1. 一个骰子的六个面上写着 0, 1, 3, 7, 15, 31，掷两次得到不同和的可能性是多少？

只想到了枚举，列一个

	0	1	3	7	15	31
0	0	1	3	7	15	31
1	1	2	4	8	16	32
3	3	4	6	10	18	34
7	7	8	10	14	22	38
15	15	16	18	22	30	46
31	31	32	34	38	46	62

的表

找不重复

$$P = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

2. 将 1000000 表示三个数的乘积的方式有多少种？

（暂跳 …）

3. 求 $(1+x)^k + (1+x)^{k+1} + \cdots + (1+x)^n$ 的展开式中 x^m 的系数

① 当 $m \le k$ 时

系数为 $C_k^m + C_{k+1}^m + \cdots + C_n^m$

② 当 $m > k$ 时

系数为 $C_m^m + C_{m+1}^m + \cdots + C_n^m$

③ 当 $m > n$ 时　系数为 0

4. 从3黑球、红、黄、白各一个，任选4个排成一行，有多少种排列？

① 1黑1红1黄1白　全排列 $A_4^4 = 24$

② 2黑，红黄白任选2个　$\frac{A_4^4 C_3^2}{2!} = 36$

↳ 黑球重复度

③ 3黑，红黄自任选 1个 $\dfrac{A_4^4 C_3^1}{3!} = 12$

↳ 黑球重复度

$N = 24 + 36 + 12 = 72$

5. 证明 $\dfrac{(mn)!}{(m!)^n}$ 是一整数

mn个不同的小球放入 n个不同的盒子中，每个盒子中 m个球

因为盒子中的 m个球是无顺序的

所以方案数为 $\dfrac{(mn)!}{\underbrace{m!\cdot m!\cdots m!}_{n个}} = \dfrac{(mn)!}{(m!)^n}$ 为整数

6. 已知：$a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2} = 3^n$，$a_0 = 5$ $a_1 = 2$ 求 $a^n = ?$

特征方程：$x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0$

3是特征方程的一重根

设 $\alpha_n = 3^n \cdot k_0 n$ 代入

$3^n \cdot k_0 n - 3^{n-1} \cdot k_0(n-1) - 6 \cdot 3^{n-2} \cdot k_0(n-2) = 3^n$

$9k_0 n - 3k_0 n + 3k_0 - 6k_0 n + 12k_0 = 9$

$15k_0 = 9$

$k_0 = \dfrac{3}{5}$

$\alpha_n = \dfrac{3}{5} n \cdot 3^n$

设 $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n + \dfrac{3}{5} n \cdot 3^n$

$$\begin{cases} a_0 = A + B = 5 \\ a_1 = 3A - 2B + \dfrac{9}{5} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{51}{25} \\ B = \dfrac{74}{25} \end{cases}$$

7. 由 1·2·3·4 组成的 n 位数中，2 和 3 至少出现一次，1 出现偶数次的方案数

(指数型母函数)

$$\left(x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)^2\left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots\right)$$

$$=(e^x-1)^2\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)e^x$$

$$=\frac{1}{2}(e^{4x}-2e^{3x}+2e^{2x}-2e^x+1)$$

$$a_n=\frac{1}{2}(4^n-2\cdot 3^n+2\cdot 2^n-2\cdot 1^n)$$

8. 证明 Fibonacci 数列满足以下关系式

(1) $F_1F_2+F_2F_3+\cdots+F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}^2$

(2) $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$ $\qquad F_1=F_2 \qquad F_3=F_1+F_2$

(1) $F_1F_2=F_2^2$

拆大 $F_2F_3=F_2(F_4-F_2)=F_2F_4-F_2^2$ 注意拆分的时候

拆小 $F_3F_4=F_4(F_4-F_2)=F_4^2-F_2F_4$ 为了消除方便

拆大 $F_4F_5=F_4(F_6-F_4)=F_4F_6-F_4^2$ 1次拆大数

拆小 $F_5F_6=F_6(F_6-F_4)=F_6^2-F_4F_6$ 1次拆小数

$\vdots$

$$F_{2n-1}F_{2n}=F_{2n}(F_{2n+1}-F_{2n})=F_{2n}^2-F_{2n}F_{2n+1}$$

竖向相加可证

或使用数学归纳法 ① $n=1$ 成立 ② 设 $n=k$ 成立 ③ 证 $n=k+1$

(2) $F_1^2 = F_2F_1$

$F_2^2 = F_2(F_3 - F_1) = F_2F_3 - F_2F_1$

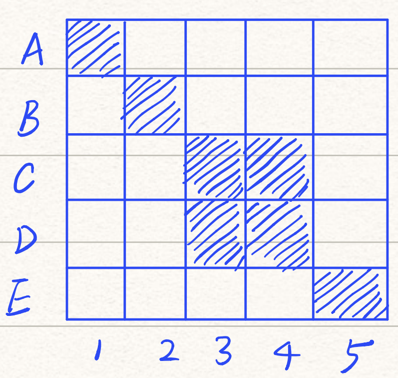
$F_3^2 = F_3(F_4 - F_2) = F_3F_4 - F_3F_2$

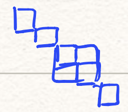
$\vdots$

$F_n^2 = F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1}$

$\therefore \ F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$

9. 一号不会A工作，二号不会B，三号和四号不会C.D．五号不会E
问有多少种不同的分配工作的方案



$R($  $)$

$= R(\square)^3 \, R(\text{田})$

$= R(\square)^3 \left[xR(\square) + R(\text{田}) \right]$

$= R(\square)^3 \left[xR(\square) + (xR(\square) + R(\square\square)) \right]$

$= (1+x)^3 \left[x(1+x) + x(1+x) + (1+2x) \right]$

$= (x^3+3x^2+3x+1)(2x^2+4x+1)$

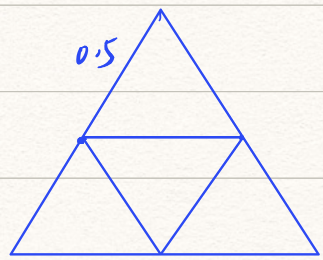
$= 2x^5 + 6x^4 + 6x^3 + 2x^2 + 4x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 4x$
$\quad + x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$= 2x^5 + 10x^4 + 19x^3 + 17x^2 + 7x + 1$

$N = 5! - 7\cdot 4! + 17\cdot 3! - 19\cdot 2! + 10\cdot 1! - 2\cdot 0!$

$= 24$

10. 在一个边长为1的正三角形中任选五个点，证明：在这五个点中必存在两个点，其距离小于0.5 （鸽巢）

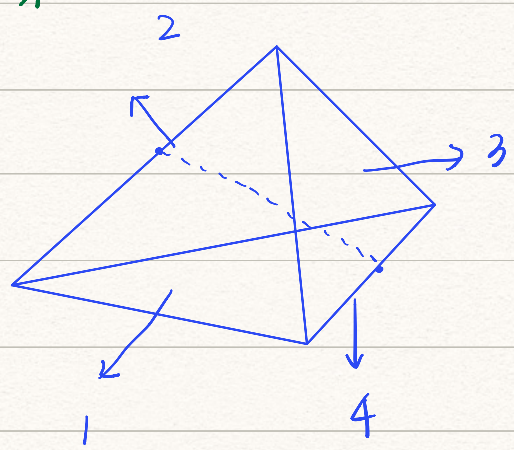


5-1=4 分成四份

必有两个点在同一个区域内

而在某一区域内两点最大距离小于0.5

11. 用m种颜色给正四面体的四个面着色，有多少种方案？m=2时具体方案



① 不动 (1)(2)(3)(4) $(1)^4$

② 绕顶点转 ±120° (4)(123) (4)(321) $(1)^1(3)^1$

(1)

(2)

(3)

共8种

③ 绕两边中心点转180° $(2)^1(2)^1$ 共3种

$$N=\frac{1}{12}\times(m^4+8\cdot m^2+3\cdot m^2)$$

$$=\frac{1}{12}(m^4+11m^2)$$

$m=2$ 时 $N=5$ {
全黑
全白

一白三黑
一黑三白
二黑二白