递推关系式

43. 已知 $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n$ $a_0 = 5$ $a_1 = 2$ 求 $a_n = ?$

特征方程 $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0$

3是特征方程的1重根

设 $\alpha_n = 3^n k_0 n$ 代入 求 α_n

再用 a_0, a_1 求 A、B

44. $A_0 = 1$ $A_1 = 2$ $A_n - 5A_{n-1} + 6A_{n-2} = 2^n$

特征方程 $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) = 0$

2是特征方程的1重根

设 $\alpha_n = 2^n k_0 n$ 代入求 α_n

再用 A_0. A_1 求 A.B

45. 求解非齐次递推关系 $\begin{cases} h_n = 4h_{n-1} - 4h_{n-2} + 3n + 1 \ (n \geq 2) \\ h_0 = 1 \quad h_1 = 2 \end{cases}$

$h_n - 4h_{n-1} + 4h_{n-2} = 3n + 1$

特征方程 $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

设 $\alpha_n = k_0 + k_1 n$ 代入

$k_0 + k_1 n - 4[k_0 + k_1(n-1)] + 4[k_0 + k_1(n-2)] = 3n + 1$

$k_0 + k_1 n - \cancel{4k_0} - \cancel{4k_1 n} + 4k_1 + \cancel{4k_0} + \cancel{4k_1 n} - 8k_1 = 3n + 1$

$k_0 + k_1 n - 4k_1 = 3n + 1$

$k_1 = 3 \quad k_0 = 13$

$\alpha_n = 3n - 11$

$h_n = (A + Bn) \cdot 2^n + 3n + 13$

$$\begin{cases} h_0 = A + 13 = 1 & \Rightarrow A = -12 \\ h_1 = 2(A+B) + 16 = 2 & \Rightarrow B = 5 \end{cases} \Rightarrow (5n+12)\cdot 2^n + 3n + 13$$

46. 求解差分方程 $h_1 = 1 \quad h_2 = 3 \quad h_n = h_{n-1} + 2h_{n-2} \ (n \geq 3)$

特征方程 $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

设 $h_n = A\cdot 2^n + B(-1)^n$

$$\begin{cases} h_1 = 2A - B = 1 \\ h_2 = 4A + B = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases} \quad h_n = \frac{2}{3}\cdot 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$$

47. 给定 A_n : $A_{n+1} - A_n = F_{n+1} F_{n-1}$ $A_0 = 0$ 利用Fibonacci数列的性质求 A_n 的解

$A_0 = 0 \quad \therefore A_1 = 0$

$A_2 - A_1 = F_2 \cdot F_0 = F_1^2 - 1$

$A_3 - A_2 = F_3 \cdot F_1 = F_2^2 + 1$

$A_4 - A_3 = F_3^2 - 1$

$\vdots$

$A_n - A_{n-1} = F_{n-1}^2 \pm 1$

① 当 n 为偶数时 $A_n - A_{n-1} = F_{n-1}^2 + 1$

等式左右相加 $A_n - A_1 = (F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_{n-1}^2) - 1$

$= F_{n-1} F_n - 1$

② 当 n 为奇数时 $A_n - A_1 = F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_{n-1}^2$

$= F_{n-1} F_n$

48. 求n位十进制中出现偶数个5的数的个数

设 a_i 表示n位十进制数中出现偶数个5的个数

设 b_i 表示n位十进制数中出现奇数个5的个数

若 d 含有偶数个5，则 d_n 取5以外的任何一个数

若 d 含有奇数个5，则 d_n 取5

$$\begin{cases} a_i = 9a_{i-1} + b_{i-1} \\ b_i = 9b_{i-1} + a_{i-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

构造母函数 $\begin{cases} A(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots \\ B(x) = b_1 + b_2 x + b_3 x^2 + \cdots \end{cases}$

代入，联立求解

Fibonacci 数列证明

49. 设 $F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n >= 3)$

证明：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$

① n=1时 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 成立

② 设 n=n-1 时成立

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix}$$

当 n=n时

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} & F_n \\ F_{n-1} + F_{n-2} & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$ 得证

50. Fibonacci 数列的证明 P47

51. 已知 Fibonacci 数定义为：$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $F_1 = F_2 = 1$

a) 证明等式：$F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$

① $n=1$ 时 $F_{m+1} = F_m F_2 + F_{m-1} F_1 = F_{m-1} + F_m$

② 设等式 $n-1$ 时成立 $\Rightarrow$ $F(n+m) = F[(n-1)+(m+1)]$

$$\boxed{\begin{aligned} & F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n \\ &= F_{m-1} F_n + F_m (F(n) + F(n-1)) \\ &= F_{m+1} F_n + F_m F_{n-1} \end{aligned}}$$

$= F_{m+1} F_n + F_m F_{n-1}$

$= F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$

b) 证明逢 5 的 Fibonacci 数 F_{5k} 一定是 5 的倍数

① $k=0$ 时 $F_{5k} = F_0 = 0$ 是 5 的倍数

② $k-1$ 时成立 $F_{5(k-1)}$ 是 5 的倍数

$n=k$ 时

$F_{5k} = F_{5k-1} + F_{5k-2}$

$= F_{5k-2} + F_{5k-3} + F_{5k-3} + F_{5k-4}$

$= F_{5k-3} + F_{5k-4} + F_{5k-3} + F_{5k-3} + F_{5k-4}$

$= 5F_{5k-4} + 3F_{5k-5}$

5的倍数 5的倍数

可证

52. 证明：F_n是偶数当且仅当 n是三的倍数

对于一般情况，如果有前三项是偶、奇、奇，根据奇偶关系，接下来三项也是偶、奇、奇

容斥问题

53. 1到1000中不能被5.6.8整除的整数的个数

令A_1为1-1000中能被5整除的数

令A_2为1-1000中能被6整除的数

令A_3为1-1000中能被8整除的数

$|A_1| = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$ $\quad |A_2| = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$ $\quad |A_3| = \lfloor \frac{1000}{8} \rfloor = 125$

$|A_1 \cap A_2| = \lfloor \frac{1000}{5 \times 6} \rfloor = 33$ $\quad |A_1 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{5 \times 8} \rfloor = 25$

$|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{24} \rfloor = 41$ $\quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{120} \rfloor = 8$

最小公倍数

$$|\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}| = 1000 - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= 600$$

54. 求不大于120的素数有多少个？

$11^2 = 121$ 不超过120的合数必然是2.3.5.7的倍数

设A_1为不超过120被2除尽的数

设A_2为不超过120被3除尽的数

设 A_3 为不超过 120 被 5 除尽的数

设 A_4 为不超过 120 被 7 除尽的数

$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$ 为素数的一部分

$= 120 - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4|$

$+ |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| +$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

最后再加上 2.3.5.7 四个数并且除去 1

55. 求 1 到 10000 中不能被 4、6.7.10 整除的数的个数

令 A_1 为 1-10000 中能被 4 整除的数

令 A_2 为 1-10000 中能被 6 整除的数

令 A_3 为 1-10000 中能被 7 整除的数

令 A_4 为 1-10000 中能被 10 整除的数

$|A_1| = \lfloor \frac{10000}{4} \rfloor = 2500$ $\quad |A_2| = \lfloor \frac{10000}{6} \rfloor = 1666$

$|A_3| = \lfloor \frac{10000}{7} \rfloor = 1428$ $\quad |A_4| = \lfloor \frac{10000}{10} \rfloor = 1000$

$|A_1 \cap A_2| = \lfloor \frac{10000}{12} \rfloor$ $\quad |A_1 \cap A_3| = \lfloor \frac{10000}{4 \times 7} \rfloor$

$|A_1 \cap A_4| = \lfloor \frac{10000}{20} \rfloor$ $\quad |A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{10000}{6 \times 7} \rfloor$

$|A_2 \cap A_4| = \lfloor \frac{10000}{60} \rfloor$ $\quad |A_3 \cap A_4| = \lfloor \frac{10000}{10 \times 7} \rfloor$

⋮ 略[3]

56. 在200辆汽车中任选30辆做A检测，任选30辆做B检测
已知在这200辆车中有5辆恰好被两种检测选中，一共有多少种？

$C_{200}^{5} C_{195}^{25} C_{170}^{25}$

57. 求字母ABCDEFG的排列中，没有形式 BEC. CAD. DEB 任何之一出现的不同排列个数

A_1 为出现 BEC $|A_1| = 5!$ (BEC一个整体)

A_2 为出现 CAD $|A_2| = 5!$

A_3 为出现 DEB $|A_3| = 5!$

$|A_1 \cap A_2| = 3!$ $|A_1 \cap A_3| = 0$ $|A_2 \cap A_3| = 3!$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 7! - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - 0$$

$$= 7! - 3 \cdot 5! + 2 \cdot 3!$$

鸽巢原理

58. 证明在集合{1, 4, 7, 10, …, 100}中任取20个不同的数，则这20个数中至少存在两个数，其和为104 (鸽巢)

将20个数分组 (100, 4) (7, 97) (10, 94) … (1) (52) 共18组

① 取到1或52

若两个都取，则剩下18个数从16组选，必有两数在同一组

若取1个　　则剩下19个数从16组选，同理

② 未取到1或52

剩下20个数从16组选，同理

59. 证明：在任意的52个整数中，存在两个整数，其和或差能被100整除

见和差应该想到构造成对鸽巢

构造鸽巢 (1,99) (2,98) (3,97) …… (49,51) (0) (50)

共51组

因为取52个整数，根据鸽巢定理，存在两个整数在一组内

① 如果在0或50内，它们的和与差都能被100整除

② 如果在其他组 { 两个数相同 → 差可被整除

两个数不同 → 和可被整除