西北工业大学研究生院

学 位 研 究 生 课 程 考 试 试 题

考试科目：组合数学　　　　　　　　　　课程编号：　106001
考核形式：闭卷　　　　　　　　　　　　考试时间：　2013. 12. 27
开课学期：2012-2013 秋至冬学期　　　　任课教师：　康慕宁
说　明：所有答案必须写在答题册上,否则无效。　共 1 页 第 1 页

注意：以下第一题中 6 个小题，每题 10 分，考生可任选其中 4 题作答，共 40 分。

一、　计算下列各题：

1. 6 位男士与 6 位女士围桌就座，如果要求男女交替就座，有多少种坐法？

2. 证明等式：$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n}=\binom{2n}{n-1}$，并给出其组合意义。

3. 从集合$\{1,2,3,\ldots,1000\}$中任选 3 个数，使其和能被 3 整除，有多少种选法？

4. 将 3n 册图书分配给 3 个人，每人所得图书数形成等差数列，有多少种不同方案？

5. 给定方程$x_1+x_2+x_3+x_4=20$，其中各变元分别满足$1\le x_1\le 6$，$0\le x_2\le 7$，$4\le x_3\le 8$，$2\le x_4\le 6$。求此方程正整数解的个数。

6. 用红、蓝、绿、紫色为一个墙上画好的一个 1×n 方格着色，每格必须也只能着一种颜色，其中红色方格与绿色方格有偶数个，其它颜色不限制，问有多少种方案？

注意：以下第二至第七题，每题 10 分，均为必答题。

二、　设 ***f(n,k)*** 表示从 ***1,2,…,n*** 中任选 ***k*** 个不相连续的数的方案数。试给出 ***f(n,k)*** 的递推关系及边界条件，并给出 ***f(n,k)*** 的解。　C_{n-k+1}^{k}

三、　已知一数列满足条件：$A_0=1$，$A_1=2$，$A_n-2A_{n-1}+A_{n-2}=5(n=2,3,4,\ldots)$，试给出 An 通项公式。

四、　把五张贺卡 ***C1,C2,...,C5*** 分别送给 ***A1,A2,...,A5***。其中，***A1*** 不要 ***C2***，***A2*** 不要 ***C1***，***C2***，***A4*** 不要 ***C1***，***C3***，***A5*** 不要 ***C3***，有多少种送法？

五、　（本题为英文题，考生可以用中文解答）**At a party there are *n* men and *n* women. In how many ways can the *n* women choose male partners for the first dance? How many ways are there for the second dance if everyone has to change partners?**

六、　证明在集合$\{1,4,7,10,\ldots,100\}$中任取 20 个不同的数，则这 20 个数中至少存在两个数，其和为 104。

七、　在一个有 ***15*** 个位置的轮盘赌的轮盘上（即将一个圆盘分成 ***15*** 等分的扇形），用红、绿、黄三种颜色为其着色，问有多少种方法？

西北工業大學

研究生课程考试答题册

得 分: 91

学　　号 2013201654

姓　　名 郑潇逸

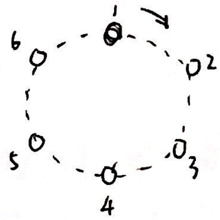
考试课目 组合数学

考试日期 2013. 12. 27

西北工业大学研究生院

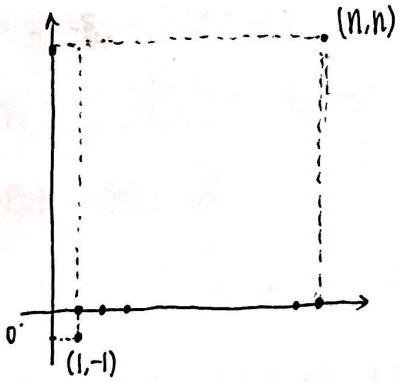
一、计算题

1. 先考虑6位男士.



2. $\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n}=\binom{2n-1}{n}+\binom{2n-2}{n}+\cdots+\binom{2n-n}{n}$

$\binom{2n}{n-1}$



由图. 从$(1,-1)$点出发. 只能 → 或 ↑ 行. 到达(n,n)点需要 → 走$n-1$步 ↑走$n+1$步. 共$2n$步. 可以看作从$2n$步中选取$(n-1)$步 → 行. 其方案数为

$$N=\binom{2n}{n-1}.$$

从$(1,-1)$点出发到(n,n)必然穿过x轴. 可能穿过的点为$(1,0)$、$(2,0)$、$(3,0)$、…、$(n,0)$.

点$(i,0)$出发到(n,n)点需 → 走$n-i$步 ↑走n步. 方案数为$\binom{n+n-i}{n}$即$\binom{2n-i}{n}$.

则. 从$(1,-1)$出发到(n,n)可分类为$(1,0)$到(n,n)、$(2,0)$到(n,n)、… $(n,0)$到(n,n).

方案数为 $N=\binom{2n-1}{n}+\binom{2n-2}{n}+\cdots+\binom{2n-n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n}$

故有

$$N=\binom{2n}{n-1}=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n}$$

3. 集合$\{1,2,3,\cdots,1000\}$ 有 $a_j=j$ $1\le j\le 100$

设 A_i 为 $a_j \bmod 3 = i$ 则原集合分为

$$A_0=\{3,6,9,\cdots,999\} \quad |A_0|=\left\lfloor\frac{1000}{3}\right\rfloor=333$$

$$A_1=\{1,4,7,\cdots,1000\} \quad |A_1|=|A_0|+1=334$$

$$A_2=\{2,5,8,\cdots,998\} \quad |A_2|=|A_0|=333$$

选3个数和能被3整除则有以下方案.

① 3个数均选自 A_0

② 3个数均选自 A_1

③ 3个数均选自 A_2

④ 1个数选自 A_0. 1个数选自 A_1. 1个数选自 A_2.

故. $N=N_1+N_2+N_3+N_4=\binom{333}{3}+\binom{334}{3}+\binom{333}{3}+\binom{333}{1}\binom{334}{1}\binom{333}{1}$

4. 设三人所得书的册数按从小到大的顺序依次为 a,b,c 则.

a,b,c 形成等差数列. $a+b+c=3n$. 故有.

$a=n-i$, $b=n$, $c=n+i$ $\quad 0\le i\le n$

则. 原题可转化为把书分为 $a.b.c$ 三堆、将 $a.b.c$ 三堆书分给三个人.

$$N_1=\sum_{i=0}^{n}\binom{3n}{n}\binom{2n}{n-i} \quad . N_2=3!$$

两事件相互独立. 故.

$$N=N_1\times N_2=\sum_{i=0}^{n}\binom{3n}{n}\binom{2n}{n-i}\cdot 3! = 3!\binom{3n}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{n-i}$$

5. 由 $1\le x_1\le 6$. $0\le x_2\le 7$. $4\le x_3\le 8$. $2\le x_4\le 6$ 给出母函数

$$G(x)=(x+x^2+\cdots+x^6)(1+x+\cdots+x^7)(x^4+x^5+\cdots+x^8)(x^2+x^3+\cdots+x^6)$$

则 x^{20} 项的系数即为方程正整数解的个数.

$$G(x)=x^7\cdot(1+x+\cdots+x^5)(1+x+\cdots+x^7)(1+x+\cdots+x^4)(1+x+\cdots+x^4)$$

$$=\underline{\underline{x^7}}\cdot(1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+54x^5+75x^6+96x^7+114x^8+126x^9+130x^{10}+126x^{11}+114x^{12}+\underline{\underline{96x^{13}}}+\cdots+x^{20}).$$

则. x^{20} 项系数为96. 此方程有96组正整数解

6. 该问题等效为由1,2,3,4组成n位数.其中1、3均有偶数个. 2.4个数不限制.

则. 数字1.3: $\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)$

数字2.4: $\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)$.

$$G(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2$$

又. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\quad e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\cdots$

故. $$G(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cdot(e^x)^2=\frac{1}{4}\left(e^{4x}+2e^{2x}+1\right)$$

则. 第x^n项系数 $a_n=\frac{1}{4}\times4^n+\frac{1}{4}\times2\times2^n=4^{n-1}+2^{n-1}$

即. 该条件下有$(4^{n-1}-2^{n-1})$种方案.

二. $f(n,k)$为 $1,2,\cdots,n$中选k个不相邻数可以分解为

①. 选数字1. 则在$3\sim n$选出余下的$(k-1)$个数 (2与1相邻不可选)

②. 不选数字1. 则在$2\sim n$选出k个数.

有. $f(n,k)=f(n-2,k-1)+f(n-1,k)\quad n>2,\ k>1,\ k\le\lceil\frac{n}{2}\rceil$

$f(1,1)=1,\ f(2,1)=2,\ f(2,2)=0,\ f(n,1)=n$

从$1,2,\cdots,n$选k个不相邻数.可以转化为$(n-k)$个球插入k个隔板.

$(n-k)$个球有$(n-k+1)$个空隙.每个空隙最多放入1个隔板.则.

$$f(n,k)=C_{n-k+1}^{k}=\binom{n-k+1}{k}$$

边界条件 $k=\lceil\frac{n}{2}\rceil$ 为隔一个数取一个数时k的取值 若再增加k值则无法取数.

递推关系. $f(n,k)=f(n-2,k-1)+f(n-1,k)\quad n>2,\ k>1$

$f(1,1)=1,\ f(2,2)=0,\ f(n,1)=n$

边界条件 $k=\lceil\frac{n}{2}\rceil$

$f(n,k)$解 $f(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$

三. $\begin{cases} A_n - 2A_{n-1} + A_{n-2} = 5 & n \geq 2. \quad ① \\ A_{n-1} - 2A_{n-2} + A_{n-3} = 5 & n \geq 3 \quad ② \end{cases}$

①-② 得. $A_n - 3A_{n-1} + 3A_{n-2} - A_{n-3} = 0$

特征方程 $C(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$

母函数 $G(x) = \frac{P(x)}{(1-x)^3} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{(1-x)^3}$

$A_n = \left[A\binom{n}{0} + B\binom{n+1}{1} + C\binom{n+2}{2}\right] \cdot (1)^n$

设 $A_n = A^* + B^* n + C^* n^2$ 则有

$A_0 = A^* = 1$

$A_1 = A^* + B^* + C^* = 2$

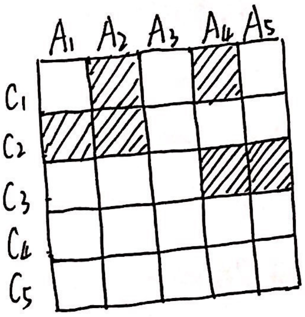
由①. $A_2 = 2A_1 - A_0 + 5 = 8$

$A_2 = A^* + 2B^* + 4C^* = 8$

解得. $A^* = 1.\ B^* = -\frac{3}{2}.\ C^* = \frac{5}{2}$

$A_n = \frac{1}{2}(5n^2 - 3n + 2)$

四.



考察禁区棋盘.

$R(\text{田}\ \square\ \text{皿}) = xR(\text{皿}\ \square) + R(\text{田}\ \text{皿})$

$= xR(\text{皿})R(\square) + R(\text{田})R(\text{皿})$

$= x \cdot (1+2x)(1+x) + (1+3x+x^2)(1+2x)$

$= 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3$

则. 方案数为全排列方案数 排除在禁区落子方案数.

$N = 5! - 6 \times 4! + 10 \times 3! - 4 \times 2! = 28$

五. ① 第一次选男士做舞伴可以看作是把n个不同的球放到n个不同的盒子里. 每个盒子一个球. 则.

方案数 $N_1 = n!$

② 在第一次选定舞伴后. 约定女士 $1\sim n$ 所选男士分别为 $1\sim n$. 即. 女士i号第一次与男士i号跳了一支舞. 其中 $1\le i\le n$. 要求第二次跳舞. 所有女士均不与之前的舞伴跳舞. 即可转化为数字 $1\sim n$ 的错排问题. 所有数字i要求不能排在第i位上. 故.

方案数 $N_2 = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! \cdots = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)!$

六. 对数列 $\{1,4,7,10,\cdots,100\}$ 可知 $a_n=3n-2$ $n\in[1,34]$

则. 两个数 $a_i+a_j=104$ 等价于 $3(i+j)-4=104$, $i+j=36$.

取数列 $B_n = n$. $1\le n\le 34$. 则 $A_n = 3B_n-2$.

对B_n划分如下 $(2,34)$、$(3,33)$、…、$(17,19)$、(18)、(1) 共19对

任取 B_n中20个数对应划入相应的数对括号中, 则

① 取了数字18,1 ~~18个数划入17个数对.~~ ③ 未取数字18.1 20个数字划17个数对.

② 未取数字18或1. 19个数划入17个数对.

故. 至少有两个数在同一数对中. 此时这两个数 B_i、B_j 有

$B_i+B_j=36$. 由 A_i与B_i、A_j与B_j一一对应.

故. 至少有两个数字和为104

七.

讨论两种情况.

① D_1与D_{14}同色. D_{15}可着两色. $D_1\sim D_{13}$为一个13区轮盘着色.

② D_1与D_{14}不同色. D_{15}可着一色. $D_1\sim D_{14}$为一个14区轮盘着色.

则有. $f(15) = 2\times f(13) + 1\times f(14)$.

又. $f(1)=3$. $f(2)=C_3^2=3$.

$f_n - f_{n-1} - 2f_{n-2} = 0$. $C(x) = x^2-x-2=(x+1)(x-2)$.

$f_n = A\cdot(-1)^n + B\cdot 2^n$ $f(1)=3$. $f(2)=3$.

$f_n = (-1)^{n+1}+2^n$ 故. $f(15)=2^{15}$

即. 有2^{15}种着色方法.

西北工業大學

研究生课程考试答题册

得分: 95

学　　号 2013201661

姓　　名 邹祥祥

考试课目 组合数学

考试日期 2013.12.27

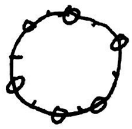
西北工业大学研究生院

一、

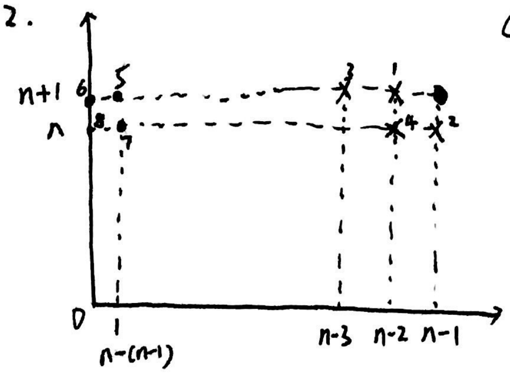
中1. 先安排男士，一共有 $(6-1)!=5!$ 种坐法，

然后把女士放入空间，有 $6\times5\times4\times3\times2\times1=6!$ 种

$\therefore$ 有 $6!\times5!$ 种



2.



① $\binom{2n}{n-1}$ 等数于从 $(0,0)$ 点出发，到 $(n-1,n+1)$ 这一点所有的路径数.

② 到终点的路径数等于到图中1点路径数与到2点路径数的总和.

到2点的路径数为 $\binom{2n-1}{n}$

③ 到1点路径数等于到3点的路径数与到4点的路径数总和，

到4点路径数为 $\binom{2n-2}{n}$

④ 依次类推，到5点为到6点与到7点之和，到7点为 $\binom{2n-(n-1)}{n}$

到6点等于到8点，为 $\binom{2n-n}{n}$

$\therefore$ 总路径为 $\binom{2n-1}{n}+\binom{2n-2}{n}+\cdots\binom{2n-(n-1)}{n}+\binom{2n-n}{n}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n}$$

$$=\binom{2n}{n-1}$$

得证.

3. $\{1,2\cdots100\}$ 可以分成 $\{1,4,7\cdots1000\}$、$\{2,5,8\cdots98\}$，$\{3,6,9\cdots99\}$

三组，第一组除3余1，共334个元素，第二组除3余2，共333个元素

第三组除3余0，共333个元素，将其标记为A组、B组、C组.

任选3个数能被3整除有以下几种情况：

① 3个数都从A组取，或都从B、或都从C组取.

共 $C_{334}^{3}+C_{333}^{3}+C_{333}^{3}$

② 3个数从A取1个，从B取1个，从C取1个.

共 $C_{334}^{1}\cdot C_{333}^{1}\cdot C_{333}^{1}$

∴综上：选法一共有 $C_{334}^{3}+2C_{333}^{3}+C_{334}^{1}\cdot C_{333}^{1}\cdot C_{333}^{1}$

$$\cancel{6.\ G(x)=(1+x^2+x^4+\cdots)^2(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2}$$

$$\cancel{=\frac{1}{(1-x^2)^2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}}$$

$$\cancel{=\frac{1}{(1-x^2)^2(1-x)^2}}$$

~~求出 x^n 的系数即为答案~~.

4. 三人得书为等差数列，第2个人必为 n 本，第1人为 $n-k$ 本、第3人为 $n+k$ 本

$$\therefore 共有\ \sum_{k=1}^{n}\left(C_{3n}^{n-k}\cdot C_{2n+k}^{n}\cdot C_{n+k}^{n+k}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(C_{3n}^{n-k}\cdot C_{2n+k}^{n}\right)$$

二. $f(n,k)=C_{n-k+1}^{k}$

$$f(n,k)=f(n-2,k-1)+f(n-1,k)\quad(n\geq 3,\ k\geq 1)$$

$f(n-2,k-1)$：第一个选中，剩余 $n-2$ 个中取 $k-1$ 个

$f(n-1,k)$：第一个不选，剩余 $n-1$ 个中取 k 个.

经推导得：$f(n,k)=C_{n-k+1}^{k}$

三. $A_n - 2A_{n-1} + A_{n-2} = 5$ ①

$A_{n-1} - 2A_{n-2} + A_{n-3} = 5$ ②

∴ ① − ②: $A_n - 3A_{n-1} + 3A_{n-2} - A_{n-3} = 0$

令 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

∴ $(x-1)^3 = 0$

∴ $x=1$ 为 3 重根

∴ $A_n = (Ax^2 + Bx + C)\cdot 1^3$

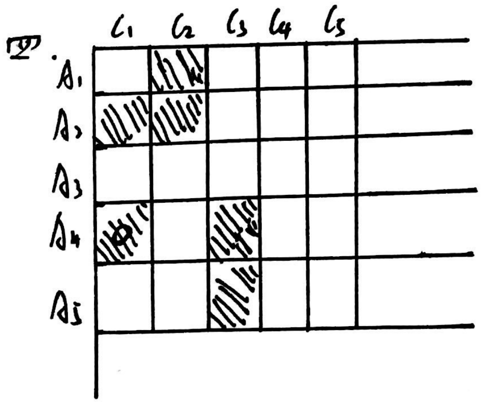
又 $A_0 = 1$, $A_1 = 2$ ∴ $A_2 = 8$

代入: $\begin{cases} A = \frac{5}{2} \\ B = -\frac{3}{2} \\ C = 1 \end{cases}$

∴ $A_x = 2.5x^2 - 1.5x + 1$

即 $A_n = 2.5n^2 - 1.5n + 1$

四.



对于如图的棋盘，隐影部分不可放.

隐影部分:

$R(x) = xR\begin{bmatrix} \text{日} & \\ & \square \end{bmatrix} + R\begin{bmatrix} \text{田} & \\ & \text{日} \end{bmatrix}$

$= xR[\text{日}]\cdot R[\square] + R[\text{日}]\cdot R[\text{田}]$

$= x(1+2x)\cdot(1+x) + (1+2x)\cdot[x + R[\text{田}]]$

$= x(1+x)(1+2x) + (1+2x)\cdot[x + (1+x)^2]$

$\cancel{= 4x^3 + 7x^2 + 5x + 1}$ $= 4x^3 + 10x^2 + 6x + 1$

∴送法一共有: $5! - 6\times 4! + 10\times 3! - 4\times 2! = 28$

五. (1) n女选n男：第一个女性有n种选择，第二个女性有n-1种选择

⋯ 第n名女性有1种选择

∴ 一共有 $n!$ 种选择.

即有 $n!$ 种配对方式

(2) 为错排，n个元素的错排

共有 $n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\pm\frac{1}{n!}\right)$ 种.

六. ~~对于集合 {1,4,7 ⋯ 100}，可以分成：~~

~~(1,52)，(4,100)，(7,97)，(10,94) ⋯ (46,58)，(49,55)，(52)~~

~~共17组.~~

~~取任意20个不同的数，有下面2种情况：~~

~~① 其中①~~

对于集合 {1,4,7 ⋯ 100}，可以分成

(1)，(52)，(4,100)，(7,97)，⋯ (46,58)，(49,55)

共18组.

取任意20个不同的数，有如下情况

① 其中取到了 1或52

若2个都取到，则剩下18个数在剩余的16组中取，则由鸽巢原理可得必有两个数在同一组，而同一组的两个数之和为104

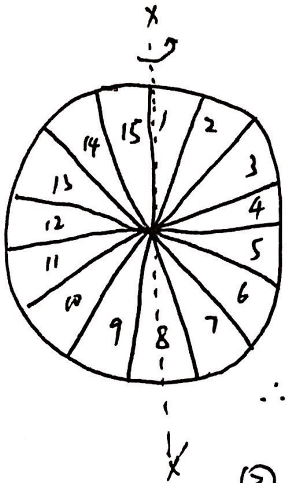
若只取到其中1个，则剩下19个数在剩余16组中取，也必然有两个数在同一组，和为104

② 没取到1或52.

则20个数在16组中取，则必然有2个数位于同一组，和为104

得证.

七.



① 保持不动：(1)(2)(3)····(15)

② 绕中心转 24°：(1, 2, 3, 4 ···· 15)
逆时针

∴ 绕中心转 ±24°：$(15)^1$ 共2种.

④ 绕中心转 48°：(1, 14, 12 ····)，为 $(15)^1$

∴ 绕中心旋转共产生 $(15)^1$ 为 14 种

③ 绕图中 XX' 旋转 180°.

(1, 15), (2 14) (3 13) ···· (7, 9), (8)，这

$(1)^1(2)^7$ 共有 15 种

∴ 总方法总数

$$n = \frac{1}{30}(1\times 3^{15} + 14\times 3^1 + 15\times 3^8)$$

=

西北工業大學

研究生课程考试答题册

得 分: 95

学　　号 2013201666

姓　　名 王昱霖

考试课目 组合数学

考试日期 2013.12.27

西北工业大学研究生院

一.计算下列各题

3.解: 集合{1, 2, 3, …, 1000}中的数模3余数的情况无非3种: 0, 1, 2
其中模3余0的数有: 333个; 模3余1的数有 ~~333种~~ 334个; 模3余2的数有333个, 则从中任取3数之和能被3整除的方案数为:

$$C_{333}^{3}+C_{334}^{3}+C_{333}^{3}+C_{333}^{1}C_{334}^{1}C_{333}^{1}$$

$$=2C_{333}^{3}+C_{334}^{3}+C_{333}^{1}C_{334}^{1}C_{333}^{1}$$

4.解: 设每人所得图书数目为 a. b. c, 其满足等差数列, 则

$b=n$.

即必有一人取得 n 本书, 剩余: $a+c=2n$, 其方案数为:

$$C_{3n}^{n}\cdot C_{2+2n-1}^{2n}\,3!=C_{3n}^{n}\cdot C_{2n+1}^{1}\cdot 3!=6C_{3n}^{n}C_{2n+1}^{1}$$

5.解: 令 $y_1=x_1-1$, $y_2=x_2$, $y_3=x_3-4$, $y_4=x_4-2$, 则

$y_1+y_2+y_3+y_4=13$. 其中 $0\le y_1\le 5$, $0\le y_2\le 7$, $0\le y_3\le 4$, $0\le y_4\le 4$

$S=\{y_1+y_2+y_3+y_4=13,\ y_1\ge 0,\ y_2\ge 0,\ y_3\ge 0,\ y_4\ge 0\}$

$A_1=\{y_1+y_2+y_3+y_4=13,\ y_1\ge 6\}$; $A_2=\{y_1+y_2+y_3+y_4=13,\ y_2\ge 8\}$

$A_3=\{y_1+y_2+y_3+y_4=13,\ y_3\ge 5\}$; $A_3=\{y_1+y_2+y_3+y_4=13,\ y_4\ge 5\}$

则 $|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|$

$$=C_{4+13-1}^{13}-(C_{4+7-1}^{7}+C_{4+5-1}^{5}+C_{4+8-1}^{8}+C_{4+8-1}^{8})$$

$$+0+C_{4+2-1}^{2}+C_{4+2-1}^{2}+C_{4+3-1}^{3}+0+0-0$$

上式即为方程正整数解的个数

6.解：由指数型母函数方程可得：

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 e^{2x}$$

$$=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}\cdot e^{2x}$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{4x}+2e^{2x}+1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(4^n+2\cdot 2^n\right)\frac{x^n}{n!}$$

则着色方案数为 $a_n=\frac{1}{4}\left(4^n+2^{n+1}\right)$

二.解：从 $1,2,3\ldots n$ 中选 k 个不相邻连续的数的方案数为：

$$C_{n-k+1}^{k}$$

即 $f(n,k)=C_{n-k+1}^{k}$

选出 k 个方案数，可包括：选中 1，n 和介于两者之间的数（即不包括 1 和 n）

则 $f(n,k)=2f(n-2,k-1)+f(n-\cancel{2},k)$

即为 $f(n,k)$ 的递推关系，其边界条件：

$f(0,k)=0,\quad f(1,k)=1$

则 $f(n,k)=$

三.解：由 $A_n-2A_{n-1}+A_{n-2}=5$. 将5写作 $(1)^n\cdot 5$. 故

特征方程为 $x^2-2x+1=(x-1)^2$, 即1为二重根.

则特解为 $\alpha_n=1^n(k_0n^2)=k_0n^2$

代入原式: $k_0n^2-2k_0(n-1)^2+k_0(n-2)^2=5$

得: $k_0=\frac{5}{2}$

$\therefore \alpha_n=\frac{5}{2}n^2.$

设通解为 $A_n=(A+Bn)(1)^n+\alpha_n$.

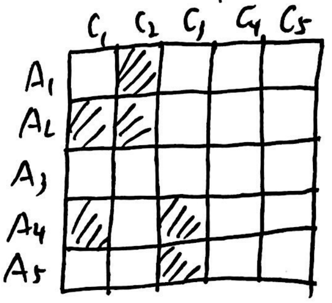
由初始条件 $A_0=1$, $A_1=2$, 得:

$$\begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\therefore A_n=\cancel{(1+\frac{1}{2}n)-\frac{1}{2}n^2}\ 1-\frac{3}{2}n+\frac{5}{2}n^2$

$\cancel{=-\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1}\ \cancel{\frac{5}{2}n^2-n+1}$

四.解：由题得：棋盘中的禁区图：



则 $R(\ \ )=xR(\ \ )+R(\ \ )$

$=xR(\ \ )R(\ \ )+xR(\ \ )+R(\ \ )$

$=x(1+x)(1+2x)+x(1+2x)+(1+x)^2(1+2x)$

$=1+6x+10x^2+4x^3$

则方案数为：$5! - 6\cdot 4! + 10\cdot 3! - 4\cdot 2!$

$= 28$

五解：(1) n对男女相互选择的方案数，等价于n个有区别的球放入n个有区别的盒子，无一空盒的方案数，即为：

$$n!S(n,n) = n!$$

~~(2) n对男女，相互相选择.(改变第一次跳舞舞伴)的方案数，等价于n对夫妻不相邻的排列数，即为：~~

$$\cancel{(2n)! - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} C_n^i \, (2(n-i)+i)}$$

(2) n对男女，互换舞伴的方案数，等价于n个数目错排的方案数：

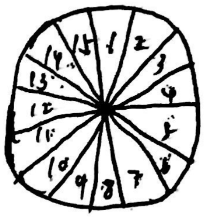
$$n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots \pm \frac{1}{n!}\right)$$

六解：集合$\{1,4,7,\cdots,100\}$共有34个数，选取18个盒子，两两放入。

1	4	7	……	46	49	52
	100	97		58	55	

从集合中选取20个数，这里由鸽巢原理知：19个巢，20只鸽子，必有两个数在一个盒子中，即得证至少存在两个数，其和为104.

七.解: 如图将圆盘等分15份.



其刚体运动置换情况为:

① 不动, (1)(2)···(15). 格式为 $(1)^{15}$, 1个

② 旋转±24°, (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15), 格式为 $(15)^{1}$, 共两个.

② 旋转±48°, (1 3 5 7 9 11 13 15 2 4 6 8 10 12 14), 格式为 $(15)^{1}$, 1个.

(1 14 12 10 8 6 4 2 15 13 11 9 7 5 3), 格式为 $(15)^{1}$, 1个

③ 旋转±72°. (1 4 7 10 13)(2 5 8 11 14)(3 6 9 12 15)

格式为 $(5)^{3}$. 共两个.

④ 旋转±96°. (1 5 9 13 2 6 10 14 3 7 11 15 4 8 12)

格式为 $(15)^{1}$, 共两个.

⑤ 旋转±120°, (1 6 11)(2 7 12)(3 8 13)(4 9 14)(5 10 15)

格式为 $(3)^{5}$, 共两个

⑥ 旋转±144°. (1 7 13 4 10)(2 8 14 5 11)(3 9 15 6 12)

格式为 $(5)^{3}$. 共两个.

⑦ 旋转±168°. (1 8 15 7 14 6 13 5 12 4 11 3 10 2 9)

格式为 $(15)^{1}$ 共两个.

则 两种颜色着色方案数为 $\frac{1}{15}(m^{15}+8m+4\cdot m^{3}+2\cdot m^{5})$.

$m=3$时, 为: $\frac{1}{15}(3^{15}+8\times3+4\cdot3^{3}+2\cdot3^{5})$