字典序法

1. 1-5全排列，25431的下一个排列是什么？25431是第几号排列？

25431

① 右比左大第一个：2

② 右边比2大的最小一个：3

③ 换位：35421

④ 倒序：31245

中介数 1 3 2 1

序号：$1\times4!+3\times3!+2\times2!+1\times1!=47$

2、839647521 的中介数及下一排列

$$\begin{array}{cccccccccc} 8 & 3 & 9 & 6 & 4 & 7 & 5 & 2 & & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ 7 & 2 & 6 & 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & \rightarrow & \text{中介数} \end{array}$$

下一排列 839647521

① ：4

② ：5

③ 换位：839657421

④ 倒序：839651247

3. 请给出一种排列生成算法，并指出在你所给的算法中，31542的下一个排列是什么？

字典序法　31542

① 1

② 2

③ 32541

④ 32145

4. 362541的下一排列？是第几号？

3 6 2 5 4 1

① 2　② 4　③ 364521　④ 364125

3 6 2 5 4 1

↓ ↓ ↓ ↓ ↓　　中介数 24121

2 4 1 2 1

序号：$2\times5!+4\times4!+1\times3!+2\times2!+1\times1!$

5. 排列15243在字典序法的中介数是？下一排列？中介数(1101)对应？

1 5 2 4 3

① 2　② 3　③ 15342　④ 15324

1 5 2 4 3

↓ ↓ ↓ ↓　　中介数 0301

0 3 0 1

1 1 0 1 0　　对应序列为 23154

2 3 1 5 4

排列组合

1. 甲单位有8人，乙单位有6人，若两单位选出一个五人组成的管理小组

a) 甲单位恰有2人

b) 甲单位至少有2人

c) 甲单位的A、乙单位的B不能同时被选或同时不被选

a) $C_8^2 C_6^3$

b) $C_{14}^5 - C_6^5 - C_8^1 C_6^4$

c) $C_{14}^5 - C_{12}^5 - C_{12}^3$ → AB同时不被选

↳ AB同时被选

2. 方程 $x+y+z+u=12$ 有多少个非负整数解

相当于把12个无区别的小球放入4个有区别的盒子中 P103

(允许有空盒)

$$C_{12+4-1}^{12} = C_{15}^{12}$$

3. 有桔，桃，梨，李，苹果，草莓各一个，香蕉六个，共三个人共享，有多少种方案？

(有空盒) 6个有区别的小球放入3个有区别的盒子 3^6 →

×

(有空盒) 6个无区别的小球放入3个有区别的盒子 $C_{3+6-1}^{6} = C_8^6$

4. 设第i种糖果有a_i块 $(i=1,2,\cdots k)$ 现在把糖果分配给n个小孩每人可分得任意块，有多少种方法？

对于a_i来说，相当于把a_i个相同的小球放入n个不同的盒子中（有空盒）

方案为 $C_{a_i+n-1}^{a_i}$

$$N=\prod_{i=1}^{k} C_{a_i+n-1}^{a_i}$$

5. 一个售货亭前有$2n$个人，假定每个人都计划购买5元的同一种货物。其中n个人持5元货币，另外n个人持10元货币，开始时无零钱，有多少种方式可使售货员能依次顺利地出售货物而不会找不出钱？（硬记）

用$m+n$维0.1行向量来表示一种排队状态 $(a_1,a_2\cdots a_{m+n})$

$a_i=0,1$ $a_i=1$ 为5元 $a_i=0$ 为10元

$a_i=1$ 时沿y轴走一个单位，$a_i=0$ 时沿x轴走一个单位

问题等价于从$(0,0)$到(m,n)的路径中不穿越$y=x$线的点的路径数之和，

对本题即从$(0,0)$到(n,n)中走$y=x$上方的路径数

$$N=C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}$$

$$=\frac{(2n)!}{n!\,n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}=\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}$$

6. 由A.B.C.D.E.F.G.H.I.J组成的所有长度为N的符号串中，有多少这样的串，必须包括字母A和B，但肯定不包含C.D.E.F

(不知道AB，CDEF的顺序，不是容斥)

$$G_e(x) = \underset{\text{一定包括，不含1}}{\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^{\underset{A.B}{2}}}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^{4}$$

除了CDEF 还剩4个

7. 从一堆红球、蓝球、紫球中选取10个球

a) 若至少有5个红球，有多少种选取方式？

b) 若至多有5个红球，有多少种选取方式？

a) $(x^5+x^6+x^7+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2$

b) $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2$

8. 将3n册图书分配给3个人，所得图书数形成等差数列，有多少种不同的方案？

3个人中有1个人一定是n本，其它两人 n-k 和 n+k

$$N = \sum_{n=0}^{k} \frac{(3n)!}{n!(n-k)!(n+k)!} \cdot 3!$$

9. 从集合{1,2⋯1000}中任选3个数，使其和能被3整除，有多少种选法？

能被3整除 ⇒ 分3组(余1，余2，余0)

$A_0 = \{3,6,9 \cdots 999\}$ mod 3 ≡ 0　　$\lfloor\frac{1000}{3}\rfloor = 333$个

$A_1 = \{1,4,7,\cdots 1000\}$ mod 3 ≡ 1　　334个(多一个1000)

$A_2 = \{2, 5, 8, \cdots 998\}$ $\bmod 3 \equiv 2$ 333个

被3整除的方案，余数和为3的倍数或0

① 从 A_0 中取3个 C_{333}^{3}

② 从 A_1 中取3个 C_{334}^{3}

③ 从 A_2 中取3个 C_{333}^{3}

④ A_0 A_1 A_2 各一个 $C_{333}^{1} C_{334}^{1} C_{333}^{1}$

10. 将1000000表示成3个数乘积的方式有多少种？

$1000000 = 2^6 5^6$

问题等价于将6个2、6个5放入3个相同的盒子中的方案

①先将6个2放入3个相同的盒子中

将n个无区别的球放入m个无区别的盒子，允许有空盒

$$G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$

故 $G(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ 中 x^6 的系数为方案数 N

总方案为 N^2

11. $(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^9$ 中 $x_1^3 x_2^3 x_3 x_4^2$ 的系数

$C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot (1)^3 \cdot (-1)^3 \cdot 2 \cdot (-2)^2$

12. 已知序列 $1, -2, 3, -4, \cdots, (-1)^{n+1} n$，给出该序列对应的母函数的解析形式

$G(x) = x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \cdots + (-1)^{n+1} n x^n$ （不知道考的啥）

13. 1000!展开后，尾部有多少个0？

1到1000中2的个数远多于5的个数，$2\times5=10$可以得到0

所以求1-1000中有多少个5就可以得1000!末尾有几个0

$\frac{1000}{5}=200$ $\frac{1000}{25}=40$ $\frac{1000}{125}=8$ $\frac{1000}{625}=1$

所以共有 $200+40+8+1=249$个

14. 求恰有28个因子的最小正整数

每个质因数次数+1的积等于该数的因数的个数

如 $12=2^2\times3$ 12的因数有$(2+1)(1+1)=6$个

$28=2^2\times7$

倒着拆分 $=(1+1)\times(1+1)\times(6+1)$

想要这个数尽可能小要选小的质因数

这里用2.3.5

∴最小数为 $2^6\times3^1\times5^1=960$

母函数

15. 求从任意多个a，3个b，5个c，7个d可重复地取10个数的方案数

$(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$

$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)$ 中x^{10}的系数

16. 从4个红球，3个黄球，4个绿球，5个白球任选12个球

$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)$
$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$ 中 x^{12} 的系数

17. 一个骰子的六个面上写着 0, 1, 3, 7, 15, 31，掷两次得到不同和的可能性是多少？

$(1+x+x^3+x^7+x^{15}+x^{31})(1+x+x^3+x^7+x^{15}+x^{31})$
展开后系数和为 21

18. 求从多重集 $\{\infty\cdot a, 3\cdot b, 5\cdot c, 7\cdot d\}$ 中任取10个的方案数

$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$
$(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^7)$ 中 x^{10} 的系数

指数型母函数

19. 求1.3出现偶数次，2.4出现奇数次，7至少出现1次的20位八进制数的个数

$$\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)^2\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$
$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^3$$

注意 0, 5, 6 可以是任意次

20. 由1.2.3.4组成的n位数，2和3至少出现1次，1出现偶数次

$$\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$

$= (e^x-1)^2 (\frac{e^x+e^{-x}}{2}) e^x$

$=\frac{1}{2}(e^{2x}-2e^x+1)(e^x+e^{-x}) e^x$

$=\frac{1}{2}(e^{4x}-2e^{3x}+e^{2x}+e^{2x}-2e^x+1)$

$N=\frac{1}{2}(4^n-2\cdot 3^n+2\cdot 2^n-2)$

21. 从3黑球，红、黄、白各一个，任选4个排成一行，有多少种排列?

$(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(1+x)^3$

x^4的系数为3 $\Rightarrow$ 答案为 $3\times 4!=72$

(前面用排列组合的方法做的)

22. 用红、蓝、绿、紫色为1个 $1\times n$ 的方格着色，每格只一种颜色，红绿格有偶数个，其他不限制，方案数?

$\downarrow$

可以想到指数型母函数

相当于A.B.C.D组成n位字符串，AC为偶数

$$G(x)=\underbrace{(1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots)^2}_{对应A.C}\underbrace{(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots)^2}_{对应BD}$$

$=\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2\cdot e^{2x}$

$=\frac{1}{4}(e^{4x}+2e^{2x}+1)$

$a_n=\frac{1}{4}(4^n+2\cdot 2^n)=4^{n-1}+2^{n-1}$

23、给定方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$，各变元满足 $1\le x_1\le 6$

$0\le x_2\le 7$. $4\le x_3\le 8$ $2\le x_4\le 6$，求此方程正整数解的个数

(母函数)

$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x+x^2+\cdots+x^7)(x^4+\cdots+x^8)$

$(x^2+\cdots+x^6)$ 中 x^{20} 的系数

24. 求方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$，其中 $x_1\le 3$，$x_2\ge 4$ 的非负整数解的个数

$(1+x+x^2+x^3)(x^4+x^5+x^6+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots)^3$

中 x^{15} 项的系数

不相邻问题

25、1-20 这 20 个数选 3 个互不相邻的数字的方案

$$C_{20-3+1}^{3}=C_{18}^{3}=816$$

26、设 $f(n,k)$ 表示从 $1,2,\cdots n$ 中任选 k 个不相连续的数的方案数，给出 $f(n,k)$ 的递推关系及边界条件，并给出解

不相邻的公式 C_{n-k+1}^{k}

将 $f(n,k)$ 分解 $\begin{cases} ① 选 1，再从剩下的 3\sim n 中选 (k-1) 个不相邻数 \\ ② 不选 1，从 2\sim n 中选 k 个不相邻数 \end{cases}$

即 $f(n,k)=f(n-2,k-1)+f(n-1,k)$

从1,2,…n中选k个不相邻的数 可以看作 (n-k)个球插入k个隔板

有(n-k+1)个空隙 C_{n-k+1}^{k}

错排问题

公式: $D_n = n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! + \cdots \pm C(n,n)1!$

$$= n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\pm\frac{1}{n!}\right)$$

27. n个人宴会,每个人带来一把伞和一顶帽子,有多少种可能在走时没有一个人拿到他原来的帽子和伞?

理论上是错排公式,但是两种物品??

28、6位男士6位女士围桌就座,要求男女交替,有几种坐法?

先将男士位置固定 有 5! 种

再将女士插空 有 6! 种

所以共有 6!5! 种

n个人围圆桌 有 (n-1)! 个方案

29. n男n女跳舞

(1) 男女一一对应有多少种选法

(2) 第二次跳舞重新换人,与原来不一样有多少种 (错排问题)

(1) $n!$

(2) 错排公式: $n! - C_n^1(n-1)! - C_n^2(n-2)! + \cdots \pm C(n,n)1!$

$$= n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\pm\frac{1}{n!}\right)$$

拆分数证明

30. 将整数 r 拆分成 m 个正整数之和的拆分数，等于 r 拆分成最大数为 m 的正整数之和的拆分数（书上的一个定理）

整数 r 拆分成 m 个正整数之和的拆分数

$= r$ 拆分成最多不超过 m 个数 $-$ r 拆分成最多不超过 $m-1$ 个数

$= G_1(x) - G_2(x)$

$$= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} - \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^{m-1})}$$

$$= \frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$$ $= r$ 拆分成最大数为 m 的正整数之和的拆分数

31. 证明把数 n 拆分成 m 项的拆分数，等于把 $n-m$ 拆成不多于 m 项的拆分数

设 $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$ 为数 n 的 m 项拆分

则 $(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_m-1)=n-m$ 为数 $n-m$ 不多于 m 项的拆分

设 $a_1+a_2+\cdots+a_r=n-m$ 为数 $n-m$ 不多于 m 项的拆分

$$\underbrace{(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_r+1)}_{r\text{项}}+\underbrace{1+1+1+1+\cdots+1}_{m-r\text{项}}=n$$

一一对应，可证

32. 证明周长为 $2n$，边长为整数的三角形个数，等于把数 n 拆分成三项和的拆分数

① 设n的一个三项拆分数为 $n=x+y+z$

则 $2(x+y+z)=(x+y)+(x+z)+(y+z)=2n$

其中 $(x+y)+(x+z)=2x+(y+z)>y+z$

同理 $(x+y)+(y+z)>(x+z)$ $(x+z)+(y+z)>(x+y)$

∴ 以这三边也可构成三角形

② 反之. 周长为$2n$的三角形，三边 a,b,c 为整数，则 $\frac{a+b+c}{2}=n$

设 $x=n-a$、 $y=n-b$ $z=n-c$

$x+y+z=n-a+n-b+n-c=3n-(a+b+c)=n$

即 $x+y+z$ 为 n 的一个拆分

排列组合意义证明

33. 用组合方法证明 $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$

证明： $k\binom{n}{k}=C_n^k\cdot k=C_n^k\cdot C_k^1$

即从n个小球中选出k个，再从k个中选1个

$n\binom{n-1}{k-1}=C_{n-1}^{k-1}\cdot n=C_n^1\cdot C_{n-1}^{k-1}$

即从n个小球中选1个，再从剩下的$n-1$个中选$k-1$个

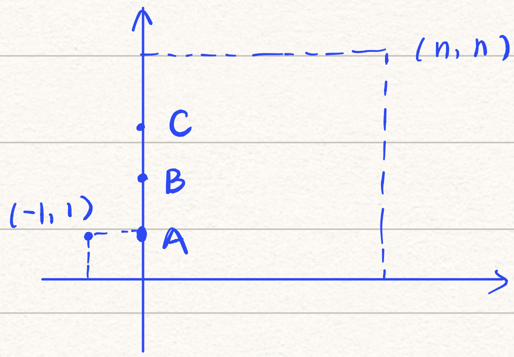
两种方式相同. 可证

34. 证明等式：$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-k}{n}=\binom{2n}{n-1}$ 给出组合意义

要证 $C_{2n-1}^{n}+C_{2n-2}^{n}+\cdots+C_{2n-n}^{n}=C_{2n}^{n-1}$

（不好用球来解释）

$2n-(n-1)=n+1$



从 $(-1,1)$ 到 (n,n)，需要走 $2n$ 步

x 方向走 $n+1$ 步　y 方向走 $n-1$ 步

方案数可看作 C_{2n}^{n-1}

从 $A(0,1)$ 出发到 (n,n) 要走 $(2n-1)$ 步 $\begin{cases} y\text{方向}(n-1)\text{步} \\ x\text{方向 } n \text{ 步} \checkmark \quad C_{2n-1}^{n} \end{cases}$

同理 $B(0,2)$ 出发到 (n,n) 要走 $(2n-2)$ 步 $\begin{cases} y\text{方向}(n-2)\text{步} \\ x\text{方向 } n \text{ 步} \checkmark \quad C_{2n-2}^{n} \end{cases}$

$\vdots$

可推出 从 $(0,i)$ 出发到 (n,n)，要走 $(2n-i)$ 步 $\begin{cases} y\text{方向 }(n-i)\text{步} \\ x\text{方向 } n \text{ 步} \checkmark \quad C_{2n-i}^{n} \end{cases}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} C_{2n-k}^{n}=C_{2n}^{n-1}$