第一章　排列组合

一、加法法则与乘法法则

1. 加法法则：性质A或性质B　$m+n$ 个
2. 乘法法则：性质A和性质B　mn 个

eg：1) 求小于10000的含1正整数个数
　　2) 求小于10000的含0正整数个数

1)　小于10000四位数　$10^4-1=9999$
　　不含1：$9^4-1=6560$
　　含1：$9999-6560=3439$

2)　不含0：$9+9^2+9^3+9^4=7380$
　　含0：$9999-7380=2619$

二、排列组合

1. n 中任取 r 个，不考虑顺序，从 n 中取 r 的组合　$C(n,r)$　$\binom{n}{r}$
2. n 中取 r 个排成一列，为从 n 中取 r 的排列．$P(n,r)$

PS：排列盒子有区别，组合盒子无区别

$$C_n^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

eg：从1-300中取3个不同的数，使3个数的和能被3整除

1 (mod 3)	2 (mod 3)	3 (mod 3)
100	100	100

$$C_{100}^3+C_{100}^3+C_{100}^3+100^3$$

eg: 6个入口，每次进一个人，9个人的进站方案

1) ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑

5个门框 → 5!   14个元素 → 14!

方案 = 14!/5!

2) 1的位置 C_{14}^{5} 人的位置 9!

方案 = $9! \cdot C_{14}^{5}$

3) $6\times7\times8\times\cdots\times14$

1号6种 2号可选在其前或后 = 6+1

三、模型转换 n个顶点的树可以得到n-2的序列（树有 n^{n-2}）

1)

```
        7   6
        |   |
2 - 3 - 1 - 5 - 4
```

直到剩下最后一条边

删边，记录与它相邻的顶点，

找叶子中序号最小的

31551

↓ 排序

11355 (5) → 1234567 (5+2)

↓ 插入

111233455567

$\begin{pmatrix} 31551 \\ 111233455567 \end{pmatrix}$

2) 序列 → 树

$$\begin{pmatrix} 31551 \\ 1112334555 67 \end{pmatrix} \to ②-③$$

无重复

$$\begin{pmatrix} 1551 \\ 1113455567 \end{pmatrix} \to ①-③$$

$$\begin{pmatrix} 551 \\ 11455567 \end{pmatrix} \to ⑤-④$$

⋮

四. 全排列的生成算法

1. 字典序法

1) 全排列的序号是即先于此排列的排列的个数

(按前缀分类)

8 3 9 6 4 7 5 2 1

7… 6… 5… ⇒ 7×8!

82… 81… ⇒ 2×7!

837… 836… 835… 834… 832… 831 ⇒ 6×6!

$7\times 8! + 2\times 7! + 6\times 6! + 4\times 5! + 2\times 4!$
$+ 3\times 3! + 2\times 2! + 1\times 1!$

72642321 → 中介数 （比原排列少一位）

2) 中介数 → 排列（略）

3) eg：求 839647521 的下一个排列

① 自右至左找到第一个比右边小的数：4

② 在该数后面找出比 4 大的数中最小的一个：5

③ 交换位置：839657421

④ 将 7421 倒转 839651247

2. 递增进位制数法

eg：9个数字的排列，第 12345 号排列的中介数

$$
\left.
\begin{aligned}
m_1 &= 12345 \\
m_2 &= 12345/2 = 6172 \cdots 1 \\
m_3 &= 6172/3 = 2057 \cdots 1 \\
m_4 &= 2057/4 = 514 \cdots 1 \\
m_5 &= 514/5 = 102 \cdots 4 \\
m_6 &= 102/6 = 17 \cdots 0 \\
m_7 &= 17/7 = 2 \cdots 3 \\
m_8 &= 2/8 = 0 \cdots 2 \\
m_9 &= 0/9 = 0 \cdots 0
\end{aligned}
\right\} \text{中介数 } 02304111
$$

3. 邻位对换法（换位法）

① ← 表示活动状态，无活动状态则停止

② 找出最大活动状态数字 m，将 m 与其相邻数换位

③ 令比 m 大的所有数改变箭头方向

邻位对换法求中介数 (sa)

五. 允许重复和不相邻组合

1. 可重组合

允许重复的组合模型：r 球无标，n 盒有区别，每盒多球

不允许重复的组合模型：n 球有标，r 盒无区别，每盒一球

在 n 个不同元素中取 r 个作允许重复的组合

$$\frac{(n-1+r)!}{r!\,(n-1)!} = C_{n+r-1}^{r}$$

($n-1$ 个盒壁更好理解)　$0\cdots01\,0\cdots01\,0\cdots01\,0\cdots0$

证明：见 P_{20}

2. 不相邻组合

从 $A=\{1,2,\cdots n\}$ 取 r 个不相邻的数的组合

$$C_{n-r+1}^{r}$$

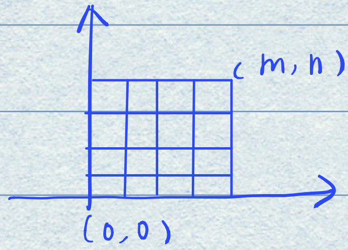
六. 组合意义

① $C_n^r = C_n^{n-r}$　P_{22} 例 1-31

② $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$

③ $C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \cdots + C_{n+r}^n = C_{n+r+1}^n$

Eg：证明 $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$ ，$C_n^r = C_n^{n-r}$



在(m+n)格子上选 m 个格子填 x，再将 n 个格子填 y，即 C_{m+n}^m

同理 C_{m+n}^n ，故 $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$

令 $m+n=n'$　$m=r$　$\Rightarrow$　$n=n'-r$　$C_n^r = C_n^{n-r}$

(带公式证明也可)

Eg：证明 $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$

从含有 a_1 的 n 个元素取 r 个

可以去除 a_1 $\begin{cases} \text{从其它 } n-1 \text{ 个元素中取 } r \text{ 个} \\ \text{从其它 } n-1 \text{ 个元素中取 } r-1 \text{ 个（再加上 } a_1\text{）} \end{cases}$

所以 $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$

Eg：证明：$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+r-2}^{r-2} + C_{n+r-1}^{r-1} + C_{n+r}^r$

$= C_{n+r+1}^r$

见P24 一 组合意义二

eg: 证明: $C_n^l C_l^r = C_n^r C_{n-r}^{l-r}$ $(l \geq r)$

左式: n个元素中取l个,得到长为l的组合

再从长为l的组合中取r个

右式: 相当于从n个元素中取r个组合

但会有重复 重复数是剩下n-r个元素取l-r个

eg: 证 $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \cdots + C_m^m = 2^m$ 或证明二项式定理

$(x+y)^m = (x+y) \times (x+y) \cdots \times (x+y)$

看作m个无区别的球 放入x.y中

$(x+y)^m = C_m^0 x^m + C_m^1 x^{m-1} y + C_m^2 x^{m-2} y^2 + \cdots + C_m^m y^m$

令 $x=1$ $y=1$ 可证

eg: 证 $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots \pm C_n^n = 0$

二项式定理可证,组合意义为:

从n个元素中取偶数个数的组合数

=

从n个元素中取奇数个数的组合数

eg: 证 $C_{m+n}^r = C_m^0 C_n^r + C_m^1 C_n^{r-1} + \cdots + C_m^r C_n^0$

设m+n个球取r个, m个红球 n个蓝球

当r个球全蓝 $C_m^0 \quad C_n^1$ 以此类推

$$C_{m+n}^r = C_m^0 C_n^r + \cdots + C_m^r C_n^0$$

eg: $C_{m+n}^m = C_m^0 C_n^0 + C_m^1 C_n^1 + \cdots + C_m^m C_n^n$

eg: $C_r^r + C_{r+1}^r + \cdots + C_n^r = C_{n+1}^{r+1}$

设从 $A=\{a_1 \cdots a_{n+1}\}$ 中取 $r+1$ 个元素

有a_1, C_n^r

无a_1, 有a_2 $\quad C_{n-1}^r$

$\vdots$

有a_{n-r}. 无$a_1 \cdots a_{n-r-1}$ $\quad C_{[n+1-(n-r)]}^r = C_{r+1}^r$

有a_{n-r+1} 无$a_1 \cdots a_{n-r}$, $\quad C_r^r = 1$