五. 线性常系数非齐次递推关系

定义： $a_n + C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots + C_{k-1} a_{n-k+1} + C_k a_{n-k} = b_n$

$a_0 = d_0,\ a_1 = d_1,\ \cdots,\ a_{k-1} = d_{k-1}$

汉诺塔问题 $H_n = 2H_{n-1} + 1$ 是一阶线性常系数非齐次递推关系.

用母函数求解

Eg: $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5 \cdot 4^n \quad a_0 = 5 \quad a_1 = 3$

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$\begin{array}{lllll}
x^2: & a_2 & -\ a_1 & -\ 6a_0 & = 5 \cdot 4^2 \\
x^3: & a_3 & -\ a_2 & -\ 6a_1 & = 5 \cdot 4^3 \\
x^4: & a_4 & -\ a_3 & -\ 6a_2 & = 5 \cdot 4^4 \\
 & & \vdots & &
\end{array}$$

$$G(x) - 3x - 5 - x[G(x) - 5] - 6x^2 G(x)$$

$= 5 \cdot [4^2x^2 + 4^3x^3 + \cdots] \rightarrow$ 提一个 $4^2x^2 \Rightarrow 4^2x^2(1 + 4x + 4^2x^2 + \cdots)$

$$(1 - x - 6x^2)\,G(x) = 3x + 5 - 5x + 5 \cdot \frac{4^2x^2}{1-4x}$$

$$G(x) = \frac{5 - 22x + 88x^2}{(1-3x)(1+2x)(1-4x)}$$

$$= \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1-3x} + \frac{C}{1-4x}$$

这里根据前面的经验可以得到：

$$a_n = A(-2)^n + B \cdot 3^n + C \cdot 4^n$$

展开联立方程求解（x代特殊值可能更简单一些）

$$\begin{cases} A + B + C = 5 \\ 7A + 2B + C = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{76}{15} \\ B = -\frac{67}{\ } \end{cases}$$

$$12A-8B-6C=88 \qquad B=-\frac{}{5} \qquad C=\frac{40}{3}$$

$$a_n=\frac{76}{15}(-2)^n-\frac{67}{5}\cdot 3^n+\frac{40}{3}\cdot 4^n$$

eg: $a_n-a_{n-1}-6a_{n-2}=3^n \qquad a_0=5 \quad a_1=2$

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$$x^2:\ a_2-a_1-6a_0=3^2$$

$$x^3:\ a_3-a_2-6a_1=3^3$$

$\vdots$ 与上题类似

$$G(x)-2x-5-x[G(x)-5]-6x^2G(x)=\frac{3^2x^2}{1-3x}$$

$$(1-x-6x^2)G(x)=5-3x+\frac{3^2x^2}{1-3x}$$

$$G(x)=\frac{5-3x}{1-x-6x^2}+\frac{3^2x^2}{(1-3x)(1-x-6x^2)}$$

$$=\frac{5-18+18x^2}{(1+2x)\underline{(1-3x)^2}}$$

区别在于有重根

$$=\frac{A}{1+2x}+\frac{B}{1-3x}+\frac{C}{(1-3x)^2}$$

$\hookrightarrow C(n+1)3^n$

$$a_n=A(-2)^n+B\cdot 3^n+C\cdot(n+1)3^n$$

☆ 非齐次递推关系的几种情况及解法

(1) 递推关系为 $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = b_n s^n$

对应的非齐次关系为 $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0$

非齐次递推关系的解 = 齐次递推关系的解 + 一个非齐次递推的特解

Eg: $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5 \cdot 4^n$. $a_0 = 5$. $a_1 = 3$

以 $\alpha = c \cdot 4^n$ 代入非齐次递推关系

$$c \cdot 4^n - c \cdot 4^{n-1} - 6 \cdot c \cdot 4^{n-2} = 5 \cdot 4^n$$

$$c(4^n - 4^{n-1} - 6 \cdot 4^{n-2}) = 5 \cdot 4^n$$

令 $n=2$ 得 $c = \frac{40}{3}$

$$\alpha = \frac{40}{3} \cdot 4^n$$

令 $a_n = \underbrace{\beta_n}_{\text{通解}} + \underbrace{\alpha_n}_{\text{特解}}$

$$\beta_n - \beta_{n-1} - 6\beta_{n-2} = 0$$

特征方程: $x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0$

$$G(x) = \frac{P(x)}{(1-3x)(1+2x)}$$

$$\beta_n = k_1 3^n + k_2 (-2)^n$$

$$a_n = k_1 \cdot 3^n + k_2 (-2)^n + \frac{40}{3} \cdot 4^n$$

由 $a_0 = 5$ $a_1 = 3$

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = -\frac{40}{3} 4^0 + 5 \\ 3k_1 - 2k_2 = -\frac{160}{3} + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{67}{5} \\ k_2 = \frac{76}{15} \end{cases}$$

$$a_n = -\frac{67}{5}\cdot 3^n + \frac{76}{15}\cdot(-2)^n + \frac{40}{3}\cdot 4^n$$

Eg: $a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n \quad a_0 = 5 \quad a_1 = 2$

取特解 $\alpha_n = kn3^n$ 代入

⋮ (略)

(2) 非齐次递推关系为 $a_n + C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + \cdots + C_ka_{n-k} = r^n b(n)$

* 其中 $b(n)$ 是 n 的 p 次多项式

r 是特征方程 $C(x)$ 的 m 重根（若 r 不是 $C(x)=0$ 的根，令 $m=0$）

↳ 特解：$r^n[k_0n^m + k_1n^{m+1} + \cdots + k_pn^{m+p}]$

Eg: $a_n + 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = (-7)^n n$

特征方程：$x^2+3x-10 = (x+5)(x-2) = 0$

-7 不是特征根

特解 $\alpha_n = (-7)^n(k_0 + k_1n)$

$(-7)^n[k_0+k_1n] + 3(-7)^{n-1}[k_0+k_1(n-1)] - 10(-7)^{n-2}[k_0+k_1(n-2)]$

$= (-7)^n n$ 两边把 $(-7)^{n-2}$ 除掉 $\Rightarrow k_0, k_1$

$$a_n = A_12^n + A_2(-5)^n + \alpha_n$$

再用待定系数求解 $A_1\ A_2$

Eg: $a_n + 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 2^n(5+n)$

特征方程 $x^2+3x-10 = (x-2)(x+5)$ 2是特征根

$\alpha_n = 2^n(k_0n + k_1n^2)$

代入递推关系 …… $\begin{cases} k_1 = \frac{1}{7} \\ k_0 = \frac{87}{49} \end{cases}$

$\alpha_n = (\frac{87}{49}n + \frac{1}{7}n^2)2^n$

$$a_n = A\cdot 2^n + B(-5)^n + \left(\frac{87}{49}n + \frac{1}{7}n^2\right)2^n$$

根据初始条件求 A、B

eg： $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 6n^2 \quad a_0 = 6 \quad a_1 = 7$

特征方程： $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$

$6n^2$ 可以看作 $6\cdot(1)^n\cdot n^2$

1是特征根 $\quad \alpha^n = (k_0 n + k_1 n^2 + k_2 n^3)\cdot 1^n$

代入得 $\begin{cases} k_0 = -49 \\ k_1 = -15 \\ k_2 = -2 \end{cases} \quad \alpha_n = -49n - 15n^2 - 2n^3$

$$a_n = A + B\cdot 2^n + \alpha_n$$ 求 A、B 即可

例2-20 跳一下，有点复杂而且没有用到上述方法

六、整数的拆分

将正整数 n 分解为若干个正整数的和，拆分的个数用 $p(n)$ 表示

$p(2)=1$，$p(3)=2$，$p(4)=4$

[相当于 n 个无区别的球放入 n 个无区别的盒子]

eg： 有1克，2克，3克，4克砝码各一个，能称多少重量，有几种

n 拆分成 1、2、3、4 之和且不允许重复的拆分数

(利用母函数[记住])

$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$

$= (1+x+x^2+x^3)(1+x^3+x^4+x^7)$

$= 1+x+x^2+2x^3+2x^4+2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10}$

3g　　6g

2种方案　　2种方案

eg：求1角、2角、3角的邮票能贴出的邮资及其方案数

将n分解为1.2.3的和且允许重复的拆分数

$= (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)$

$= \dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{1-x^2}\cdot\dfrac{1}{1-x^3}$

$= \dfrac{1}{1-x-x^2+x^4+x^5-x^6}$

$= 1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+\cdots$

这个是根据级数除法来求的. 见P68.

但结果是有余数的不能求尽

定理：正整数n拆分成1.2.3……之和，不允许重复的拆分数p(n)

和正整数n拆分成1.3.5……奇数和，允许重复的拆分数q(n)

$$p(n) = q(n)$$

证明：p(n)的G(x)

$= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$

$= \dfrac{1-x^2}{1-x}\cdot\dfrac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\dfrac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\dfrac{1-x^8}{1-x^4}\cdots$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1}{1-x^7}$$

Eg: 1克砝码3枚，2克4枚，4克2枚

$$G(x) = (1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^4+x^8)$$

$$= 1+x+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+5x^8+5x^9$$

$$+5x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+4x^{13}+3x^{14}+3x^{15}+2x^{16}$$

$$+2x^{17}+x^{18}+x^{19}$$

Eg: 整数拆分为 1.2.3. … m 的和，并允许重复

① 求其母函数

② 若 m 至少出现1次，求其母函数

① $G_1(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(1+x^m+x^{2m}+\cdots)$

$$= \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x^2} \cdots \frac{1}{(1-x^m)} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

m 至少出现1次 =

拆分成 1,2,3…m 的拆分数 － 拆分成 1,2,3,… m-1 的拆分数

即 $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} - \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$

七. Ferrers 图像（结尾处有一个 summary）

$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$　且 $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \cdots \geq n_{k-1} \geq n_k$

第一行 n_1 个点，第二行 n_2 个点 …

性质：(1) 每层至少有一个点

(2) 行列互换结果仍是 Ferrers 图像，互为共轭

$\Downarrow$

正整数 n 拆分成 K 个数和的拆分数

= 正整数 n 拆分成最大数为 K 的拆分数

（见 P71 图 2-7）

eg：将 n 个无区别的球放进三个无标志盒子，无空盒

= 将 n 拆分成三个数之和的拆分数

= 将 n 拆分成最大数为 3 的拆分数

$$G(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(x^3+x^6+x^9+\cdots)$$

$$= \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

和其余两项有区别

最大数为 3，3 必须取，其他只能取 1 或 2

推论：设 $m \leq n$，n 拆分成最多 m 个数的和的拆分数

= n 拆分成最大数不超过 m 的拆分数

（到这儿应该比较迷 & 乱，下面 summary [重点]）

总结（整数的拆分 & Ferrers 图像）

只提不同的问法

① n 拆分 1.2.3 之和，且不允许重复

有限且知道是几　　不重复

括号内有限

$$G(x) = (1+x^{①})(1+x^{②})(1+x^{③})$$

对应 1.2.3

② n 拆分 1.2.3 之和，允许重复

有限　　可重复

括号内无限

$$G(x) = (1+x^{①}+x^2+\cdots)(1+x^{②}+x^4+\cdots)(1+x^{③}+x^6+\cdots)$$

对应 1.2.3，但可重复，即 x^{2p}

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3}$$

③ n 拆分为 3 个 1，4 个 2，2 个 4 之和

既知道个数也知道是几

括号内数目对应个数

$$G(x) = (1+\underbrace{x+x^2+x^3}_{3个})(1+\underbrace{x^2+x^4+x^6+x^8}_{4个})(1+\underbrace{x^4+x^8}_{2个})$$

④ n 拆分为 $1,2,3,\cdots m$ 之和，可重复，m至少出现1次

1.2.⋯ m 的拆分数 − 1.2⋯ m−1 的拆分数

$$G(x)=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}-\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

$$=\boxed{\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}}$$

非常重要，与后面有联系

⑤ n 拆分成3个数之和

根据 Ferres ⇒ 等价于 n 拆分为最大数为3的拆分数

$$G(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(x^3+x^6+\cdots)$$

前面说这里因为3必须取

所以形式不同

$$=\boxed{\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}}$$

换一种理解

即最大数为3就是 3至少出现1次（在 1⋯3的情况下）

⑥ 同理可以得 n 拆分成 m 个数之和的 $G(x)$ 公式

$$G(x)=\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$