第三章 容斥原理与鸽巢原理

一、De Morgan 定理

若 A 和 B 是集合 U 的子集

(1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

会用就OK

$\Downarrow$ 推广到一般

(1) $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$

(2) $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$

二、容斥定理

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

定理：$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Eg：A、B、C 三门课，选课人数为 170，130，120，兼修 AB 为 45 人，兼修 AC 为 20 人，兼修 BC 为 22 人，同时修的人有 3 人，计算学生

$|A| = 170 \quad |B| = 130 \quad |C| = 120$

$|A \cap B| = 45 \quad |A \cap C| = 20 \quad |B \cap C| = 22$

$|A \cap B \cap C| = 3$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$= 170 + 130 + 120 - 45 - 20 - 22 + 3 = 336$$

eg: $S=\{1,2,3\cdots 600\}$，求其中被 2,3,5 除尽的数的数目

$$|A|=\left\lfloor \frac{600}{2}\right\rfloor=300 \qquad |B|=\left\lfloor \frac{600}{3}\right\rfloor=200$$

$$|C|=\left\lfloor \frac{600}{5}\right\rfloor=120$$

$$|A\cap B|=\left\lfloor \frac{600}{2\times3}\right\rfloor=100$$

$$|A\cap B\cap C|=\left\lfloor \frac{600}{30}\right\rfloor=20$$

$$|A\cap C|=\left\lfloor \frac{600}{2\times5}\right\rfloor=60$$

$$|B\cap C|=\left\lfloor \frac{600}{15}\right\rfloor=20$$

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C| &= |A|+|B|+|C| \\ &\quad -|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| \\ &= 440\end{aligned}$$

可以继续推一步：

$$\begin{aligned}|A\cup B\cup C\cup D| &= |A|+|B|+|C|+|D| \\ &\quad -|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D| \\ &\quad -|C\cap D|+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D| \\ &\quad +|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|\end{aligned}$$

定理：$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$ （$A_1 A_2 \cdots A_n$ 中至少有一个出现）

$$\begin{aligned}&=(|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|) \\ &\quad -(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+\cdots+|A_1\cap A_n|+|A_2\cap A_3|+\cdots \\ &\qquad +|A_{n-1}\cap A_n|) \\ &\quad +(|A_1\cap A_2\cap A_3|+\cdots+|A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n|) \\ &\quad +(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\end{aligned}$$

（写完好像发现没什么用）

三、容斥原理举例

主要应用就是上面的公式和求它的反面

eg：求不超过 120 的素数个数

因为 $11^2=121>120$ 不超过 120 的合数必然是 2.3.5.7 的倍数

A_1 为不超过 120 被 2 除尽的数

A_2 为不超过 120 被 3 除尽的数

A_3 为不超过 120 被 5 除尽的数

A_4 为不超过 120 被 7 除尽的数

$|S|=120$

$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}$ 为所求的除了 2.3.5.7 外的素数

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}| \\
&=120-(|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|) \\
&\quad+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4| \\
&\quad+|A_3\cap A_4|) \\
&\quad-(|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4| \\
&\qquad+|A_2\cap A_3\cap A_4|) \\
&\quad+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4| \\
&=27
\end{aligned}
$$

还要加上 2.3.5.7 并且除去 1　　$27-1+4=30$

简单解释一下：

容斥原理只有两个公式 $\begin{cases}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| & \text{表示}A_1-A_n\text{至少有一个} \\ |\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}| & \text{表示}A_1-A_n\text{都不出现}\end{cases}$

上面这个题求素数，我们已知的方法是求合数，所以应该求它的反面

Eg：错排问题

1,2,…,n 的全排列中每个元素都不在各自位置上的排列数

(谁想的这种奇怪的问题…)

设 A_i 表示数 i 仍在第 i 位的全排列，$i=1,2,\cdots n$

i 不动　$|A_i| = (n-1)!$　$i=1,2,\cdots n$

i,j 不动　$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$　$i=1,2\cdots n$　$i \neq j$

$\vdots$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n| = 1$

$D_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \overline{A_n}|$

$= n! - C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! + \cdots \pm C_n^n 1!$

$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}\right)$ (需要记一下)

Eg: 6 个人参加一会议，入场时将帽子随意挂在衣架上，走时顺手拿一顶走，问没一人拿对的概率是？

$P = \frac{D_6}{6!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$

每个元素都不在各自位置上的排列数

全部可能结果

四、棋盘多项式与有限制条件的排列

1. 有限制排列

eg：4个x．3个y．2个z 的全排列中求不出现 $xxxx$, yyy, zz 的排列数

A_1 是出现 $xxxx$ 的一类

A_2 是出现 yyy 的一类

A_3 是出现 zz 的一类

整体

$|A_1|$ $xxxx$．3个y．2个z $= \dfrac{6!}{3!2!} = 60$ ← 重复度

$|A_2|$ 4个x．yyy．2个z $= \dfrac{7!}{4!2!} = 105$

同理 $|A_3| = \dfrac{8!}{4!3!} = 280$

$|A_1 \cap A_2|$ $xxxx$．yyy．2个z $= \dfrac{4!}{2!} = 12$

同理 $|A_1 \cap A_3| = \dfrac{5!}{3!} = 20$ $\quad |A_2 \cap A_3| = \dfrac{6!}{4!} = 30$

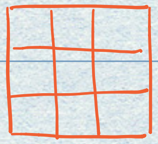
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! = 6$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = \frac{9!}{4!3!2!} - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

求都不出现

$$= 871$$

2. 棋盘多项式（有点意思）



棋盘上某一格放入棋子，那么所在的行与列都不允许放任何棋子

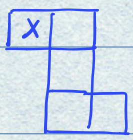
对于棋盘C，令 $r_k(C)$ 表示用k个棋子放到C上的不同方案数

$$R(C)=\sum_{k=0}^{n} r_k(C)\,x^k$$ 称为棋盘C的棋盘多项式

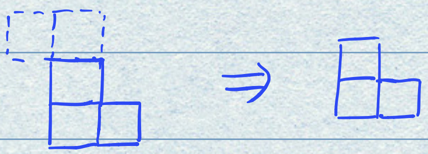
meaning：k个棋子放到棋盘上的方案数之和为 $R(C)$

下面是神奇的定义部分：

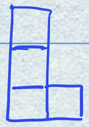
C为棋盘



$C_{(i)}$ 为C中某一格子所在行和列被排除掉以后的剩余部分



$C_{(e)}$ 为从C中除去该格子后的棋盘



☆ 对于棋盘C上的某格子只有两种情况

- 格子上有棋子
- 格子上不能放棋子

$$r_k(C)=r_{k-1}(C_{(i)})+r_k(C_{(e)})$$

该格子放不了，仍有k个

剩下k-1棋子放入格子的方案数

可推出

$$R(C)=xR(C_{(i)})+R(C_{(e)})$$

Eg: $R(\square) = 1+x$

$R(\boxed{x}\square) = xR(\ ) + R(\square) = x+1+x = 1+2x$

除去行列　　除去该点

$R\left(\begin{smallmatrix}\boxed{x} & \\ & \square\end{smallmatrix}\right) = xR(\square) + R(\square) = (1+x)x + 1+x = 1+2x+x^2$

$R\left(\begin{smallmatrix}\boxed{x} & \\ \square & \square\end{smallmatrix}\right) = xR(\square) + R(\square\square) = x(1+x)+1+2x = 1+3x+x^2$

$R\left(\begin{smallmatrix}\square & \\ \boxed{x} & \square\end{smallmatrix}\right) = xR(\ ) + R\left(\begin{smallmatrix}\square & \\ & \square\end{smallmatrix}\right) = x+(1+2x+x^2) = 1+3x+x^2$

⋮

都是同样的方式迭代下去

☆ 当C是由相互隔离的两个棋盘C_1和C_2

C_1与C_2不存在格子同行或同列

$R(C) = R(C_1)R(C_2)$

Eg: $R\left[\begin{smallmatrix}\square & & \\ \square & \boxed{x} & \\ & \square & \square\end{smallmatrix}\right]$

$= xR\left[\begin{smallmatrix}\square & \\ & \square \\ & \square\end{smallmatrix}\right] + R\left[\begin{smallmatrix}\square & & \\ \square & \square & \square\end{smallmatrix}\right]$

相互隔离的

$$R\begin{bmatrix} \ydiagram{1} & \\ & \ydiagram{1,1} \end{bmatrix} = R(\ydiagram{1})\,R(\ydiagram{1,1})$$

$$R\left(\ydiagram{1,1,1+2,2+1}\right) = R(\ydiagram{1,1})\,R(\ydiagram{2,1+1})$$