八. 指数型母函数

1. 问题来源

n个元素 $a_1 a_2 \cdots a_n$ 互不相同，全排列可得 $n!$个不同的排列。

若其中某一个元素 a_1 重复了 n_1 次，则真正不同的排列数应为 $n!/n_1!$

当 a_1 重复 n_1 次，a_2 重复 n_2 次 …… a_k 重复 n_k 次

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

$$\Downarrow$$

$$\text{实际不同} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

2. 指数型母函数定义

对于序列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 定义

$$G_e(x) = a_0 + \frac{a_1}{1!}x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \frac{a_3}{3!}x^3 + \cdots$$

为序列 $\{a_i\}$ 的指数型母函数

eg：(1) 序列 $\{1, 1, \cdots 1, \cdots\}$ 的指数型母函数

$$G_e(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x$$

(2) 序列 $\{0!, 1!, 2!, \cdots\}$ 的指数型母函数

$$G_e(x) = 0! + \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \cdots = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

(3) 序列 $\{1, k, k^2, k^3, \cdots\}$ 的指数型母函数

$$G_e(x) = 1 + kx + \frac{k^2}{2!}x^2 + \frac{k^3}{3!}x^3 + \cdots = e^{kx}$$

Eg：由 a、b、c、d 这四个字符取5个作允许重复的排列，
要求 a 出现的次数不超过2次，但不能不出现；
b 不超过1个，c 不超过3个，d 出现次数为偶数

$$Ge(x) = \underbrace{(x+\tfrac{1}{2}x^2)}_{a}\underbrace{(1+x)}_{b}\underbrace{(1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x^3)}_{c}\cdot\underbrace{(1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{24}x^4)}_{d}$$

必须出现，无1　　　　出现次数为偶数

$$= x+\frac{5}{2}x^2+3x^3+\frac{8}{3}x^4+\frac{43}{24}x^5+\frac{43}{48}x^6+\frac{17}{48}x^7+\frac{1}{288}x^8$$

$$+\frac{1}{48}x^9+\frac{1}{288}x^{10}$$

转换

$$Ge(x) = \frac{x}{1!}+5\cdot\frac{1}{2!}x^2+18\cdot\frac{1}{3!}x^3+64\cdot\frac{1}{4!}x^4$$

$$+215\cdot\frac{1}{5!}x^5+645\cdot\frac{1}{6!}x^6+1785\cdot\frac{1}{7!}x^7$$

$$+140\cdot\frac{1}{8!}x^8+7650\cdot\frac{1}{9!}x^9+12600\cdot\frac{1}{10!}x^{10}$$

取5个排列，排列数为215.

下面的例子有一点难理解，尽量对应

Eg：将1、3、5、7、9这5个数组成 n 位数，要求3和7出现次数为偶数
其它3个无限制，这样的数有多少个？

$$Ge(x) = \left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^{2}\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)^{3}$$

3和7对应（偶数的写法）　　　1、5、9对应（无限制）

$$1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4 = \frac{(e^x+e^{-x})}{2}$$

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots = e^x$$

$$G_e(x) = \frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2 \cdot e^{3x}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})\cdot e^{3x}$$

$$= \frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^x)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_n (5^n+2\cdot 3^n+1)\ \frac{x^n}{n!}$$

$$a_n = \frac{1}{4}(5^n+2\cdot 3^n+1)$$

Eg：7个有区别的球放入4个有标志的盒子，要求1.2必须含有偶数个球，第3个盒子含奇数个球，求方案数

转换：1.2.3.4个数取7个作允许重复的排列

$$G_e(x) = \underbrace{\left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)^{2}}_{1.2\text{对应}}\underbrace{\left(\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)}_{3\text{对应}}\underbrace{\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)}_{4\text{对应}}$$

九. Stirling 数

1. 问题引出

n个有区别的球放进m个有标志的盒子，要求盒子中球数依次为 $n_1, n_2, \cdots n_m$，

方案数为 $C_n^{n_1 n_2 \cdots n_m}$

也可看作从n个中取 n_1 个 $C_n^{n_1}$

再从余下的中取 n_2 个 $C_{n-n_1}^{n_2}$

⋮

$$C_n^{n_1 n_2 \cdots n_m} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2}^{n_3} \cdots C_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{m-1}}^{n_m}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$$

称 $C_n^{n_1 n_2 \cdots n_m}$ 为多项式 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 的多项式系数

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n} C_n^{n_1 n_2 \cdots n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$$

定理：$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式的项数等于 C_{n+m-1}^{n}

这些项系数之和为 m^n

(最多记一下公式，推导应该没什么用)

下面进入 Stirling 数

定义：① 第一类 Stirling 数 (不是重点)

$$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

$$= s(n,0) + s(n,1)x + s(n,2)x^2 + \cdots + s(n,n)x^n$$

称 $s(n,0), s(n,1) \cdots s(n,n)$ 为第一类 Stirling

$$[x]_{n+1} = [s(n,0)+s(n,1)x+\cdots+s(n,n)x^n](x-n)$$

$$= s(n+1,0) + s(n+1,1)x + \cdots + s(n+1,n+1)x^{n+1}$$

$$\Rightarrow s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k)$$

② 第二类 Stirling 数

n个有区别的球放入m个相同的盒子中，无空盒

不同的方案数为 $S(n,m)$，即将n个数拆成非空的m个部分

第二类 Stirling 数的性质 $S(n,k)$

(1) $S(n,0)=S(0,n)=0 \quad \forall n\in N$;

(2) 若 $n\geq k\geq 1$ $S(n,k)>0$

(3) 若 $k>n\geq 1$ $S(n,k)=0$

(4) $S(n,1)=1 \quad n\geq 1$

(5) $S(n,n)=1 \quad n\geq 1$

(6) $S(n,2)=2^{n-1}-1$

(7) $S(n,3)=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)-2^{n-1}$

(8) $S(n,n-1)=C_n^2$

(9) $S(n,n-2)=C_n^3+3C_n^4$

可能计算会用

定理：$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1)$，$n>1$，$m\geq 1$

不证了…

该递推公式相当于给出构造所有方案的办法

如将5个球放入无区别的两个盒子里：

$$S(5,2)=2S(4,2)+S(4,1)$$

定理：Stirling 数计算公式

$$S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_m^k (m-k)^n$$

背一下

eg: $S(n,3)$

$$=\frac{1}{3!}[3^n-3\cdot 2^n+3]$$