Aljabar Boolean dan Sintesis Fungsi Logika

Kuliah#3 TKC205 Sistem Digital - TA 2013/2014

Eko Didik Widianto

Sistem Komputer - Universitas Diponegoro

Pengantar

- Dalam proses analisis dan sintesis diperlukan satu model untuk mendeskripsikan fungsi logika. Salah satu model yang digunakan adalah aljabar Boolean
- Proses sintesis bertujuan untuk merancang rangkaian logika optimal berdasarkan kebutuhan fungsional sistem yang diinginkan.
  - Kebutuhan sistem dapat dinyatakan dalam deskripsi tekstual, tabel kebenaran maupun diagram pewaktuan
  - Jika tidak ada konstrain (misalnya waktu sintesis), hasilnya adalah rangkaian yang minimal atau paling sederhana
  - Rangkaian logika minimal diperoleh dari persamaan logika yang paling sederhana
  - Penyederhanaan persamaan logika dilakukan menggunakan aljabar Boolean, peta Karnaugh dan metode tabular Quine McKluskey

Umpan Balik

- Sebelumnya dibahas tentang konsep rangkaian logika:
  - Representasi biner dan saklar sebagai elemen biner
  - Variabel dan fungsi logika
  - Ekspresi dan persamaan logika
  - Tabel kebenaran
  - Gerbang dan rangkaian logika
  - Analisis rangkaian dan diagram Pewaktuan
- **Umpan Balik**:
  - Gambarkan rangkaian untuk fungsi logika $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1\overline{x}_2) + (\overline{x}_3 x_4)$ dan analisis untuk masukan $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0, 1, 0, 1\}$, 12
  - Buktikan bahwa $(x_1\overline{x}_2) + (\overline{x}_3 x_4) = \overline{(\overline{x_1\overline{x}_2}) \cdot (\overline{\overline{x}_3 x_4})}$

Tentang Kuliah

- Dalam kuliah ini, akan dibahas tentang implementasi fungsi logika menjadi suatu rangkaian logika (disebut proses sintesis), baik menggunakan tabel kebenaran maupun aljabar Boolean
  - Aljabar Boolean: aksioma, teorema, dan hukum
  - Diagram Venn
  - Penyederhanaan persamaan secara aljabar
  - Sintesis ekspresi logika dari tabel kebenaran
  - minterm, persamaan SOP (Sum of Product) dan notasi kanonik SOP
  - Maxterm, persamaan POS (Product of Sum) dan notasi kanonik POS
  - Konversi SOP ke POS dan sebaliknya
  - Rangkaian dua level AND-OR dan OR-AND
  - Rangkaian dua level NAND-NAND dan NOR-NOR

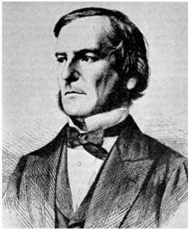
Kompetensi Dasar

- Setelah mempelajari bab ini, mahasiswa akan mampu:
  1. [C3] memahami aksioma (dalil), teorema dan hukum aljabar Boolean
  2. [C2] memahami notasi aljabar operasi logika (AND,OR, NOT) dan urutan operasi logika
  3. [C3] membuktikan kesamaan dua ekspresi logika dengan menggunakan aljabar dan diagram Venn
  4. [C3] menyatakan persamaan logika dalam bentuk SOP maupun POS jika diberikan kebutuhan fungsional sistem
  5. [C4] mengkonversikan persamaan SOP ke POS atau sebaliknya dengan benar
  6. [C4] melakukan penyederhanaan persamaan logika secara aljabar dengan benar jika diberikan suatu persamaan logika, tabel kebenaran maupun deskripsi tekstual kebutuhan desain
  7. [C6] mendesain dan mengevaluasi rangkaian AND-OR dan OR-AND minimal jika diberikan kebutuhan desain yang diinginkan
  8. [C6] mendesain dan mengevaluasi rangkaian NAND-NAND dan NOR-NOR minimal jika diberikan kebutuhan desain yang diinginkan
- Link
  - Website: http://didik.blog.undip.ac.id/2014/02/25/tkc205-sistem-digital-2013-genap/
  - Email: didik@undip.ac.id

Bahasan

Aljabar Boolean (Tahun 1849)

- Boole memberikan skema untuk deskripsi aljabar dari proses berpikir secara logika dan penalaran (*reasoning*)
- Kemudian digunakan untuk menjabarkan rangkaian logika
  - desain dan analisis rangkaian
  - menyederhanakan suatu ekspresi logika untuk implementasi fisik rangkaian yang lebih sederhana



George Boole
(1815-1864)

Bahasan

Dalil Aljabar Boolean dan Prinsip Dualitas

- Aljabar Boolean menggunakan aturan-aturan yang diturunkan dari asumsi dasar (aksioma/dalil/postulat)
  - Tidak perlu dibuktikan karena *self-evident*, kebenarannya terjamin

1a. $0 \cdot 0 = 0$	1b. $1 + 1 = 1$
2a. $1 \cdot 1 = 1$	2b. $0 + 0 = 0$
3a. $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	3b. $1 + 0 = 0 + 1 = 1$
4a. Jika $x = 0$, maka $\overline{x} = 1$	4b. Jika $x = 1$, maka $\overline{x} = 0$

- Dalil dituliskan berpasangan $\rightarrow$untuk menunjukkan **prinsip dualitas**
  - Jika diberikan sebarang ekspresi logika, dual dari ekspresi tersebut dapat dibentuk dengan mengganti semua + dengan $\cdot$ atau sebaliknya serta mengganti 0 dengan 1 atau sebaliknya
    - dalil(b) merupakan dual dari dalil(a) dan sebaliknya
  - Dual dari pernyataan benar adalah juga benar

Teorema 1 Variabel

- Teorema ini diturunkan dari aksioma. x adalah variabel tunggal
  - Perlu dibuktikan dengan aksioma atau teorema lain

5a. $x \cdot 0 = 0$	5b. $x + 1 = 1$
6a. $x \cdot 1 = x$	6b. $x + 0 = x$
7a. $x \cdot x = x$	7b. $x + x = x$
8a. $x \cdot \overline{x} = 0$	8b. $x + \overline{x} = 1$
9. $\overline{\overline{x}} = x$	

- Pembuktian teorema dengan induksi
  - Memasukkan nilai $x = 0$ dan $x = 1$ ke dalam ekspresi
- Pernyataan di teorema (a) adalah dual dari pernyataan (b) dan sebaliknya
  - $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ dualnya adalah $f_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ Misalnya: $f_1 = 0 + 0 = 0$, $f_2 = 1 \cdot 1 = 1$, sehingga $f_1$dan f_2 dual

Latihan

- Tunjukkan bahwa teorema 6a adalah dual dari 6b dan 8a dual dari 8b!

Hukum-hukum Aljabar

- Hukum ini mendefinisikan aturan untuk persamaan dengan banyak variabel
  - Disebut juga identitas atau properti

10a. $x \cdot y = y \cdot x$	10b. $x + y = y + x$	$\rightarrow$Komutatif
11a. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	11b. $x + (y + z) = (x + y) + z$	$\rightarrow$Asosiatif
12a. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	12b. $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$	$\rightarrow$Distributif
13a. $x + x \cdot y = x$	13b. $x \cdot (x + y) = x$	$\rightarrow$Absorsi
14a. $x \cdot y + x \cdot \overline{y} = x$	14b. $(x + y) \cdot (x + \overline{y}) = x$	$\rightarrow$Penggabungan
15a. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$	15b. $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	$\rightarrow$DeMorgan
16a. $x + \overline{x} \cdot y = x + y$	16b. $x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$	
17a. $x \cdot y + y \cdot z + \overline{x} \cdot z = x \cdot y + \overline{x} \cdot z$	17b. $(x + y) \cdot (y + z) \cdot (\overline{x} + z) = (x + y) \cdot (\overline{x} + z)$	$\rightarrow$Konsensus

- Pembuktian hukum (identity, property) tersebut dapat dilakukan secara induktif (dengan tabel kebenaran) maupun dengan melakukan perhitungan aljabar
- Contoh: teorema DeMorgan secara induktif
- Buktikan 12a,b 13a,b 16a,b dan 17a,b secara induktif dan aljabar

Pembuktian Aljabar

- Buktikan persamaan logika berikut benar
  1.$(x_1 + x_2) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_1 \cdot x_2$
  2. $x_1 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + x_1 \cdot x_3 + \overline{x}_2 \cdot x_3 = x_1 + \overline{x}_2$

$$
\begin{aligned}
f &= x_1 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 + x_1 \cdot x_3 + \overline{x}_2 \cdot x_3 \\
&= \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 + x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x}_2 \\
&= x_1 + \overline{x}_2
\end{aligned}
$$

  - Menghasilkan ekspresi logika yang lebih sederhana, sehingga rangkaian logika akan **lebih sederhana**
  - Teorema dan *property* menjadi basis untuk sintesis fungsi logika di perangkat CAD

Bahasan

Diagram Venn (John Venn 1880)

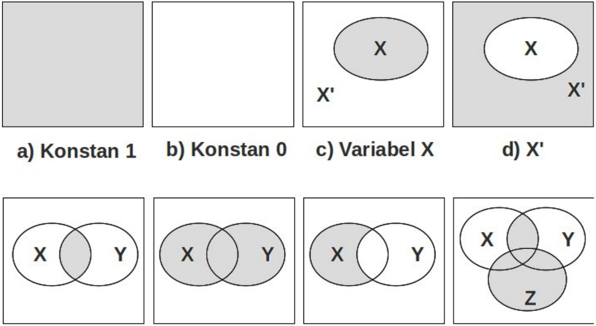
- Membuktikan ekuivalensi 2 ekspresi logika secara visual
- Suatu set *s* merupakan koleksi elemen yang merupakan anggota dari *s*
- dalam hal ini *s* merupakan koleksi variabel dan/atau konstan
- Elemen (variabel/konstan) dinyatakan sebagai area dengan kontur seperti kotak, lingkaran atau elips

John Venn (1834-1923) Wikipedia

Diagram Venn

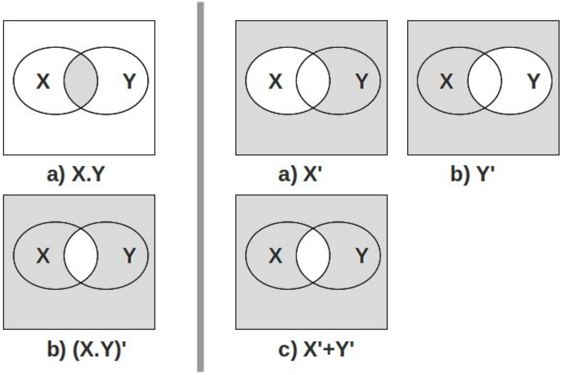
- Jika semesta integer N mulai 1 sampai 9 adalah $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
  - Himpunan bilangan genap $E = 2, 4, 6, 8$
  - sedangkan himpunan bilangan ganjil adalah komplemen dari E dan mempunyai anggota di luar E, sehingga $\overline{E} = 1, 3, 5, 7, 9$.
- Aljabar Boolean hanya mempunyai dua nilai (elemen) dalam semesta B, $B = 0, 1$, sehingga:
  - area dalam kontur s menyatakan $s = 1$, sedangkan
  - area di luar kontur menyatakan $s = 0$

Diagram Venn



a) Konstan 1
b) Konstan 0
c) Variabel X
d) X'
e) X.Y
f) X+Y
g) X.Y'
h) X.Y+Z

Buktika DeMorgan: $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$



- Hasil diagram Venn yang sama menunjukkan kedua ekspresi sama

Latihan

- Buktikan 12a,b 13a,b dan 17a,b secara induktif dan aljabar!
- Buktikan $x + \overline{x} \cdot y = x + y$ dan $x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$ secara induktif, aljabar dan diagram Venn!
- Buktikan bahwa $\overline{x}_1 x_2 x_3 + x_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2$ secara induktif, aljabar dan diagram Venn!
- Buktikan $(x_1 + x_2) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = x_1 \cdot \overline{x}_2 + \overline{x}_1 \cdot x_2$ secara induktif, aljabar dan diagram Venn!

Bahasan

Notasi Operator Fungsi Logika

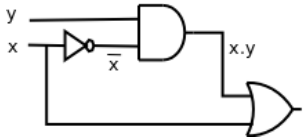
- Kemiripan operasi penjumlahan dan perkalian antara logika dan aritmetika
  - Operasi OR disebut sebagai logika penjumlahan (*sum*)
  - Operasi AND disebut sebagai logika perkalian (*product*)

Operasi	Notasi Operator	Keterangan
OR	$+, \bigvee, \vert$	Bitwise OR
AND	$\cdot, \bigwedge, \&$	Bitwise AND

- Ekpresi ABC+A'BD+A'CE
  - Merupakan jumlah dari 3 operasi/*term* perkalian (***SOP, sum-of-product terms***)
- Ekspresi (A+B+C)(A'+B+D)(A'+C+E)
  - Merupakan perkalian dari 3 operasi/*term* penjumlahan (***POS, product-of-sum terms***)

(Konvensi) Urutan Operasi

- Jika dalam satu ekspresi tidak terdapat tutup kurung, operasi fungsi logika dilakukan dengan urutan:
  1. NOT
  2. AND
  3. OR
- Misalnya ekspresi $x + \overline{x} \cdot y$
  - variabel x di term kedua diinversikan, kemudian di-AND-kan dengan variabel y
  - term pertama dan kedua kemudian di-OR-kan



Latihan

- Gambar rangkaian untuk persamaan logika $f = (\overline{x}_1 + x_2) \cdot x_3$ dan $f = \overline{x}_1 + x_2 \cdot x_3$
- Buktikan bahwa $(\overline{x}_1 + x_2) \cdot x_3 \neq \overline{x}_1 + x_2 \cdot x_3$. Dan gambarkan rangkaian logika $f_1 = (\overline{x}_1 + x_2) \cdot x_3$ dan $f_2 = \overline{x}_1 + x_2 \cdot x_3$

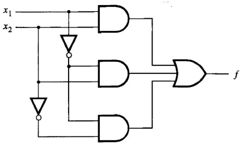
Bahasan

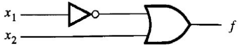
Penyederhanaan Rangkaian dengan Aljabar

- Suatu fungsi logika dapat dinyatakan dalam beberapa bentuk ekspresi yang ekivalen
  - Misalnya: $f_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_2$ dan $f_2 = \overline{x}_1 + x_2$ adalah ekivalen secara fungsional. f_1 lebih sederhana (optimal) daripada f_2
  - Proses optimasi memilih salah satu dari beberapa rangkaian ekivalen untuk memenuhi constraint nonfungsional (area, cost)
  - Catatan: rangkaian dengan jumlah gerbang minimal bisa jadi bukan merupakan solusi terbaik, tergantung constraintnya. Misalnya constraint delay

Fungsi: $f = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_2$

- Replikasi term 2: $f = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 + \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_2$
- Distributif (12b): $f = \overline{x}_1 \left(\overline{x}_2 + x_2\right) + \left(\overline{x}_1 + x_1\right) x_2$
- Teorema (8b): $f = \overline{x}_1 \cdot 1 + 1 \cdot x_2$
- Teorema (6a): $f = \overline{x}_1 + x_2$





Umpan Balik: Aljabar Boolean

Mahasiswa mampu:

1. memahami dalil, teorema dan hukum aljabar Boolean
2. membuktikan persamaan 2 ekspresi logika secara induktif (tabel kebenaran), manipulasi aljabar dan diagram Venn
3. menyederhanakan suatu ekspresi logika menggunakan dalil, teorema dan hukum aljabar (manipulasi aljabar)
4. mengerti tentang beragam notasi operasi logika (AND,OR) dan urutan operasi logika

Latihan:

- Buktikan $\overline{x}_1 x_2 x_3 + x_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 = \overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2$ secara induktif, aljabar dan diagram Venn
- Hitung jumlah gerbang yang dibutuhkan oleh tiap ekspresi

Proses Sintesis

- Diinginkan suatu fungsi, bagaimana mengimplementasikannya dalam bentuk ekspresi atau rangkaian logika?
  - Proses ini disebut **sintesis**: membangkitkan ekspresi dan/atau rangkaian dari deskripsi perilaku fungsionalnya
  - Sintesis merupakan langkah utama dalam desain sistem digital

Bahasan

Sintesis Rangkaian Logika

Deskripsi Kebutuhan Sistem

- Misalnya
  - Desain rangkaian logika dengan dua masukan x_1 dan x_2
  - Rangkaian memonitor switch, menghasilkan keluaran logika 1 jika switch (x_1,x_2) mempunyai keadaan (0,0), (0,1) atau (1,1) dan keluaran 0 jika switch (1,0)
  - Pernyataan lain: jika switch x_1 tersambung dan x_2 terputus maka keluaran harus 0, keadaan switch lainnya keluaran harus 1

Langkah Sintesis

1. menterjemahkan kebutuhan desain dan menuliskannya ke dalam tabel kebenaran
2. menuliskan persamaan SOP atau POS dari tabel kebenaran
   - **Persamaan SOP** diperoleh dengan menjumlahkan semua term perkalian yang bernilai 1
   - **Persamaan POS** diperoleh dengan mengalikan semua term penjumlahan yang bernilai 0
3. menyederhanakan persamaan menggunakan aljabar Boolean untuk memperoleh rangkaian logika yang minimal

Tabel Kebenaran dan Hasil Ekspresi (SOP)

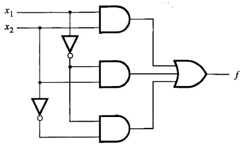
- Tabel kebenaran untuk fungsi yang harus disintesis

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$		Term perkalian
0	0	1	→	$\overline{x}_1\,\overline{x}_2$
0	1	1	→	$\overline{x}_1\,x_2$
1	0	0		
1	1	1	→	$x_1\,x_2$

$$+$$

SOP dengan keluaran 1 → $\overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_2$

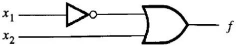
- Realisasi f adalah $f = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_2$ (SOP)



- Diimplementasikan dengan 2 gerbang NOT, 3 gerbang AND-2 dan 1 gerbang OR-3

Penyederhanaan Rangkaian Secara Aljabar

Penyederhanaan fungsi :

- Persamaan semula: $f = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_2$
- Replikasi term 2: $f = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 + \overline{x}_1 x_2 + x_1 x_2$
- Distributif (12b): $f = \overline{x}_1 (\overline{x}_2 + x_2) + (\overline{x}_1 + x_1) x_2$
- Teorema (8b): $f = \overline{x}_1 \cdot 1 + 1 \cdot x_2$
- Teorema (6a): $f = \overline{x}_1 + x_2$
- Rangkaian sederhana: $f = \overline{x}_1 + x_2$ 

- Diimplementasikan dengan 1 gerbang NOT dan 1 gerbang OR-2

Latihan Sintesis

1. Diinginkan rangkaian logika dengan 3 masukan x, y dan z Keluaran rangkaian harus 1 hanya jika x=1 dan salah satu (atau kedua) y atau z bernilai 1
   1.1 Tuliskan ekspresi dan rangkaian logikanya
   1.2 Sederhanakan rangkaian tersebut
2. Sederhanakan fungsi $f = \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_2 \cdot \overline{x}_3 + \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3$ untuk memperoleh rangkaian logika minimal! Hitung jumlah gerbang yang dibutuhkan oleh rangkaian tersebut!

Bahasan

Minterm

- Untuk sebuah fungsi dengan n buah variabel $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$
  - Sebuah **minterm** dari f adalah satu **term perkalian** dari n variabel yang ditampilkan sekali, baik dalam bentuk tidak diinverskan maupun diinverskan
  - Jika diberikan satu baris dalam tabel kebenaran, minterm dibentuk dengan memasukkan variabel x_i jika $x_i = 1$ atau $\overline{x}_i$ jika $x_i = 0$
  - Notasi m_j merupakan minterm dari baris nomor j di tabel kebenaran. Contoh:
    - Baris 1 ($j = 0$), $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ minterm: $m_0 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$
    - Baris 2 ($j = 1$), $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$ minterm: $m_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3$
- Fungsi $f_{SOP}(x_1, x_2 \ldots x_n)$ dapat dinyatakan sebagai

$$f_{SOP}(x_1, x_2 \ldots x_n) = \sum_{j=0}^{N-1} m_j \times f_j$$

Minterm dan Bentuk Kanonik SOP

- Tiap baris dari tabel kebenaran membentuk satu buah minterm
- Fungsi f dapat dinyatakan dengan ekspresi **penjumlahan** dari semua minterm di mana tiap minterm di-AND-kan dengan nilai f yang bersesuaian

Baris i	x_1	x_2	x_3	minterm m_i	f
0	0	0	0	$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	0
1	0	0	1	$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$	1
2	0	1	0	$\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$	0
3	0	1	1	$\overline{x}_1x_2x_3$	0
4	1	0	0	$x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$	1
5	1	0	1	$x_1\overline{x}_2x_3$	1
6	1	1	0	$x_1x_2\overline{x}_3$	1
7	1	1	1	$x_1x_2x_3$	0

- Contoh: diberikan nilai f seperti tabel di atas, bentuk kanonik SOP:

$$
\begin{aligned}
f &= m_0 \cdot 0 + m_1 \cdot 1 + m_2 \cdot 0 + m_3 \cdot 0 + m_4 \cdot 1 + m_5 \cdot 1 + m_6 \cdot 1 + m_7 \cdot 0 \\
&= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 \\
&= \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3
\end{aligned}
$$

Notasi SOP

- Persamaan SOP dapat dinyatakan dalam notasi m

$$
\begin{aligned}
f &= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 \\
&= \underbrace{\overline{x}_1\overline{x}_2x_3}_{1} + \underbrace{x_1\overline{x}_2\overline{x}_3}_{4} + \underbrace{x_1\overline{x}_2x_3}_{5} + \underbrace{x_1x_2\overline{x}_3}_{6}
\end{aligned}
$$

- Notasi Persamaan SOP: $f = \sum m(1,4,5,6)$
- Implementasi:
  - Ekspresi fungsi f tersebut secara fungsional benar dan unik
  - Namun, mungkin tidak menghasilkan implementasi **yang paling sederhana**
    - Perlu penyederhanana fungsi SOP

Contoh SOP

- Persamaan kanonik SOP berisi daftar maxterm yang bernilai 1
- **Contoh**. Diketahui fungsi SOP $f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(0, 2, 5, 6)$. Tentukan nilai $f(0, 0, 1)$, $f(1, 0, 1)$ dan $f(1, 1, 1)$
- **Solusi**. $f(0, 0, 1)$ menyatakan nilai fungsi f jika nilai masukan $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, dan $x_3 = 1$. Nilai $f(0, 0, 1) = 0$ dan $f(1, 1, 1) = 0$, karena minterm m_1 dan m_7 tidak ada dalam persamaan, sedangkan $f(1, 0, 1) = 1$ karena m_5 ada dalam daftar persamaan.

Bahasan

Prinsip Duality SOP - POS

- Jika suatu fungsi f dinyatakan dalam suatu tabel kebenaran, maka ekspresi untuk f dapat diperoleh (disintesis) dengan cara:
  1. Melihat semua baris dalam tabel dimana f=1, atau
  2. Melihat semua baris dalam tabel dimana f=0
- Pendekatan (1) menggunakan minterm
- Pendekatan (2) menggunakan komplemen dari minterm, disebut maxterm

Penjelasan Dualitas SOP-POS

- Jika fungsi f dinyatakan dalam tabel kebenaran, maka fungsi inversnya $\overline{f}$, dapat dinyatakan dengan penjumlahan minterm dengan $\overline{f} = 1$, yaitu di baris di mana $f = 0$

$$\begin{aligned}\overline{f} &= m_0 + m_2 + m_3 + m_7 \\ &= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3\end{aligned}$$

- Fungsi f dapat dinyatakan

$$\begin{aligned}f &= \overline{m_0 + m_2 + m_3 + m_7} \\ &= \overline{\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3} \\ &= \left(\overline{\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3}\right)\cdot\left(\overline{\overline{x}_1 x_2\overline{x}_3}\right)\cdot\left(\overline{\overline{x}_1 x_2 x_3}\right)\cdot\left(\overline{x_1 x_2 x_3}\right) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)\end{aligned}$$

- Meletakkan dasar untuk menyatakan fungsi sebagai bentuk perkalian semua term perjumlahan, maxterm

Maxterm dan Bentuk Kanonik POS

- Untuk sebuah fungsi dengan n buah variabel $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$
- Sebuah **Maxterm** dari f adalah satu **term penjumlahan** dari n variabel yang ditampilkan sekali baik dalam bentuk tidak diinverskan maupun diinverskan
  - Jika diberikan satu baris dalam tabel kebenaran, maxterm dibentuk dengan memasukkan variabel $\mathbf{x_i}$ **jika** $\mathbf{x_i = 0}$ atau $\mathbf{\overline{x}_i}$ **jika** $\mathbf{x_i = 1}$
  - Notasi M_j (dengan huruf M besar) merupakan maxterm dari baris nomor j di tabel kebenaran. Contoh:
    - Baris 1 ($j = 0$), $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ maxterm: $M_0 = x_1 + x_2 + x_3$
    - Baris 2 ($j = 1$), $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$ maxterm: $M_1 = x_1 + x_2 + \overline{x}_3$
- Fungsi $f_{POS}(x_1, x_2 \ldots x_n)$

$$f_{POS}(x_1, x_2 \ldots x_n) = \prod_{j=0}^{N-1} M_j + f_j$$

Maxterm dan Bentuk Kanonik POS

- Tiap baris dari tabel kebenaran membentuk satu buah maxterm
- Fungsi f dapat dinyatakan dengan ekspresi **perkalian** dari semua maxterm di mana tiap maxterm di-OR-kan dengan nilai f yang bersesuaian

Baris i	x_1	x_2	x_3	maxterm M_i	f
0	0	0	0	$x_1 + x_2 + x_3$	0
1	0	0	1	$x_1 + x_2 + \overline{x}_3$	1
2	0	1	0	$x_1 + \overline{x}_2 + x_3$	0
3	0	1	1	$x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$	0
4	1	0	0	$\overline{x}_1 + x_2 + x_3$	1
5	1	0	1	$\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3$	1
6	1	1	0	$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3$	1
7	1	1	1	$\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3$	0

- Contoh: diberikan nilai f seperti tabel di atas, bentuk kanonik POS:

$$
\begin{aligned}
f &= (M_0 + 0)\,(M_1 + 1)\,(M_2 + 0)\,(M_3 + 0)\,(M_4 + 1)\,(M_5 + 1)\,(M_6 + 1)\,(M_7 + 0) \\
&= M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_7 \\
&= (x_1 + x_2 + x_3)\,(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)\,(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)\,(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)
\end{aligned}
$$

Notasi POS

- Persamaan POS dapat dinyatakan dalam notasi M

$$\begin{aligned} f &= M_0 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_7 \\ &= \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{0} \cdot \underbrace{(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)}_{2} \cdot \underbrace{(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)}_{3} \cdot \underbrace{(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)}_{7} \end{aligned}$$

- Notasi Persamaan SOP: $f = \prod M(0, 2, 3, 7)$
- Persamaan berikut benar untuk fungsi $f(x_1, x_2, x_3)$di atas:

$$\begin{aligned} \sum m(1, 4, 5, 6) &= \prod M(0, 2, 3, 7) \\ \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3) \\ &\quad (x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \end{aligned}$$

Contoh POS

- Persamaan kanonik POS berisi daftar Maxterm yang bernilai 0
- **Contoh**. Diketahui fungsi POS $f(x_1, x_2, x_3) = \prod M(1, 3, 4, 7)$. Tentukan nilai $f(0, 0, 1)$, $f(1, 0, 1)$ dan $f(1, 1, 1)$
- **Solusi**. $f(0, 0, 1)$ menyatakan nilai fungsi f jika nilai masukan $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, dan $x_3 = 1$. Nilai $f(0, 0, 1) = 0$ dan $f(1, 1, 1) = 0$, karena Maxterm M_1 dan M_7 terdapat dalam persamaan, sedangkan $f(1, 0, 1) = 1$ karena M_5 tidak ada dalam daftar persamaan.

Bahasan

Desain Rangkaian SOP/POS

- Jika suatu fungsi f dinyatakan dalam tabel kebenaran, maka persamaan fungsi f dapat diperoleh dengan dua cara, yaitu:
  1. **melihat semua baris dalam tabel dimana $f = 1$**
     Pendekatan ini menghasilkan persamaan SOP, yaitu jumlah dari minterm-minterm yang menghasilkan nilai fungsi 1
  2. **melihat semua baris dalam tabel dimana $f = 0$**
     Pendekatan ini menghasilkan persamaan POS, yaitu perkalian dari Maxterm-Maxterm yang menghasilkan nilai fungsi 0

$$\begin{aligned} \sum m(1,4,5,6) &= \prod M(0,2,3,7) \\ \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \\ +x_1x_2\overline{x}_3 &\quad (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \end{aligned}$$

Konversi Bentuk SOP-POS

- Jika suatu fungsi f diberikan dalam bentuk $\sum m$ atau $\prod M$, maka dengan mudah dapat dicari fungsi f atau $\overline{f}$ dalam bentuk $\sum m$ atau $\prod M$

Bentuk Asal	Fungsi dan Bentuk yang Diinginkan			
	$f = \sum m$	$f = \prod M$	$\overline{f} = \sum m$	$\overline{f} = \prod M$
$f = \sum m$ (1,4,5,6)	-	Nomor yg tdk ada dlm daftar (0,2,3,7)	Nomor yang tdk ada dlm daftar (0,2,3,7)	Nomor yang ada dlm daftar (1,4,5,6)
$f = \prod M$ (0,2,3,7)	Nomor yg tdk ada dlm daftar (1,4,5,6)	-	Nomor yang ada dlm daftar (0,2,3,7)	Nomor yg tdk ada dlm daftar (1,4,5,6)

Contoh

- Nyatakan persamaan kanonik POS dari fungsi 3 variabel $f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(1, 2, 4, 7)$
- **Solusi**. Persamaan 3 variabel mempunyai 8 buah minterm atau maxterm yang bernomor 0 sampai 7. Nomor yang ada dalam persamaan SOP di atas adalah $\{1, 2, 4, 7\}$ dan nomor yang tidak ada $\{0, 3, 5, 6\}$, sehingga persamaan POS dari $f(x_1, x_2, x_3) = \prod M(0, 3, 5, 6)$. Kesamaan dari fungsi SOP dan POS tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
\sum m(1,2,4,7) &= \prod M(0,3,5,6) \\
\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \\
+x_1x_2x_3 &\quad (\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3)
\end{aligned}$$

Contoh #2

- Nyatakan persamaan kanonik SOP dari fungsi 4 variabel $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod M(0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12)$
- **Solusi**. Nomor yang ada dalam persamaan POS adalah $\{0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12\}$ dan nomor yang tidak ada adalah $\{3, 4, 8, 9, 10, 13, 14, 15\}$, sehingga persamaan SOP dari $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum m(3, 4, 8, 9, 10, 13, 14, 15)$. Kesamaan dari fungsi POS dan SOP tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$$\prod M(0, 1, 2, 5, 6, 7, 11, 12) = \sum m(3, 4, 8, 9, 10, 13, 14, 15)$$

Latihan

- Diinginkan rangkaian logika dengan 3 masukan x, y dan z. Keluaran rangkaian harus 1 hanya jika x=1 dan salah satu (atau kedua) y atau z bernilai 1. Tuliskan ekspresi SOP dan POS berikut notasi kanoniknya
- Cari minterm, Maxterm dan tuliskan bentuk kanonik SOP dan POS dari fungsi $f = (x_1 + x_2) \cdot \overline{x}_3$

Bahasan

Tips Penyederhanaan SOP dan POS

- Operasi penyederhanaan adalah mengurangi minterm atau maxterm di ekspresi
  - SOP: menggunakan hukum 14a ($x \cdot y + x \cdot \overline{y} = x$)
  - POS: menggunakan hukum 14b ($(x + y) \cdot (x + \overline{y}) = x$)
- Penggunaan teorema 14a atau 14b akan mengurangi 1 variabel yang berbeda dalam dua minterm atau Maxterm yang berbeda hanya di 1 variabel tersebut

$$\begin{aligned} x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2 x_3 &= x_1\overline{x}_2\underbrace{(\overline{x}_3 + x_3)}_{=1} \\ &= x_1\overline{x}_2 \end{aligned}$$

- Maxterm $x_1 + x_2 + x_3$ dan $x_1 + \overline{x}_2 + x_3$ berbeda di 1 variabel, yaitu x_2, sehingga dapat disederhanakan menggunakan teorema 14b, yaitu sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3) &= x_1 + x_3 + \underbrace{x_2\overline{x}_2}_{=0} \\ &= x_1 + x_3 \end{aligned}$$

Contoh Penyederhanaan SOP

- Beberapa minterm atau maxterm dapat digabungkan menggunakan hukum 14a atau 14b jika berbeda hanya di satu variabel saja

$$\begin{aligned} f &= (m_1 + m_5) + (m_4 + m_5) + (m_4 + m_6) \\ &= (\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2x_3) + (x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3) + (x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1x_2\overline{x}_3) \\ &= (\overline{x}_1 + x_1)\,\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\,(\overline{x}_3 + x_3) + x_1\,(\overline{x}_2 + x_2)\,\overline{x}_3 \\ &= \overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2 + x_1\overline{x}_3 \end{aligned}$$

- Minterm m_4 di atas telah disederhanakan di $(m_4 + m_6)$ dan minterm m_5 telah disederhanakan di $(m_1 + m_5)$, sehingga penyederhanaan $(m_4 + m_5)$ tidak perlu dituliskan kembali atau dihilangkan untuk menghasilkan persamaan yang ekivalen, namun lebih sederhana.

$$\begin{aligned} f &= (m_1 + m_5) + (m_4 + m_6) \\ &= \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1x_2\overline{x}_3 \\ &= (\overline{x}_1 + x_1)\,\overline{x}_2x_3 + x_1\,(\overline{x}_2 + x_2)\,\overline{x}_3 \\ &= \overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_3 \end{aligned}$$

Contoh Penyederhanaan POS

- Rancang rangkaian POS optimal untuk fungsi $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3$!
- **Solusi**. Fungsi SOP tersebut dapat dituliskan sebagai $f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(1, 4, 5, 6)$. Karena yang diinginkan rangkaian POS, maka persamaan SOP tersebut perlu dikonversi ke dalam POS.
  Persamaan POS ekivalennya adalah

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \prod M(0, 2, 3, 7) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \end{aligned}$$

  Terdapat 2 pasangan maxterm yang mempunyai satu perbedaan, yaitu Maxterm M_0 dan M_2 (berbeda di x_2) dan Maxterm M_3 dan M_7 (berbeda di x_1). Penyederhanaan dengan teorema 14b

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (M_0 \cdot M_2) \cdot (M_3 \cdot M_7) \\ &= ((x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \overline{x}_2 + x_3))((x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)) \\ &= ((x_1 + x_3) + x_2\overline{x}_2)(x_1\overline{x}_1 + (\overline{x}_2 + \overline{x}_3)) \\ &= (x_1 + x_3)(\overline{x}_2 + \overline{x}_3) \end{aligned}$$

Umpan Balik Sintesis

1. Diinginkan rangkaian logika dengan 3 masukan x, y dan z
   - Keluaran rangkaian harus 1 hanya jika x=1 dan salah satu (atau kedua) y atau z bernilai 1

   1.1 Tuliskan ekspresi SOP dan POS berikut notasinya
   1.2 Cari invers fungsi tersebut
   1.3 Sederhanakan rangkaian dan gambar rangkaian logikanya
2. Cari minterm, maxterm dan tuliskan bentuk SOP dan POS dari
   - fungsi $f = (x_1 + x_2) \cdot \overline{x}_3$

Rangkaian Dua Level

- Rangkaian logika yang diimplementasikan dari fungsi SOP dan POS membentuk rangkaian dua level
  - Fungsi SOP membentuk rangkaian AND-OR
    - Level pertama rangkaian AND, level kedua rangkaian OR
  - Fungsi POS membentuk rangkaian OR-AND
    - Level pertama rangkaian OR, level kedua rangkaian AND

Bahasan

Rangkaian AND-OR dan OR-AND

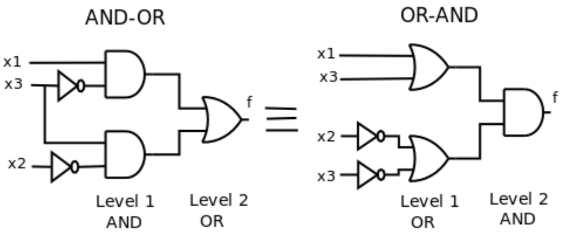
Langkah desain rangkaian AND-OR dan OR-AND adalah sebagai berikut:

1. menentukan tipe implementasi rangkaian: AND-OR atau OR-AND
2. menyatakan fungsi rangkaian f ke persamaan SOP atau POS. Persamaan bisa dalam bentuk kanonik.
    2.1 Jika akan diimplementasikan dengan rangkaian AND-OR, maka fungsi f harus dinyatakan dalam bentuk kanonik SOP
    2.2 Jika akan diimplementasikan dengan rangkaian OR-AND, maka fungsi f harus dinyatakan dalam bentuk kanonik POS
3. menyederhanakan fungsi tersebut menggunakan aljabar Boolean
    - Salah satu metode lainnya: dengan peta Karnaugh
4. merancang rangkaian logikanya

Contoh Desain Rangkaian Dua Level

Desain rangkaian logika AND-OR dan OR-AND untuk fungsi $f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(1,4,5,6)$

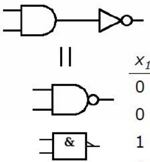
- Rangkaian AND-OR dapat dibentuk langsung dari persamaan $f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(1,4,5,6)$, menghasilkan $f = x_1\overline{x}_3\overline{x}_2x_3$.
- Rangkaian OR-AND dibentuk dari persamaan POS ekivalennya, yaitu $f(x_1, x_2, x_3) = \prod M(0,2,3,7)$, menghasilkan $f = (x_1 + x_3)(\overline{x}_2 + \overline{x}_3)$.
- Rangkaian AND-OR dan OR-AND untuk mengimplementasikan fungsi $f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(1,4,5,6)$



- Kedua rangkaian tersebut ekivalen

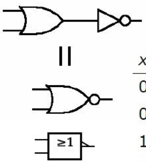
Rangkaian Logika dengan NAND dan NOR

- Fungsi NAND adalah inversi fungsi AND
  $f(x_1, x_2) = \bar{f}_1(x_1, x_2) = \overline{x_1 \cdot x_2}$
- Gerbang NAND merupakan gerbang AND yang diikuti gerbang NOT



x_1	x_2	$\overline{x_1 \cdot x_2}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Fungsi NOR adalah inversi fungsi OR
  $f(x_1, x_2) = \bar{f}_1(x_1, x_2) = \overline{x_1 + x_2}$
- Gerbang NOR merupakan gerbang OR yang diikuti gerbang NOT

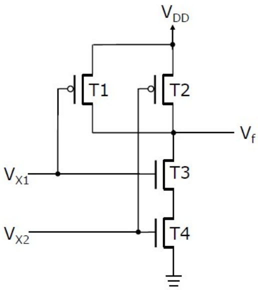


x_1	x_2	$\overline{x_1 + x_2}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

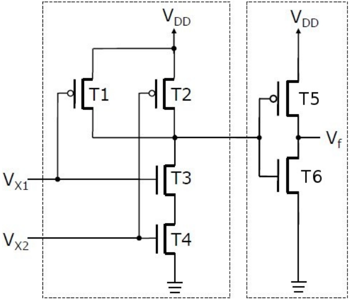
Rangkaian NAND Lebih Sederhana dari AND

- Di CMOS, implementasi rangkaian dari gerbang NAND dan NOR lebih sederhana (dan cepat) daripada AND dan OR
  - Sehingga rangkaian lebih kecil dan lebih cepat untuk mewujudkan fungsi logika yang sama

CMOS NAND (4 transistor)

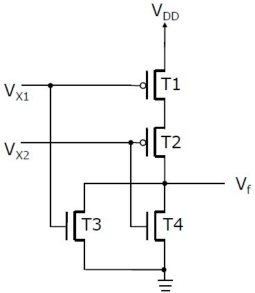


CMOS AND (6 transistor)

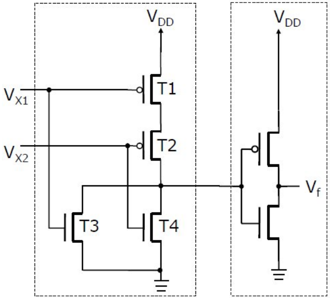


Rangkaian NOR Lebih Sederhana dari OR

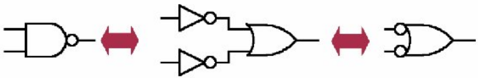
CMOS NOR (4 transistor)



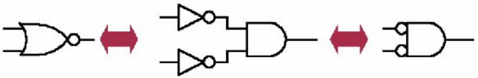
CMOS OR (6 transistor)



Recall: Teorema DeMorgan



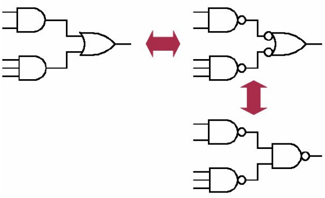
$(x_1 . x_2)' = x_1' + x_2'$



$(x_1 + x_2)' = x_1' . x_2'$

Rangkaian AND-OR dan NAND-NAND

- Rangkaian AND-OR (bentuk SOP) **dapat dikonversi** menjadi rangkaian NAND-NAND



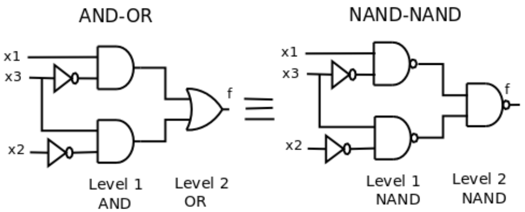
- Bentuk ekspresinya: inverskan minterm, ganti (+) dengan (.), inverskan ekspresi
  - Contoh: $f = \sum m(1, 4, 5, 6)$

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 \\ &= \underbrace{\overline{\underbrace{\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3}}_{NAND} \cdot \underbrace{\overline{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3}}_{NAND} \cdot \underbrace{\overline{x_1\bar{x}_2x_3}}_{NAND} \cdot \underbrace{\overline{x_1x_2\bar{x}_3}}_{NAND}}}_{NAND} \end{aligned}$$

Contoh Desain NAND-NAND

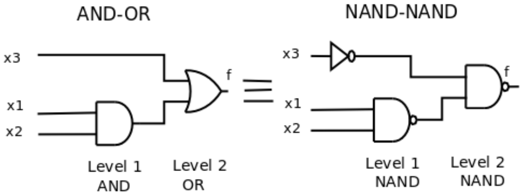
- Desain rangkaian logika AND-OR dan NAND-NAND paling sederhana dari fungsi $f = \sum m(1,4,5,6)$
- **Solusi:**

$$
\begin{aligned}
f &= \sum m(1,4,5,6) \\
&= \overline{x}_2 x_3 + x_1 \overline{x}_3 \\
&= \overline{\overline{\overline{x}_2 x_3 + x_1 \overline{x}_3}} \\
&= \underbrace{\overline{\underbrace{\overline{\overline{x}_2 x_3}}_{NAND} \cdot \underbrace{\overline{x_1 \overline{x}_3}}_{NAND}}}_{NAND\ 2nd\ level}
\end{aligned}
$$



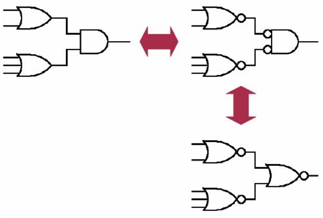
Latihan

- Desain rangkaian logika AND-OR dan NAND-NAND paling sederhana dari fungsi $f = \sum m(1,3,5,6,7)$!



Rangkaian OR-AND dan NOR-NOR

- Rangkaian OR-AND (bentuk POS) **dapat dikonversi** menjadi rangkaian NOR-NOR



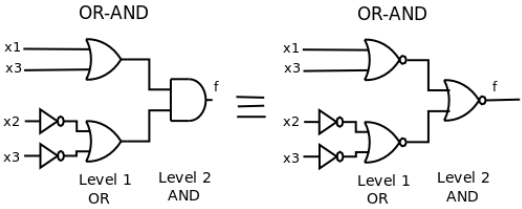
- Bentuk ekspresinya: inverskan maxterm, ganti (.) dengan (+), inverskan ekspresi
- Contoh: $f = \prod M(0,2,3,7)$

$$
\begin{aligned}
f &= (x_1 + x_2 + x_3)\,(x_1 + \overline{x}_2 + x_3)\,(x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3)\,(\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \\
&= \overline{\underbrace{\underbrace{\left(\overline{x_1 + x_2 + x_3}\right)}_{NOR} + \underbrace{\left(\overline{x_1 + \overline{x}_2 + x_3}\right)}_{NOR} + \underbrace{\left(\overline{x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3}\right)}_{NOR} + \underbrace{\left(\overline{\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3}\right)}_{NOR}}_{NOR-2nd\ level}}
\end{aligned}
$$

Contoh Desain NOR-NOR

- Gambarkan rangkaian logika AND-OR dan NOR-NOR dari fungsi $f = \sum m(1,4,5,6)$
- **Solusi:**

$$
\begin{aligned}
f &= \sum m(1,4,5,6) \\
&= \prod M(0,2,3,7) \\
&= (x_1 + x_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3) \\
&= \overline{\overline{(x_1 + x_3)(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)}} \\
&= \underbrace{\overline{\underbrace{\overline{(x_1 + x_3)}}_{NOR} + \underbrace{\overline{(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)}}_{NOR}}}_{NOR\ 2nd\ level}
\end{aligned}
$$



Umpan Balik

- Yang telah kita pelajari hari ini:
  - Dalil, teorema dan hukum aljabar Boolean, diagram Venn serta penyederhanaan rangkaian secara aljabar
  - Sintesis rangkaian logika dari tabel kebenaran, SOP, POS dan koversinya
  - Rangkaian NAND-NAND dan NOR-NOR
- Latihan:
  - Sederhanakan fungsi $f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(0, 2, 4, 5)$ dan buat rangkaian NAND-NAND dan NOR-NOR-nya
  - Buat rangkaian multiplekser 2-masukan
- Yang akan kita pelajari di pertemuan berikutnya adalah penyederhanaan fungsi logika menggunakan peta Karnaugh untuk memperoleh rangkaian yang optimal
  - Pelajari: `http://didik.blog.undip.ac.id/2014/02/25/tkc205-sistem-digital-2013-genap/`

Lisensi