1. 在棋盘内放棋子，有x的地方不放，有多少放置方法

x					
x	x				
		x	x		
		x	x		
		x	x		

$$R(\text{⊞}) = R(\text{田})\,R(\text{田})$$

$$= [xR(\square) + R(\square\square)]\cdot[xR(\text{日}) + R(\text{田})]$$

$$= 1 + 9x + 25x^2 - 24x^3 + 6x^4$$

$$N = 6! - 9\times 5! + 25\times 4! - 24\times 3! + 6\times 2! = 108$$

2. 多项式 $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^9$ 中 $x_1^3 x_2^3 x_3 x_4^2$ 的系数

$$\underbrace{(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)\cdots(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)}_{9\text{个}}$$

系数为 $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot 1^3 \cdot (-1)^3 \cdot 2 \cdot (-2)^2$

或 $\dfrac{9!}{3!\,3!\,1!\,2!}$

3. 从1至20这20个数中任选互不相邻的三个数

$$C_{n-r+1}^{r} = C_{20-3+1}^{3} = C_{18}^{3}$$

4. 已知一数列满足 $A_0=1$ $A_1=2$ $A_n-5A_{n-1}+6A_{n-2}=2^n$

求 A_n 通项

(非齐次公式)

特征方程： $x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-3)(x-2)=0$

2 是一重根

设 $\alpha_n=2^n k_0 n$ 代入

$2^n \cdot k_0 n - 2^{n-1}\cdot 5\cdot k_0(n-1) + 2^{n-2}\cdot 6\cdot k_0(n-2)=2^n$

$4k_0 n - 10k_0(n-1) + 6k_0(n-2) = 4$

$10k_0 - 12k_0 = 4 \Rightarrow k_0=-2$

$\therefore \alpha_n = -2n\cdot 2^n$

$A_n = A\cdot 3^n + B\cdot 2^n + \alpha_n$

$= A\cdot 3^n + B\cdot 2^n - 2n\cdot 2^n$

$A_0 = A + B = 1$

$A_1 = 3A+2B-4=2$

$\Rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-3 \end{cases}$

$A_n = 4\cdot 3^n - 3\cdot 2^n - 2n\cdot 2^n$

5. 设 $F_1=1$ $F_2=1$ $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ $(n\geq 3)$ 证明：F_{5n} 是 5 的倍数

(数学归纳法)

$n=1$ 时 $F_5=F_4+F_3=F_3+F_2+F_2+F_1=F_2+F_1+F_2+F_2+F_1$

$=5$ 是 5 的倍数

设 $n=k$ 时 F_{5k} 为 5 的倍数

当 $n=k+1$ 时

$$F_{5(k+1)} = F_{5k+5} = F_{5k+4} + F_{5k+3}$$

$$= F_{5k+3} + F_{5k+2} + F_{5k+2} + F_{5k+1}$$

$$= F_{5k+2} + F_{5k+1} + F_{5k+1} + F_{5k} + F_{5k+1} + F_{5k} + F_{5k+1}$$

$$= 5F_{k+1} + 3F_{5k}$$

$3F_{5k}$ 是5的倍数，$5F_{k+1}$ 也是5的倍数

$\therefore$ F_{5k+5} 是5的倍数

6. (跳一下)

7. 求1到1000中不能被5,6,8整除的整数个数

令 A_1 为1-1000中能被5整除的数

令 A_2 为1-1000中能被6整除的数

令 A_3 为1-1000中能被8整除的数

$|A_1| = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$ $\quad |A_2| = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$ $\quad |A_3| = \lfloor \frac{1000}{8} \rfloor = 125$

$|A_1 \cap A_2| = \lfloor \frac{1000}{5\times 6} \rfloor = 33$ $\quad |A_1 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{5\times 8} \rfloor = 25$

$|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{24} \rfloor = 41$ $\quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{120} \rfloor = 8$

最小公倍数

$$|\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}| = 1000 - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3|$$

$$+ |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 600$$

8. 证明把数n拆分成m项的拆分数，等于把n-m拆成不多于m项的拆分数

?

设 $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$ 为数n的m项拆分

则 $(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_m-1)=n-m$ 为数n-m不多于m项的拆分

设 $a_1+a_2+\cdots+a_r=n-m$ 为数n-m不多于m项的拆分

$$\underbrace{(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_r+1)}_{r\text{项}}+\underbrace{1+1+1+1+\cdots+1}_{m-r\text{项}}=n$$

9. 给出所有六次对称群 S_6 的全部共轭类，以及每个类含有的不同置换个数

S_6 的共轭类 这样写：

$(1)^6$ 从1开始

$(1)^4(2)^1$ 与其他1-6数字组合

$(1)^3(3)^1$ 由高到低

$(1)^2(4)^1$ $(1)^2(2)^2$ 共轭类中置换的计算方式：

$(1)^1(5)^1$
$$\frac{n!}{c_1!\,c_2!\cdots c_n!\,1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c_n}}$$

$(1)^1(2)^1(3)^1$

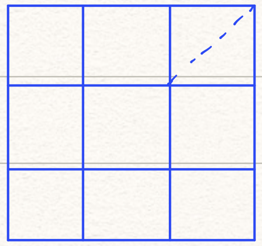
$(2)^3$ 不要忘了倍数 如 $(1)^2(2)^2$ $\frac{6!}{2!\cdot 2!\,1^2\cdot 2^2}$

$(3)^2$

$(2)^1(4)^1$

$(6)^1$

10. 证明在边长为1的正方形中任取10个点，则必存在两个点，该两点距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{3}$（鸽巢原理）



将边长为1的正方形分成9个边长为$\frac{1}{3}$的小正方形

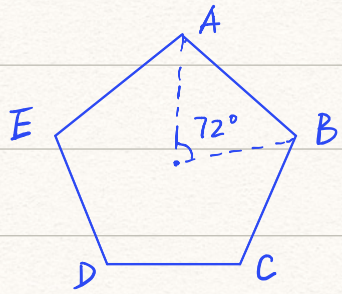
将10个点放入，必有两个点在同一个小正方形内

而小正方形的对角线是最长距离，为$\frac{\sqrt{2}}{3}$

所以必存在两点距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{3}$

11. 用K种颜色给一个正五边形顶点着色，有n种方案？

黑白时的具体方案？



① 不动时 $(1)^5$

② 转 ±72°, ±144° $(5)^1$ 共4个

③ 沿中轴对称翻转 (A)(BE)(DC) $(1)^1(2)^2$ 共5个

$$N=\frac{1}{10}(K^5+4K+5K^3)$$

$K=2$时 有8种方法（具体列的过程略啦，注意旋转相同的排除）