Pólya 定理例题

1. 长为6的透明方格，用红.蓝.黄.绿4种颜色染色，有几种方案？

其实所有Polya相关的题考虑的都是顺序问题

长方格染色，从左至右与从右至左的是同一种方案

$$\overline{P_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 6 \\ 1 & 2 & \cdots & 6 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$$

$$\overline{P_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (16)(25)(34)$$

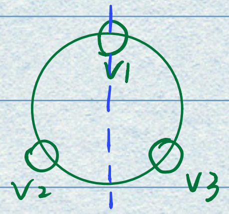
6块独立

3块独立

$$N = \frac{1}{2}(4^6 + 4^3)$$

颜色数

$\overline{P_1}$和$\overline{P_2}$

2. 

用红.蓝.绿3种颜色，有几种方案？

① 旋转 0°　$\overline{P_1} = (V_1)(V_2)(V_3)$

② 旋转 120°　$\overline{P_2} = (V_1 V_2 V_3)$

③ 旋转 240°　$\overline{P_3} = (V_3 V_2 V_1)$

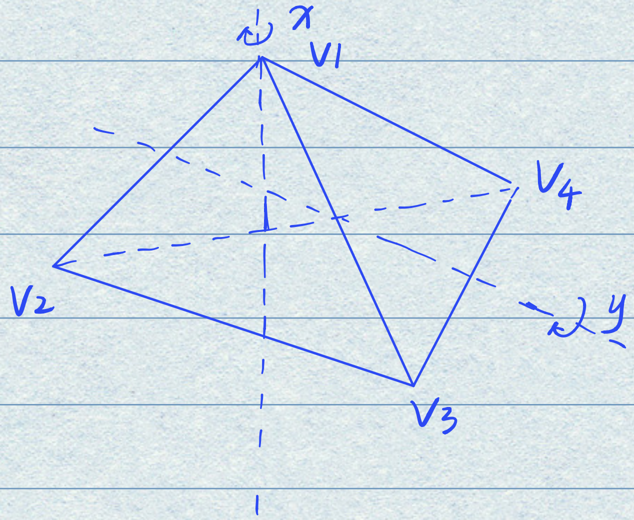
④ 垂直线翻转　$\overline{P_4} = (V_1)(V_2 V_3)$

$\overline{P_5} = (V_2)(V_1 V_3)$

$\overline{P_6} = (V_3)(V_1 V_2)$

$N = \frac{1}{6}\left[3^3 + 2\times 3 + 3\cdot 3^2\right] = 10$

3. 甲烷CH_4的支链是 $H-\overset{H}{\underset{H}{C}}-H$，若4个H用 H. Cl. CH_3. C_2H_5 之一取代，有几种结构



相当于正四面体四个顶点上色

① 旋转0° $\overline{P_1} = (V_1)(V_2)(V_3)(V_4)$

② 绕x旋转120° $\overline{P_2} = (V_1)(V_2V_3V_4)$

③ 绕x旋转240° $\overline{P_3} = (V_1)(V_4V_3V_2)$

有四个顶点，还有3对

$\overline{P_4} = (V_2)(V_1V_3V_4)$

$\overline{P_5} = (V_2)(V_4V_3V_1)$

$\overline{P_6} = (V_3)(V_1V_2V_4)$

$\overline{P_7} = (V_3)(V_4V_2V_1)$

$\overline{P_8} = (V_4)(V_1V_2V_3)$

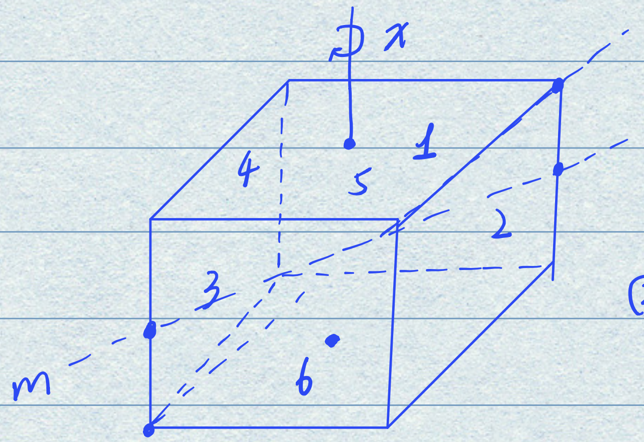
$\overline{P_9} = (V_4)(V_3V_2V_1)$

④ 绕V_1V_2中点和V_3V_4中点连线180° [3条)

$\overline{P_{10}} = (V_1V_2)(V_3V_4)$ $\overline{P_{11}} = (V_1V_3)(V_2V_4)$ $\overline{P_{12}} = (V_1V_4)(V_2V_3)$

$$N=\frac{1}{12}\times[4^4+8\cdot4^2+3\cdot4^2]=36$$

4. 正六面体的6个面分别用红蓝着色，方案数？



① 不动 $\overline{P_1}=(1)(2)(3)(4)(5)(6)$

表示用 $(1)^6$

② 绕x轴转 ±90°

$\overline{P_2}=(1)(2345)(6)$ 表示为 $(1)^2(4)^1$

$\overline{P_3}=(1)(5432)(6)$

有3条轴，共6个

③ 绕x轴转 180°

$(1)(24)(35)(6)$ 表示为 $(1)^2(2)^2$ 共3个

④ 绕m轴转 180°（只有180°）

$(16)(34)(52)$ 表示为 $(2)^3$ 共6个

⑤ 绕对角线转 ±120°

$(346)(152)$ 和 $(643)(251)$ 表示为 $(3)^2$

4条对角线，共8个

$$N=\frac{1}{24}\times[2^6+6\cdot2^3+3\cdot2^4+6\cdot2^3+8\cdot2^2]=10$$