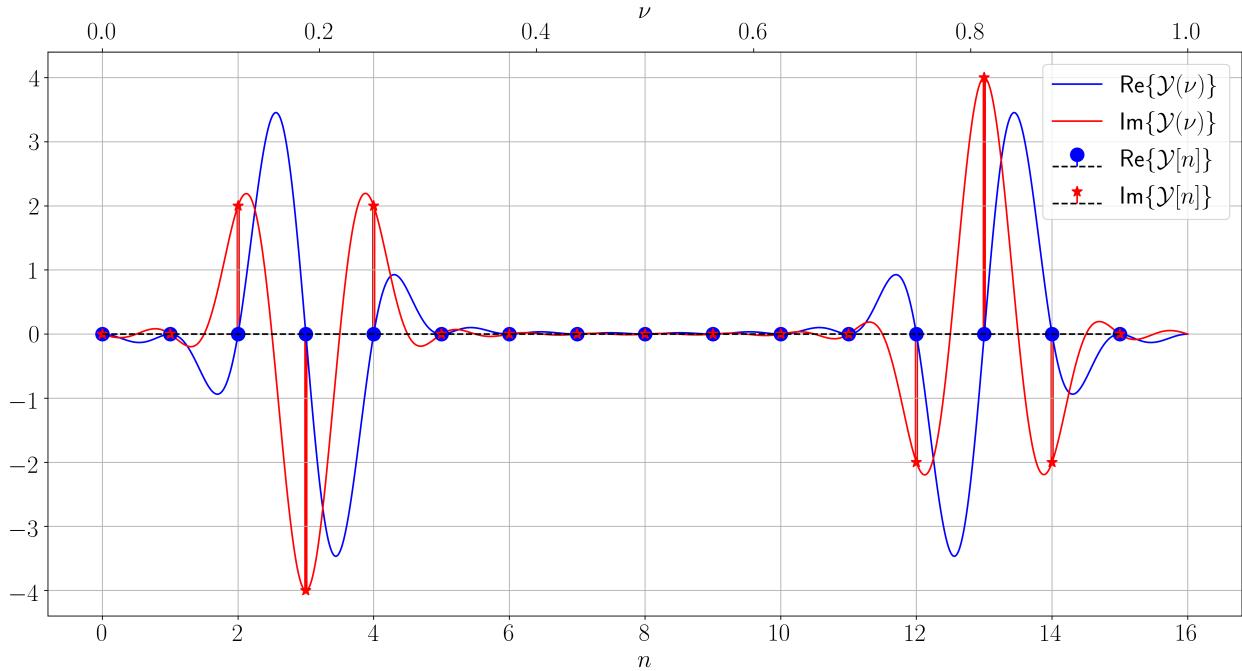
Вычислить ДВПФ и ДПФ последовательности $y[k] = x[k]\omega[k]$, где $x[k] = \sin\left(2\pi\frac{3}{16}k\right)$, а $\omega[k]$ — окно Ханна для ДПФ длины $N = 16$. Построить графики действительной и мнимой части коэффициентов ДПФ на одном периоде.

$$\begin{aligned} y[k] &= x[k]\omega[k] = \sin\left(2\pi\frac{3}{16}k\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right) = -\frac{j}{2} \left[\exp\left(+j\frac{2\pi}{16}3k\right) - \exp\left(-j\frac{2\pi}{16}3k\right) \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\exp\left(+j\frac{2\pi k}{N}\right) + \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}\right) \right) \right] = \frac{j}{4} \left[-\exp\left(+j\frac{2\pi}{16}3k\right) + \exp\left(-j\frac{2\pi}{16}3k\right) \right] + \\ &\quad + \frac{j}{8} \left[+\exp\left(+j\frac{2\pi}{16}2k\right) + \exp\left(+j\frac{2\pi}{16}4k\right) - \exp\left(-j\frac{2\pi}{16}4k\right) - \exp\left(-j\frac{2\pi}{16}2k\right) \right]. \end{aligned}$$

Используя теоремы смещения для ДВПФ и ДПФ, находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\nu) &= \sum_{k=0}^{15} y[k]e^{-j2\pi\nu k} = \frac{j}{4} \left[-\mathcal{W}_D\left(\nu - \frac{3}{16}\right) + \mathcal{W}_D\left(\nu + \frac{3}{16}\right) \right] + \\ &\quad + \frac{j}{8} \left[+\mathcal{W}_D\left(\nu - \frac{2}{16}\right) + \mathcal{W}_D\left(\nu - \frac{4}{16}\right) - \mathcal{W}_D\left(\nu + \frac{4}{16}\right) - \mathcal{W}_D\left(\nu + \frac{2}{16}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}[n] = \begin{cases} \mp 4j, & \text{если } n = 16m \pm 3, m \in \mathbb{Z}, \\ \pm 2j, & \text{если } n = 16m \pm 2 \text{ или } n = 16m \pm 4, m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$



2.1

Даны два сигнала, представленные в виде линейной комбинации двух косинусоид:

$$\begin{aligned}x_1[k] &= \cos(\pi k/4) + \cos(17\pi k/64), \\x_2[k] &= \cos(\pi k/4) + \cos(21\pi k/64).\end{aligned}$$

Вычисляется спектральная оценка каждого из этих сигналов с помощью 64-точечного ДПФ и 64-точечного прямоугольного окна. Определить, будут ли различимы спектральные максимумы в каждом из двух случаев.

$$x_1[k] = \cos(\pi k/4) + \cos(17\pi k/64) = \cos(8 \cdot 2\pi k/64) + \cos(8.5 \cdot 2\pi k/64).$$

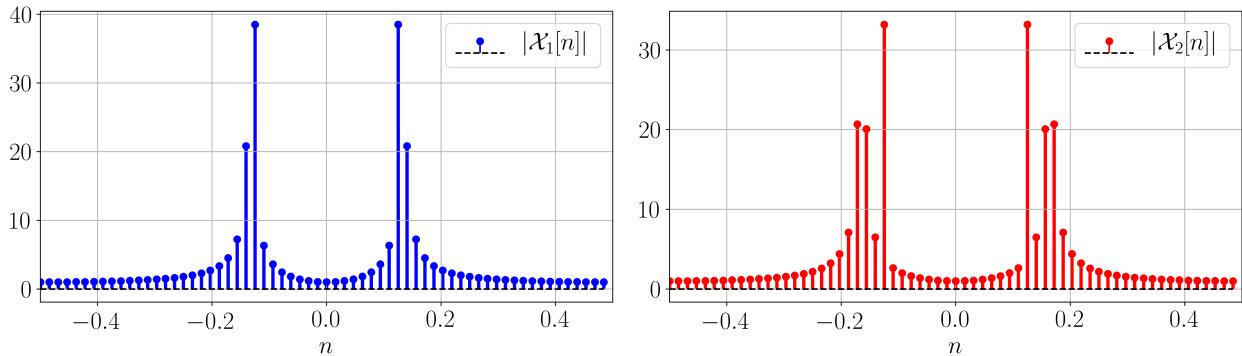
$$\mathcal{X}_1(\nu) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{W}_{\mathcal{D}} \left(\nu - \frac{8}{64} \right) + \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \left(\nu + \frac{8}{64} \right) + \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \left(\nu - \frac{8.5}{64} \right) + \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \left(\nu + \frac{8.5}{64} \right) \right]^6.$$

Расстояние между относительными частотами косинусоид $\Delta\nu = \frac{8.5-8}{64} = \frac{0.5}{64}$, то есть справедливо, что $\Delta\nu < \frac{0.89}{64} = \Delta\nu_{-3\text{dB}}$. В этом случае можно сделать вывод о том, что спектральные максимумы в ДПФ не будут различимы (сольются в один максимум).

$$x_2[k] = \cos(\pi k/4) + \cos(21\pi k/64) = \cos(2 \cdot 8\pi k/64) + \cos(10.5 \cdot 2\pi k/64).$$

$$\mathcal{X}_2(\nu) = \frac{1}{2} \left[\mathcal{W}_{\mathcal{D}} \left(\nu - \frac{8}{64} \right) + \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \left(\nu + \frac{8}{64} \right) + \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \left(\nu - \frac{10.5}{64} \right) + \mathcal{W}_{\mathcal{D}} \left(\nu + \frac{10.5}{64} \right) \right].$$

Расстояние между относительными частотами косинусоид $\Delta\nu = \frac{10.5-8}{64} = \frac{2.5}{64}$, что превышает ширину главного лепестка окна на нулевом уровне $\Delta\nu_0 = (\frac{2}{64})$. С учётом того, что абсолютные значения амплитуд максимумов совпадают, можно сделать вывод о том, что спектральные максимумы будут различимы как в ДВПФ, так и в ДПФ.



⁶ $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} e^{-j(N-1)\pi\nu}$ – ДВПФ прямоугольного окна (окна Дирихле) из $N = 64$ отсчётов.

2.2

Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=0}^M \mathcal{A}_m \cos\left(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где \mathcal{A}_m и φ_m – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих; m – неизвестные заранее целые числа, определяющие нормированные частоты $\nu_m = m/N$ гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ.

Выразите неизвестные амплитуды и фазы через отсчёты ДПФ данной последовательности.

$$\begin{aligned} \mathcal{X}[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^M \mathcal{A}_m \cos\left(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m\right) \right) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \mathcal{A}_m \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{j(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m)} + e^{-j(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m)} \right) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \mathcal{A}_m \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{j(2\pi \frac{m-n}{N} k + \varphi_m)} + \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(2\pi \frac{m+n}{N} k + \varphi_m)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \mathcal{A}_m \left(e^{+j\varphi_m} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{m-n}{N} k} + e^{-j\varphi_m} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j2\pi \frac{N-(m+n)}{N} k} \right) = \\ &= \frac{N}{2} \sum_{m=0}^M \mathcal{A}_m (e^{+j\varphi_m} \delta_{m,n} + e^{-j\varphi_m} \delta_{m,N-n}) = \frac{N}{2} (\mathcal{A}_n e^{+j\varphi_n} + \mathcal{A}_{N-n} e^{-j\varphi_{N-n}}). \end{aligned}$$

Если $M \leq \lceil N/2 \rceil - 1$, то система уравнений будет однозначно и легко разрешима относительно неизвестных \mathcal{A}_m и φ_m :

$$\mathcal{A}_m = \frac{2}{N} |\mathcal{X}[m]|, \quad \varphi_m = \arg\{\mathcal{X}[m]\}, \quad m = 0, \dots, M \leq \lceil N/2 \rceil - 1.$$

2.3

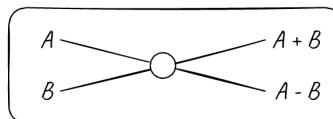
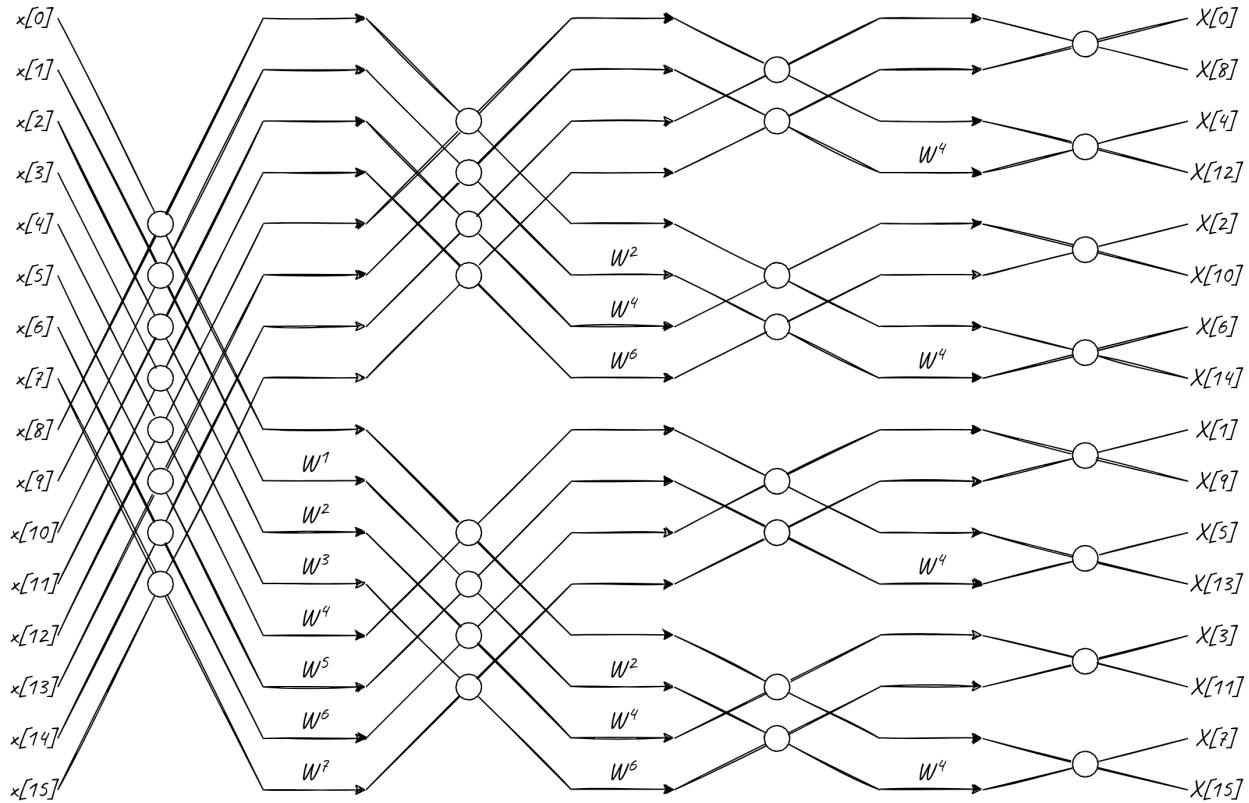
Предположим, что нужно вычислить спектральную оценку дискретного сигнала с помощью ДВПФ и окна. При этом необходимо добиться разрешения не менее $\Delta\nu = 0.0075$, а длина окна фиксирована и равна $N = 256$.

Используя данные из таблицы приложения к лекции, определить, какие из следующих окон гарантированно позволяют выполнить поставленную задачу: а) прямоугольное, б) Бартлетта, в) Ханна, г) Хэмминга, д) Блэкмана.

Заметим, что $\Delta\nu = 0.0075 = \frac{1.92}{N}$. Спектральные компоненты будут гарантировано различимы, если $\Delta\nu = \frac{1.92}{N} \geq \Delta\nu_{-6dB}$. Исходя из этого условия, заключаем, что для задачи подходят: а) прямоугольное окно ($\Delta\nu_{-6dB} = \frac{1.2}{N}$), б) окно Бартлетта ($\Delta\nu_{-6dB} = \frac{1.78}{N}$), г) окно Хэмминга ($\Delta\nu_{-6dB} = \frac{1.82}{N}$).

3.1

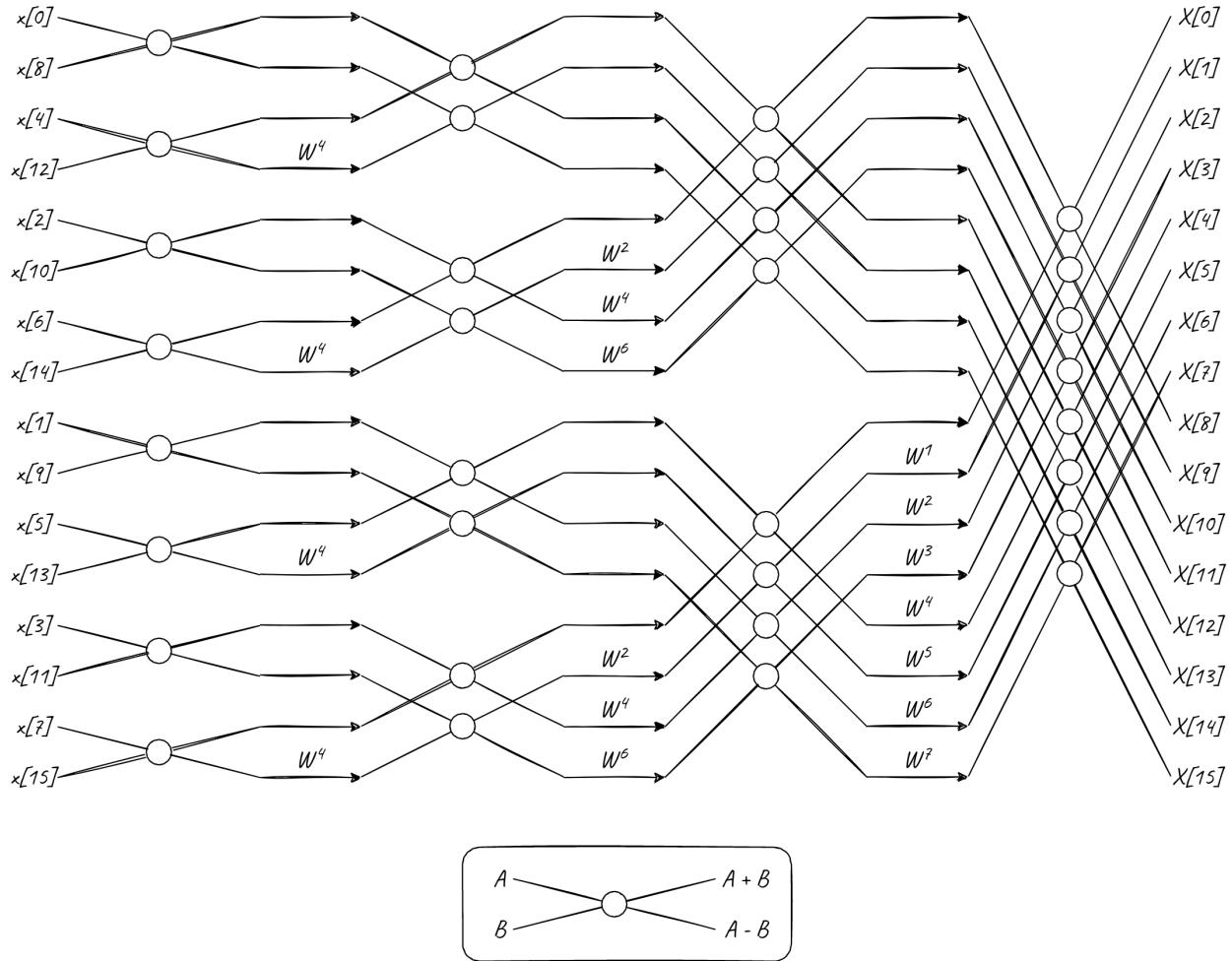
Изобразить граф алгоритма БПФ с прореживанием по частоте для $N = 16$. Объяснить, в чем заключается базовая операция данного алгоритма.



Базовой операцией является двухточечное ДПФ по основанию 2, состоящее из сложения и вычитания и не содержащее умножений. Все умножения вынесены в поворачивающие множители между итерациями алгоритма. Входные отсчеты должны быть расположены в естественном битовом порядке, а выходные — в инверсном битовом порядке.

3.2

Изобразить граф алгоритма БПФ с прореживанием по времени для $N = 16$. Объяснить, в чем заключается базовая операция данного алгоритма.



Базовой операцией является двухточечное ДПФ по основанию 2, состоящее из сложения и вычитания и не содержащее умножений. Все умножения вынесены в поворачивающие множители между итерациями алгоритма. Входные отсчеты должны быть расположены в инверсном битовом порядке, а выходные — в естественном битовом порядке.

3.3

Записать матрицу, задающую ДПФ преобразование над последовательностью (вектором) длины 4. Указать матрицу, задающую обратное преобразование. В ответе значения всех элементов матрицы должны быть представлены как комплексные числа.

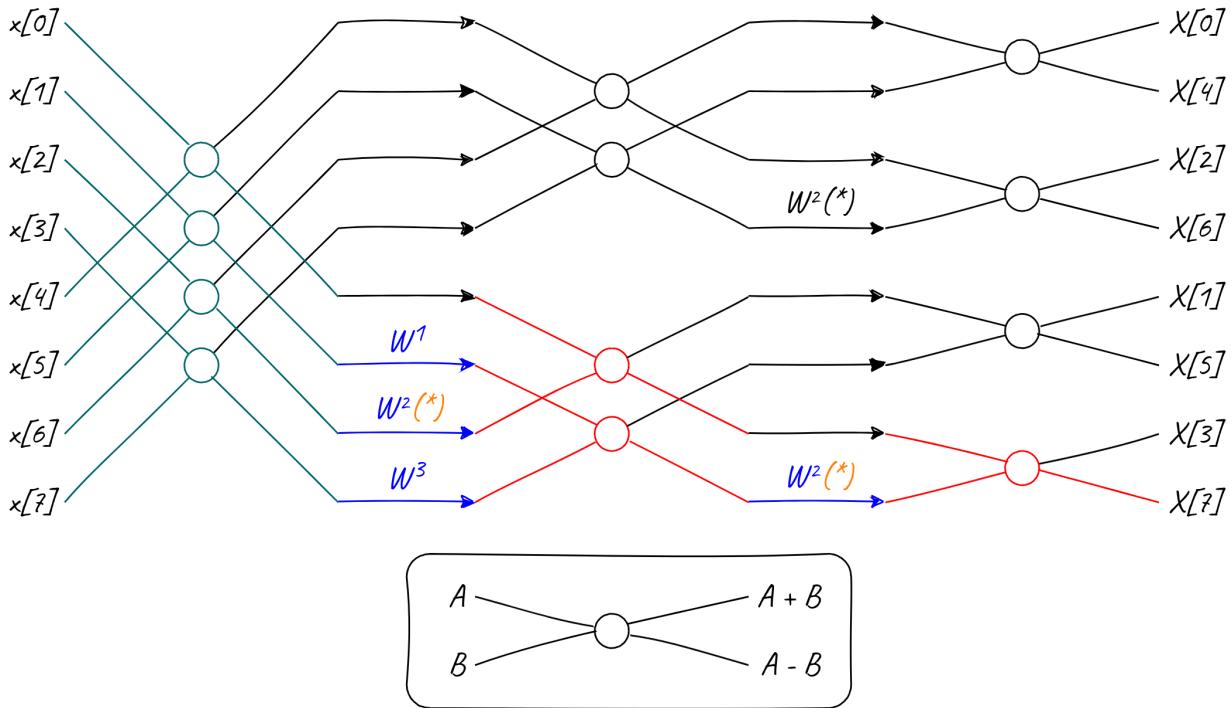
$$\begin{aligned}
 [W_4] &= \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^4 & W_4^6 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^6 & W_4^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 & W_4^0 \\ W_4^0 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ W_4^0 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ W_4^0 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -j & -1 & +j \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +j & -1 & -j \end{bmatrix}. \\
 [W_4]^{-1} &= \frac{1}{4}[W_4]^* = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +j & -1 & -j \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -j & -1 & +j \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

4.1

Предположим, что требуется найти 7-ой отчет 8-точечного ДПФ некоторой действительной последовательности. Сравнить (заполнить таблицу) количество операций, которое требуется для вычисления 8-точечного ДПФ по алгоритму БПФ с прореживанием по частоте с числом операций в алгоритме Герцеля.

	БПФ	БПФ ($\mathcal{X}[7]$)	Алгоритм Герцеля ($\mathcal{X}[7]$)
Число действительных сложений и вычитаний	14	4	16
Число действительных умножений	0(3)	0(2)	8
Число комплексных сложений и вычитаний	10	3	1
Число комплексных умножений	5(2)	4(2)	1

Для алгоритма БПФ с прореживанием по частоте найдём общее число операций в графе, которое потребуется, чтобы посчитать весь вектор ДПФ. Также найдём число операций, которое нужно, чтобы найти только один отсчёт $X[7]$. Во втором случае для наглядности операции выделены в графе соответствующими цветами. Значения в скобках учитывают, что умножение на чисто мнимое число $W^2 = W_8^2 = \exp(-j2\pi\frac{2}{8}) = -j$ в некотором смысле можно считать действительным умножением внутри мнимой части комплексного числа.



Для поиска $\mathcal{X}[7]$ согласно алгоритму Герцеля будем иметь следующие соотношения. Знаки арифметических операций выделены соответствующими цветами.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_7[m] &= x[m] + 2 \cos\left(2\pi\frac{7}{8}\right) \times \mathcal{V}_7[m-1] - \mathcal{V}_7[m-2], \quad 0 \leq m \leq 7, \\ \mathcal{X}[7] &= W_8^{-7} \times V_7[7] - V_7[6]. \end{aligned}$$

4.2

Пусть требуется вычислить 3-ий отсчет 64-точечного ДПФ некоторой действительной последовательности конечной длительности.

Привести блок-схемы фильтров:

- (а) БИХ-фильтра второго порядка алгоритма Герцеля,
- (б) рекурсивного КИХ-фильтра скользящего спектрального анализа.

Указать, как выход фильтра соответствует значению искомого отсчета ДПФ.

- (а) Схема БИХ-фильтра второго порядка алгоритма Герцеля для поиска 3-ого отсчета 64-точечного ДПФ действительной последовательности конечной длительности изображена на рис. 4.6. При этом правую часть фильтра (в красной рамке) достаточно вычислить лишь один раз на финальном этапе. Искомый отсчёт ДПФ будет равен выходу фильтра (с правой частью) на последней 63-ей итерации (считая с нулевой).

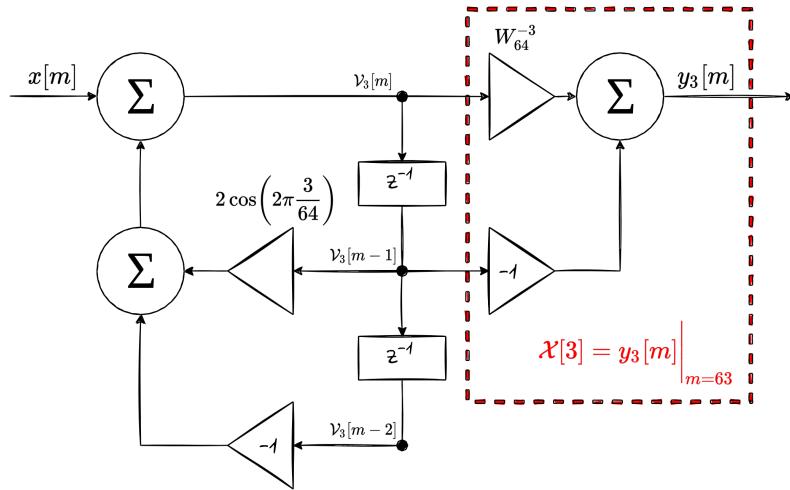


Рис. 4.6: Схема БИХ-фильтра второго порядка алгоритма Герцеля.

- (б) На рис. 4.7 представлена схема рекурсивного КИХ-фильтра скользящего однобинового спектрального анализа для поиска 3-ого отсчета 64-точечного ДПФ действительной последовательности конечной длительности. Искомый отсчёт ДПФ будет равен выходу фильтра на 63-ей итерации алгоритма (считая с нулевой).

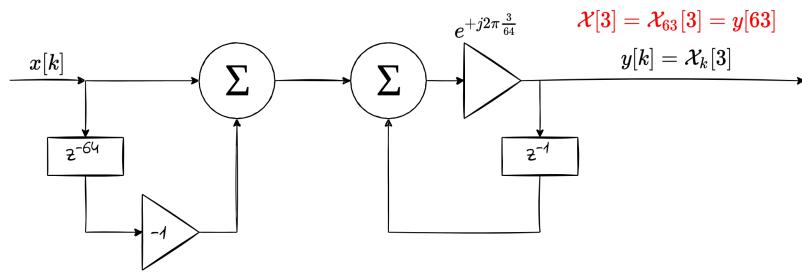


Рис. 4.7: Схема рекурсивного КИХ-фильтра скользящего однобинового спектрального анализа.

4.3

Предположим, что с помощью окна длиной $M = 4000$ осуществляется вычисление кратковременного дискретного преобразования Фурье последовательности

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{f_1}{f_d} k + \varphi_1\right) + \cos\left(2\pi \frac{f_2}{f_d} k + \varphi_2\right)$$

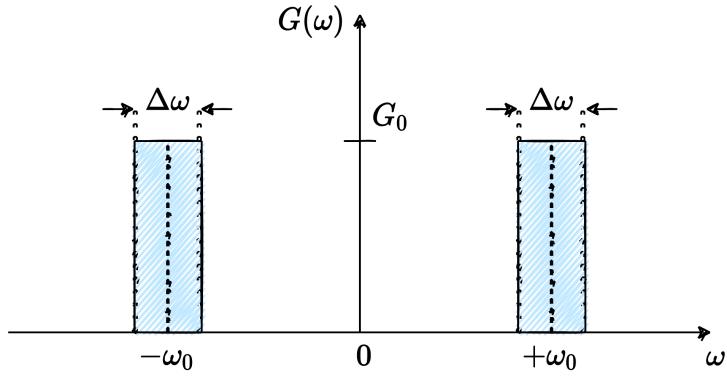
длиной в $N = 40000$ отсчетов без перекрытия. Фазы φ_1 и φ_2 неизвестны. Частота дискретизации $f_d = 44100$ Hz.

Для случая окна Ханна указать, начиная с какого значения $\Delta f = |f_1 - f_2|$ можно выбором необходимой размерности ДПФ N_{FFT} обеспечить различимость гармонических компонент на спектрограмме. Спектральные компоненты будут гарантировано различимы, если $\Delta f = |f_1 - f_2| \geq \Delta f_{-6\text{dB}}$.

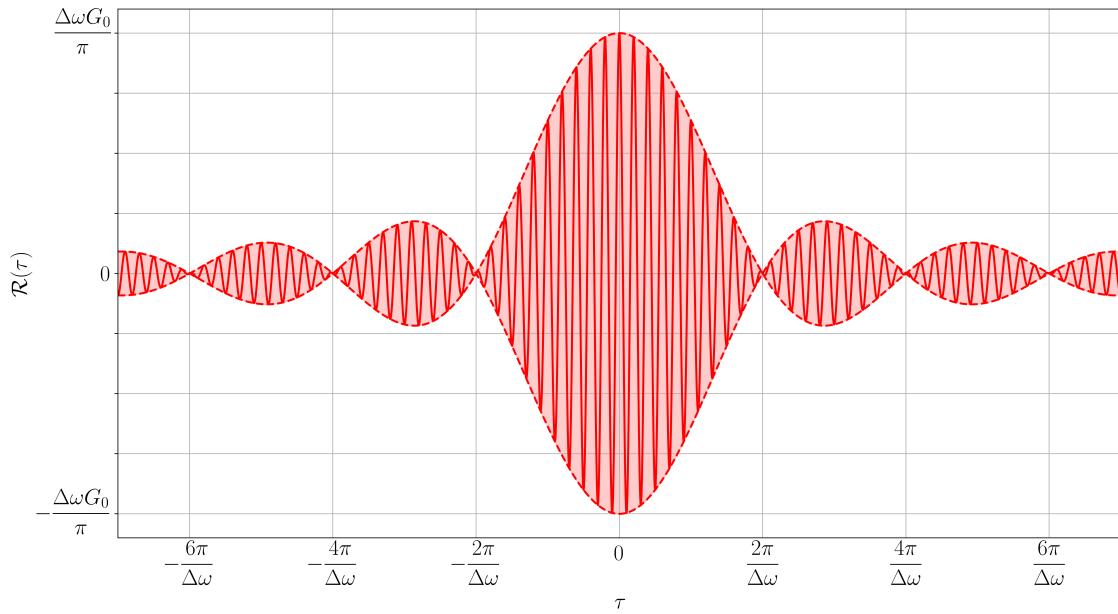
$$\Delta f = |f_1 - f_2| \geq \Delta f_{-6\text{dB}} = f_d \cdot \max\left\{\Delta\nu_{-6\text{dB}}, \frac{2}{N_{\text{FFT}}}\right\} = f_d \cdot \max\left\{\frac{2.0}{M}, \frac{2}{N_{\text{FFT}}}\right\} = \frac{2f_d}{M} = 22.05 \text{ Hz.}$$

5.1

Для узкополосного случайного процесса со спектром шириной $\Delta\omega$ сосредоточенным возле частот $\pm\omega_0$ определить и изобразить корреляционную функцию $\mathcal{R}(\tau)$.



$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} G(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} G_0 \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{G_0}{\pi\tau} \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} d\sin(\omega\tau) = \\
 &= \frac{G_0}{\pi\tau} \sin(\omega\tau) \Big|_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} = \frac{G_0}{\pi\tau} [\sin((\omega_0 + \Delta\omega/2)\tau) - \sin((\omega_0 - \Delta\omega/2)\tau)] = \frac{2G_0}{\pi\tau} \cos(\omega_0\tau) \sin\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right) = \\
 &= \frac{\Delta\omega G_0}{\pi} \cos(\omega_0\tau) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\Delta\omega\tau}{2}} = \frac{\Delta\omega G_0}{\pi} \cos(\omega_0\tau) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\Delta\omega\tau}{2}\right).
 \end{aligned}$$



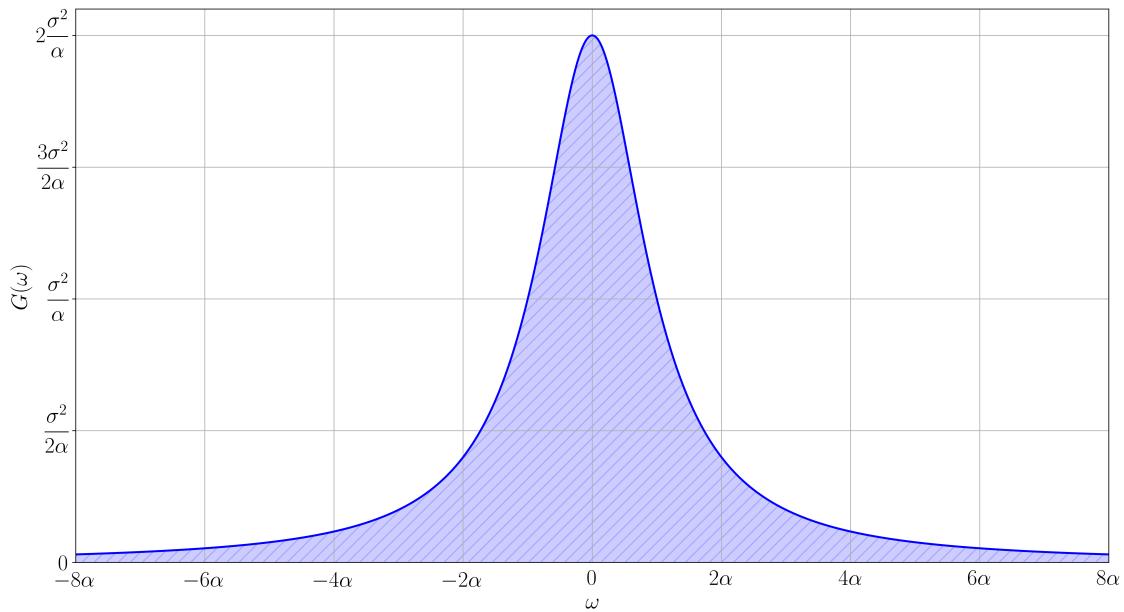
5.2

Случайный процесс имеет экспоненциальную функцию корреляции

$$\mathcal{R}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0.$$

Определить и изобразить спектральную плотность мощности $G(\omega)$.

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 \sigma^2 e^{+\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} \sigma^2 e^{-\alpha\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 \sigma^2 e^{(\alpha-j\omega)\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} \sigma^2 e^{-(\alpha+j\omega)\tau} d\tau = \sigma^2 \frac{e^{(\alpha-j\omega)t}}{(\alpha-j\omega)} \Big|_{-\infty}^0 - \sigma^2 \frac{e^{-(\alpha+j\omega)t}}{(\alpha+j\omega)} \Big|_0^{+\infty} = \\ &= \sigma^2 \left\{ \frac{1}{(\alpha-j\omega)} + \frac{1}{(\alpha+j\omega)} \right\} = \frac{2\alpha\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$



5.3

- Дайте определение СПМ.

Спектральная плотность мощности (СПМ) для некоторой реализации сигнала $x(t)$ задаётся следующим соотношением:

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left\{ \left| \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \right\}.$$

По своему определению $G(\omega)$ есть вещественная неотрицательная функция частоты. Функция спектральной плотности мощности задаёт среднюю мощность, сосредоточенную в полосе частот шириной 1 Hz на центральной циклической частоте ω .

- Почему на практике доступны для анализа только оценки СПМ?

Поскольку в реальности бесконечное время моделирования недостижимо, а число доступных случайных реализаций ограничено, на практике приходится работать лишь с оценками спектральной плотности мощности какого-либо сигнала.

6.1

Непрерывный стационарный случайный процесс обладает узкополосной плотностью мощности $G(f)$, равной нулю при $|f| \geq 10$ кГц. На интервале в $\Delta t = 10$ с реализация этого случайного процесса подвергается дискретизации с частотой $f_d = 20$ кГц, после чего спектральная плотность мощности оценивается методом усредненных периодограмм (методом Бартлетта). При вычислении периодограмм используется разбиение последовательности на сегменты и вычисление ДПФ на каждом сегменте:

$$\begin{aligned}\hat{G}_p(n\Delta f) &= \frac{\Delta t}{D} |X_p[n]|^2, \\ X_p[n] &= \sum_{k=0}^{D-1} x_p(k\Delta t) \exp\left(-j\frac{2\pi}{N_{\text{FFT}}} nk\right), \quad n = 0, 1, \dots, N_{\text{FFT}} - 1, \\ x_p(k\Delta t) &= x((pD + k)\Delta t), \quad p = 0, 1, \dots, P - 1.\end{aligned}$$

Длина сегментов сигнала совпадает с размерностью ДПФ и равна D .

- (a) Чему равна длина N последовательности, по которой производится оценка?
- (b) При каком наименьшем значении D расстояние между частотами, в которых вычисляется спектральная оценка, не превышает $\Delta f_{max} = 10$ Гц?
- (c) Какое число неперекрывающихся сегментов P используется при анализе в предположении, что их длина соответствует результату предыдущего пункта?
- (d) Нам хотелось бы уменьшить дисперсию оценки в 2 раза, сохранив расстояние между отсчетами ДПФ по оси частот. Сформулируйте метод достижения поставленной цели.

- (a) Общая длина последовательности равна $N = \Delta t \cdot f_d = 200000$.

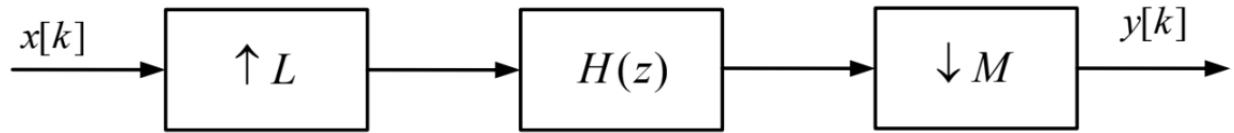
(b) $\Delta f = \frac{f_d}{N_{\text{FFT}}} = \frac{f_d}{D}$. Чтобы выполнялось $\Delta f \leq 10$ Hz, достаточно выбрать $D \geq \frac{f_d}{\Delta f_{max}} = 2000$.

- (c) Поскольку сегменты не перекрываются, то $P = N/D = 100$.

- (d) Чтобы уменьшить дисперсию оценки в 2 раза, нужно увеличить число сегментов P по которым осуществляется оценка. Это можно сделать, например, в 2 раза увеличив длительность исходной последовательности Δt или использовав перекрывающиеся сегменты, что позволит увеличить P без изменений входной последовательности.

9.1

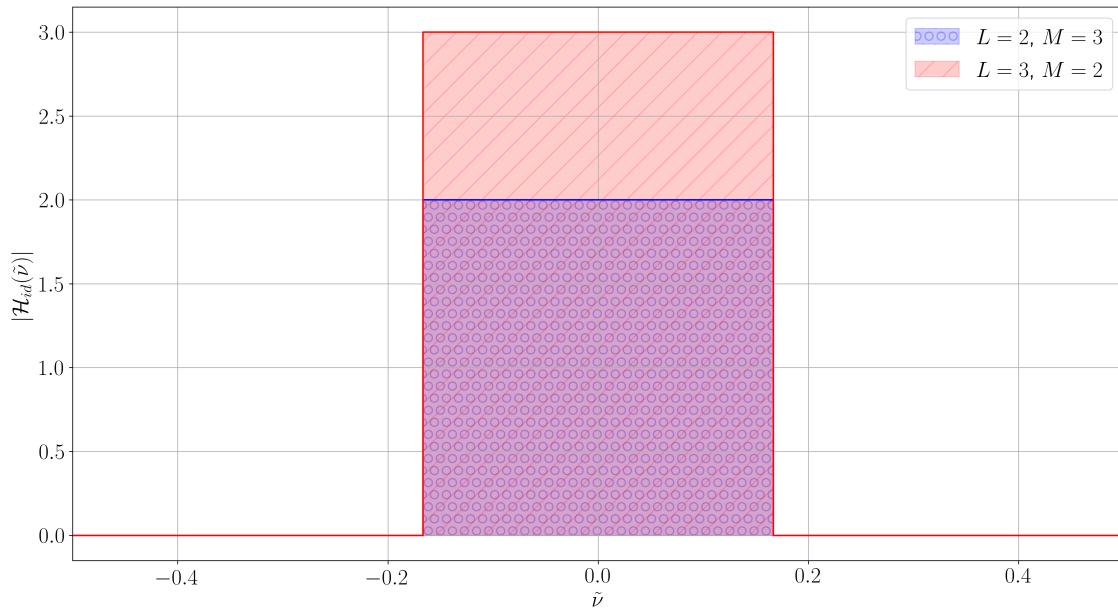
На рисунке приведена блок-схема системы однократной передискретизации с рациональным шагом L/M .



Постройте график для АЧХ идеального фильтра в данной системе однократной передискретизации для следующих случаев:

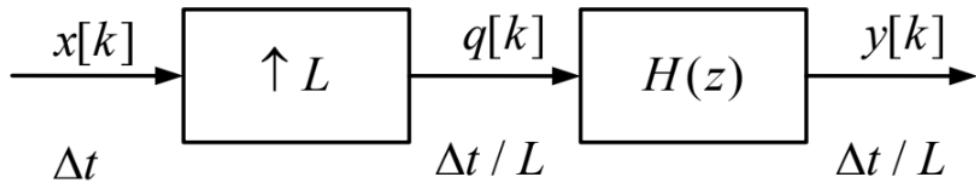
- (a) $L = 3$ и $M = 2$;
- (b) $L = 2$ и $M = 3$.

$$|\mathcal{H}_{id}(\tilde{\nu})| = \begin{cases} L, & |\tilde{\nu}| \leq \min \left\{ \frac{1}{2L}, \frac{1}{2M} \right\}; \\ 0, & \text{для других } \tilde{\nu} \in [-0.5, +0.5]. \end{cases}$$



9.2

На рисунке приведена блок-схема системы однократной интерполяции с целыми коэффициентом L .

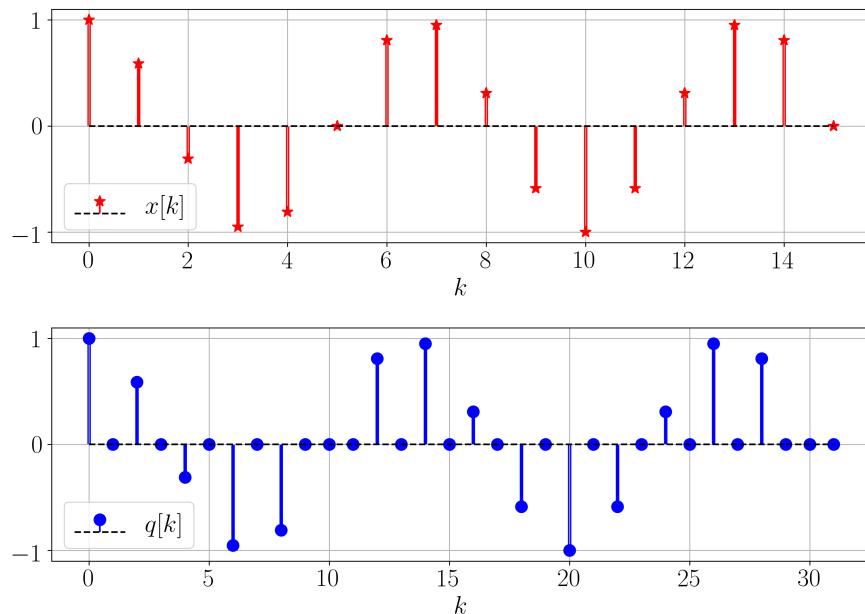


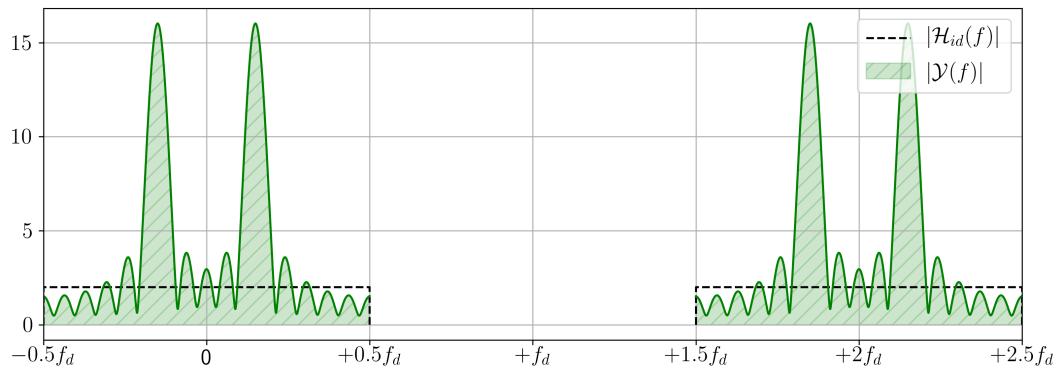
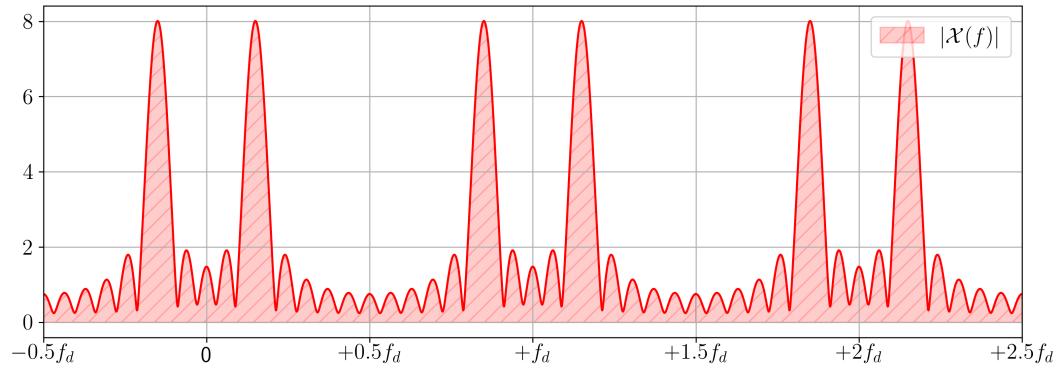
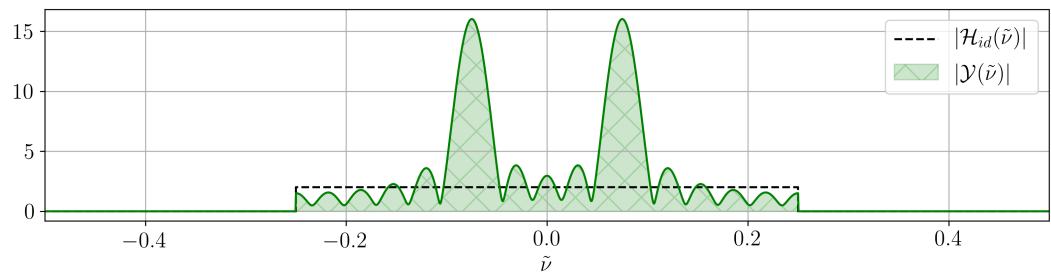
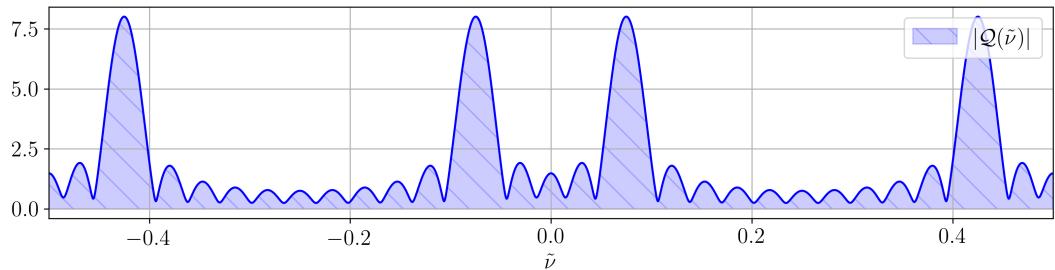
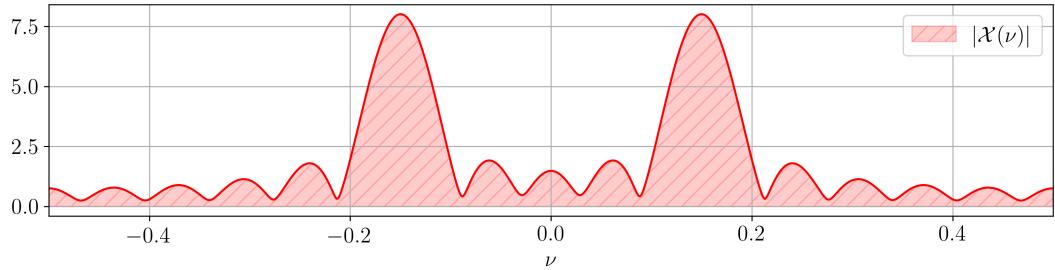
Предположим, что гармонический сигнал $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ дискретизуется так, что на периоде $[0; 1/f_0]$ образуется 8 отсчётов $\tilde{x}[k] = x(k\Delta t)$, $f_d = 1/\Delta t$. Далее последовательность $x[k]$ длиной в 16 отсчётов поступает на вход системы однократной интерполяции с коэффициентом $L = 2$.

$$x[k] = \begin{cases} \tilde{x}[k], & \text{при } 0 \leq k < 16; \\ 0, & \text{при других } k, \end{cases}$$

Построить графики

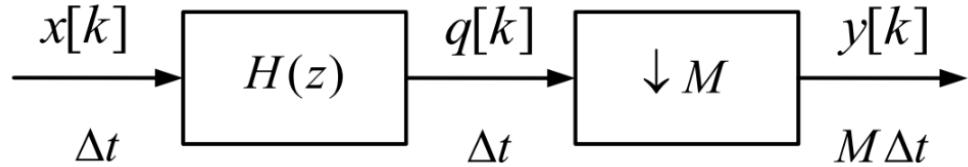
- (a) последовательностей $x[k]$ и $q[k]$;
- (b) модуля ДВПФ последовательностей $x[k]$ и $q[k]$ в нормированных частотах $\nu = f/f_d$;
- (c) модуля ДВПФ последовательности $y[k]$ в нормированных частотах $\nu = f/f_d$ при условии, что $q[k]$ поступает на вход идеального фильтра низких частот системы однократной интерполяции;
- (d) графики модуля ДВПФ $x[k]$ и $y[k]$ для частот $f \in [-0.5f_d; +2.5f_d]$ (в Гц).





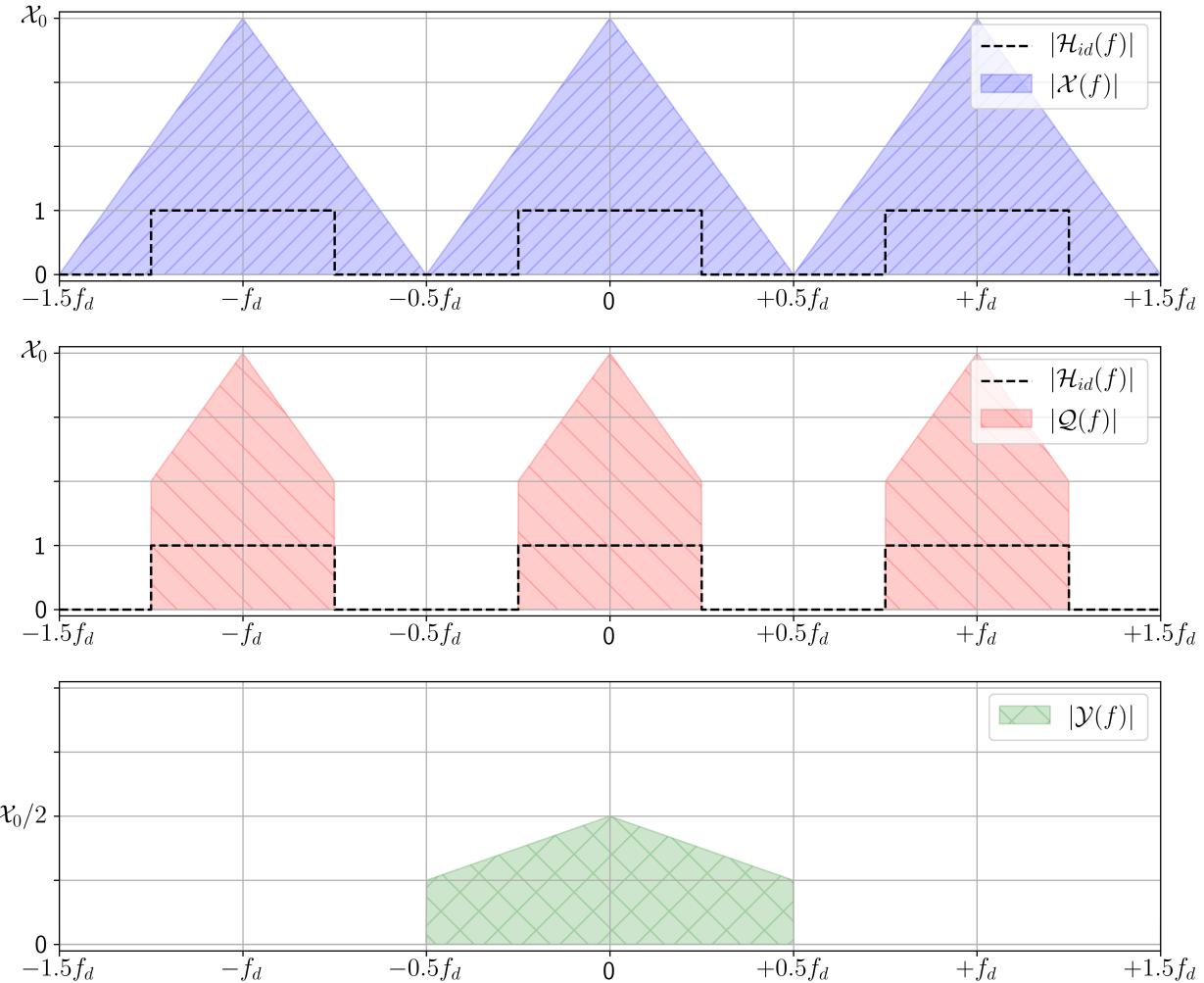
9.3

Предположим, что используется система однократной децимации с целым коэффициентом $M = 2$ с идеальным ФНЧ.



Модуль ДВПФ входной последовательности $x[k]$ изображен на рисунке ниже, ее частота дискретизации f_d .

Построить для частот $f \in [-1.5f_d; +1.5f_d]$ (в Гц) графики модуля ДВПФ последовательностей $q[k]$ (на выходе фильтра) и $y[k]$ (на выходе системы), а также АЧХ фильтра.



10.1

Для сигнала $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t \cdot \text{sign}(t))$ написать выражение для комплексной огибающей.

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(2\pi f_0 t \cdot \text{sign}(t)) = A \text{sign}(t) \cdot \sin 2\pi f_0 t = x_c(t) \cos 2\pi f_0 t - x_s(t) \sin 2\pi f_0 t, \\ &\Rightarrow x_c(t) \equiv 0, \quad x_s(t) = -A \text{sign}(t), \\ \gamma(t) &= x_c(t) + jx_s(t) = -jA \text{sign}(t), \quad A(t) = |\gamma(t)| = |A|, \quad \varphi(t) = -\pi/2 \cdot \text{sign}(t). \end{aligned}$$

10.2

Показать, что квадратурные компоненты $x_c(t)$ и $x_s(t)$ сопряжены по Гильберту лишь при условии, что они соответствуют аналитическому сигналу $x(t)$, содержащему только положительные частоты.

Пусть заданы два сигнала, сопряжённые по Гильберту: $x_c(t)$ и $x_s(t) = \mathcal{H}[x_c(t)]$, и известен спектр сигнала $x_c(t)$ ($\mathcal{X}_c(f)$). Построим из них комплексный сигнал $y(t) = x_c(t) + jx_s(t) = x_c(t) + j\mathcal{H}[x_c(t)]$ и найдём его спектр по свойству линейности:

$$\mathcal{Y}(f) = \mathcal{X}_c(f) \cdot (1 + j\mathcal{H}(f)) = \mathcal{X}_c(f) \cdot (1 + \text{sign}(f)) = \begin{cases} 2\mathcal{X}_c(f), & f > 0, \\ \mathcal{X}_c(0), & f = 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\mathcal{Y}(f)$ отличается от нуля лишь на неотрицательных частотах.

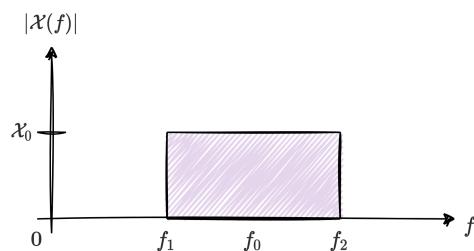
При достаточной узкополосности аналитический сигнал, построенный для $x_c(t)$ и $x_s(t)$, может быть выражен через огибающую $y(t)$: $x(t) = x_A(t) = y(t) \exp(j2\pi f_0 t)$, $f_0 > 0$. Откуда по теореме смещения получаем спектр аналитического сигнала $\mathcal{X}_A(f) = \mathcal{Y}(f - f_0)$, а именно:

$$\mathcal{X}_A(f) = \mathcal{Y}(f - f_0) = \begin{cases} 2\mathcal{X}_c(f - f_0), & f > f_0 > 0, \\ \mathcal{X}_c(0), & f = f_0 > 0, \\ 0, & f < f_0. \end{cases}$$

Легко видеть, что спектр «уехал» вправо, тем самым сильнее отдалившись от области отрицательных частот, что завершает решение задачи.

10.3

Найти аналитический сигнал $x_A(t)$ спектр которого отличен от нуля лишь на отрезке $f_1 \leq f \leq f_2$ при $f > 0$. Фазовая часть спектра нулевая.



$$\mathcal{X}_A(f) = \begin{cases} 2\mathcal{X}_+(f), & f > 0, \\ 0, & f < 0, \end{cases} = \begin{cases} 2\mathcal{X}_0, & f \in [f_1, f_2], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
x_{\mathcal{A}}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(f) e^{j2\pi f t} df = 2\mathcal{X}_0 \int_{f_1}^{f_2} e^{j2\pi f t} df = \frac{2\mathcal{X}_0}{j2\pi t} (e^{+j2\pi f_2 t} - e^{+j2\pi f_1 t}) = \\
&= \frac{2\mathcal{X}_0}{\pi t} e^{+j2\pi f_0 t} \frac{1}{2j} (e^{+j2\pi \Delta f t} - e^{-j2\pi \Delta f t}) = \frac{2\mathcal{X}_0}{\pi t} \sin(2\pi \Delta f t) e^{+j2\pi f_0 t} = \\
&= 4\mathcal{X}_0 \Delta f \cdot \text{sinc}(2\pi \Delta f t) e^{+j2\pi f_0 t} = 2\mathcal{X}_0(f_2 - f_1) \cdot \text{sinc}(\pi(f_2 - f_1)t) e^{+j\pi(f_2 + f_1)t}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \text{Re}\{x_{\mathcal{A}}(t)\} = 2\mathcal{X}_0(f_2 - f_1) \cdot \text{sinc}(\pi(f_2 - f_1)t) \cos(\pi(f_2 + f_1)t). \\
x_{\mathcal{H}}(t) &= \text{Im}\{x_{\mathcal{A}}(t)\} = 2\mathcal{X}_0(f_2 - f_1) \cdot \text{sinc}(\pi(f_2 - f_1)t) \sin(\pi(f_2 + f_1)t).
\end{aligned}$$

10.4

Пусть $x_{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{H}[x(t)]$ преобразованный по Гильберту сигнал $x(t)$. Показать, что $x_{\mathcal{H}}(t)$ и $x(t)$ ортогональны, то есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x_{\mathcal{H}}^*(t) dt = 0.$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля, получим:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x_{\mathcal{H}}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(\mathcal{H}[x(t)])^* dt = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(f) \cdot (-j \cdot \text{sign}(f) \mathcal{X}(f))^* df = j \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign}(f) \mathcal{X}(f) \mathcal{X}^*(f) df = j \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sign}(f) |\mathcal{X}(f)|^2 df.
\end{aligned}$$

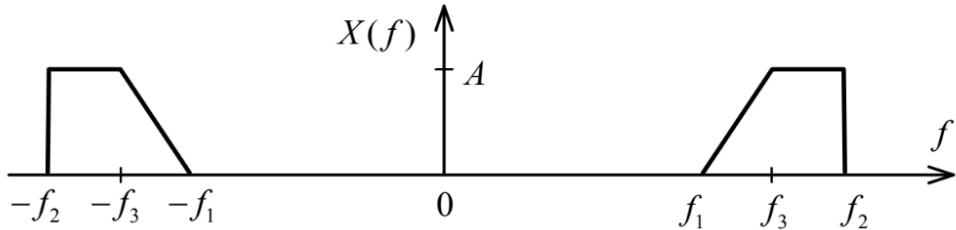
Для действительного сигнала $x(t)$, справедливо, что $|\mathcal{X}(f)| = |\mathcal{X}(-f)|$, поэтому $g(f) = \text{sign}(f)|\mathcal{X}(f)|^2$ является нечётной функцией. Как результат, для симметричного интервала интегрирования имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(\mathcal{H}[x(t)])^* dt = j \int_{-\infty}^{+\infty} g(f) df = 0.$$

11.1

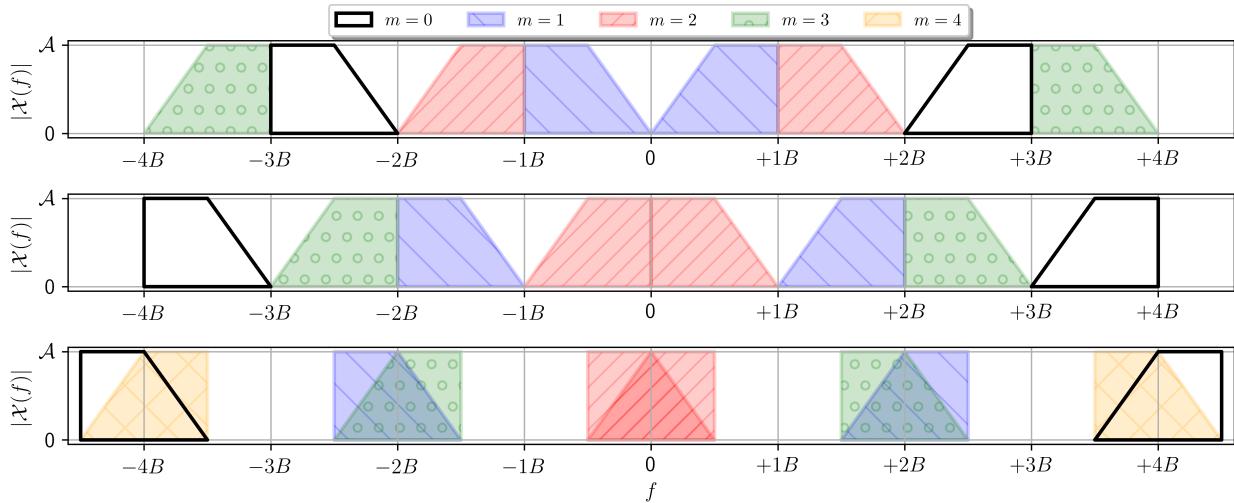
На рисунке изображён спектр узкополосного сигнала. Пусть полоса $B = f_2 - f_1 = 100 \text{ KHz}$ и сигнал дискретизуется с частотой $f_d = 2B$, $f_3 = (f_1 + f_2)/2$.

Изобразить спектр дискретизованного сигнала в полосе $[-f_2; f_2]$ для каждого из трёх случаев:



$$1) \frac{f_2}{B} = 3, \quad 2) \frac{f_2}{B} = 4, \quad 3) \frac{f_2}{B} = 4.5.$$

Обосновать результаты.



Выше представлены графики дискретизованного сигнала для трёх случаев соответственно. Разными цветами обозначены изображения спектра с различными порядками субдискретизации m .

В первых двух случаях имеет место целочисленное деление полос ($f_2/B = \{3, 4\} \in \mathbb{N}$) с минимальной частотой дискретизации $f_d = 2(f_2 - f_1) = 2B$. Поэтому мы наблюдаем плотную упаковку спектров без какого-либо эффекта наложения. Разница между случаями 1 и 2 заключается лишь в том, что в первую зону Найквиста спектр отображается с разной кратностью переноса (m) с возможной инверсией, наличие которой зависит от расположения исходного сигнала.

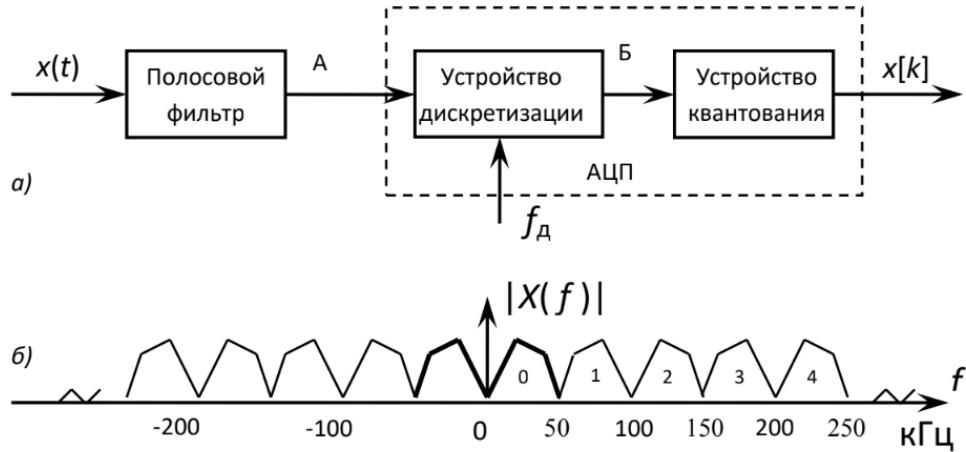
В третьем случае реализуется случай нецелочисленных полос ($f_2/B = 4.5 \notin \mathbb{N}$). Минимальная частота дискретизации, при которой отсутствует наложение спектров, находится из условия:

$$\frac{2f_2}{m+1} \leq f_d \leq \frac{2f_1}{m} \Leftrightarrow \frac{9B}{m+1} \leq f_d \leq \frac{7B}{m}.$$

Откуда можно легко получить, что $f_d/B \in [9/4; 7/3] \cup [3; 3.5] \cup [4.5; 7]$, то есть $f_{d\min} = 2.25B$. В условии задачи предлагается использовать $f_d = 2B$, что меньше минимально возможной «хорошей» частоты. Поэтому мы наблюдаем наложение спектров при субдискретизации.

11.2

На рис. а) показано устройство предварительной обработки данных приёмника многоканальной системы связи.



Спектр принимаемого сигнала показан на рис. б) с указанием номеров каналов. Для выделения сигнала в нужном канале служит полосовой фильтр. Будем считать его идеальным.

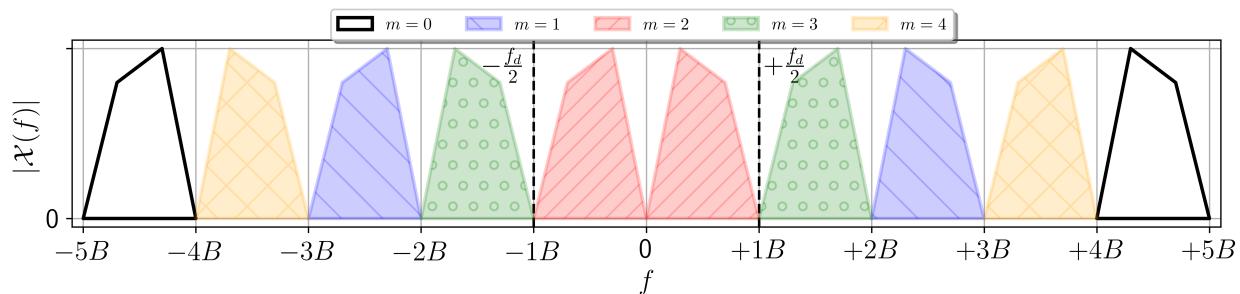
- Найти минимальную частоту дискретизации $f_{d\min}$ для канала 4 при условии, что реализуется субдискретизация полосового сигнала.
- Изобразить модуль спектра дискретного сигнала (точка Б) в полосе $[-f_d/2, f_d/2]$.

Следуя обозначениям первой задачи, для канала 4 имеем: $f_1 = 200 \text{ kHz}$, $f_2 = 250 \text{ kHz}$, $B = f_2 - f_1 = 50 \text{ kHz}$. Легко видеть, что как f_1 , так и f_2 оказываются кратны B , что позволяет выбирать частоту дискретизации только лишь по критерию Найквиста: $f_d \geq 2B = 100 \text{ kHz}$, $f_{d\min} = 100 \text{ kHz}$.

Аналогичный результат можно получить из более общего рассмотрения, включающего случай нецелочисленных полос. Пересечения изображений спектра будут отсутствовать, если:

$$\begin{cases} f_d/B \geq 2 \\ \frac{2f_2}{m+1} \leq f_d \leq \frac{2f_1}{m}, m \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow f_d/B \in \{2\} \cup \left[\frac{10}{4}; \frac{8}{3}\right] \cup \left[\frac{10}{3}; \frac{8}{2}\right] \cup \left[\frac{10}{2}; \frac{8}{1}\right] \Rightarrow f_{d\min} = 2B = 100 \text{ kHz}.$$

График спектра в точке Б представлен ниже. Можно видеть, что в первую зону Найквиста попадает изображение спектра исходного сигнала без инверсии.



11.3

Показать, что спектр действительного цифрового сигнала $x[k]$ можно инвертировать

$$\mathcal{Y}(\nu) = \mathcal{X}(\nu - 0.5)$$

путём изменения знака каждого второго отсчёта сигнала $x[k]$:

$$y[k] = (-1)^k x[k], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{X}(\nu) = \sum_{\{k\}} x[k] \exp(-j2\pi\nu k), \quad \mathcal{Y}(\nu) = \sum_{\{k\}} y[k] \exp(-j2\pi\nu k).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\nu - 0.5) &= \sum_{\{k\}} x[k] \exp(-j2\pi(\nu - 0.5)k) = \sum_{\{k\}} x[k] \exp(-j2\pi\nu k) \exp(+j\pi k) = \\ &= \sum_{\{k\}} (-1)^k x[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{\{k\}} y[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \mathcal{Y}(\nu). \end{aligned}$$