1. 在字典序法生成1-5这五个数的全排列，25431的下一排列是什么？若规定12345是第0号排列，54321是第5!−1=119号排列，则25431是字典序法中的第几号排列？

25431 ① 从右向左找左比右小的第一个：2

② 找2右边比2大的最小的一个：3

③ 交换2、3位置：35421

④ 将3后面的数倒置：31245

2 5 4 3 1

比3小有1个

比4小有2个

比5小有3个

比2小有1个

中介数 1321

号数：$1\times4!+3\times3!+2\times2!+1\times1!=47$

2. 从1至20这20个数中任选互不相邻的三个数，选法（相间题）

$$C_{n-r+1}^{r}=C_{20-3+1}^{3}=C_{18}^{3}$$

3. 有多少个由奇数个0和奇数个3，偶数个2，而1、4的个数任意的n位5进制数？（出现偶、奇、不超过要想到指数型母函数）

$$\left(x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)^2\left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\right)^2$$

$$=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\cdot e^{2x}$$

$$=\frac{1}{8}\left(e^{5x}+3e^{x}-3e^{3x}-e^{-x}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{8}\left[5^n+3\cdot1-3\cdot3^n-(-1)^n\right]$$

4. 求不大于120素数的有多少个？

$11^2=121$ 不超过120的合数必然是2.3.5.7的倍数

设A_1为不超过120被2除尽的数

设A_2为不超过120被3除尽的数

设A_3为不超过120被5除尽的数

设A_4为不超过120被7除尽的数

$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|$ 为素数的一部分

$= 120-(|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|)+(|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|$

$+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|)-(|A_1\cap A_2\cap A_3|+$

$|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_2\cap A_3\cap A_4|)+|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|$

最后再加上2.3.5.7四个数并且除去1

5. 求从任意多个a、3个b、5个c，7个d可重复地任取10个的方案数

母函数

$(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$

$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$

展开式中x^{10}的系数为方案数

6. 在一个8x8的方格的国际象棋棋盘中放一个红色，四个白色，三个黑色的八个车，保证它们互相不能攻击，有多少种方法

法一：先不管颜色，为了不攻击，结果为全排列 8!

再在其中选1个红色，3个黑色（或4个白色）

$N = C_8^1 C_7^3 8!$

法二：白色与黑色会有重复度

$$N = \frac{8!}{4!} \times \frac{8!}{3!}$$

7. 证明：$\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 是一个正整数

有 n^2 个相同的球放到 n 个盒子中，每个盒子有 n 个球

方案数为 $\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$

$(n!)^n$ 为 n 个小球的重复度的积，$n!$ 是 n 个相同盒子的重复度

且方案数为正整数

8、已知一数列满足条件：$A_1=1$，$A_2=2$，$A_n-4A_{n-1}-5A_{n-2}=0$

给出 A_n 通项

（齐次）　特征方程：$x^2-4x-5=0 \Rightarrow (x-5)(x+1)=0$

$$A_n = A\cdot 5^n + B(-1)^n$$

$$\begin{cases} A_1 = 5A - B = 1 \\ A_2 = 25A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$A_n = \frac{1}{10}\cdot 5^n - \frac{1}{2}(-1)^n \quad n \geq 1$$

9. 贺卡问题（见2013，一模一样）

10. 证明：在任意的52个整数中，存在两个整数，其和或差能被100整除

见和差应该想到构造成对鸽巢

构造鸽巢 (1,99) (2,98) (3,97) ⋯ (49,51) (0),(50)

共51组

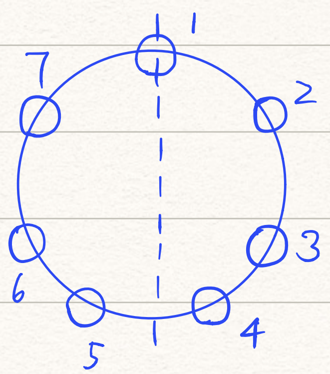
因为取52个整数，根据鸽巢定理，存在两个整数在一组内

① 如果在0或50内，它们的和与差都能被100整除

② 如果在其他组 $\begin{cases} \text{两个数相同} \to \text{差可被整除} \\ \text{两个数不同} \to \text{和可被整除} \end{cases}$

11. S_6 的共轭类（见2013）

12. 用m种颜色给一个7个珠子串珠着色，有n种方案？m=2时具体



(1) 不动：$(1)^7$

(2) 转 $\pm\frac{360^\circ}{7}$ $(7)^1$ 共2个

(3) 转 $\pm\frac{360^\circ}{7}\times 2$ $(7)^1$ 共2个

(4) 转 $\pm\frac{360^\circ}{7}\times 3$ $(7)^1$ 共2个

(5) 中轴对称旋转 $(1)^1(2)^3$ 共7个

$$N=\frac{1}{14}(m^7+6\cdot m^1+7\cdot m^4)$$

当 m=2 时 $N=\frac{1}{14}(2^7+6\times 2+7\times 2^4)=18$