



Travail encadré de recherche :

# Profilage des consommateurs à l'aide des k-means++ semi-supervisés



Par :

Destin ASHUZA CIRUMANGA

Elvina GOVENDASAMY

Master 1 Mathématiques et Applications  
Parcours Data Science

Sous la direction de Mme Eunice OKOME OBIANG

2019-2020



# Description

La segmentation des populations est un problème rencontré dans de nombreuses disciplines. En marketing par exemple, cette technique permet aux entreprises d'identifier et de caractériser les différents profils de consommateurs, afin de leur offrir des produits et des services adaptés à leurs besoins.

Le clustering par l'algorithme des k-means est la méthode d'apprentissage non supervisé la plus utilisée pour répondre à ce type de problématique. Son objectif est de segmenter la population en  $k$  groupes disjoints sur base d'un critère de similarité. Toutefois, la qualité de ce modèle varie selon le choix des centres initiaux des clusters. L'idée des k-means++ semi supervisés est de contrôler l'initialisation des centres de clusters en intégrant des données supervisées dans le processus d'apprentissage pour ainsi améliorer les performances du clustering en termes de coût et de durée d'exécution.

Dans ce travail, nous nous intéressons dans un premier temps à la présentation de différents résultats théoriques sur les différents algorithmes des k-means et à la démonstration d'un critère de qualité associé aux k-means++ semi-supervisés. Dans un second temps, nous programmons et testons l'algorithme des k-means++ semi-supervisés sur un jeu de données clients.



# Table des matières

Introduction . . . . .	5
I    Partie théorique . . . . .	6
I.1    Les k-means standards . . . . .	6
Présentation de l'algorithme . . . . .	7
Convergence . . . . .	7
I.2    Les k-means++ . . . . .	9
Présentation de l'algorithme . . . . .	9
Critère de qualité . . . . .	10
I.3    Les k-means++ semi-supervisés . . . . .	19
Présentation de l'algorithme . . . . .	20
Critère de qualité . . . . .	20
I.4    Résultats annexes utilisés dans cette partie . . . . .	28
Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	28
Inégalité des moyennes . . . . .	28
Majoration des sommes partielles de la série harmonique . . . . .	28
II    Partie appliquée . . . . .	29
II.1    La Base de Données . . . . .	29
II.2    Choix du nombre de clusters . . . . .	31
II.3    Résultats des expérimentations . . . . .	32
III   Conclusion . . . . .	39
Références . . . . .	39



# Introduction

A l'ère du big data et de l'intelligence artificielle, le recours aux outils d'analyse et d'exploitation des données est de plus en plus fréquent, et ce dans tous les secteurs désormais. L'apprentissage automatique - machine learning en anglais - est la science au cœur de l'exploitation de ces données et de l'automatisation des méthodes dévolues à cette fin. Il existe différents types d'apprentissage, chacun ayant ses points forts et ses inconvénients. La distinction la plus courante se fait entre l'apprentissage supervisé et l'apprentissage non supervisé qui regroupent la plupart des problèmes. Et un mariage entre ces deux types donne l'apprentissage semi-supervisé.

Dans l'apprentissage supervisé, nous disposons d'un jeu de données où toutes les observations sont déjà annotés. Ainsi, avec ce type d'apprentissage nous cherchons à trouver la relation entre une variable réponse, la variable que nous cherchons à expliquer, par rapport aux autres variables utilisées dans les données. L'objectif est de guider l'algorithme en se basant sur des exemples préalablement annotés à partir de résultats attendus, de sorte à ce que les résultats prédits soient le plus proche possible de ces dites résultat attendus. Plus l'algorithme sera entraîné, plus les écarts entre les valeurs observées et estimées seront alors réduites. La relation entre la variable réponse et les variables explicatives peut être établis en utilisant diverses techniques supervisées, comme les régressions multiples ou encore les arbres de décision. Les avantages de cet apprentissage sont entre autres des résultats facilement interprétables, de meilleures performances prédictives ou encore des modèles facilement comparables. Cependant l'acquisition de l'information a un coût. En effet, l'information contenue dans la variable réponse nécessite une mobilisation des moyens pour son obtention. Nous pouvons penser à des questionnaires d'enquêtes ou l'embauche du personnel supplémentaire pour s'en occuper. De plus, dans la catégorisation des individus, il n'est pas impossible que l'humain y insère un biais pour telle ou telle autre raison.

Quant à l'apprentissage non supervisé, la variable réponse n'est plus disponible. Les données ne sont pas labellisés et ainsi l'apprentissage ne sera pas basé sur un exemple préétabli. Le but sera alors d'identifier des patterns ou des relations entre les variables, de regrouper les individus présentant des similitudes (clustering) ou encore de mettre en évidence les variables les plus significatives. L'inconvénient majeur de ce type d'apprentissage est la difficulté à interpréter les modèles ou à évaluer leurs performances. Mais il a comme avantages une facilité de mise en œuvre, des coûts réduits pour l'acquisition de l'information et une possible correction du biais qui serait dû aux a priori sur la catégorisation des individus.

Pour ce qui est de l'apprentissage semi-supervisé, il est obtenu comme un jumelage de deux types précédents : l'on dispose de l'information  $Y$  juste pour une partie des données. Dès lors, ses avantages sont un mélange entre les avantages du supervisé et du non supervisé : la correction du biais sur les catégories, des performances significatives par rapport au non supervisé et augmentant avec la quantité des données supervisées, l'acquisition de l'information moins coûteuse par rapport au supervisé. Toutefois, dans certains cas, l'interprétation du modèle pose toujours problème.

L'objectif de notre étude est d'évaluer la performance des `kmeans++` semi-supervisés par rapport aux `kmeans` non-supervisés, soit les `kmeans` standard et les `kmeans++`. Nous cherchons effectivement à démontrer que l'apprentissage semi-supervisé est une méthode

plus performante que celle qui sont non supervisée, vu, entre autres la correction du biais sur les catégories.

Nous commençons par analyser l'algorithme des k-means qui est un algorithme simple et très utilisé relevant de l'apprentissage non supervisé. Dans une première partie théorique, nous présentons cet algorithme et son principe de fonctionnement ; ensuite nous présentons sa version améliorée, les k-means++, en démontrant un critère de qualité qui lui est associé ; et enfin nous étendons cette dernière version au cas où l'on dispose de certaines données qui sont labellisées, ce qui donne l'algorithme des k-means++ semi-supervisés.

Dans une deuxième partie appliquée, nous implémentons chacune des trois algorithmes étudiés grâce au langage python et nous les testons sur une base réelle des données clients. Il en résulte que les k-means++ semi supervisés sont de loin plus performants, et c'est d'ailleurs avec cette technique d'apprentissage que nous cherchons à analyser la comportement des clients.

## I Partie théorique

Cette partie est consacrée à la présentation et à l'étude théorique de différents algorithmes de k-means. Les résultats énoncés et démontrés sont essentiellement tirés de [?] et de [?]. Ils sont suffisamment détaillés pour être facilement accessibles à toute personne ayant des bases en probabilités et en statistique.

### I.1 Les k-means standards

Les k-means standards est une méthode de classification non-supervisée utilisé lorsque les données ne sont pas étiquetées. Le but de cet algorithme est basée sur une approche itérative permettant de regrouper les observations à partir de leur similitudes. Proposée par Stuart Lloyd en 1957 à partir des idées de Hugo Steinhaus en 1956, cette méthode a été utilisée pour la première fois par James MacQueen en 1967.

Le fonctionnement des k-means standards repose sur un choix aléatoire d'un nombre de centres, déterminés au préalable en utilisant divers techniques comme la méthode du coude, une méthode qui vu plus tard dans l'étude. À partir de là, l'algorithme va fonctionner de façon itérative sur les deux tâches suivantes :

1. Assigner chaque observation au centre le plus proche, basé sur la mesure de distance Euclidéenne.
2. Pour chaque centre, calculer la moyenne des distances de chaque observation appartenant à ce centre. Cette moyenne sera la nouvelle valeur du centre.

Une fois l'étape 2 accomplie, chaque centre a une nouvelle valeur qui correspond à la moyenne des observations correspondantes. Le processus est répété jusqu'à ce que les écarts entre les valeurs des nouveaux centres et centres calculés précédemment soit presque nuls. Ce sera dans notre cas, le critère d'arrêt utilisé.



## Présentation de l'algorithme

Nous commençons par définir  $d$  comme le nombre de variables et  $k$  le nombre préétabli de centres voulus. L'algorithme des k-means est utilisé pour résoudre le problème suivant : étant donné un entier naturel  $k$  fixé et un ensemble de points  $X \subset \mathbb{R}^d$  (avec  $d \geq 1$ ), trouver un ensemble de centres  $C = \{c_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, \dots, k\}$  tel que

$$C = \underset{\{A \subset \mathbb{R}^d, \text{card}(A)=k\}}{\text{argmin}} \sum_{x \in X} \min_{c \in A} \|x - c\|^2 \quad (1)$$

Par la suite, en utilisant ces centres, le label de chaque élément  $x$  est donné par :

$$\ell(x) = \underset{1 \leq i \leq k}{\text{argmin}} \|x - c_i\|$$

Résoudre l'équation (1) de manière exacte pour trouver  $C$  est "NP-hard" ; cela implique qu'il est difficile de trouver une solution exacte avec un algorithme de complexité polynomiale. Ainsi, en pratique, l'on se contente d'approcher la solution de manière locale. L'algorithme de Lloyd est le plus utilisé pour cette fin. Il prend en entrée l'ensemble des données  $X$ , les centres initiaux  $C$  et retourne les centres finaux résolvant localement l'équation (1). Concrètement, il s'implémente comme suit :

### Algorithme de Lloyd

**Entrées :**  $X$  (le dataset) et  $C$  (l'ensemble des  $k$  centres initiaux)

**Sorties :**  $C$  (l'ensemble des centres définitifs)

**1 faire**

**2** associer chaque  $x_i \in X$  au centre le plus proche  $c(x_i) \in C$

**3** remplacer chaque  $c_j \in C$  par le point moyen des  $x \in X$  tels que  $c(x) = c_j$

**4 jusqu'à ce que**  $C$  ne change plus

**4 sortir**  $C$

L'algorithme des k-means standards est alors obtenu en exécutant l'algorithme de Lloyd avec les centres initiaux qui sont choisis de manière uniformément aléatoire à partir des individus du dataset  $X$ .

## Convergence

Après avoir compris le fonctionnement de l'algorithme de Lloyd (et donc celui des k-means standards qui en découle), une question légitime se pose : l'algorithme s'arrête-t-il ?

Avant de répondre à cette question, introduisons d'abord quelques définitions et notations qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

### Définition 1. (*Clustering*)

*Un clustering  $C$  est un ensemble de centres qui sont utilisés pour déterminer le label de chaque point du jeu de données  $X$ .*

**Définition 2. (Fonction potentielle)**

Étant donné un clustering  $C$ , la fonction potentielle  $\phi$  associée à  $C$  est la fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  définie dans l'ensemble des parties de  $X$  par :

$$\forall A \subset X, \quad \phi(A) = \sum_{a \in A} \min_{c \in C} \|a - c\|^2$$

Par la suite, par abus de notation, nous écrirons tout simplement  $\phi(X) = \phi$  et uniquement pour  $X$ .

**Définition 3. (Clustering optimal et cluster optimal)**

Soit  $C_{OPT}$  le clustering qui serait la solution exacte du problème des  $k$ -means tel que formulé par l'équation (1).  $C_{OPT}$  sera alors appelé clustering optimal et tout cluster dans  $C_{OPT}$  sera appelé cluster optimal.

**Définition 4. (Poids  $D^2$ )**

Étant donné un clustering  $C$ , le poids  $D^2$  est défini par :

$$\forall x \in X, \quad D^2(x) = \phi(\{x\}) = \min_{c \in C} \|x - c\|^2$$

C'est donc le carré de la distance de  $x$  au centre dans  $C$  qui lui est le plus proche.

A la lumière de ces définitions, nous pouvons résumer le problème de  $k$ -means comme suit :

- Le problème de  $k$ -means tel que formulé par l'équation (1) à la page 7 consiste à trouver le clustering qui minimise la fonction potentielle  $\phi$
- Théoriquement, on sait qu'il existe une solution exacte  $C_{OPT}$  à ce problème mais en pratique il est difficile de la calculer.
- L'algorithme des  $k$ -means fait donc appel à l'algorithme de Lloyd (donné à la page 7) pour trouver un minimum local de  $\phi$  atteint en une solution approchée donnée par un clustering  $C$ .

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui nous permet d'affirmer que l'algorithme converge :

**Lemme 1.** Soient  $S$  un ensemble de points,  $c(S)$  son point moyen (son isobarycentre) et  $z$  un point quelconque.

Alors, on a :

$$\sum_{x \in S} \|x - z\|^2 - \sum_{x \in S} \|x - c(S)\|^2 = \text{card}(S) \cdot \|c(S) - z\|^2$$

où  $\text{card}(S)$  désigne le cardinal de  $S$ .

*Démonstration.*

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in S} \|x - z\|^2 &= \sum_{x \in S} \|(x - c(S)) + (c(S) - z)\|^2 \\
&= \sum_{x \in S} \|x - c(S)\|^2 + 2 \cdot \sum_{x \in S} \langle x - c(S), c(S) - z \rangle + \sum_{x \in S} \|c(S) - z\|^2 \\
&= \sum_{x \in S} \|x - c(S)\|^2 + 2 \cdot \langle \sum_{x \in S} x - \text{card}(S) \cdot c(S), c(S) - z \rangle + \text{card}(S) \cdot \|c(S) - z\|^2 \\
&= \sum_{x \in S} \|x - c(S)\|^2 + 2 \cdot \text{card}(S) \cdot \langle c(S) - c(S), c(S) - z \rangle + \text{card}(S) \cdot \|c(S) - z\|^2 \\
&= \sum_{x \in S} \|x - c(S)\|^2 + 2 \cdot \text{card}(S) \cdot \langle 0, c(S) - z \rangle + \text{card}(S) \cdot \|c(S) - z\|^2 \\
&= \sum_{x \in S} \|x - c(S)\|^2 + \text{card}(S) \cdot \|c(S) - z\|^2
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Le lemme 1 nous permet d'affirmer que remplacer le centre de chaque cluster par le point moyen de ses éléments à chaque tour de boucle de l'algorithme de Lloyd permet de décroître nécessairement  $\phi$ . Ainsi dès que  $\phi$  atteint un minimum local, l'algorithme s'arrête.

Nous pourrions être content de savoir que l'algorithme converge. Malheureusement rien ne garantit que la solution locale obtenue donne un bon clustering. En effet,  $\phi$  peut être arbitrairement grand malgré l'optimum local atteint. C'est le défaut principal de l'algorithme des k-means standards. Dans la section suivante, nous présentons les k-means++ qui résolvent ce problème.

## I.2 Les k-means++

### Présentation de l'algorithme

L'initialisation de l'algorithme de k-means est un élément clef de la détermination d'un optimum local de bonne qualité. Dans cette section, nous cherchons à étudier une autre forme d'initialisation qui permettrait de résoudre le problème vu précédemment lors de l'application des k-means standard.

L'algorithme des k-means++ est obtenu en changeant uniquement la manière dont sont initialisés les centres initiaux qui seront utilisés dans l'algorithme de Lloyd. Au lieu de les choisir uniformément, ces centres initiaux sont choisis avec une probabilité proportionnelle au poids  $D^2$ . Ensuite le reste se passe exactement comme pour les k-means standards en faisant appel à l'algorithme de Lloyd.

Ainsi pour résumer le fonctionnement de l'algorithme de k-means++, nous faisons les étapes suivantes :

1. Nous cherchons en premier lieu à choisir aléatoirement (et de façon uniforme) une observation de notre dataset  $X$ . Ce sera le premier centre.
2. Pour chaque individu du dataset, nous calculons la distance euclidienne minimale au carré entre l'individu et le centre défini. Cette distance, sera défini plus tard

comme étant

$$\forall a \in A, D^2(a) = \min_{c \in C} \|a - c\|^2$$

3. Choisir un individu du dataset  $X$  avec une probabilité proportionnelle à la distance calculé à l'étape 2. Cette probabilité qui correspond à  $\frac{D^2(a_0)}{\sum_{a \in A} D^2(a)}$  sera démontré plus tard.

L'étape 2 sera répété jusqu'à ce que les  $k$  centres aient été choisis. Une fois que ces centres sont initialisés, l'algorithme de Lloyd pourra être utilisé afin de déterminer les centres et clusters finaux.

Voici le pseudo-code utilisé dans notre étude :

### Algorithme d'initialisation des centres pour les k-means++

**Entrées :**  $X$  (le dataset) et  $k$  (le nombre de centres)

**Sorties :**  $C$  (l'ensemble des centres initiaux)

1 choisir un  $x \in X$  suivant la loi uniforme

2 initialiser  $C = \{x\}$

3 **Tant que**  $\text{card}(C) \leq k$  **faire**

4     choisir un  $x \in X$  avec probabilité proportionnelle à  $D^2(x)$

5     actualiser  $C = C \cup \{x\}$

6 **sortir**  $C$

### Critère de qualité

Dans cette section, nous présentons les résultats qui montrent que l'algorithme des k-means++ est meilleur que celui des k-means standards dans le sens où l'espérance de la fonction potentielle est majorée. Plus exactement, le théorème 1 présenté à la fin de cette section montre que la fonction potentielle obtenue à fin de l'étape de l'initialisation de l'algorithme des k-means++ est un  $O(\ln k)$  par rapport au clustering optimal théorique. Et cela est suffisant car dans l'algorithme de Lloyd, cette fonction ne peut faire que baisser.

Nous présentons trois lemmes qui permettent de démontrer le théorème en question : le premier permet de contrôler  $\phi$  pour le choix du premier centre ; le deuxième montre que  $\phi$  reste toujours majorée lorsque l'on choisit les centres restants dans les clusters optimaux théoriques proportionnellement au poids  $D^2$ . Enfin le troisième lemme généralise cela pour n'importe quel choix des centres, ce qui conduit à la démonstration du théorème.

**Lemme 2.** *Soient  $A$  un cluster arbitraire dans  $C_{OPT}$  et  $c(A)$  son point moyen. Soit  $C$  un clustering avec un unique centre choisi aléatoirement dans  $A$  et de fonction potentielle  $\phi$ .*

*Alors, on a :*

$$\mathbb{E}[\phi(A)] = 2 \cdot \phi_{OPT}(A)$$

*Démonstration.*

Supposons que  $C = \{a_0\}$  avec  $a_0$  qui a été choisi aléatoirement dans  $A$ ; c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(\{\text{choisir } a_0\}) = \frac{1}{\text{card}(A)}$$

En faisant varier le choix de  $a_0$ , nous voyons clairement que  $\phi(A)$  est une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . En effet,  $\text{card}(\phi(A)(\Omega)) = \text{card}(A)$  et pour chaque choix de  $a_0$ , la valeur prise par  $\phi(A)$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\phi_{a_0}(A) &= \phi(A; C) \\ &= \phi(A; \{a_0\}) \\ &= \sum_{a \in A} \min_{c \in \{a_0\}} \|a - c\|^2 \\ &= \sum_{a \in A} \|a - a_0\|^2\end{aligned}$$

De plus, par le lemme 1 énoncé à la page 8, nous savons que le point moyen  $c(A)$  du cluster  $A$  est nécessairement le centre utilisé pour ce cluster dans le clustering optimal  $C_{OPT}$  sinon  $\phi_{OPT}$  ne serait pas minimale. De tout ce qui précède, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(A)] &= \sum_{a_0 \in A} \phi_{a_0}(A) \cdot \mathbb{P}(\phi(A) = \phi_{a_0}(A)) \\ &= \sum_{a_0 \in A} \left( \sum_{a \in A} \|a - a_0\|^2 \cdot \frac{1}{\text{card}(A)} \right) \\ &= \frac{1}{\text{card}(A)} \cdot \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \|a - a_0\|^2\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1 avec  $S = A$  et  $z = a_0$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi(A)] &= \frac{1}{\text{card}(A)} \sum_{a_0 \in A} \left( \text{card}(A) \cdot \|c(A) - a_0\|^2 + \sum_{a \in A} \|a - c(A)\|^2 \right) \\ &= \sum_{a_0 \in A} \|c(A) - a_0\|^2 + \frac{1}{\text{card}(A)} \cdot \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \|a - c(A)\|^2 \\ &= \sum_{a_0 \in A} \|c(A) - a_0\|^2 + \frac{1}{\text{card}(A)} \cdot \text{card}(A) \cdot \sum_{a \in A} \|a - c(A)\|^2 \\ &= 2 \cdot \sum_{a \in A} \|c(A) - a\|^2 \\ &= 2 \cdot \phi_{OPT}(A)\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

**Lemme 3.** Soient  $A$  un cluster arbitraire dans  $C_{OPT}$  et  $C$  un clustering quelconque. Supposons que l'on ajoute aléatoirement un centre à  $C$  choisi dans  $A$  avec une probabilité proportionnelle à  $D^2$ , la distance euclidienne au carré. Soit  $\phi$  la fonction potentielle du clustering ainsi obtenu.

Alors, on a :

$$\mathbb{E}[\phi(A)] \leq 8 \cdot \phi_{OPT}(A)$$

*Démonstration.*

Soit  $1 \leq l < k$  (ici  $k$  représente le nombre de centres utilisés pour le clustering optimal  $C_{OPT}$ ).

Supposons que  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_l\}$  et considérons un cluster  $A$  dans  $C_{OPT}$ .

Rappelons que la distance  $D^2$  associée au clustering  $C$  vérifie :

$$\forall a \in A, D^2(a) = \min_{c \in C} \|a - c\|^2$$

Soit  $a_0 \in A$  choisi avec probabilité  $\frac{D^2(a_0)}{\sum_{a \in A} D^2(a)}$

Notons  $C(a_0) = C \cup \{a_0\}$  et  $\phi_{a_0}$  respectivement le clustering et la fonction potentielle obtenus pour ce choix de  $a_0$ . Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(A)] &= \sum_{a_0 \in A} \phi_{a_0}(A) \cdot \mathbb{P}(\phi(A) = \phi_{a_0}(A)) \\ &= \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \min_{c \in C(a_0)} \|a - c\|^2 \cdot \frac{D^2(a_0)}{\sum_{a \in A} D^2(a)} \\ &= \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \min \left( \min_{c \in C} \|a - c\|^2, \|a - a_0\|^2 \right) \cdot \frac{D^2(a_0)}{\sum_{a \in A} D^2(a)} \\ &= \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \min(D^2(a), \|a - a_0\|^2) \cdot \frac{D^2(a_0)}{\sum_{a \in A} D^2(a)} \end{aligned}$$

De plus pour tout  $a \in A$ , nous avons :

$$\begin{aligned} D(a_0) &= \min_{c \in C} \|a_0 - c\| \\ &\leq \|a_0 - c\| = \|(a_0 - a) + (a - c)\| \quad \forall c \in C \\ &\leq \|a_0 - a\| + \|a - c\| \quad \forall c \in C \quad (\text{par inégalité triangulaire}) \end{aligned}$$

En particulier pour  $c_j \in C$  tel que  $D(a) = \|a - c_j\|$ , nous avons :

$$D(a_0) \leq \|a_0 - a\| + D(a)$$

D'une part, en élevant au carré les membres de cette inégalité, nous obtenons :

$$D^2(a_0) \leq \|a_0 - a\|^2 + D^2(a) + 2 \cdot \|a_0 - a\| \cdot D(a)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left( \|a_0 - a\| - D(a) \right)^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \|a_0 - a\|^2 + D^2(a) &\geq 2 \cdot \|a_0 - a\| \cdot D(a) \end{aligned}$$

Ainsi, nous en déduisons que

$$\forall a \in A, \quad D^2(a_0) \leq 2 \cdot \|a_0 - a\|^2 + 2 \cdot D^2(a)$$

En sommant sur toutes les valeurs de  $a$ , nous obtenons alors

$$D^2(a_0) \leq \frac{2}{\text{card}(A)} \cdot \sum_{a \in A} \|a_0 - a\|^2 + \frac{2}{\text{card}(A)} \cdot \sum_{a \in A} D^2(a)$$

Nous utilisons ensuite cette inégalité pour majorer  $D^2(a_0)$  dans l'expression de  $\mathbb{E}[\phi(A)]$  obtenue précédemment, ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(A)] &\leq \frac{2}{\text{card}(A)} \cdot \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \min(D^2(a), \|a - a_0\|^2) \cdot \frac{\sum_{a \in A} \|a_0 - a\|^2}{\sum_{a \in A} D^2(a)} \\ &+ \frac{2}{\text{card}(A)} \cdot \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \min(D^2(a), \|a - a_0\|^2) \cdot \frac{\sum_{a \in A} D^2(a)}{\sum_{a \in A} D^2(a)} \end{aligned}$$

Dans le second membre de cette inégalité, nous utilisons le fait que

$$\min(D^2(a), \|a - a_0\|^2) \leq D^2(a)$$

pour le premier bloc, et

$$\min(D^2(a), \|a - a_0\|^2) \leq \|a - a_0\|^2$$

pour le second bloc, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(A)] &\leq \frac{2}{\text{card}(A)} \cdot \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \|a_0 - a\|^2 \\ &+ \frac{2}{\text{card}(A)} \cdot \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \|a - a_0\|^2 \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\mathbb{E}[\phi(A)] \leq 4 \cdot \frac{1}{\text{card}(A)} \cdot \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \|a_0 - a\|^2$$

L'expression  $\frac{1}{\text{card}(A)} \cdot \sum_{a_0 \in A} \sum_{a \in A} \|a_0 - a\|^2$  est celle que nous avons obtenue pour l'espérance lors de la démonstration du lemme 2 à la page 10. Ainsi, en appliquant le lemme 2, nous obtenons donc

$$\mathbb{E}[\phi(A)] \leq 8 \cdot \phi_{OPT}(A)$$

ce qui est le résultat escompté. □

**Lemme 4.** Soient  $C$  un clustering arbitraire de fonction potentielle  $\phi$  et  $u > 0$  un entier naturel. Choisissons  $u$  clusters non couverts par  $C$  dans  $C_{OPT}$ . Notons  $X_u$  l'ensemble des points de ces clusters et  $X_c = X - X_u$  son complémentaire. Supposons que nous ajoutons  $t \leq u$  centres à  $C$  choisis de manière aléatoire proportionnellement au poids  $D^2$ . Notons  $C'$  le nouveau clustering ainsi obtenu et  $\phi'$  sa fonction potentielle associée. Alors, on a :

$$\mathbb{E}[\phi'] \leq \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_t) + \frac{u-t}{u} \cdot \phi(X_u);$$

avec  $H_t = \sum_{i=1}^t \frac{1}{i}$  la  $t^{\text{ème}}$  somme partielle de la série harmonique.

*Démonstration.* Elle se fait par une récurrence à deux niveaux en montrant que si l'inégalité est vérifiée pour les couples d'entiers  $(t-1, u)$  et  $(t-1, u-1)$ , alors elle l'est également pour le couple  $(t, u)$ .

Regardons d'abord de plus près la fonction  $\phi'$  et sa relation avec  $\phi$  :  
Notons  $c'_1, c'_2, \dots, c'_t$  les  $t$  centres ajoutés à  $C$ . Pour toute partie  $A \subset X$ , on a alors :

$$\begin{aligned} \phi'(A) &= \sum_{x \in A} \min_{c' \in C'} \|x - c'\|^2 \\ &= \sum_{x \in A} \min \left( D^2(x), \|x - c'_1\|^2, \dots, \|x - c'_t\|^2 \right) \\ &\leq \sum_{x \in A} D^2(x) = \phi(A). \end{aligned}$$

Passons à la démonstration proprement dite maintenant :

- Initialisation : il suffit de vérifier pour  $t = 0, u > 0$  et  $t = 1, u = 1$ .

Pour  $t = 0, u > 0$  on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi'] &= \phi \quad (\text{car } \phi' = \phi \text{ qui est constante}) \\ &= \phi(X_c) + \phi(X_u) \\ &= \left( \phi(X_c) \right) \cdot (1 + H_0) + \frac{u-0}{u} \cdot \phi(X_u) \quad \text{avec } H_0 = 0 \\ &\leq \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_0) + \frac{u-0}{u} \cdot \phi(X_u) \end{aligned}$$

Pour  $t = 1, u = 1$  on distingue deux cas : soit le nouveau centre est choisi dans le seul cluster non couvert, soit il est choisi dans l'un des clusters couverts.

Si le nouveau centre  $c'_1$  est choisi dans le cluster non couvert, il l'est avec probabilité  $\frac{\phi(X_u)}{\phi}$  et on a :

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi'(X_c) + \phi'(X_u) \\ &\leq \phi(X_c) + \phi(X_u) \end{aligned}$$



D'où,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi' \mid c'_1 \in X_u] &\leq \phi(X_c) + \mathbb{E}[\phi'(X_u) \mid c'_1 \in X_u] \\ &\leq \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \quad (\text{par le lemme 3}).\end{aligned}$$

Sinon, le nouveau centre  $c'_1$  est choisi dans  $X_c$  avec probabilité  $\frac{\phi(X_c)}{\phi}$  et on a :

$$\mathbb{E}[\phi' \mid c'_1 \in X_c] \leq \phi \quad (\text{car } \phi' \leq \phi).$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi'] &= \mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in X_u\}}] + \mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in X_c\}}] \\ &= \mathbb{P}(c'_1 \in X_u) \mathbb{E}[\phi' \mid c'_1 \in X_u] + \mathbb{P}(c'_1 \in X_c) \mathbb{E}[\phi' \mid c'_1 \in X_c] \\ &\leq \frac{\phi(X_u)}{\phi} \left( \phi(X_c) + 8\phi_{OPT}(X_u) \right) + \frac{\phi(X_c)}{\phi} \phi \\ &\leq 2 \cdot \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \\ &\leq \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_1) + \frac{1 - 1}{1} \cdot \phi(X_u)\end{aligned}$$

- Hypothèse de récurrence (HR) et hérédité : soient  $t \geq 1$  et  $u \geq 1$ .

Supposons l'inégalité vérifiée pour les couples  $(t-1, u)$  et  $(t-1, u-1)$  et montrons qu'elle est vraie pour le couple  $(t, u)$  également :

Comme précédemment, on considère deux cas suivant le choix du premier centre  $c'_1$ .

1<sup>er</sup> cas : choix du premier centre dans un cluster inclus dans  $X_c$ .

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in X_c\}}] &= \mathbb{P}(c'_1 \in X_c) \mathbb{E}[\phi' \mid c'_1 \in X_c] \\ &= \frac{\phi(X_c)}{\phi} \mathbb{E}[\phi' \mid c'_1 \in X_c]\end{aligned}$$

Notons  $\phi''$  la fonction potentielle associée au clustering  $C \cup \{c'_1\}$  :

$$\phi'' = \sum_{x \in X} \min \left( D^2(x), \|x - c'_1\|^2 \right) \leq \phi$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence avec le couple  $(t-1, u)$  car il reste  $t-1$  centres à choisir et  $u$  clusters toujours non couverts, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\phi' \mid c'_1 \in X_c] &\leq \left( \phi''(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u - t + 1}{u} \cdot \phi''(X_u) \\ &\leq \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u - t + 1}{u} \cdot \phi(X_u)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in X_c\}}] \leq \frac{\phi(X_c)}{\phi} \left[ \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u - t + 1}{u} \cdot \phi(X_u) \right]$$

2ème cas : choix du premier centre dans un cluster  $A \subset X_u$ .

On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in A\}}] &= \mathbb{P}(c'_1 \in A) \mathbb{E} [\phi' \mid c'_1 \in A] \\ &= \frac{\phi(A)}{\phi} \mathbb{E} [\phi' \mid c'_1 \in A]\end{aligned}$$

Notons  $p_a$  la probabilité de choisir l'élément  $a \in A$  comme premier centre et  $\phi_a = \phi''(A)$  où  $\phi''$  désigne la fonction potentielle associée au clustering  $C \cup \{c'_1\}$  comme précédemment mais avec  $c'_1 = a$  ici. Alors, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\phi' \mid c'_1 \in A] &= \sum_{a \in A} \mathbb{P}(c'_1 = a) \mathbb{E} [\phi' \mid c'_1 = a] \\ &= \sum_{a \in A} p_a \mathbb{E} [\phi' \mid c'_1 = a]\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence avec le couple  $(t-1, u-1)$  car il reste  $t-1$  centres à choisir et  $u-1$  clusters non couverts, on obtient :

$$\mathbb{E} [\phi' \mid c'_1 \in A] \leq \sum_{a \in A} p_a \left[ \left( \phi''(X_c \cup A) + 8\phi_{OPT}(X_u - A) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u-t}{u-1} \cdot \phi''(X_u - A) \right]$$

Comme

$$\begin{aligned}\phi''(X_c \cup A) &= \phi''(X_c) + \phi''(A) \\ &\leq \phi(X_c) + \phi_a,\end{aligned}$$

Et

$$\phi''(X_u - A) + \phi(A) \leq \phi(X_u - A) + \phi(A) = \phi(X_u)$$

$$\Rightarrow \phi''(X_u - A) \leq \phi(X_u) - \phi(A),$$

On aboutit à :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} [\phi' \mid c'_1 \in A] &\leq \sum_{a \in A} p_a \left[ \left( \phi(X_c) + \phi_a + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) - 8 \cdot \phi_{OPT}(A) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{u-t}{u-1} \cdot \left( \phi(X_u) - \phi(A) \right) \right] \\ &\leq \left( \phi(X_c) + \sum_{a \in A} p_a \phi_a + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) - 8 \cdot \phi_{OPT}(A) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) \\ &\quad + \frac{u-t}{u-1} \cdot \left( \phi(X_u) - \phi(A) \right)\end{aligned}$$

Par le lemme 3, on sait que :

$$\sum_{a \in A} p_a \phi_a \leq 8 \cdot \phi_{OPT}(A)$$

En appliquant ce résultat, on obtient :

$$\mathbb{E}[\phi' \mid c'_1 \in A] \leq \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u-t}{u-1} \cdot \left( \phi(X_u) - \phi(A) \right).$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in A\}}] &= \frac{\phi(A)}{\phi} \mathbb{E}[\phi' \mid c'_1 \in A] \\ &\leq \frac{\phi(A)}{\phi} \left[ \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u-t}{u-1} \cdot \left( \phi(X_u) - \phi(A) \right) \right] \end{aligned}$$

Comme

$$\mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in X_u\}}] = \sum_{A \subset X_u} \mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in A\}}] ,$$

on obtient :

$$\mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in X_u\}}] \leq \frac{\phi(X_u)}{\phi} \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{1}{\phi} \frac{u-t}{u-1} \cdot \left( \phi(X_u)^2 - \sum_{A \subset X_u} \phi(A)^2 \right)$$

Or, par l'inégalité des moyennes<sup>1</sup> (moyenne arithmétique et moyenne quadratique), on a :

$$\sum_{A \subset X_u} \phi(A)^2 \geq \frac{1}{u} \left( \sum_{A \subset X_u} \phi(A) \right)^2 = \frac{1}{u} \phi(X_u)^2$$

$$\Rightarrow - \sum_{A \subset X_u} \phi(A)^2 \leq -\frac{1}{u} \phi(X_u)^2$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in X_u\}}] &\leq \frac{\phi(X_u)}{\phi} \left( \phi(X_c) + 8 \phi_{OPT}(X_u) \right) (1 + H_{t-1}) + \frac{1}{\phi} \frac{u-t}{u-1} \left( \phi(X_u)^2 - \frac{1}{u} \phi(X_u)^2 \right) \\ &\leq \frac{\phi(X_u)}{\phi} \left[ \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u-t}{u} \cdot \phi(X_u) \right] \end{aligned}$$

---

1. L'énoncé et la démonstration de cette inégalité sont présentés en annexe 2 à la page 28

Finalement, en regroupant les deux cas, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi'] &= \mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in X_c\}}] + \mathbb{E}[\phi' \mathbf{1}_{\{c'_1 \in X_u\}}] \\
&\leq \frac{\phi(X_c)}{\phi} \left[ \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u-t+1}{u} \cdot \phi(X_u) \right] \\
&\quad + \frac{\phi(X_u)}{\phi} \left[ \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u-t}{u} \cdot \phi(X_u) \right] \\
&\leq \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u-t}{u} \cdot \phi(X_u) \\
&\quad + \frac{1}{u} \frac{\phi(X_u)}{u} \phi(X_c) \\
&\leq \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_{t-1}) + \frac{u-t}{u} \cdot \phi(X_u) \\
&\quad + \frac{1}{u} \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \\
&\leq \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot \left( 1 + H_{t-1} + \frac{1}{u} \right) + \frac{u-t}{u} \cdot \phi(X_u) \\
&\leq \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_t) + \frac{u-t}{u} \cdot \phi(X_u) \quad \left( \text{car } t \leq u \Rightarrow \frac{1}{u} \leq \frac{1}{t} \right).
\end{aligned}$$

L'inégalité est ainsi établie pour le couple  $(t, u)$ .  $\square$

**Théorème 1.** Soient  $C'$  un clustering obtenu lors de l'initialisation de l'algorithme des  $k$ -means++ et  $\phi'$  sa fonction potentielle associée. Alors on a :

$$\mathbb{E}[\phi'] \leq 8 \cdot (\ln k + 2) \cdot \phi_{OPT}$$

*Démonstration.*

Considérons le clustering  $C$  avec un seul centre obtenu après avoir choisi le premier centre de manière uniforme lors de la première étape de l'algorithme des  $k$ -means++ et notons  $\phi$  sa fonction potentielle associée. Soit  $A$  le cluster de  $C_{OPT}$  dans lequel ce premier centre a été choisi. Le clustering  $C'$  de fonction potentielle  $\phi'$  est obtenu alors en ajoutant à  $C$  les  $k-1$  centres restants. Ainsi, en appliquant le lemme 3 énoncé à la page 11  $t = u = k-1$  et  $X_c = A$  (donc  $X_u = X - A$ ), nous obtenons :

$$\mathbb{E}[\phi'] \leq \left( \phi(A) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X - A) \right) \cdot (1 + H_{k-1}) + \frac{(k-1) - (k-1)}{k-1} \cdot \phi(X - A)$$

Comme

$$\phi_{OPT}(X - A) = \phi_{OPT}(X) - \phi_{OPT}(A) = \phi_{OPT} - \phi_{OPT}(A),$$

l'inégalité équivaut à

$$\mathbb{E}[\phi'] \leq \left( \phi(A) + 8 \cdot \phi_{OPT} - 8 \cdot \phi_{OPT}(A) \right) \cdot (1 + H_{k-1})$$

En passant à l'espérance dans les deux membres, l'inégalité est préservée grâce à la propriété de positivité et nous obtenons :

$$\mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\phi'] \right] \leq \mathbb{E} \left[ \left( \phi(A) + 8 \cdot \phi_{OPT} - 8 \cdot \phi_{OPT}(A) \right) \cdot (1 + H_{k-1}) \right]$$

Remarquons que  $\mathbb{E}[\phi']$  est une constante. De même, dans le second membre de l'inégalité ci-dessus, tous les termes sont toujours constants sauf  $\phi(A)$ . Ainsi, par les propriétés de l'espérance, cette inégalité revient à :

$$\mathbb{E}[\phi'] \leq \left( \mathbb{E}[\phi(A)] + 8 \cdot \phi_{OPT} - 8 \cdot \phi_{OPT}(A) \right) \cdot (1 + H_{k-1})$$

Par le lemme 2, nous savons que

$$\mathbb{E}[\phi(A)] = 2 \cdot \phi_{OPT}(A)$$

En utilisant ce résultat, nous aboutissons donc à :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi'] &\leq \left( 8 \cdot \phi_{OPT} - 6 \cdot \phi_{OPT}(A) \right) \cdot (1 + H_{k-1}) \\ &\leq 8 \cdot \phi_{OPT} \cdot (1 + H_{k-1}) \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant l'inégalité<sup>2</sup>  $H_{k-1} < H_k \leq 1 + \ln k$ , nous obtenons

$$\mathbb{E}[\phi'] \leq 8 \cdot \phi_{OPT} \cdot (2 + \ln k)$$

ce qui est le résultat attendu. □

### I.3 Les k-means++ semi-supervisés

Dans cette section, nous nous intéressons au cas semi supervisé où certaines observations sont déjà labellisées. Nous supposons, par exemple, que les données supervisées sont obtenues de la manière suivante :

1. on choisit un cluster  $i$  aléatoirement de manière uniforme
2. on tire  $g_i$  observations du cluster  $i$  de manière uniforme
3. on affecte à ces  $g_i$  observations le label  $i$

Il est possible de répéter ces trois étapes plusieurs fois de façon à avoir plus de données supervisées et plus de clusters concernés par la supervision.

Nous introduisons deux nouvelles notations :  $X^{(u)}$  et  $X^{(s)}$  désignant respectivement les données non labellisées et les données supervisées (labellisées).

---

2. La démonstration de cette inégalité entre la série harmonique et le logarithme est rappelée en annexe 3 à la page 28

## Présentation de l'algorithme

Ici aussi, seule l'initialisation change pour tenir compte des données supervisées. Le reste de l'algorithme reste le même en recourant à l'algorithme de Lloyd. Voici l'algorithme d'initialisation pour ce cas :

### Algorithme d'initialisation des centres pour les k-means++

**Entrées :**  $X^{(u)}$  (données non labellisées),  $X^{(s)}$  (données labellisées) et  $k$  (le nombre de centres)

**Sorties :**  $C$  (l'ensemble des centres initiaux)

**1** poser  $n_\ell$  le nombre d'observations labellisées avec le label  $\ell$

**2** initialiser  $C = \emptyset$

**3** Pour  $\ell = 1, 2, \dots, k$  faire

**4**    Si  $n_\ell > 0$  alors

**5**        poser  $c_\ell$  égal au point moyen des données ayant  $\ell$  pour label

**6**        actualiser  $C = C \cup \{c_\ell\}$

**7** Tant que  $\text{card}(C) \leq k$  faire

**8**    choisir un  $X^{(u)}$  avec probabilité proportionnelle à  $D^2(x)$

**9**    actualiser  $C = C \cup \{x\}$

**10** sortir  $C$

## Critère de qualité

En suivant le même cheminement que pour les k-means++, nous démontrons que cette nouvelle manière d'initialiser les centres initiaux lorsqu'il existe des données supervisées permet d'améliorer la borne obtenue pour les k-means++. Ce résultat est énoncé dans le théorème 2 qui vient à la page 26. Les lemmes présentés dans cette section ont pour but de démontrer ledit théorème.

**Lemme 5.** Soient  $d \geq 1$  un entier,  $A = \{x_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, \dots, n\}$  un ensemble de points et  $S \subset A$  un sous ensemble de  $A$  de cardinal  $g$  choisi aléatoirement de manière uniforme dans l'ensemble des parties de  $A$  à  $g$  éléments.

Alors, on a :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{x_i \in S} x_i \right] = \frac{g}{n} \sum_{x_i \in A} x_i$$

*Démonstration.*

Posons  $X_i = \mathbb{1}_{\{x_i \in S\}}$ . C'est une variable aléatoire définie sur  $A$  et suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{g}{n}$  car le tirage est uniforme.  $S$  étant de cardinal  $g$ , nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sum_{x_i \in S} x_i \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n x_i \cdot X_i \mid \sum_{i=1}^n X_i = g \right] \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{E} \left[ X_i \mid \sum_{i=1}^n X_i = g \right] \quad (\text{par linéarité de l'espérance}) \end{aligned}$$

Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , la variable  $X_i \mid \sum_{i=1}^n X_i = g$  est une variable de Bernoulli également. Calculer son espérance revient donc à déterminer la probabilité qu'elle prenne la valeur 1. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ X_i \mid \sum_{i=1}^n X_i = g \right] &= \mathbb{P} \left( X_i = 1 \mid \sum_{i=1}^n X_i = g \right) \\
&= \frac{\mathbb{P} \left( X_i = 1, \sum_{i=1}^n X_i = g \right)}{\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n X_i = g \right)} \\
&= \frac{\mathbb{P} \left( X_i = 1, \sum_{j=1, j \neq i}^n X_j = g - 1 \right)}{\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n X_i = g \right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_i = 1) \cdot \mathbb{P} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n X_j = g - 1 \right)}{\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n X_i = g \right)} \quad (\text{par indépendance}) \\
&= \frac{\frac{g}{n} \cdot \binom{n-1}{g-1} \cdot \left(\frac{g}{n}\right)^{g-1} \cdot \left(1 - \frac{g}{n}\right)^{n-g}}{\binom{n}{g} \cdot \left(\frac{g}{n}\right)^g \cdot \left(1 - \frac{g}{n}\right)^{n-g}} \\
&= \frac{\binom{n-1}{g-1}}{\binom{n}{g}} \\
&= \frac{g}{n}
\end{aligned}$$

Il en résulte alors

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{x_i \in S} x_i \right] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{g}{n}$$

ce qui conclut la preuve. □

**Lemme 6.** Soient  $d \geq 1$  un entier,  $A = \{x_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, \dots, n\}$  un ensemble de points et  $S \subset A$  un sous ensemble de  $A$  de cardinal  $g$  choisi aléatoirement de manière uniforme dans l'ensemble des parties de  $A$  à  $g$  éléments.

Alors, on a :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{x_i \in S} x_i \right)^\top \left( \sum_{x_i \in S} x_i \right) \right] = \frac{g(g-1)}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} x_i^\top x_j + \frac{g}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\top x_i$$

*Démonstration.*

Les hypothèses étant les mêmes que celles du lemme 5, la démonstration est du même type et utilise les mêmes arguments.

Posons  $X_i = \mathbb{1}_{\{x_i \in S\}}$ . C'est une variable aléatoire définie sur  $A$  et suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{g}{n}$  car le tirage est uniforme.  $S$  étant de cardinal  $g$ , nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{x_i \in S} x_i \right)^\top \left( \sum_{x_i \in S} x_i \right) \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot X_i \right)^\top \left( \sum_{j=1}^n x_j \cdot X_j \right) \mid \sum_{l=1}^n X_l = g \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i^\top x_j X_i X_j \mid \sum_{l=1}^n X_l = g \right] \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i^\top x_j \mathbb{E} \left[ X_i X_j \mid \sum_{l=1}^n X_l = g \right] \end{aligned}$$

Pour tous  $1 \leq i, j \leq n$ , la variable  $X_i X_j \mid \sum_{l=1}^n X_l = g$  est une variable de Bernoulli également. Calculer son espérance revient donc à déterminer la probabilité qu'elle prenne la valeur 1. Nous distinguons deux cas : le cas où  $i = j$  et le cas où  $i \neq j$ .

Si  $i = j$ , comme  $X_i^2 = X_i$ , nous nous retrouvons avec la même espérance qui a été calculée dans la démonstration du lemme 5 et qui vaut donc  $\frac{g}{n}$

Si  $i \neq j$ , nous avons :



$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ X_i X_j \mid \sum_{l=1}^n X_l = g \right] &= \mathbb{P} \left( X_i X_j = 1 \mid \sum_{l=1}^n X_l = g \right) \\
&= \frac{\mathbb{P} \left( X_i = 1, X_j = 1, \sum_{l=1}^n X_l = g \right)}{\mathbb{P} \left( \sum_{l=1}^n X_l = g \right)} \\
&= \frac{\mathbb{P} \left( X_i = 1, X_j = 1, \sum_{l=1, l \neq i, j}^n X_l = g - 2 \right)}{\mathbb{P} \left( \sum_{l=1}^n X_l = g \right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_i = 1) \mathbb{P}(X_j = 1) \cdot \mathbb{P} \left( \sum_{l=1, l \neq i, j}^n X_l = g - 2 \right)}{\mathbb{P} \left( \sum_{l=1}^n X_l = g \right)} \\
&= \frac{\left(\frac{g}{n}\right)^2 \cdot \binom{n-2}{g-2} \cdot \left(\frac{g}{n}\right)^{g-2} \cdot \left(1 - \frac{g}{n}\right)^{n-g}}{\binom{n}{g} \cdot \left(\frac{g}{n}\right)^g \cdot \left(1 - \frac{g}{n}\right)^{n-g}} \\
&= \frac{\binom{n-2}{g-2}}{\binom{n}{g}} \\
&= \frac{g(g-1)}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

En combinant les deux cas nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{x_i \in S} x_i \right)^\top \left( \sum_{x_i \in S} x_i \right) \right] &= \sum_{i \neq j} x_i^\top x_j \mathbb{E} \left[ X_i X_j \mid \sum_{l=1}^n X_l = g \right] + \sum_{i=1}^n x_i^\top x_i \mathbb{E} \left[ X_i X_j \mid \sum_{l=1}^n X_l = g \right] \\
&= \sum_{i \neq j} x_i^\top x_j \frac{g(g-1)}{n(n-1)} + \sum_{i=1}^n x_i^\top x_i \frac{g}{n}
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat attendu. □

**Lemme 7.** Soient  $d \geq 1$  un entier,  $A = \{x_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, 2, \dots, n\}$  un cluster dans  $C_{OPT}$  et  $S \subset A$  un sous ensemble de  $A$  de cardinal  $g$  choisi aléatoirement de manière uniforme dans l'ensemble des parties de  $A$  à  $g$  éléments.

Alors, on a :

$$\mathbb{E} [\phi(A; \bar{a}_S)] = \left(1 + \frac{n-g}{g(n-1)}\right) \phi_{OPT}(A)$$

avec

$$\phi_{OPT}(A) = \sum_{a_i \in A} \|a_i - c(A)\|^2 \quad ,$$

$c(A)$  le point moyen de  $A$  et  $\bar{a}_S$  le point moyen de  $S$

*Démonstration.*

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\phi(A; \bar{a}_S)] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{a \in A} \|a - \bar{a}_S\|^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{a \in A} \|a - c(A)\|^2 + n \|c(A) - \bar{a}_S\|^2 \right] \quad (\text{par le lemme 1}) \\ &= \sum_{a \in A} \|a - c(A)\|^2 + n \mathbb{E} [\|\bar{a}_S - c(A)\|^2] \\ &= \phi_{OPT}(A) + n \mathbb{E} [\|\bar{a}_S - c(A)\|^2] \end{aligned}$$

Calculons donc  $\mathbb{E} [\|\bar{a}_S - c(A)\|^2]$  :

Nous avons

$$\begin{aligned} \|\bar{a}_S - c(A)\|^2 &= \langle \bar{a}_S - c(A), \bar{a}_S - c(A) \rangle \\ &= \langle \bar{a}_S, \bar{a}_S \rangle - 2 \langle c(A), \bar{a}_S \rangle + \langle c(A), c(A) \rangle \\ &= \bar{a}_S^\top \bar{a}_S - 2 \langle c(A), \frac{1}{g} \sum_{a \in S} a \rangle + c(A)^\top c(A) \\ &= \bar{a}_S^\top \bar{a}_S - \frac{2}{g} c(A)^\top \sum_{a \in S} a + c(A)^\top c(A) \end{aligned}$$

En passant à l'espérance, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\|\bar{a}_S - c(A)\|^2] &= \mathbb{E} [\bar{a}_S^\top \bar{a}_S] - \frac{2}{g} c(A)^\top \mathbb{E} \left[ \sum_{a \in S} a \right] + c(A)^\top c(A) \\
&= \mathbb{E} [\bar{a}_S^\top \bar{a}_S] - \frac{2}{g} c(A)^\top \frac{g}{n} \sum_{a \in A} a + c(A)^\top c(A) \quad (\text{par le lemme 5}) \\
&= \mathbb{E} [\bar{a}_S^\top \bar{a}_S] - 2c(A)^\top \frac{1}{n} \sum_{a \in A} a + c(A)^\top c(A) \\
&= \mathbb{E} [\bar{a}_S^\top \bar{a}_S] - 2c(A)^\top c(A) + c(A)^\top c(A) \\
&= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{g} \left( \sum_{a \in S} a \right)^\top \frac{1}{g} \left( \sum_{a \in S} a \right) \right] - c(A)^\top c(A) \\
&= \frac{1}{g^2} \left( \frac{g(g-1)}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} a_i^\top a_j + \frac{g}{n} \sum_{i=1}^n a_i^\top a_i \right) - c(A)^\top c(A) \quad (\text{par le lemme 6}) \\
&= \frac{g-1}{gn(n-1)} \sum_{i \neq j} a_i^\top a_j + \frac{1}{gn} \sum_{i=1}^n a_i^\top a_i - c(A)^\top c(A) \\
&= \frac{g-1}{gn(n-1)} \sum_{i,j} a_i^\top a_j - \frac{g-1}{gn(n-1)} \sum_{i=j} a_i^\top a_j + \frac{(n-1)}{gn(n-1)} \sum_{i=1}^n a_i^\top a_i - c(A)^\top c(A) \\
&= \frac{g-1}{gn(n-1)} \left( \sum_{a_i \in A} a_i \right)^\top \left( \sum_{a_j \in A} a_j \right) + \frac{n-g}{gn(n-1)} \sum_{i=1}^n a_i^\top a_i - c(A)^\top c(A) \\
&= n^2 \frac{g-1}{gn(n-1)} c(A)^\top c(A) + \frac{n-g}{gn(n-1)} \sum_{i=1}^n a_i^\top a_i - c(A)^\top c(A) \\
&= -\frac{n-g}{g(n-1)} c(A)^\top c(A) + \frac{n-g}{gn(n-1)} \sum_{i=1}^n a_i^\top a_i \\
&= \frac{n-g}{g(n-1)} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^\top a_i - c(A)^\top c(A) \right) \\
&= \frac{n-g}{gn(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n \|a_i\|^2 - n \|c(A)\|^2 \right) \\
&= \frac{n-g}{gn(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n \|a_i - c(A)\|^2 \right) \quad (\text{en appliquant le lemme 1 avec } z=0) \\
&= \frac{n-g}{gn(n-1)} \phi_{OPT}(A)
\end{aligned}$$

et le résultat est démontré ! □

Énonçons maintenant la version du lemme 4 pour le cas semi - supervisé et qui est utilisé dans la démonstration du théorème 2 à la page 26 sur la majoration de l'espérance de la fonction potentielle lorsqu'il y a des données labellisées :

**Lemme 8.** Soient  $C$  un clustering arbitraire et  $\phi$  sa fonction potentielle associée. Supposons qu'il y a  $u$  clusters non couverts par  $C$  dans  $C_{OPT}$  (avec  $u \geq 0$  entier). Notons  $X_u$  l'ensemble des points de ces clusters et  $X_c = X - X_u$  (son complémentaire) l'ensemble des points dans les clusters couverts. Supposons que nous ajoutons  $t \leq u$  nouveaux centres à  $C$  (en excluant les données labellisées) choisis de manière aléatoire proportionnellement au poids  $D^2$ . Notons  $C'$  le nouveau clustering ainsi obtenu et  $\phi'$  sa fonction potentielle associée. Alors, on a :

$$\mathbb{E}[\phi'] \leq \left( \phi(X_c) + 8 \cdot \phi_{OPT}(X_u) \right) \cdot (1 + H_t) + \frac{u-t}{u} \cdot \phi(X_u);$$

avec  $H_t = \sum_{i=1}^t \frac{1}{i}$  la  $t^{\text{ème}}$  somme partielle de la série harmonique.

*Démonstration.* Elle est similaire à celle du lemme 4 présentée à la page 13.

Il suffit juste d'utiliser les probabilités tenant compte de nouvelles hypothèses ajoutées pour le cas semi-supervisé : étant donné un ensemble  $A$ , la probabilité de choisir un nouveau centre  $a$  dans cet ensemble proportionnellement au poids  $D^2$  tout en veillant à ne pas choisir  $a$  parmi les données labellisées est alors donnée par :

$$\frac{\phi(A \cap X^{(u)})}{\phi(X^{(u)})}$$

où  $X^{(u)}$  désigne l'ensemble des données non labellisées.

De plus, en remarquant que toute donnée labellisée est considérée comme faisant partie d'un cluster couvert, nous avons alors

$$X^{(s)} \cap X_u = \emptyset$$

où  $X^{(s)}$  désigne l'ensemble des données labellisées (supervisées).

Ainsi, en tenant compte de ces remarques et en suivant le cheminement de la démonstration présentée pour le lemme 4, nous obtenons le résultat annoncé.  $\square$

Finalement, voici le résultat final de cette partie :

**Théorème 2.** Supposons que la supervision a été faite suivant le procédé décrit au début de cette section. Posons  $C = \emptyset$ . Pour chaque label  $\ell$  pour lequel il y a des observations supervisées, nous ajoutons à  $C$  le point moyen  $c_\ell$  de toutes ces observations. A la fin de ces ajouts, supposons que  $\text{card}(C) = G$ . Notons  $n_{\ell_j}$  le nombre d'observations affectées du label  $\ell_j$  et  $n_j$  le cardinal du cluster associé au label  $\ell_j$  dans  $C_{OPT}$  pour  $j = 1, 2, \dots, G$ . Il reste donc  $u = k - G$  clusters non couverts par  $C$  dans  $C_{OPT}$ . Ajoutons alors  $t = u$  nouveaux centres à  $C$  pour former  $C'$  en utilisant le poids  $D^2$  et en ne prenant pas aucune observation labellisée.

La fonction potentielle  $\phi'$  associée au clustering  $C'$  ainsi obtenu vérifie alors

$$\mathbb{E}[\phi'] \leq 8 \cdot (2 + \ln(k - G)) \cdot \phi_{OPT}$$

*Démonstration.*

Nous allons appliquer le lemme 8 avec  $u = t = k - G$ . Pour cela, remarquons d'abord que

$$X_c = \bigcup_{j=1}^G X_{\ell_j}$$

où  $X_{\ell_j}$  désigne de le cluster de  $C_{OPT}$  correspondant au label  $\ell_j$ . Ainsi,

$$\phi(X_c) = \sum_{j=1}^G \phi(X_{\ell_j})$$

et

$$\begin{aligned} \phi_{OPT}(X_u) &= \phi_{OPT}(X - X_c) \\ &= \phi_{OPT}(X) - \sum_{j=1}^G \phi_{OPT}(X_{\ell_j}) \\ &= \phi_{OPT} - \sum_{j=1}^G \phi_{OPT}(X_{\ell_j}) \end{aligned}$$

Compte tenu de ces constants, le résultat du lemme 8 s'écrit alors :

$$\mathbb{E}[\phi'] \leq \left( \sum_{j=1}^G \left( \phi(X_{\ell_j}) - 8\phi_{OPT}(X_{\ell_j}) \right) + 8\phi_{OPT} \right) \cdot (1 + H_{k-G})$$

Et en passant à l'espérance dans le deuxième membre tout en gardant à l'esprit que tous les termes sont des constantes sauf  $\phi(X_{\ell_j})$  et en appliquant le lemme 7 énoncé à la page 24 avec  $A = X_{\ell_j}$  ( $S$  correspondant ici à l'ensemble des observations de  $X_{\ell_j}$  qui sont labellisées avec  $\bar{a}_S = c_{\ell_j}$ ) pour tout  $X_{\ell_j}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi'] &\leq \left( \sum_{i=1}^G \left( \left( 1 + \frac{n_j - n_{\ell_j}}{n_{\ell_j}(n_j - 1)} \right) \phi_{OPT}(X_{\ell_j}) - 8\phi_{OPT}(X_{\ell_j}) \right) + 8\phi_{OPT} \right) \cdot (1 + H_{k-G}) \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^G \left( \left( -7 + \frac{n_j - n_{\ell_j}}{n_{\ell_j}(n_j - 1)} \right) \phi_{OPT}(X_{\ell_j}) \right) + 8\phi_{OPT} \right) \cdot (1 + H_{k-G}) \\ &\leq 8\phi_{OPT} \cdot (1 + H_{k-G}) \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant due au fait que pour tout  $1 \leq j \leq G$ , nous avons

$$n_j - n_{\ell_j} \leq n_j - 1$$

ce qui implique que la somme sur les  $j$  intervenant dans le second membre de l'avant dernière inégalité est toujours négative.

Pour conclure, nous utilisons l'inégalité<sup>3</sup>  $H_{k-G} \leq 1 + \ln(k - G)$  et nous obtenons

$$\mathbb{E}[\phi'] \leq 8 \cdot \phi_{OPT} \cdot \left( 2 + \ln(k - G) \right)$$

ce qui est le résultat escompté. □

---

3. Voir l'annexe 3 à la page 28 pour la démonstration de cette inégalité

L'amélioration de la borne ne semble pas très importante comparée à la borne obtenue pour les k-means++. Cependant, plus il y a des données supervisées, plus cet algorithme sera plus performant que celui des k-means++.

## I.4 Résultats annexes utilisés dans cette partie

Dans cette section, nous présentons (pour information) trois résultats qui ont été utilisés indirectement ou directement dans les démonstrations effectuées précédemment.

### Inégalité de Cauchy-Schwarz

#### Annexe 1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ )

On considère l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Alors, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|.$$

*Démonstration.* Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $t \in \mathbb{R}$ . On a :

$$0 \leq \|x + ty\|^2 = \|y\|^2 t^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|x\|^2$$

Le discriminant de ce polynôme du second degré est donné par :

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2$$

Comme ce polynôme est de signe constant, il admet au plus une racine réelle et donc son discriminant est négatif ou nul :

$$\begin{aligned} \Delta \leq 0 &\Leftrightarrow \langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| ; \end{aligned}$$

d'où le résultat escompté. □

### Inégalité des moyennes

#### Annexe 2. (Inégalité des moyennes : arithmétique et quadratique)

Soient  $u \geq 1$  un entier et  $a_1, a_2, \dots, a_u$  des réels. Alors :

$$\frac{1}{u} \sum_{i=1}^u a_i \leq \sqrt{\frac{1}{u} \sum_{i=1}^u a_i^2}.$$

*Démonstration.* C'est une application immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^u$  (démontrée en annexe 1) en prenant  $x = (a_1, a_2, \dots, a_u)$  et  $y = (\frac{1}{u}, \frac{1}{u}, \dots, \frac{1}{u})$ . □

### Majoration des sommes partielles de la série harmonique

#### Annexe 3. (Majoration de la série harmonique par le logarithme)

Pour tout  $k \geq 1$  entier, on pose  $H_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$  la  $k^{\text{ème}}$  somme partielle de la série harmonique. Alors, on a :

$$\forall k \geq 1, H_k \leq 1 + \ln k$$

*Démonstration.*

Pour  $k = 1$ , l'inégalité est trivialement vérifiée.

Supposons alors  $k \geq 2$ . Pour tout  $2 \leq i \leq k$ , nous nous intéressons alors à la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  restreinte à l'intervalle  $[i-1, i]$ . Cette fonction est continue et strictement décroissante. Ainsi,

$$\forall x \in [i-1, i], \quad \frac{1}{i} \leq \frac{1}{x}$$

Et par positivité de l'intégrale,

$$\frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^i \frac{1}{x} dx$$

Et en sommant sur toutes les valeurs de  $i$  et en utilisant la relation de Chasles, nous obtenons :

$$1 + \sum_{i=2}^k \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^k \frac{1}{x} dx$$

Soit

$$H_k \leq 1 + \ln k$$

Ainsi, l'inégalité est bien établie.  $\square$

## II Partie appliquée

Dans cette section, nous allons tester et comparer les différents algorithmes de kmeans, kmeans++ et kmeans++ semi-supervisés sur un jeu de données clients. Nos mesures de performances sont le coût tel qu'estimé par la fonction potentielle, ainsi que la durée d'exécution de l'algorithme.

### II.1 La Base de Données

La base de données contient 60366 observations (clients) et 39 variables quantitatives et qualitatives. Tous les clients sont anonymisés, ce qui limitera l'interprétation de l'analyse. Nous commençons par analyser la base de données. Dans la Figure 1 nous affichons les statistiques d'une partie de nos données.

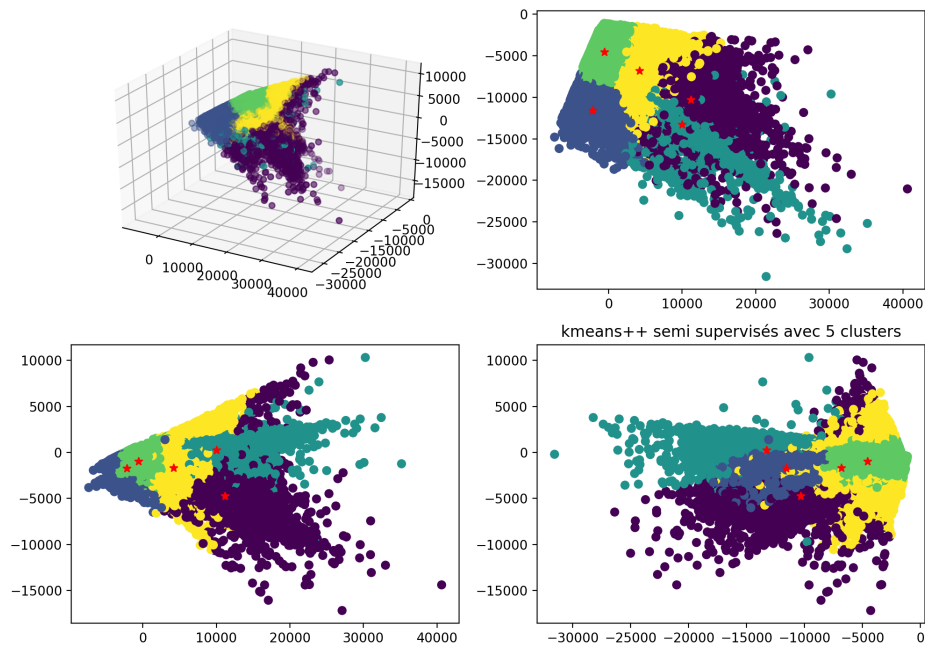
FIGURE 1 – Sommaire des statistiques d'une partie des données

Index	z_distance_to_shc	r_distance_to_shc	x_distance_to_shc	roducts_purchase	e_products_purch	mount_purchases	avg_purchase	avg_price	shops_used	distance_shop_1	distance_shop_2	distance_shop_3	distance_shop_4	distance_shop_5	icts_purchased_sl
count	60366	60366	60366	60366	60366	60366	60366	60366	60366	60366	60366	60366	60366	60366	60366
mean	2838.23	1396.43	2942.67	1778.7	338.668	4235.46	8.53208	3.66651	2.38005	2496.63	2488.24	1924.97	2882.8	2820.9	887.813
std	1119.9	1048.41	1327.52	2185.04	236.002	5006.74	10.3154	9.13317	1.01218	1281.53	1417.36	1157.75	1730.09	1260.85	1438.48
min	6.64247	6.64247	6.64247	1	1	0.212	0.212	0.212	1	93.2834	11.1984	17.8443	6.64247	25.4607	0
25%	1258.24	573.611	2117.22	227	127	653.118	4.53291	2.53375	2	1609.58	1501.9	1253.84	1532.68	1173.41	49
50%	1936.88	1184.94	2869.2	925	384	2355.14	6.86278	2.94426	2	2288.67	2355.4	1746.17	2784.32	1852.93	292
75%	2569.71	1962.38	3580.67	2551.75	500	6054.46	10.4295	3.55811	3	3144.06	3370.72	2323.56	4056	2466.56	1072
max	9004.16	9004.16	9267.7	22131	1465	51588.7	787.569	787.569	5	8019.92	9004.16	7395.25	9273.69	7465.81	17016

Nous voyons qu'il existe une seule variable qualitative, la variable 'shops used', les autres étant toutes des variables quantitatives continues. Nous remarquons aussi que toutes les variables quantitatives affichent de grandes dispersions. Par exemple, en regardant le nombre de produits achetés, nous voyons que certains clients achètent très peu, soit 1 seul article, tandis que d'autres achètent jusqu'à 22 131 articles, la moyenne étant 2 552.75. Ce type d'observation nous permettra de mieux interpréter les clusters proposés par les différentes versions des k-means.

Une Analyse en Composantes Principales (ACP) est implémentée afin de mieux regrouper et comprendre les variables quantitatives. Les 3 premières composantes principales expliquent moins de la moitié de l'inertie, soit 41.58% de la variance expliquée. Nous n'étudierons pas les résultats de l'ACP dans notre situation si ce n'est pour nous aider à mieux distinguer les clusters proposés par la méthode de kmeans++ semi supervisé, et mieux les associer aux variables du jeu de données.

FIGURE 2 – ACP en 3 dimensions





## II.2 Choix du nombre de clusters

La méthode kmeans est une méthode d'apprentissage non-supervisée. Lors de son application les données sont séparées en plusieurs classes dont le nombre est prédéfini de façon à regrouper les individus ayant le plus de similarité. C'est ainsi qu'une des tâches clefs est de trouver le nombre approprié de classes,  $k$ . Il existe plusieurs techniques pour déterminer le nombre de classes. Nous discuterons que des cas les plus connus :

### 1. Méthode du pouce :

Cette méthode est une méthode approximative où le nombre de classes,  $k$  est déterminé par :  $k \approx \sqrt{n/2}$

### 2. L'indice de qualité :

Afin d'évaluer la qualité de la classification, les indices inertiels (l'inertie intra-classes et l'inertie inter-classes) sont souvent utilisés. L'inertie intra-classes 'mesure le degré d'homogénéité entre les objets appartenant à la même classe' tandis que l'inertie inter-classes 'mesure le degré d'hétérogénéité entre les classes.' Il existe plusieurs indices de qualité, par exemple l'indice de Dunn, l'indice de Calinski et Harabasz (CH) ou encore l'indice de Silhouette. Le premier calcule la distance minimale inter-classes et ainsi plus cette distance est grande, meilleur sera la classification.

Introduit par Kauffman et Rousseeuw, l'indice de Silhouette nous donne une représentation visuelle de la distance entre un point d'une classe avec les points des classes voisines. Plus le coefficient ainsi calculé est proche de 1, plus la distance avec les classes voisines (inertie inter) est grande. Ceci s'observe notamment pour le nombre de classes optimal. À l'inverse, un coefficient proche de -1 nous indique une mauvaise classification de l'observation.

### 3. Méthode du coude :

La méthode du coude est une technique visuelle très connue. L'idée derrière cette technique est d'implémenter la méthode K-means en parcourant  $k$  valeurs. À chacune des  $k$  valeurs, la somme des erreurs au carré est calculée et est affichée sur un graphique, nous permettant de mieux visualiser les résultats. L'objectif est de choisir la valeur  $k$  (qui sera le nombre de classes) créant un effet de 'coude', c'est-à-dire provoquant une baisse plus conséquente, plus soudaine de la somme des erreurs au carré. Nous disons ceci en gardant en tête que la somme des erreurs aura toujours tendance à baisser, plus la valeur de  $k$  est grande.

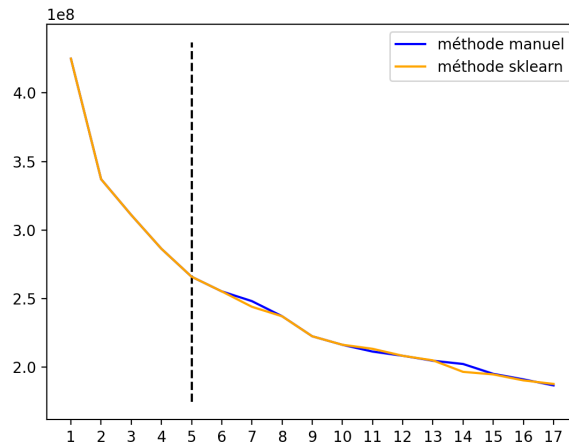
### 4. La validation croisée :

La validation croisée regarde la stabilité des classes. Les données sont séparées en au moins deux parties. La première est utilisée pour former les classes tandis que la deuxième sert de validation. Lorsque nous parlons de stabilité, nous parlons de la fréquence à laquelle des classes similaires sont formées lorsque plusieurs itérations

sont effectuées. Ainsi une plus grosse fréquence de l'apparition de mêmes classes équivaut à une plus grosse stabilité de ces classes.

Dans le cadre de notre étude, nous choisissons de travailler avec la méthode du coude, une méthode que nous appliquons sur la méthode de kmeans++ semi-supervisé avec 60% de données labellisées. Cette méthode est d'ailleurs comparée avec celle de sklearn afin de déterminer l'exactitude de l'algorithme utilisé. Figure 3 affiche la répartition des sommes des erreurs au carré à la fois pour notre méthode, dite la méthode manuelle, ainsi que la méthode proposée par sklearn. Nous voyons une baisse plus soudaine lorsque nous avons 5 clusters. Ce sera ainsi le choix du nombre de clusters utilisé lors de l'application des algorithmes de clustering.

FIGURE 3 – Méthode du coude, comparaison sklearn et méthode manuelle



## II.3 Résultats des expérimentations

Dans cette section nous cherchons à présenter les résultats obtenus par les algorithmes kmeans, kmeans++ et kmeans++ semi supervisés. De plus ce dernier a été analysé plus en détails afin d'afficher l'impact des différents pourcentages de données labellisées. Comme pour l'ACP la variable qualitative a été écartée de notre analyse. 6 essais ont été effectués afin d'évaluer le temps d'exécution des algorithmes (en secondes). La moyenne des distances intra-classes a été obtenue en se basant sur 100 simulations. Le nombre de clusters, déterminé en utilisant la méthode du coude, est 5. Nous baserons le reste de notre étude sur ces 5 clusters.

TABLE 1 – Résultats en utilisant kmeans

Temps d'exécution Minimum	Temps d'exécution Maximum	Temps d'exécution Moyen	Moyenne des distances intra-classe
0.867459	4.278867	1.867284	267024131.97

TABLE 2 – Résultats en utilisant kmeans++

Temps d'exécution Minimum	Temps d'exécution Maximum	Temps d'exécution Moyen	Moyenne des distances intra-classe
0.952380	1.963426	1.603216	269311160.94

TABLE 3 – Résultats en utilisant kmeans++ semi-supervisées avec 60% de données labellisées

Temps d'exécution Minimum	Temps d'exécution Maximum	Temps d'exécution Moyen	Moyenne des distances intra-classe
0.386259	0.616933	0.481936	265971783.28

Nous cherchons en premier lieu à comparer les résultats de différents algorithmes. Les tableaux ci-dessous les affichent.

Tel qu'attendu la durée d'exécution moyenne de l'algorithme de kmeans est plus longue que celle du kmeans++ et du kmeans++ semi-supervisée (avec 60% de données labellisées). Cette dernière est d'ailleurs en moyenne 3 fois plus rapide que le kmeans ou le kmeans++. Au niveau du coût de la fonction nous voyons que le kmeans ++ semi supervisée affiche à nouveau le meilleur résultat (avec la plus petite distance moyenne intra-classes sur 100 simulations).

Nous notons toutefois que la distance intra-classe moyenne lorsque kmeans est utilisé est plus petite que celle du kmeans++. Bien qu'on se serait attendu à obtenir le résultat inverse, cette observation peut être due au fait que le jeu de données en question soit bien adapté aux kmeans. Ainsi, la qualité de classification obtenue par les kmeans est aussi bonne que celle des kmeans++. Cependant, les kmeans++ restent bien meilleurs dans le sens où l'algorithme est plus rapide pour des classifications considérées équivalentes.

À partir des tableaux 4 et 5, nous voyons que plus le pourcentage de données est labellisé, plus le temps d'exécution est rapide. Toutefois, nous ne pouvons pas dire autant des distances intra-classe moyenne. En effet lorsque les données sont labellisées à 99% nous

TABLE 4 – Résultats en utilisant kmeans++ semi-supervisées avec 25% de données labellisées

Temps d'exécution Minimum	Temps d'exécution Maximum	Temps d'exécution Moyen	Moyenne des distances intra-classe
0.534357	0.759242	0.629477	265972507.4

TABLE 5 – Résultats en utilisant kmeans++ semi-supervisées avec 99% de données labellisées

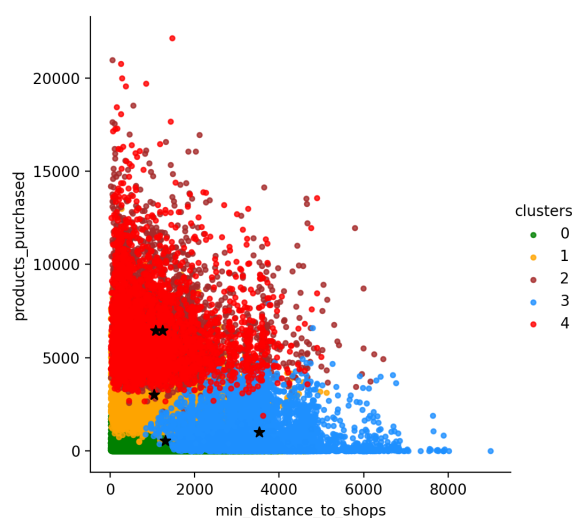
Temps d'exécution Minimum	Temps d'exécution Maximum	Temps d'exécution Moyen	Moyenne des distances intra-classe
0.115119	0.288531	0.232994	265976831.1

avons une inertie plus élevée que lors que les données sont moins labellisées. Une nouvelle fois la problématique pourrait venir du jeu de données, ou encore du fait que la supervision est en fait une pseudo-supervision car les vrais labels n'étaient pas disponibles. Ainsi cela expliquerait la variation des inerties moyennes. C'est pour cela que nous nous baserons davantage sur la durée d'exécution comme mesure de performance.

## Interprétation

Nous cherchons désormais à interpréter les résultats obtenus sur le jeu de données utilisé dans cette étude. Figure 4 affiche les 5 clusters ainsi que leurs centres, tels que proposés par l'algorithme des kmeans++ semi-supervisés avec 60% de données labellisées. Nous rappelons que le nombre de clusters a préalablement été choisi par la méthode du coude.

FIGURE 4 – Affichage 5 clusters et 5 centres, déterminé par kmeans++ semi-supervisé



Nous pouvons clairement voir que les clusters 1 et 3 (orange et rouge) sont moins distincts entre eux contrairement aux autres clusters. Effectivement, les centres de ces deux clusters sont très proches suggérant que nous aurions pu regrouper ces deux clusters. Nous avons choisi ici de représenter le nuage de points associé aux variables `products_purchased` et `min_distance_to_shops`. Ces variables ont été choisies car les clusters sont bien discriminés.

Ce que nous pouvons déduire du graphique est que les clients appartenant au cluster 4 sont ceux parcourant les plus petites distances par rapport aux magasins à l'inverse de ceux du cluster 0. D'ailleurs nous voyons que ces derniers achètent le moins de produits, tout comme les clients du cluster 2. Ainsi, nous pouvons établir un lien entre la distance parcourue pour aller au magasin et le nombre de produits achetés. En général, plus un client devra parcourir une plus longue distance, moins il ira au magasin, et le moins de produits il achètera. Sur un plan commercial et marketing, ce seront ainsi les clients des clusters 1,3 et 4 qui devraient être ciblés comme étant des acheteurs potentiels.

Nous cherchons désormais à établir d'autres liens avec les variables utilisées dans notre jeu de données. Nous commençons par analyser la variable qualitative `shops_used`. Figure 5 nous affiche la répartition des magasins ciblés dans l'étude. Les magasins 4 et 5 semblent être les plus proches des clients. Pour le magasin 3 et le 4 (bien que la répartition du nuage de celui-ci est moins distinct que celui du magasin 3 sur le graphique), il est clair que moins le client voyage, plus il achète des produits. Toutefois vu la grande quantité de données, il est difficile de bien différencier les clusters, ainsi il faudra d'autres graphiques pour confirmer nos résultats.

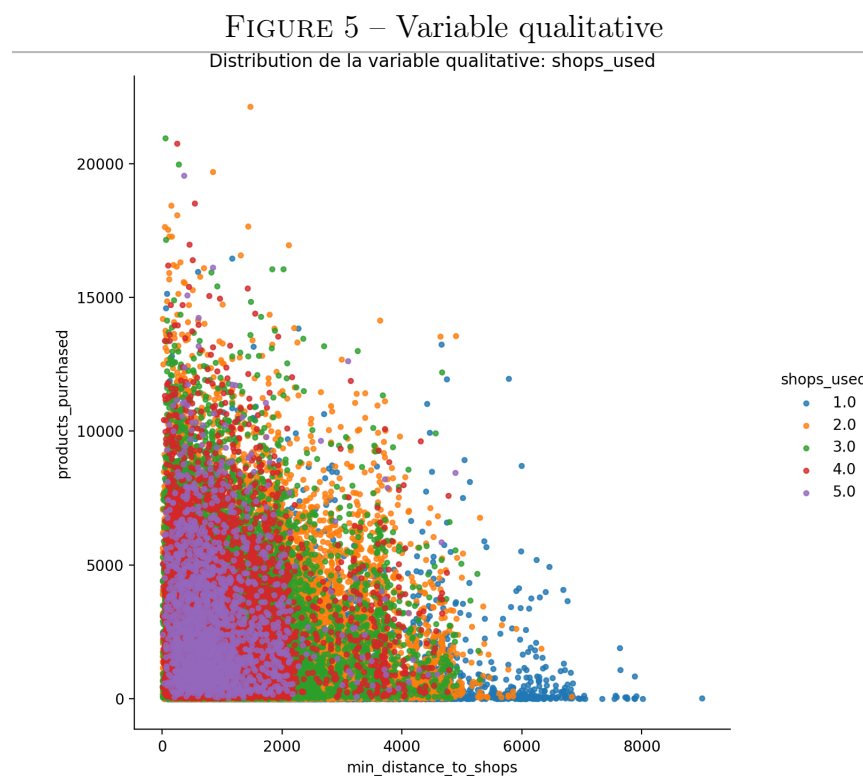
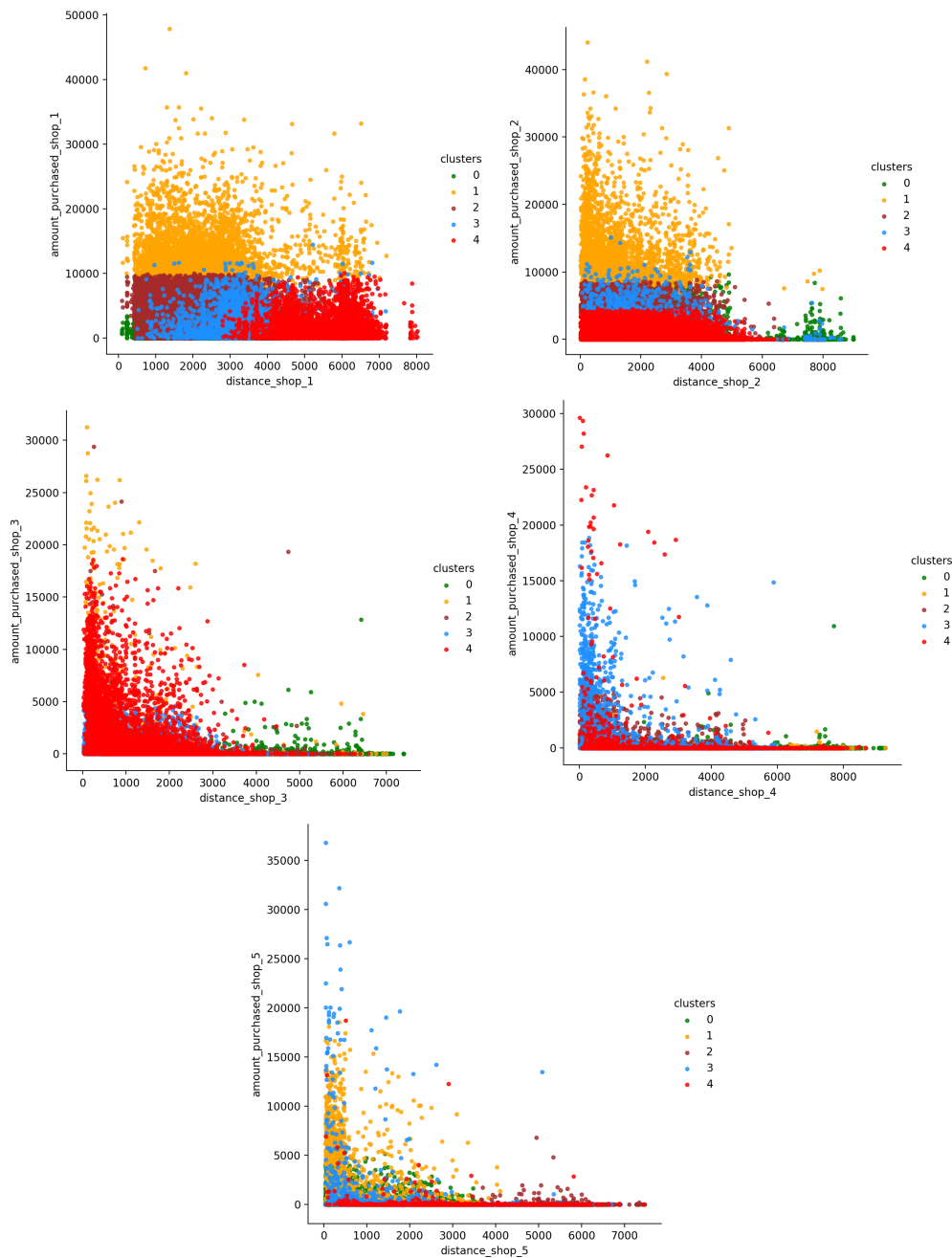


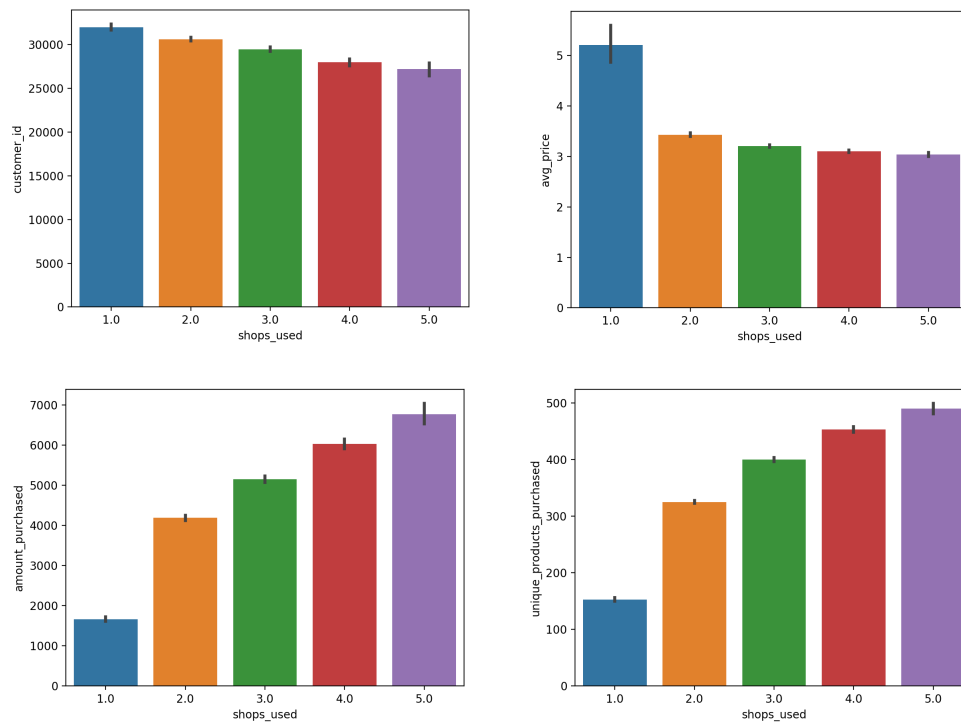
Figure 6 ci-dessous affichent la relation entre la distance pour aller à chaque magasin et le nombre de produits achetés dans ces magasins. Nous voyons dans le premier graphique que les clients des clusters 1, 2 et 3 semblent avoir une préférence pour le magasin 1. Les clients du cluster 5 sont ceux qui semblent habiter le plus loin du magasin 1. En revanche bien qu'ils en soient plus éloignés, leur consommation semble être un peu plus grande qu'au magasin 2, suggérant qu'ils préfèrent acheter les produits du magasin 1 au 2. Pour les 3 derniers graphiques, il est difficile d'établir un lien évident car les observations sont mélangées et peu distinguables. Nous nous baserons sur d'autres graphiques afin de tirer des conclusions.

FIGURE 6 – Relation nombre de produits acheté et distance pour chaque magasin



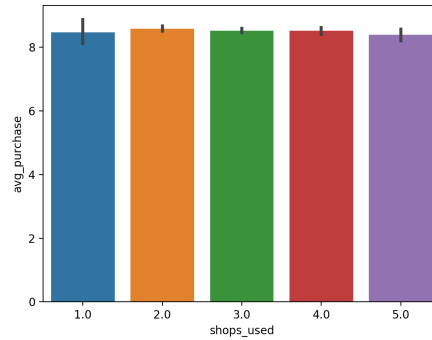
Nous utilisons des diagrammes en barre (voir ci-dessous) afin de nous aider à mieux comprendre le nombre de clients allant dans les magasins ainsi que les quantités exactes de produits vendus. Nous voyons que le magasin 5 est celui qui vend le plus de produits (unique et globalement) et c'est celui qui affiche le plus petit prix moyen des produits. Ainsi, les magasins 5 et 4 sont les magasins les plus vendeurs. Le magasin 1 est celui qui vend les produits les plus chers. Il n'est donc pas étonnant de voir qu'il vend une plus petite quantité de produits. Finalement, nous voyons quand même que plus de clients vont aux magasins 1 et 2, le magasin 5 étant celui qui a le moins de clients. De ces observations nous comprenons que les magasins 1 et 2 sont des magasins qui vendent des produits plus chers, avec pour conséquence le fait que même si les clients y vont plus souvent, ils ne vont pas nécessairement acheter les produits de ces magasins.

FIGURE 7 – Diagrammes de barre affichant le prix moyen, nombre de produits vendus et nombre clients allant dans chaque magasin



Toutes ces observations nous poussent à dire que la consommation diminue lorsque les prix augmentent, et ainsi les magasins les moins chers, soit 4 et 5, sont ceux vendant le plus de produits. Ils ont également plus de produits uniques que les magasins plus chers comme les 1 et 2. Ces derniers attirent beaucoup de clients, mais ceux-ci n'achèteront pas nécessairement les produits, d'où le fait que ces types de magasins vendent moins de produits. Au niveau des marges d'affaires de ces magasins, nous voyons dans le diagramme ci-dessous qu'il n'y a pas de grande différence entre ces boutiques. Effectivement, le quantité de consommation est compensée par le prix, ce qui fait que la vente moyenne reste plus ou moins égale.

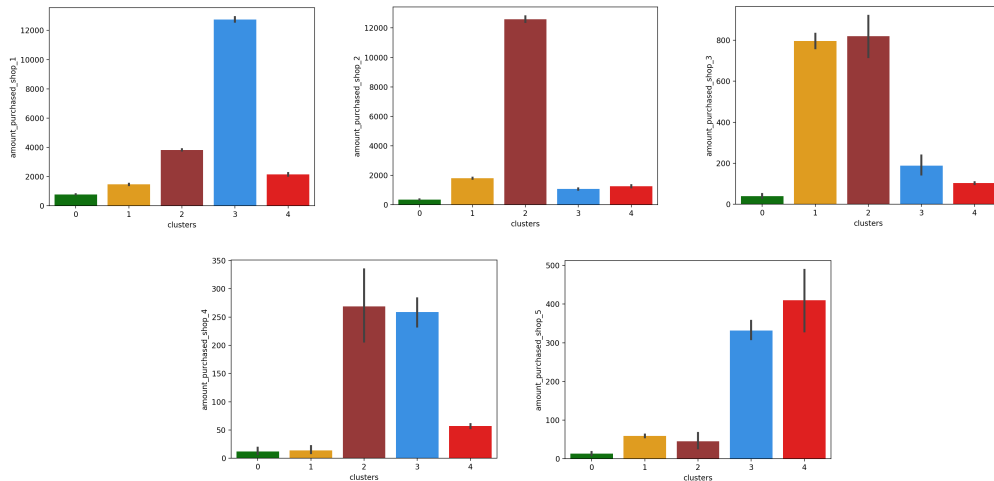
FIGURE 8 – Nombre moyen de produits vendus par chaque magasin



Nous cherchons maintenant à lier ces observations aux clusters obtenus par les kmeans++ semi-supervisés. Pour cela nous utilisons à nouveau des diagrammes en barre qui affichent le nombre d'individus de clusters qui achètent dans les différents magasins. À l'aide de ces graphiques (Figure 9), nous pouvons établir que certains magasins attirent davantage certains clients.

Le magasin 1 attire les individus du cluster 3, tandis que le magasin 2 attire plus le cluster 2, le magasin 3 attire les individus des clusters 1 et 2, le magasin 4 quant à lui attire les clients des clusters 2 et 3, et finalement le magasin 5 attire principalement les individus des clusters 4 et 3. Dans tous les cas le cluster 0 est celui qui est le moins représenté, confirmant le fait que ce cluster pourrait facilement être regroupé avec un autre cluster.

FIGURE 9 – Nombre de produits achetés par chaque cluster, pour chaque magasin





### III Conclusion

L'objectif de notre étude vise en premier lieu à évaluer la performance des `kmeans++` semi-supervisées par rapport aux `kmeans` standard, et aux `kmeans++`. Pour le faire, nous tentons de démontrer les différentes algorithmes dans une partie théorique, avant de les appliquer sur un jeu de données. Finalement les performances sont comparées à l'aide de mesures comme les temps d'exécution ainsi que le coût de la fonction. Nous avons vu que le coût, soit l'inertie intra moyenne pour 100 simulations, reste une mesure moins fiable dans notre situation, principalement parce que notre jeu de données ne contient pas de vrai labels. Ainsi, en nous basant sur le temps d'exécution, nous voyons clairement que les `kmeans++` semi-supervisées restent la méthode la plus efficace en temps, en étant presque 3 fois plus rapide que les deux autres méthodes de classification non-supervisées vu dans cet étude.

Finalement, nous appliquons la méthode semi-supervisée afin d'analyser la segmentation des clients. Les données contiennent des variables et observations préétablies, ce qui fait qu'aucune amélioration peut être faite au niveau des données elles-mêmes. En décidant de labelliser à 60% les données et en choisissant d'analyser 5 clusters, comme déterminé par la méthode du coude, nous trouvons quelques informations pertinentes. Toutefois, ces informations restent limitées, compte tenu du type de données.

Nous observons principalement que la segmentation des clients peut être faite en se basant sur les magasins. Par exemple, la boutique 1 vend plus aux clients du cluster 3, la boutique 5 vend plus aux clients du cluster 4, ou encore la boutique 2 attire principalement le cluster 2. De plus à l'aide de diagrammes supplémentaires, nous voyons que certains magasins vendent des produits plus chers, comme les magasins 1 et 2, suggérant que ceux qui y achètent, soient les clusters 3 et 2 seraient plus aisés. De plus nous remarquons que le cluster 0 est très petit, il représente ceux qui vivent le plus proche des magasins mais qui achètent le moins de produits.

Nous rencontrons toutefois certaines limites auprès des `kmeans++` semi-supervisés. Cette méthode ne nous permet pas de bien identifier tous les clusters (notamment les clusters 2 et 4 dont les centres sont très proches) et elle reste limitée sur les variables qui peuvent être analysées. Dans un cas pratique en entreprise par exemple, une étude plus approfondie peut être menée au sein de chaque magasin en ciblant les individus de clusters identifiés ci-dessus qui y viennent afin de cerner davantage leurs attentes.