Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2022

MAT1620L ⋆ Laboratorio Cálculo II

Tarea 1

Instrucciones

1. La tarea debe ser entregada en un archivo .nb a la plataforma Moodle, con fecha de entrega jueves 28 de abril hasta las 23:59 horas.
2. Cada pregunta debe ser debidamente respondida. Es decir, debe argumentar de forma correcta mediante código y cada vez que se solicite explicar, argumentar o concluir debe hacerlo comentando el código o escribiendo en una celda de texto su respuesta. Resultados sueltos sin argumentos no serán tomados en cuenta.
3. Lo necesario para responder la tarea en su totalidad está contenido en los documentos para los laboratorios y videograbaciones.
4. La tarea es individual.
5. Con respecto a la entrega, se subirá una hoja de respuesta estándar que pueden ocupar.
6. Bajo ninguna circunstancia se aceptarán tareas fuera de plazo.

Problemas

1. Las **curvas de Bézier** se emplean en el diseño auxiliado por computadora y se nombran en honor al matemático francés Pierre Bézier (1910-1999), quien trabajó en la industria automotriz. Una curva de Béizer cúbica se determina mediante cuatro puntos de control, $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$, y se define mediante las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(1-t)^3 + 3x_1t(1-t)^2 + 3x_2t^2(1-t) + x_3t^3 \\ y(t) &= y_0(1-t)^3 + 3y_1t(1-t)^2 + 3y_2t^2(1-t) + y_3t^3 \end{aligned}$$

donde $0 \leq t \leq 1$. Observe que cuando $t = 0$, se tiene $(x, y) = (x_0, y_0)$ y cuando $t = 1$ se tiene $(x, y) = (x_3, y_3)$, así que la curva empieza en P_0 y termina en P_3.

a) Grafique la curva de Bézier con puntos de control$P_0(4, 1)$, $P_1(28, 48)$, $P_2(50, 42)$ y $P_3(40, 5)$ en seguida, en la misma imagen, grafique segmentos de recta P_0P_1, P_1P_2 y P_2P_3. Observe que los puntos de control medios P_1 y P_2 no están sobre la curva; ésta empieza en P_0, se dirige hacia P_1 y P_2 sin alcanzarlos y termina en P_3.

b) De la gráfica del problema 1 se ve que la tangente en P_0 pasa por P_1 y la tangente en P_3 pasa por P_2. Demuéstrelo.

c) Encuentre una curva de Bézier con un bucle cambiando el segundo punto de control en el problema 1.

d) Algunas impresoras láser usan las curvas de Bézier para representar letras y otros símbolos. Experimente con puntos de control hasta que encuentre una curva de Bézier que dé una representación razonable de la letra **C**.

e) Formas más complicadas se pueden representar al juntar dos o más curvas de Bézier. Suponga que la primera curva de Bézier tiene puntos de control P_0, P_1, P_2, P_3 y la segunda tiene puntos de control P_3, P_4, P_5, P_6. Si se desea unir estos dos trozos de manera uniforme, en tal caso las tangentes en P_3 deben corresponder y, por lo tanto, los puntos P_2, P_3 y P_4 tienen que estar en esta línea tangente común. Con este principio, determine los puntos de control para un par de curvas de Bézier que representan la letra **S**.

2. Suponga que una partícula describe una curva en tres dimensiones y que su posición esta dada por $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ en tiempo t. La velocidad y la aceleración son los vectores

$$v(t) = r'(t), \qquad a(t) = v'(t)$$

respectivamente.

El vector unitario tangente esra dado por

$$T(t) = \frac{v(t)}{||v(t)||}$$

y su curvatura de la curva

$$\kappa(t) = \frac{||T(t)||}{||v(t)||}$$

La rapidez se define como $||v(t)||$. El vector normal a la curva es

$$N(t) = \frac{T'(t)}{||T'(t)||}$$

La aceleración puede escribirse como

$$a(t) = ||v(t)||T(t) + \kappa(t)||v(t)||^2 N(t)$$

a) La curva descrita por la partícula esta parametrizada por

$$\gamma(t) = (\mathrm{sen}(t) + \cos(2t), \cos(2t), \cos(t))$$

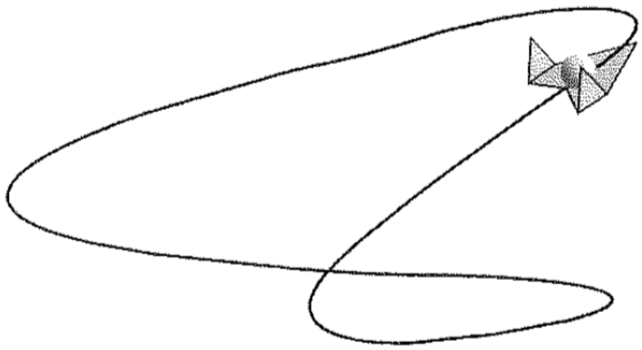
Grafique la curva.

b) Crear una animación en donde se muestre el **Triedro de Frenet-Serret** a lo largo de la curva (**no puede ocupar el comando FrenetSerretSystem ni otro similar predefinido en Mathematica**).

c) El siguiente código sirve para graficar una porción del plano osculador a $r(t)$ en un punto t_0 con forma triangular.

```
In[1]:= r[t_] := {Sin[t] + Cos[2 * t], Cos[2 * t], Cos[t]}
                  seno     coseno       coseno       coseno
        v[t_] := r'[u] /. {u → t}
        T[t_] := v[u] / Sqrt[v[u].v[u]] /. {u → t}
                        raíz cuadrada
        N1[t_] := T'[u] / Sqrt[T[u].T[u]] /. {u → t}
                          raíz cuadrada
        plano[t_] :=
         Graphics3D[Polygon[{r[t] + 0.3 N1[t] - 0.1 T[1], r[t], r[t] - 0.3 N1[t] - 0.1 T[1], r[t] + 0.5 T[t]}]]
         gráfico 3D  polígono
```

Imagine que dicha porción es un aeroplano y que $r(t)$ es su trayectoria. Crear una animación, con el comando **Animate** en donde se muestre la curva y el ”aeroplano recorriendo la traza de $r(t)$. Agregue, en el código anterior en **Graphics3D** la opción **PlotRange− >{{-2.3,1.7},{-1.2,1.4},{-1.2,1.3}}** *d*) Rehacer la animación, pero esta vez ocupando agregando una esfera (puede ocupar el comando **Sphere** para graficar la esfera) como cabina al aeroplano y también doblando las puntas de las alas hacia arriba como se muestra en la siguiente imagen.



Ayuda: Ocupe el vector binormal.