1. 6位男士6位女士围桌就座，要求男女交替，有几种坐法？

先将男士位置固定 有 $6!$ 种

再将女士插空 有 $5!$ 种

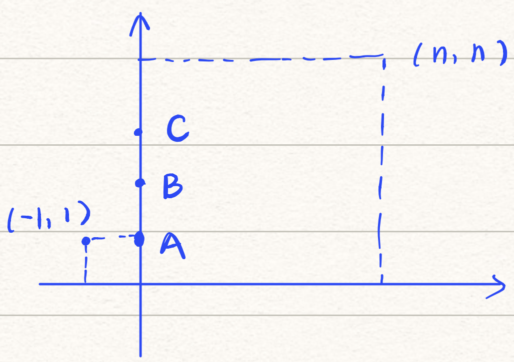
所以共有 $6!5!$ 种

2. 证明等式：$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n}=\binom{2n}{n-1}$ 给出组合意义

要证 $C_{2n-1}^{n}+C_{2n-2}^{n}+\cdots+C_{2n-n}^{n}=C_{2n}^{n-1}$

（不好用球来解释）

$2n-(n-1)=n+1$



从 $(-1,1)$ 到 (n,n)，需要走 $2n$ 步

x 方向走 $n+1$ 步 y 方向走 $n-1$ 步

方案数可看作 C_{2n}^{n-1}

从 $A(0,1)$ 出发到 (n,n) 要走 $(2n-1)$ 步 $\begin{cases} y\text{方向}(n-1)\text{步} \\ x\text{方向 } n \text{ 步} \checkmark \quad C_{2n-1}^{n} \end{cases}$

同理 $B(0,2)$ 出发到 (n,n) 要走 $(2n-2)$ 步 $\begin{cases} y\text{方向}(n-2)\text{步} \\ x\text{方向 } n \text{ 步} \checkmark \quad C_{2n-2}^{n} \end{cases}$

⋮

可推出 从 $(0,i)$ 出发到 (n,n)，要走 $(2n-i)$ 步 $\begin{cases} y\text{方向 }(n-i)\text{步} \\ x\text{方向 } n \text{ 步} \checkmark \quad C_{2n-i}^{n} \end{cases}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} C_{2n-k}^{n} = C_{2n}^{n-1}$

3. 从集合$\{1,2,3,\cdots 1000\}$中任选3个数，使其和能被3整除，有几种

能被3整除 ⇒ 分3组（余1，余2，余0）

$A_0=\{3,6,9\cdots 999\}$ $\bmod 3\equiv 0$　　$\lfloor\frac{1000}{3}\rfloor=333$个

$A_1=\{1,4,7,\cdots 1000\}$ $\bmod 3\equiv 1$　　334个（多一个1000）

$A_2=\{2,5,8,\cdots 998\}$ $\bmod 3\equiv 2$　　333个

被3整除的方案，余数和为3的倍数或0

① 从A_0中取3个　C_{333}^{3}

② 从A_1中取3个　C_{334}^{3}

③ 从A_2中取3个　C_{333}^{3}

④ A_0 A_1 A_2 各一个　$C_{333}^{1}C_{334}^{1}C_{333}^{1}$

4. 将3n册图书分配给3个人，每个人所得图书数形成等差数列.

3个人的图书数形成等差数列，则分别为 n，$n-k$，$n+k$本

$$N=\sum_{k=0}^{n}\frac{(3n)!}{(n-k)!\,n!\,(n+k)!}$$

5. 给定方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$，其中各变元满足 $1\le x_1\le 6$

$0\le x_2\le 7$　$4\le x_3\le 8$．$2\le x_4\le 6$，求此方程正整数解的个数

要看出来用母函数

$$G(x)=(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x+x^2+\cdots+x^7)(x^4+x^5+\cdots+x^8)(x^2+x^3+\cdots+x^6)$$

$$=x^7(1+x+\cdots+x^5)(1+x+\cdots+x^7)(1+x+\cdots+x^4)(1+x+\cdots+x^4)$$

$$=x^7(1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+54x^5+75x^6+96x^7+114x^8+126x^9+130x^{10}+126x^{11}+114x^{12}+\underline{\underline{96x^{13}}}+\cdots+x^{20})$$

正整数解有96组

6. 用红、蓝、绿、紫色为1个 $1\times n$ 的方格着色，每格只一种颜色，红绿格有偶数个，其他不限制，方案数？

可以想到指数型母函数

相当于A.B.C.D组成n位字符串，A C为偶数

$$G(x)=\left(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)^2\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots\right)^2$$

对应A.C　　　　对应BD

$$=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2\cdot e^{2x}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{4x}+2e^{2x}+1)$$

$$a_n=\frac{1}{4}(4^n+2\cdot 2^n)=4^{n-1}+2^{n-1}$$

7. 设 $f(n,k)$ 表示从 $1,2,\cdots n$ 中任选 k 个不相连续的数的方案数，给出 $f(n,k)$ 的递推关系及边界条件，并给出解

不相邻的公式 C_{n-k+1}^{k}

将 $f(n,k)$ 分解 ① 选1，再从剩下的3—n中选 $(k-1)$ 个不相邻数
② 不选1，从2—n中选k个不相邻数

即 $f(n,k)=f(n-2,k-1)+f(n-1,k)$

从 $1,2,\cdots n$ 中选k个不相邻的数 可以看作 $(n-k)$ 个球插入k个隔板 有 $(n-k+1)$ 个空隙　C_{n-k+1}^{k}

8. 已知一数列满足 $A_0=1$ $A_1=2$ $A_n-2A_{n-1}+A_{n-2}=5$ $(n=2,3,4\cdots)$

求 A_n 通项

法一：(母函数)

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

$$x^2:\ a_2-2a_1+a_0=5$$

$$x^3:\ a_3-2a_2+a_1=5$$

$$\vdots$$

$$G(x)-1-2x-2x[G(x)-1]+x^2G(x)=5x^2[1+x+x^2+\cdots]$$

$$(x^2-2x+1)G(x)=\frac{5x^2}{1-x}+1$$

$$G(x)=\frac{5x^2-x+1}{(1-x)^3}$$

设 $G(x)=\dfrac{A}{1-x}+\dfrac{B}{(1-x)^2}+\dfrac{C}{(1-x)^3}$ ← 这里也可以解 ABC

$$a_n=1^n(A^*+B^*n+C^*n^2)$$

代入 $a_0=1$ $a_1=2$ $a_2=8$ 可得 $\begin{cases} A^*=1 \\ B^*=-\frac{3}{2} \\ C^*=\frac{5}{2} \end{cases}$

$$A_n=1-\frac{3}{2}n+\frac{5}{2}n^2$$

法二：(非齐次递推关系公式)

$A_n-2A_{n-1}+A_{n-2}=5$ 可以看作 $a_n-2a_{n-1}+a_{n-2}=1^n\cdot 5$

特征方程：$x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0$ ← 1是二重根

特解形式：$\alpha_n=1^n[k_0n^2]=k_0n^2$

n^2-2n+1 $\qquad$ n^2-4n+4

代入：$k_0n^2-2k_0(n-1)^2+k_0(n-2)^2=5$

$$k_0n^2-2k_0n^2+4k_0n-2k_0+k_0n^2-4k_0n+4k_0=5$$

$$2k_0 = 5 \Rightarrow k_0 = \frac{5}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{5}{2}n^2$$

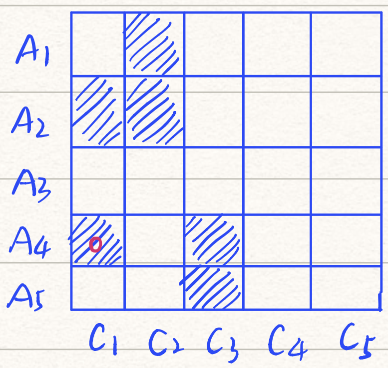
设通解为 $A_n = (A + Bn)\cdot 1^n + \alpha_n$

↳ 根据 $(x-1)^2$ 来的

代入 $A_0 = 1 \quad A_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -\frac{3}{2} \end{cases}$

$$A_n = 1 - \frac{3}{2}n + \frac{5}{2}n^2$$

9. 把五张贺卡 $C_1 - C_5$ 分别送给 $A_1 - A_5$，其中 A_1 不要 C_2，A_2 不要 C_1 C_2，A_4 不要 C_1 C_3，A_5 不要 C_3，有多少送法？



（从选的点开始）

$$R\left(\begin{smallmatrix} 田 & \\ 口 & 日 \end{smallmatrix}\right) = xR\left(\begin{smallmatrix} 日 & \\ & 口 \end{smallmatrix}\right) + R\left(\begin{smallmatrix} 田 & \\ & 日 \end{smallmatrix}\right)$$

$$= xR(日)R(口) + R(田)R(日)$$

$$= x\cdot(1+2x)\cdot(1+x) + (1+2x)(1+3x+x^2)$$

$$= 4x^3 + 10x^2 + 6x + 1$$

排列数为 $5! - 6\times 4! + 10\times 3! + 4\times 2! = 28$

10. n 男 n 女跳舞

(1) 男女一一对应有多少种选法

(2) 第二次跳舞重新换人，与原来不一样有多少种（错排问题）

(1) $n!$

(2) 错排公式：$n! - C_n^1 (n-1)! - C_n^2 (n-2)! + \cdots \pm C(n,n) 1!$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots \pm \frac{1}{n!}\right)$$

11. 证明在集合{1,4,7,10,…,100}中任取20个不同的数，则这20个数中至少存在两个数，其和为104 （鸽巢）

将20个数分组 (100,4) (7,97) (10,94) … (1) (52) 共18组

① 取到1或52

若两个都取，则剩下18个数从16组选，必有两数在同一组

若取1个 则剩下19个数从16组选，同理

② 未取到1或52

剩下20个数从16组选，同理

12. 在一个有15个位置的轮盘上，用红黄绿三色，有多少种方法

$360°/15° = 24$

① 不动 (1)(2)……(15) 表示为 $(1)^{15}$ 共1个

② 旋转 ±24° (1 2 3 … 15) (15 … 3 2 1) 表示为 $(15)^1$ 共2个

③ 旋转 ±48° (1 3 5 7 9 11 13 15 2 4 6 8 10 12 14) $(15)^1$ 共2个

(1 14 12 10 8 4 2 15 13 11 9 7 5 3) $(15)^1$

④ 旋转 ±72° (1 4 7 10 13) (2 5 8 11 14) (3 6 9 12 15) $(5)^3$ 共2个

(13 10 7 4 1) (14 11 8 5 2) (15 12 9 6 3) $(5)^3$

⑤ 旋转 ±96° (1 5 9 13 2 6 10 14 3 7 11 15 4 8 12) $(15)^1$

…… 共2个

⑥ 旋转 ±120° $(3)^5$ 共两个

$(3)^5$

⑦ 旋转 ±144° $(5)^3$ 两个

⑧ 旋转 ±168° $(15)^1$ 两个

360° − 168° = 192° 就是下一个情况，所以停止

$$N = \frac{1}{15}\left[3^{15} + 8\times 3 + 4\times 3^3 + 2\times 3^5 \right]$$

3种颜色