西北工业大学研究生院
学 位 研 究 生 课 程 考 试 试 题

考试科目：组合数学　　　　　　　　　　课程编号：106001
考核形式：考试　　　　　　　　　　　　考试时间：2016.1.5
开课学期：2015-2016 第一学期　　　　　任课教师：康慕宁
说　明：所有答案必须写在答题册上,否则无效。　　共 1 页 第 1 页

一、以下七个小题，每小题 10 分，考生可任选其中六题作答，共 60 分。

1. 在字典序法生成 1-5 这五个数的全排列，25431 的下一个排列是什么？若规定 12345 是第 0 号排列，54321 是第 5!-1＝119 号排列，则 25431 是字典序法中的第几号排列？
2. 从 1 至 20 这 20 个数中任选互不相邻的三个数，共有多少种选法？
3. 有多少个由奇数个 0 和奇数个 3，偶数个 2，而 1、4 的个数任意的 n 位 5 进制数？
4. 求不大于 120 素数的有多少个。
5. 求从任意多个 a, 3 个 b, 5 个 c, 7 个 d 可重复地任取 10 个的方案数。
6. 在一个 8×8 方格的国际象棋棋盘上放置由一个红色、四个白色、三个黑色的八个车，且保证它们互相不能攻击，问有多少放置方法？
7. 证明：$\dfrac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 是一个正整数。

二、(8 分) 已知一数列满足条件: $A_1=1$，$A_2=2$，$A_n-4A_{n-1}-5A_{n-2}=0$ $(n=3,4,\ldots)$, 试给出 A_n 通项公式。

三、(10 分) 把五张贺卡 C1,C2,...,C5 分别送给 A1,A2,...,A5。其中，A1 不要 C2，A2 不要 C1，C2，C5，A4 不要 C1，C3，A5 不要 C3，有多少种送法？

四、(10 分) 证明：在任意的 52 个整数中，存在两个整数，其和或者差能被 100 整除。

五、(第 1 小题 4 分，第 2 小题 8 分，共 12 分) 各-

1.请给出六次对称群 S_6 的所有共轭类，并给出~~第一~~类中各有多少不同的置换。

2.用 m 种颜色给一个 7 个珠子串成的串珠着色，问有多少不同的着色方案？请再给出 m=2 时的具体值。

西北工業大學

研究生专业课程考试答题册

得分：99

学　　号 2015201703

姓　　名 高瑾

考试课程 组合数学

考试日期 2016.1.5.

西北工业大学研究生院

一、

1. 25431这一排列，

从右往左第一次出现下降的数字是2. 从右边寻找比2大的最小元素3.

换位，得35421. 再将右边4位逆序排列，得到25431的下一排列

是31245.

对数字2，右边比2小的有1个.

对数字5，右边比5小的有3个.

对数字4，右边比4小的有2个.

对数字3，右边比3小的有1个.

对数字1，对应0.

则中介数是1321.

第几号排列的算法为 $1\times4!+3\times3!+2\times2!+1\times1!=24+18+4+1=47$.

2. 设选出的3个数为 a_1, a_2, a_3. $1\le a_1 < a_2 < a_3 \le 20$.

则 a_1, a_2-1, a_3-2 对应从 $20-3+1$ 中选3个的简单组合.

所以选法为 $C_{20-3+1}^{3}=C_{18}^{3}=\frac{18!}{3!\,15!}=\frac{18\times17\times16}{6}=3\times17\times16=816$

4. $\because 11^2=121$ $\therefore$ 120以内的素数和2、3、5、7互素（2、3、5、7除外）.

设120以内2的倍数的集合为A. 3的倍数的集合为B. 5的倍数的集合为C.

7的倍数的集合为D.

则 $|A|=\left\lfloor\frac{120}{2}\right\rfloor=60$ $|B|=\left\lfloor\frac{120}{3}\right\rfloor=40$ $|C|=\left\lfloor\frac{120}{5}\right\rfloor=24$ $|D|=\left\lfloor\frac{120}{7}\right\rfloor=17$

$|A\cap B|=\left\lfloor\frac{120}{6}\right\rfloor=20$ $|A\cap C|=\left\lfloor\frac{120}{10}\right\rfloor=12$ $|A\cap D|=\left\lfloor\frac{120}{14}\right\rfloor=8$.

$|B\cap C|=\left\lfloor\frac{120}{15}\right\rfloor=8$ $|B\cap D|=\left\lfloor\frac{120}{21}\right\rfloor=5$ $|C\cap D|=\left\lfloor\frac{120}{35}\right\rfloor=3$

$|A\cap B\cap C|=\left\lfloor\frac{120}{30}\right\rfloor=4$ $|A\cap B\cap D|=\left\lfloor\frac{120}{42}\right\rfloor=2$ $|A\cap C\cap D|=\left\lfloor\frac{120}{70}\right\rfloor=1$

$|B\cap C\cap D|=\left\lfloor\frac{120}{105}\right\rfloor=1$ $|A\cap B\cap C\cap D|=0$

根据容斥原理，

$|\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}| = N-|A|-|B|-|C|-|D|+|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|+|B\cap C|$

$+|B\cap D|+|C\cap D|-|A\cap B\cap C|-|A\cap B\cap D|-|A\cap C\cap D|-|$[redacted]$B\cap C\cap D|+|A\cap B\cap C\cap D|$

$=120-60-40-24-$ [redacted] $17+20+12+8+8+5+3-4-2-1-1$

$=$ [redacted] 27

1不是素数. 2.3.5.7是素数. 所以素数个数为 [redacted] $27-1+4=$ [redacted] 30.

5. 取法的母函数为:

$(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$

~~展开. 原式~~ $\cancel{=e^x(1+3x+6x^2+10x^3+14x^4+18x^5+21x^6+23x^7+23x^8+21x^9+18x^{10}}$

$\cancel{+14x^{11}+10x^{12}+6x^{13}+3x^{14}+x^{15})=}$

展开. 得到x^{10}项的系数.
则上述式子中x^{10}项的系数即为相应取法数.

6. 先考虑8个车没有颜色. 则相互不能攻击的方法就是它们的全排列$8!$
再从中选出1个红车, 3个黑车, 4个白车就有 $C_8^1C_7^3 8!$
总的放置方法为 $C_8^1C_7^3 8! = 11289600$

7. 证明: 给出 $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 的组合意义:
有n^2个相同的小球放到n个盒子中. 盒子相同. 且每盒n个球. 则有 $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 种方案. $(n!)^n$ 是n个盒子中各盒内小球重复度的积. [redacted] 再乘上$n!$是n个相同盒子的重复度. 因为方案数为整数. 所以 $\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}$ 是一个整数.

二. $A_n - 4A_{n-1} - 5A_{n-2} = 0$ ，$n \ge 3$

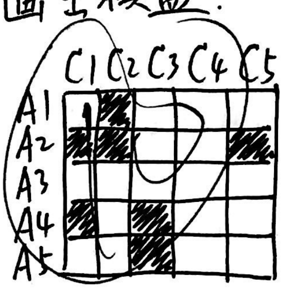
特征方程为 $x^2 - 4x - 5 = 0$　$(x-5)(x+1)=0$　解得：$x = 5$或-1.

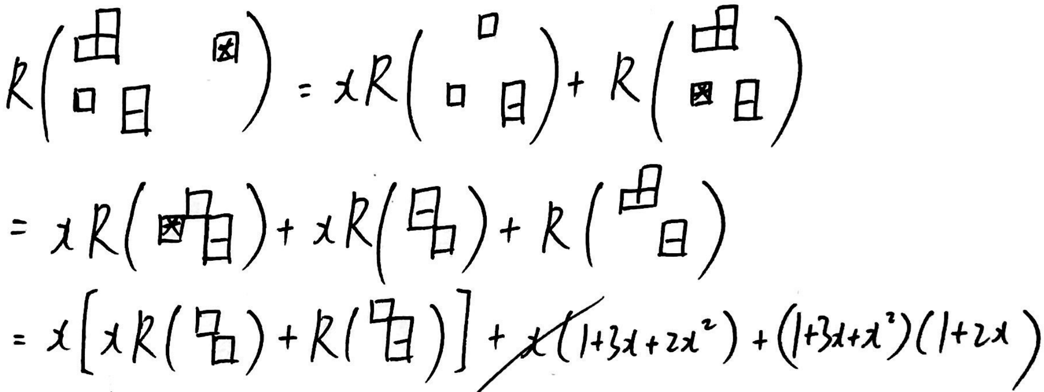
设 $A_n = A\cdot 5^n + B\cdot(-1)^n$ ~~$n\ge3$~~

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5A - B = 1 \\ 25A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{10} \\ B = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

∴ A_n的通项公式为 $A_n = \frac{1}{10}\cdot 5^n - \frac{1}{2}\cdot(-1)^n$, $n \ge 1$.

三. 画出棋盘：





$= x\left[x(1+2x+x^2) + (1+3x+2x^2)\right] + 2x^3 + 3x^2 + x + 1 + 3x + x^2 + 2x + 6x^2 + 2x^3$

$= x(x^3 + 2x^2 + x + 2x^2 + 3x + 1) + 2x^3 + 3x^2 + x + 1 + 3x + x^2 + 2x + 6x^2 + 2x^3$

$= x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2x^3 + 3x^2 + x + 1 + 3x + x^2 + 2x + 6x^2 + 2x^3$

$= x^4 + 8x^3 + 14x^2 + 7x + 1$

根据有禁区排列的性质.

$5! - 7\cdot 4! + 14\cdot 3! - 8\cdot 2! + 1! = 21$

共有21种送法.

四. 证明: ~~把1到100这100个数~~

任意的一个整数对100取余的结果一定在0, 1, …, 99内. 因此. 建立如下的鸽巢:

0, (1, 99), (2, 98), …, (49, 51), 50 共51个组. 也就是有

一共51个巢, 现有任意的52个整数. 根据鸽巢原理.

一定有两个整数落在同一组中. 如果在0或50这两个组里. 它们的和或差都

能被100整除. 如果在其他组里, 它们的和能被100整除. 得证.

五! ~~整数6的拆分有~~ $6=1+1+1+1+1+1=1+1+1+1+2$

$=1+1+2+2=2+2+2$

$=1+1+1+3=1+2+3=3+3$

$=1+1+4=2+4=1+5=6$

所以 S_6 的所有共轭类有: $(1)^6$ 不同置换有 $\frac{6!}{6!}=1$ 个.

$(1)^4(2)^1$ $\frac{6!}{4!2^1}=15$

$(1)^2(2)^2$ $\frac{6!}{2!2!2^2}=45$

$(2)^3$ $\frac{6!}{2^3\cdot 3!}=15$

$(1)^3(3)^1$ $\frac{6!}{3!\,3^1}=40$

$(1)^1(2)^1(3)^1$ $\frac{6!}{2^1\cdot 3^1}=120$

$(3)^2$ $\frac{6!}{2!\,3^2}=40$

$(1)^2(4)^1$ $\frac{6!}{2!\,4^1}=90$

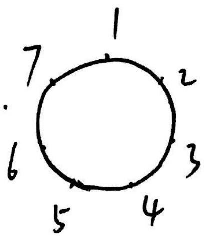
$(2)^1(4)^1$ $\frac{6!}{2\cdot 4}=90$

$(1)^1(5)^1$ $\frac{6!}{5}=144$

$(6)^1$ $\frac{6!}{6}=120$

以上共有11种共轭类.

2.



不同的置换有:

p_1: $(1)^7$ 1种 (不动)

p_2: $(7)^1$ 2种 $(1\to 2)$

p_3: $(7)^1$ 2种 $(1\to 3)$

p_4: $(7)^1$ 2种 $(1\to 4)$

p_5: $(1)^1(2)^3$ 7种 (以1和中点为轴).

根据Polya定理. 不同的着色方案为:

$$\frac{1}{14}(m^7+6m+7m^4)$$

当$m=2$时.代入得: $(2^7+6\times 2+7\times 2^4)\times\frac{1}{14}=18$

所以有18种着色方案.

西北工業大學

研究生专业课程考试答题册

得分：96

学　　号 2015201697

姓　　名 张翀路

考试课程 组合数学

考试日期 2016.01.05

西北工业大学研究生院

1、下一个排列为 31245，25431为第47号排列

①25431中 $\max i=\{P_i<P_{i+1}\}$ 则为 $2<5$.

$\max j=\{P_i<P_j, i<j\}$ 则为 $2<3$

2和3互换，其余数字倒序，∴下一排列为 31245

②25431的中介数为 1321，所以它的排列序号为

$1\times4!+3\times3!+2\times2!+1\times1!=47$

2. 根据从不相邻的n个数$\{1,2,\cdots,n\}$中，选出r个互不相邻的数，共有

C_{n-r+1}^{r} 种方法

∴从1至20中选出互不相邻的三个数，选法为 $C_{20-3+1}^{3}=C_{18}^{3}=\frac{18!}{15!3!}=816$

共816种方法

3. 指数型母函数.

$(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots)^2(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots)(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots)$

$=(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2\cdot(\frac{e^x+e^{-x}}{2})\cdot e^{2x}$

$=\frac{1}{8}(e^{5x}+e^{3x}-e^x-e^{-x})$

$\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{5x}+e^{3x}-e^x-e^{-x})\frac{x^n}{n!}$

∴方案数为 $\frac{1}{8}[5^n+3^n-1-(-1)^n]$

5. $(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$

中 x^{10} 的系数.

设 a, b, c, d 分别取 x_1, x_2, x_3, x_4 个，则有

$0\le x_1\le 10$，$0\le x_2\le 3$，$0\le x_3\le 5$，$0\le x_4\le 7$. $x_1+x_2+x_3+x_4=10$

令 $y_1=10-x_1\ge 0$，$y_2=3-x_2\ge 0$，$y_3=5-x_3\ge 0$，$y_4=7-x_4\ge 0$

$$y_1+y_2+y_3+y_4=10+3+5+7-(x_1+x_2+x_3+x_4)=15$$

问题转化为求 $y_1+y_2+y_3+y_4=15$ 的非负整数解的方案数.

由公式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=b$ 的非负整数解方案数为 C_{n+b-1}^{b}

则本题方案数为 $C_{15+4-1}^{15}=C_{18}^{15}=\frac{18!}{15!\,3!}=816$

6. 放置方法数为

$$\frac{(8!)^2}{4!\,3!}=11289600$$

第一个棋子可以 C_{64}^1，第2个棋子 C_{49}^1，第3个棋子 C_{36}^1 ……

再除以白色的重复度4! 黑色的重复度3!

7. 证明：$$\frac{(n^2)!}{(n!)^{n+1}}=\frac{(n^2)!}{(n!)^n n!}$$

表示将 n^2 个不同的球，平均放入n个相同的盒子中，每盒n个球的方案数，所以必为整数.

8

二、解：特征方程为 $x^2-4x-5=0$

解得 $x_1=5$，$x_2=-1$

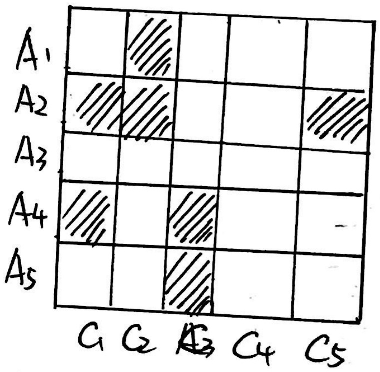
∴通解 $A_n = A5^n + B(-1)^n$

将 $A_1=1$，$A_2=2$ 代入，得

$$\begin{cases}5A-B=1\\25A+B=2\end{cases}，解得 \begin{cases}A=\frac{1}{10}\\B=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

∴通项公式 $A_n=\frac{1}{10}\times5^n-\frac{1}{2}\times(-1)^n \quad (n=1,2,\dots)$

三、有禁区的棋盘排列，根据题意可得



10

$R(C)=x\cdot R(田)+R(口\ 口\ 口\ 日)$

$=x\cdot R(田)+x\cdot R(口日)+R(口\ 口\ 日\ 口)$

$=x\cdot R(田)+x\cdot R(口)\cdot R(日)+R(口)\cdot R(口)\cdot R(田)$

$=x\cdot(1+3x+x^2)+x\cdot(1+x)\cdot(1+2x)+(1+x)(1+x)\cdot(1+3x+x^2)$

$=x+3x^2+x^3+x+2x^2+x^2+2x^3+1+3x+x^2+2x+6x^2+2x^3+x^2+3x^3+x^4$

$=x^4+8x^3+14x^2+7x+1$

方案数为 $5!-7\times4!+14\times3!-8\times2!+1\times1!=21$

四、证明：

将取出的整数按其尾数（后两位）分组（不足两位的为其本身，如1为1，2为2）

(1, 99)　(2, 98)　(3, 97)　……　(49, 51)　(50)　(0)

①共分为51组，取数时若任意一组取到两个数，则其和能被100整除。若每组先取出一个数，则有51个数，第52个数，若跟之前相同，则必有两数之差能被100整除，若跟之前不同，则必有两数之和能被100整数.

②共有51组，取52个数，根据鸽巢原理，则必有一组取两次，若第二次取的数与之前相同，则两数之差能被100整除，若第二次取的数与之前不同，则两数之和能被100整除

五、1. $(1)^6$、$(1)^4(2)^1$、$(1)^3(3)^1$、$(1)^2(4)^1$、$(1)^2(2)^2$、$(1)^1(5)^1$、$(1)^1(2)^1(3)^1$、$(2)^3$、$(2)^1(4)^1$、$(3)^2$　共10种共轭类

$(1)^6$ 数量 $\frac{6!}{6!\,1^6}=1$

$(1)^4(2)^1$ 数量 $\frac{6!}{4!\,1!\,1^4\,2^1}$

$(1)^3(3)^1$ 数量 $\frac{6!}{3!\,1!\,1^3\,3^1}$

$(1)^2(4)^1$ 数量 $\frac{6!}{2!\,1!\,1^2\,4^1}$

$(1)^2(2)^2$ 数量 $\frac{6!}{2!\,2!\,1^2\,2^2}$

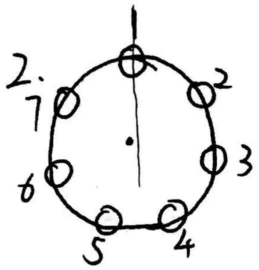
$(1)^1(5)^1$ 数量 $\frac{6!}{1!\,1!\,1^1\,5^1}$

$(1)^1(2)^1(3)^1$ 数量 $\frac{6!}{1!\,1!\,1!\,1^1\,2^1\,3^1}$

$(2)^3$ 数量 $\frac{6!}{3!\,2^3}$

$(2)(4)$ 数量 $\frac{6!}{1!\,1!\,2^1\,4^1}$

$(3)^2$ 数量 $\frac{6!}{2!\,3^2}$



① ~~绕中心点~~ 不动置换 (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) $(1)^7$ 共1种

② 绕中心点分别旋转

$\frac{360°}{7}$ ~~(1, 2, 3~~ (1 2 3 4 5 6 7)

$\frac{360°}{7}\times2$ (1 3 5 7 2 4 6)

$\frac{360°}{7}\times3$ (1 4 7 3 6 2 5)

$\frac{360°}{7}\times4$ (1 5 2 6 3 7 4)

$\frac{360°}{7}\times5$ (1 6 4 2 7 5 3)

$\frac{360°}{7}\times6$ (1 7 6 5 4 3 2)

$(7)^1$ 共6种

③ 以其中一珠子为中心点的连线为轴，旋转180°

(1) (2 7)(3 6)(4 5)
(2) (1 3)(4 7)(5 6)
(3) (2 4)(1 5)(6 7)
(4) (3 5)(2 6)(1 7)
(5) (4 6)(3 7)(1 2)
(6) (5 7)(1 4)(2 3)
(7) (1 6)(2 5)(3 4)

$(1)^1(2)^3$ 共7种

方案为 $\frac{1}{14}(m^7+m\times6+m^4\times7)$

当m=2时. $\frac{1}{14}\times(2^7+6\times2+7\times2^4)=18$

西北工业大学研究生院

学 位 研 究 生 课 程 考 试 试 题

考试科目：组合数学　　　　　　　　　　　　课程编号：　106001
考核形式：闭卷　　　　　　　　　　　　　　考试时间：2013.12.27
开课学期：2012-2013 秋至冬学期　　　　　　任课教师：　康慕宁
说　　明：所有答案必须写在答题册上，否则无效。　共 1 页 第 1 页

注意：以下第一题中 6 个小题，每题 10 分，考生可任选其中 4 题作答，共 40 分。

一、　计算下列各题：

1．*6* 位男士与 *6* 位女士围桌就座，如果要求男女交替就座，有多少种坐法？

2．证明等式：$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n}=\binom{2n}{n-1}$，并给出其组合意义。

3．从集合$\{1,2,3,\ldots,1000\}$中任选 3 个数，使其和能被 3 整除，有多少种选法？

4．将 3n 册图书分配给 3 个人，每人所得图书数形成等差数列，有多少种不同方案？

5．给定方程$x_1+x_2+x_3+x_4=20$，其中各变元分别满足$1\le x_1\le 6$，$0\le x_2\le 7$，$4\le x_3\le 8$，$2\le x_4\le 6$。求此方程正整数解的个数。

6．用红、蓝、绿、紫色为一个墙上画好的一个 1×n 方格着色，每格必须也只能着一种颜色，其中红色方格与绿色方格有偶数个，其它颜色不限制，问有多少种方案？

注意：以下第二至第七题，每题 10 分，均为必答题。

二、　设 ***f(n,k)*** 表示从 ***1,2,…,n*** 中任选 ***k*** 个不相连续的数的方案数。试给出 ***f(n,k)*** 的递推关系及边界条件，并给出 ***f(n,k)*** 的解。　C_{n-k+1}^{k}

三、　已知一数列满足条件：$A_0=1$，$A_1=2$，$A_n-2A_{n-1}+A_{n-2}=5\,(n=2,3,4,\ldots)$，试给出 An 通项公式。

四、　把五张贺卡 ***C1,C2,...,C5*** 分别送给 ***A1,A2,...,A5***。其中，***A1*** 不要 ***C2***，***A2*** 不要 ***C1***，***C2***，***A4*** 不要 ***C1***，***C3***，***A5*** 不要 ***C3***，有多少种送法？

五、　（本题为英文题，考生可以用中文解答）**At a party there are *n* men and *n* women. In how many ways can the *n* women choose male partners for the first dance? How many ways are there for the second dance if everyone has to change partners?**

六、　证明在集合$\{1,4,7,10,\ldots,100\}$中任取 20 个不同的数，则这 20 个数中至少存在两个数，其和为 104。

七、　在一个有 ***15*** 个位置的轮盘赌的轮盘上（即将一个圆盘分成 ***15*** 等分的扇形），用红、绿、黄三种颜色为其着色，问有多少种方法？