第四章　Pólya 定理

一、群

1. 定义

给定一个集合 $G=\{a,b,c\cdots\}$ 和其上的二元运算"·"

满足 (1) 封闭性　$a\cdot b=c$　$c\in G$

(2) 结合律　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

(3) 存在单位元素　$a\cdot e=e\cdot a=a$

(4) 存在逆元素　$a\cdot b=b\cdot a=e \Rightarrow b=a^{-1}$

则集合 G 是一个群

二、置换群

假定 n 个元素为 $1,2,\cdots n$，若元素 1 被 1 到 n 中某一个整数 a_1 所取代，2 被其中的 a_2 元素所取代，…… n 被 a_n 取代，且

$$a_i\neq a_j$$

用 $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$

举个例子解释一下置换的运算：

$$P_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\qquad P_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$P_1P_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&2&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

解析：$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

① 1换3，所以与P_2的3对应

② 2换1，所以与P_2的1对应

⋮

后面一样，于是得到了 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

解析结果怎么来的：

$$P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1换3，3换2 ⇒ 1换2

2换1，1换4 ⇒ 2换4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

后面一个道理

在1,2,……n间的置换集合是一个群

三、循环、奇循环与偶循环

也是一种表示置换的方法

$(a_1a_2\cdots a_m) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1} & a_m \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_m & a_1 \end{pmatrix}$ 叫m阶循环

举个栗子

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 5\ 2\ 3)$$

顺藤摸瓜式，1换4 → 4换5 → 5换2

→ 2换3 → 3换1

(1 4 5 2 3)

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}4\\5\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}5\\4\end{matrix}} \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)(4\ 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 4)$$ 该循环中 2 3 未变

所以 $(1\ 5\ 4) = (1\ 5\ 4)(2)(3)$

PS：① 循环与哪个元素为首无关　$(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1)$

② 两个循环没有相同文字，乘积可交换　$(1\ 3\ 2)(4\ 5) = (4\ 5)(1\ 3\ 2)$

① 若 $P = (a_1\ a_2 \cdots a_n)$　则 $P^n = (1)(2)\cdots(n) = e$

在n次循环后回到 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1)(2)\cdots(n)$

② 任何一个置换都可以表示成若干循环的乘积

③ 任意一个循环都可以表达成若干换位之积

$(i\ j)$ 叫做 i 和 j 的换位

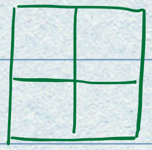
④ 若一个置换可分成奇数个换位之积，为奇置换

若一个置换可分成偶数个换位之积，为偶置换

三. Pólya 定理 ☆

用一个大栗子来说明（涉及 Burnside 引理）

Eg：一个正方形均分成4个格子



用两种颜色给四个格子上色

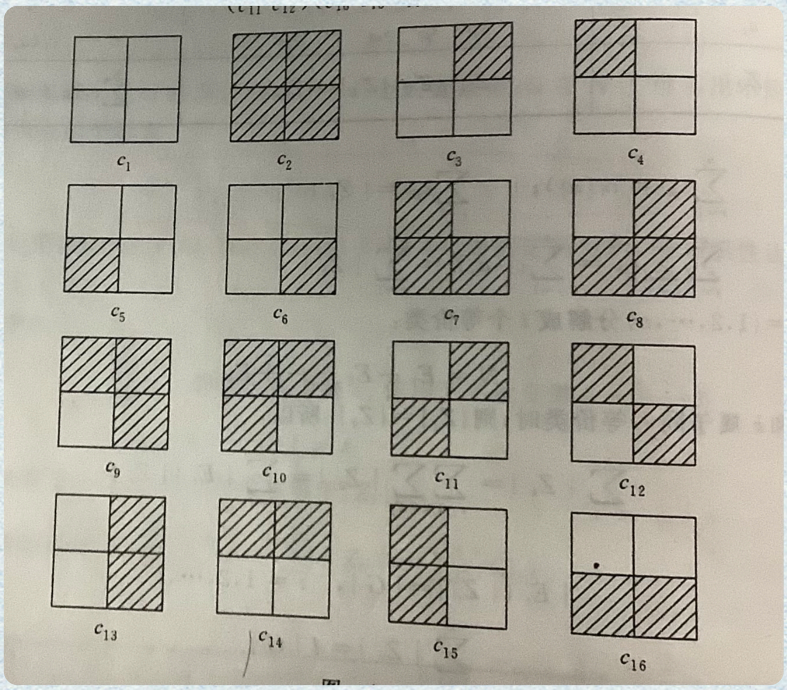
有多少种方案（旋转后一样的方案算一种）

① 用 Burnside 引理来解

公式：$l = \frac{1}{|G|}[C_1(a_1) + C_1(a_2) + \cdots + C_1(a_k)]$

（$C_1(a_k)$ 为置换 a_k 中1阶循环的个数，如 $\begin{cases} (1)(2)(3)(4) & C_1(a_1)=4 \\ (1)(2)(3,4) & C_1(a_2)=2 \end{cases}$）

下面列出所有可能情况：（共16种）



分别讨论

(1) 旋转 $0°$：$P_1 = (c_1)(c_2)(c_3)\cdots\cdots(c_{16})$

每种都是单独情况

(2) 旋转 90°： C_3 被 C_4 代替，C_4 被 C_5 代替 …

$$P_2 = (C_1)(C_2)(C_3C_4C_5C_6)(C_7C_8C_9C_{10})$$
$$(C_{11}C_{12})(C_{13}C_{14}C_{15}C_{16})$$

只剩这 6 类，被代替的都写入一个置换内

(3) 旋转 180°： C_3 被 C_5 代替，C_4 被 C_6 代替 …

$$P_3 = (C_1)(C_2)(C_3C_5)(C_4C_6)(C_7C_9)(C_8C_{10})$$
$$(C_{11})(C_{12})(C_{13}C_{15})(C_{14}C_{16})$$

(4) 旋转 270°： $P_4 = (C_1)(C_2)(C_6C_5C_4C_3)(C_{10}C_9C_8C_7)(C_{11}C_{12})$

$(C_{16}C_{15}C_{14}C_{13})$ 重复的都在一个置换内

求完 P 后回到 $C_1(P)$ [一阶循环的个数]

$C_1(P_1) = 16$

$C_1(P_2) = 2$

$C_1(P_3) = 4$

$C_1(P_4) = 2$

$$l = \frac{1}{|G|}\left(C_1(P_1) + C_1(P_2) + C_1(P_3) + C_1(P_4)\right)$$
$$= \frac{1}{4} \times (16+2+4+2) = 6$$

这个根据前面的 $|G| = |E||Z|$

记得再看一下

② 用 pólya 定理来解

$$l = \frac{1}{|\bar{G}|}\left[m^{c(\bar{a}_1)} + m^{c(\bar{a}_2)} + \dots + m^{c(\bar{a}_g)}\right]$$ (m 为颜色数)

回到上面的例子，先求 $\bar{P}$

解释左边这种写法：

首先把四块的变化看作整体

2	1
3	4

(1) $0°$: $\overline{p_1} = (1)(2)(3)(4)$

都没变化，四块独立

(2) $90°$: $\overline{p_2} = (4\ 3\ 2\ 1)$

转$90°$. 4换3. 3换2, 2换1, 1换4

(3) $180°$: $\overline{p_3} = (13)(24)$

转$180°$: 1 3 互换. 24 互换

(4) $270°$: $\overline{p_4} = (1\ 2\ 3\ 4)$

转$270°$: 1换2. 2换3. 3换4. 4换1

$C(\overline{p_1}) = 4 \qquad C(\overline{p_2}) = 1 \qquad C(\overline{p_3}) = 2 \qquad C(\overline{p_4}) = 1$

这里C不是上一解法中的一阶循环，而是看有几个单独的块

而 $C_1(p_1) = m^{C(\overline{p_1})} = 2^4 = 16$

同理：$C_1(p_2) = 2 = 2^1 \qquad C_1(p_3) = 4 = 2^2 \qquad C_1(p_4) = 2 = 2^1$

$$l = \frac{1}{|G|} \cdot (16+2+4+2) = 6$$