35. 证明：$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$

设 m+n 个有标志的球取 r 个进行组合，有 m 个红色 n 个蓝色

r 个球都是蓝无红 $\binom{m}{0}\binom{n}{r}$

r-1 个球是蓝，1 个红 $\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}$

⋮

r 个红，无蓝 $\binom{m}{r}\binom{n}{0}$

$\therefore C_{m+n}^{r}=C_m^0C_n^r+C_m^1C_n^{r-1}+\cdots+C_m^rC_n^0$

36. 用组合方式证明 $\binom{n}{k}-\binom{n-3}{k}=\binom{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-1}\binom{n-3}{k-1}$

C_n^k 表示从 $(0,0)\longrightarrow(n-k,k)$ 的路径数

C_{n-3}^{k} 表示从 $(0,0)\rightarrow(n-k-3,k)$

C_{n-1}^{k-1} 表示从 $(0,0)\rightarrow(n-k,k-1)$

C_{n-2}^{k-1} 表示从 $(0,0)\rightarrow(n-k-1,k-1)$

C_{n-3}^{k-1} 表示从 $(0,0)\rightarrow(n-k-2,k-1)$

即从 $(0,0)\rightarrow(n-k,k)$ 的所有路径中必须经过 $(n-k-3,k)$

$(n-k,k-1)$ $(n-k-1,k-1)$ $(n-k-2,k-1)$

37. 用组合方法证明 $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+2}{2}=\binom{2+n}{3}$

即证明：$C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{n+1}^2=C_{n+2}^3$

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+2}\}$，从 A 中取 3 个元素的方案数为 C_{n+2}^3

① 已选 a_1，再选2个数 C_{n+1}^2

② 没选 a_1，选了 a_2，再选2个数 C_n^2

⋮

ⓝ 选了 a_n，前面的都没选，再选2个数 C_2^2

38. a) 把3n个不同的球放到3个相同盒子中，每个盒子n球方案数

b) 把Kn个不同的球放到K个相同盒子中，每个盒子n球方案数

a) $\dfrac{(3n)!}{(n!)^3 \cdot 3!}$

b) $\dfrac{(kn)!}{(n!)^k \cdot k!}$

39. 证明：$\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 是一个整数　$\dfrac{(mn)!}{(m!)^n}$ 是一个整数

n^2个不同的球放入n个相同的盒子中每个盒子n球

mn个不同的球放入n个不同的盒子中，每个盒子m球

其他证明问题

40、设有一个n个正整数序列，其中恰有m个不同的整数，若 $n \geq 2^m$，证明：在这个序列中存在连续一段整数，它们的积是一个完全平方数

例如：3 $\underline{7\ 5\ 3\ 7\ 3\ 5}$ 7　$7\times5\times3\times7\times3\times5=(7\times3\times5)^2$

证明：设A为m个不同整数的集合 $A=\{a_1 a_2 \cdots a_m\}$

任取一个有 n 个数的序列 $\pi: c_1c_2c_3\cdots c_n$

令 $b_1=\{c_1\}$ $b_2=\{c_1,c_2\}$ $b_3=\{c_1,c_2,c_3\}$ $\cdots$ $b_n=\{c_1c_2c_3\cdots c_n\}$

$C=\{b_1 b_2\cdots b_n\}$ $|C|=N$

再设一集合 $B=\{d_1,d_2,d_3\cdots d_n\}$ d_i 取 1 或 2 $|B|=2^n$

从 C 到 B 建立一个对应

b_i 中如果 a_1 有奇数个，d_1 取 1 否则为 2 $\cdots$

由于 $|C|=n>|B|=2^n$ 由鸽巢原理可知

一定存在两个 b_i b_j，它们对应的 $\{d_1d_2d_3\cdots d_n\}$ 是一样的

这两个序列的奇偶性一致

b_j 序列 $-b_i$ 序列得到的序列是 π 的一部分，

$\in A$ 且在 A 中都是偶数个，积为完全平方

41. 证明：对于任意整数 n，存在全部只由 1 和 0 组成的十进制正整数 m，使得 m 是 n 的倍数（即 n 整除 m，记为 $n|m$）

如 $2|10$，$3|111$，$4|100$，$5|10$

证明：假设序列 $1, 11, 111, 111\cdots$ 用 $A_1\sim A_N$ 标识，即

$A_1=1$ $A_2=11$ $A_3=111$ $A_4=1111$ $\cdots$

记 $A_K \bmod N$ 的余数为 $a_1,a_2,a_3\cdots a_N$

$A_K \bmod N$ 的余数最多只有 $N-1$ 个不同

鸽巢原理：$a_1,a_2\cdots a_N$ 必有两个相同

即 $A_i-A_j\equiv 0 \pmod N$

A_i-A_j 即为所求的 0，1 组成的 M

42. 设n是一奇数，证明：数m是奇数当且仅当把m表示成n进制数时奇数数字出现奇数次

证明：1) m是奇数　$m=(x_1x_2\cdots x_k)_n$ 中奇数数字出现奇数次

$m=(x_1,x_2\cdots x_k)_n=x_1n^{k-1}+x_2n^{k-2}+\cdots+x_kn^0$

∵ n为奇数，∴ 以n为底的任意幂次均为奇

则k项中奇偶决定权在x_i，有奇数x_i的项为奇数

且在出现奇数次时，m为奇　(奇+偶=奇)