西北工业大学研究生院
学 位 研 究 生 课 程 考 试 试 题

考试科目：组合数学 B 卷　　课程编号：M10G11002
考核形式：考试　　考试时间：2017.01.04
开课学期：2016-2017 年秋至冬　　任课教师：康慕宁
说　明：有答案必须写在答题册上，否则无效。　　共 1 页 第 1 页

一、以下七个小题，每题 10 分，考生可任选其中六题作答，共 60 分。

a) 一个骰子的六个面上标有六个数字分别是 0、1、3、7、15、31,掷两次得到不同的和的可能性有多少。

b) 将 1,000,000 表示三个数的乘积的方式有多少种？

c) 求 $(1+x)^k+(1+x)^{k+1}+\cdots+(1+x)^n$ 的展开式中 x^m 的系数。

d) 从 3 黑球，红、黄、白各一个，任选 4 个排成一行，有多少不同的排列？

e) 证明 $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n}$ 是一整数。

f) 已知：$a_n-a_{n-1}-6a_{n-2}=3^n, a_0=5, a_1=2$，求 $a^n=?$

g) 由 1，2，3，4 组成的 n 位数中，2 和 3 至少出现一次，1 出现偶数次的方案数。

二、证明 Fibonacci 数列满足以下关系式：

a) $F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$

b) $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$

三、给五个人分配五项不同的工作，已知一号不会 A 工作，二号不会 B，三号和四号都不会 C 和 D，五号不会干 E，问有多少不同的分配工作的方案？

四、在一个边长为 1 的正三角形中任选五个点，证明，在这五个点中必存在两点，其距离小于 0.5.

五、用 m 种颜色给正四面体的四个面着色，问有多少不同的着色方案？m=2 时，具体值是多少？

选答 a), c), d), e), f), g)

一、~~解~~ ~~第二次掷有 0, 1, 3, 7, 15, 31 六种选择~~

~~要求掷两次得到不同的和，则第二次掷不能为 0，~~

~~有 1, 3, 7, 15, 31 五种选择~~。

~~则共有 $6\times5=30$ 种和~~ ∵ ~~{1, 3, 7, 15, 31}任意两个相加或自加都不等于{1, 3, 7, 15, 31}中的元素~~。

~~故共有 $6\times5=30$ 种可能~~。

解 a). 第一次掷有 0, 1, 3, 7, 15, 31 六种可能

第二次为 0 时，和有 0, 1, 3, 7, 15, 31 六种可能

第二次不为 0 时，① 和第一次相同，有 2、6、14、30、62 五种可能

② 和第一次不同，则有 $C_5^2=10$ 种可能，此时相当于在 {1, 3, 7, 15, 31} 中任选 2 个相加。

故共有 $6+5+10=21$ 种可能性

c) $(1+x)^k=\sum_{i=0}^{k}C_k^i x^i$，$x^m$ 前的系数为 C_k^m

$(1+x)^{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}C_{k+1}^i x^i$，$x^m$ 前的系数为 C_{k+1}^m

⋮

$(1+x)^n=\sum_{i=1}^{n}C_n^i x^i$，$x^m$ 前的系数为 C_n^m

故原式展开式中 x^m 的系数为 $C_k^m+C_{k+1}^m+\cdots+C_n^m$

d) 三类：① 1黑，1红，1黄，1白. $A_4^4=24$

② 2黑、红黄白中任选2个. $\frac{A_4^4 C_3^2}{2!}=36$

③ 3黑，红黄白中任选1个. $\frac{A_4^4\cdot C_3^1}{3!}=12$

共 $24+36+12=72$ 种.

e). $\frac{(mn)!}{(m!)^n}$ 的组合意义：表示 mn 个不同小球放到 n 个不同盒子中，每个盒子放 m 个球。

其中，m! 表示每个盒子中 m 个球的重复度，共 n 个盒，故 $(m!)^n$.

(mn)! 为 mn 个小球的全排列.

小球的组合数必为一个整数，得证.

f). 特征方程 $x^2-x-6=0$

$$(x-3)(x+2)=0 . \quad x_1=3 \quad x_2=-2.$$

$x=3$ 为一重根，设特解 $a_n^*=kn\cdot 3^n$，代入原式

$$kn\cdot 3^n-k(n-1)3^{n-1}-6k(n-2)3^{n-2}=3^n$$

解得 $k=\frac{3}{5}$

设 $a_n=A\cdot 3^n+B(-2)^n+\frac{3}{5}n\cdot 3^n$ (*)

$\begin{cases} a_0=5 \\ a_1=2 \end{cases}$ 代入(*)式. $\begin{cases} A+B=5 \\ 3A-2B+\frac{9}{5}=2 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} A=\frac{51}{25} \\ B=\frac{74}{25} \end{cases}$

故 $a_n=\frac{51}{25}\cdot 3^n+\frac{74}{25}\cdot(-2)^n+\frac{3}{5}n\cdot 3^n$

g) 问题的母函数：$\underbrace{(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)^2(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)}_{=G_e(x)}$

展开指数形母函数，$\frac{x^n}{n!}$ 前的系数即为所求方案数.

$$G_e(x)=(e^x-1)^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)e^x$$
$$=(e^{2x}-2e^x+1)\cdot\frac{e^{2x}+1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(e^{4x}-2e^{3x}+2e^{2x}-2e^x+1).$$

故 $\frac{x^n}{n!}$ 前系数为 $\frac{1}{2}(4^n-2\cdot 3^n+2\cdot 2^n-2\cdot 1^n)$

二、a) 数学归纳法.

当$n=1$时，$F_1F_2=F_2^2$ 成立

假设n成立，即 $F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$

则$n+1$时，$F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}+F_{2n}F_{2n+1}+F_{2n+1}F_{2n+2}$

$$=F_{2n}^2+F_{2n}F_{2n+1}+F_{2n+1}F_{2n+2}$$

$$=F_{2n}(F_{2n}+F_{2n+1})+F_{2n+1}F_{2n+2}$$

$$=F_{2n}\cdot F_{2n+2}+F_{2n+1}F_{2n+2}=F_{2n+2}(F_{2n}+F_{2n+1})=F_{2n+2}^2=F_{2(n+1)}^2$$ 成立

故原式在所有$n\geq1$的正整数下成立，得证。

b). $F_1^2=F_1\cdot F_2$

$F_2^2=F_2(F_3-F_1)=F_2F_3-F_2F_1$

$F_3^2=F_3(F_4-F_2)=F_3F_4-F_2F_3$

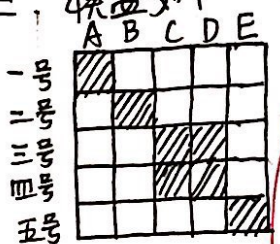
$\vdots$

$F_n^2=F_n(F_{n+1}-F_{n-1})=F_n\cdot F_{n+1}-F_nF_{n-1}$

以上各式相加，得

$$F_1^2+F_2^2+F_3^2+\cdots+F_n^2=F_n\cdot F_{n+1}$$

三、棋盘如下



$$R=R(\square)R(\square)R(田)R(\square)$$

$$=(1+x)^3R(田)$$

$$=(1+x)^3\cdot(x(1+x)+R(田))$$

$$=(1+x)^3(x+x^2+x(1+x)+1+2x)$$

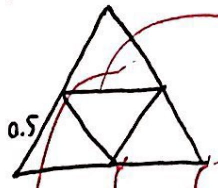
$$=(1+3x+3x^2+x^3)(2x^2+4x+1)$$

$$=1+7x+17x^2+19x^3+10x^4+2x^5$$

方案数 $=5!-7\cdot4!+17\cdot3!-19\cdot2!+10\cdot1!-2\cdot0!$

$=24.$

四.



如图所示，将边长为1的正三角形进行区域划分，

其中每个小△都是边长为0.5的正三角形.

在此三角形中任取两点，距离均小于0.5.

故根据鸽巢原理，任选5个点，共有四个巢，

则必有两个点落在同一个小△中，且该两个点

距离小于0.5.

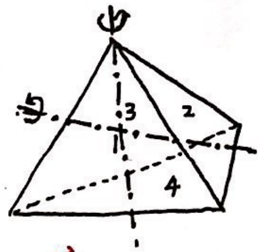
五. 不动置换：(1)(2)(3)(4)　$(1)^4$　一种.

绕顶点和面心连线旋转120°

(1 3 2)(4)　(3)(1)

旋转240°　2×4=八种.

(1 2 3)(4)　(3)(1).



绕棱心连线旋转180°.

(1 3)(2 4)　(2)(2)　三种.

$$方案\ N=\frac{1}{12}(m^4+8\cdot m^2+3\cdot m^2)$$

$$=\frac{1}{12}(m^4+11m^2)$$

当 $m=2$ 时，$N_{12}=5$.