西北工业大学研究生院

学位研究生课程考试试题

考试科目：组合数学　　　　　　　　　　　　课程编号： 106001
考核形式：考试　　　　　　　　　　　　　　考试时间： 2015.1.9
开课学期：2014-2015 第一学期　　　　　　　任课教师：康慕宁
说　　明：所有答案必须写在答题册上，否则无效。　　共 1 页　第 1 页

以下 11 题，每题 10 分，可任选其中 10 题作答。共 100 分

1. 在如图的 6×6 棋盘格内上，放置 6 个棋子，要求不能在同行或同列中出现两个或两个以上的棋子，且在棋盘中有"×"的地方不能放置任何棋子，请问共有多少放置方法？

×					
×	×				
		×	×		
		×	×		
		×	×		

2. What is the coefficient（系数）of $x_1^3x_2^3x_3x_4^2$ in the expansion of $(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^9$?

3. 从 1 至 20 这 20 个数中任选互不相邻的三个数，共有多少种选法？

4. 已知一数列满足条件：$A_0=1$，$A_1=2$，$A_n-5A_{n-1}+6A_{n-2}=2^n$，试给出 An 通项公式。

5. 设 $F_1=1, F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\quad (n\geq 3)$ 证明：F_{5n} 是 5 的倍数

6. Find integers a, b, and c such that $m^3=a\binom{m}{3}+b\binom{m}{2}+c\binom{m}{1}$ for all m. Then sum the series $\sum_{i=1}^{n} i^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

7. 求 1 到 1000 中不能被 5、6、8 整除的整数的个数。

8. 证明把数 n 拆分成 m 项的拆分数，等于把 n-m 拆分成不多于 m 项的拆分数。

9. 给出所有六次对称群 S_6 的全部共轭类，以及每个类中含有的不同置换的个数。

10. 证明在边长为 1 的正方形中任取 10 个点，则必存在两个点，该两点的距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{3}$。

11. 用 k 种颜色给一个正五边形的顶点进行着色，共有多少不同的着色方案？再请给出只有黑、白(k=2)两种颜色时的每个具体染色方法。

西北工业大学研究生院
学位研究生课程考试试题

考试科目：组合数学　　　　　　　　课程编号：106001
考核形式：考试　　　　　　　　　　考试时间：2015.1.9
开课学期：2014-2015 第一学期　　　任课教师：康慕宁
说　　明：所有答案必须写在答题册上，否则无效。　共 1 页 第 1 页

以下 11 题，每题 10 分，可任选其中 10 题作答。共 100 分

1. 在如图的 6×6 棋盘格内上，放置 6 个棋子，要求不能在同行或同列中出现两个或两个以上的棋子，且在棋盘中有“×”的地方不能放置任何棋子，请问共有多少放置方法？

×					
×	×				
		×	×		
		×	×		
		×	×		

$1+9x+25x^2+24x^3+6x^4$

$6!-9\cdot 5!+25\cdot 4!-24\cdot 3!+6\cdot 2!$

$=108$

2. What is the coefficient（系数）of $x_1^3x_2^3x_3x_4^2$ in the expansion of $(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^9$？ $\binom{9}{3\;3\;1\;2}\cdot 1^3(-1)^3\cdot 2^1\cdot(-2)^2=\frac{9!}{3!3!2!}(-8)$

3. 从 1 至 20 这 20 个数中任选互不相邻的三个数，共有多少种选法？ $C_{18}^3=816$

4. 已知一数列满足条件：$A_0=1$，$A_1=2$，$A_n-5A_{n-1}+6A_{n-2}=2^n$，试给出 An 通项公式。 $-(2n+3)\cdot 2^n+4\cdot 3^n$

5. 设 $F_1=1, F_2=1, F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\quad (n\ge 3)$ 证明：F_{5n} 是 5 的倍数

6. Find integers a, b, and c such that $m^3=a\binom{m}{3}+b\binom{m}{2}+c\binom{m}{1}$ for all m. Then sum the series $\sum_{i=1}^{n} i^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$

$a=6$, $b=6$, $c=1$

$1000-200-166-125+33+25+41-8=600$

7. 求 1 到 1000 中不能被 5、6、8 整除的整数的个数。 ~~583~~

8. 证明把数 n 拆分成 m 项的拆分数，等于把 n-m 拆分成不多于 m 项的拆分数。

9. 给出所有六次对称群 S_6 的全部共轭类，以及每个类中含有的不同置换的个数。

10. 证明在边长为 1 的正方形中任取 10 个点，则必存在两个点，该两点的距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{3}$。

11. 用 k 种颜色给一个正五边形的顶点进行着色，共有多少不同的着色方案？再请给出只有黑、白(k=2)两种颜色时的每个具体染色方法。 $\frac{1}{10}[k^5+4\cdot k+5\cdot k^3]$

k=2时 8种

西北工業大學

研究生专业课程考试答题册

得分：78

学　　号　2014201778

姓　　名　王仲轩

考试课程　组合数学

考试日期　2015.1.9

西北工业大学研究生院

1. $R(C) = 1+8x + 25x^2 + 24x^3 + 6x^4$

$n = 6! - 8\times 5! + 25\times 4! - 24\times 3! + 6\times 2!$

2. $(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^9$ 可看作 $\underbrace{(x_1-x_2+2x_3-2x_4)\cdots(x_1-x_2+2x_3-2x_4)}_{9个}$

则 $x_1^3 x_2^3 x_3 x_4^2$ 系数为 $C_9^3 C_6^3 C_3^1 \times (-1)^3 \times 2 \times (-2)^2$

3. 根据互不相邻的公式可知 有 $C(20-3+1, 3) = C(18, 3)$ 种方法

4. 特征方程为 $x^2-5x+6=0$ $(x-2)(x-3)=0$ 则 2 为特征方程的解.

构造特解 $a_n = k_0 n\cdot 2^n$ 代入原式

$k_0 n\cdot 2^n - 5k_0(n-1)\cdot 2^{n-1} + 6k_0(n-2)\cdot 2^{n-2} = 2^n$

$4k_0 n\cdot 2^n - 10k_0(n-1)2^n + 6k_0(n-2)\cdot 2^n = 2^n\cdot 4$

$k_0(4n - 10n + 10 + 6n - 12) = 4$

$-2k_0 = 4$

$k_0 = -2$

$a_n = -2n\cdot 2^n$

则 $b_n - 5b_{n-1} + 6b_{n-2} = 0$

则 $b_n = A2^n + B3^n$

$a_n = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n - 2n\cdot 2^n$ 当 $n=0$ $a_n = 1$ 当 $n=1$ $a_n=2$ 代入

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+3B=6 \end{cases}$$ $B=4$ $A=-3$

则 $a_n = \cancel{4\cdot 2^n}$ $-3\cdot 2^n + 4\cdot 3^n - 2n\cdot 2^n$

5. 当 $n=1$ 时 $F_5 = 5$ 设当 $n=k$ 时 F_{5k} 为5的倍数.

则证明当 $n=k+1$ 时. $F_{5(k+1)} = F_{5k+5} = F_{5k+4} + F_{5k+3}$

$= F_{5k+3} + F_{5k+2} + F_{5k+2} + F_{5k+1}$

$= F_{5k+2} + F_{5k+1} + F_{5k+1} + F_{5k} + F_{5k+1} + F_{5k} + F_{5k+1}$

$= F_{5k+1} + F_{5k} + F_{5k+1} + F_{5k+1} + F_{5k} + F_{5k+1} + F_{5k} + F_{5k+1}$

$= 5F_{5k+1} + 3F_{5k}$

$3F_{5k}$ 为5的倍数. $5F_{5k+1}$ 为5的倍数则 $F_{5(k+1)}$ 为5的倍数

原题得证.

6. $C(m,3)=\frac{m(m-1)(m-2)}{6}=\frac{m^3-2m^2+2m-m^2}{6}=\frac{m^3-3m^2+2m}{6}$

$C(m,2)=\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m^2-m}{2}$

$C(m,1)=m$

$6C(m,3)+6C(m,2)+C(m,1)=m^3-3m^2+2m+3m^2-3m+m=m^3$

则 $a=6$ $b=6$ $c=1$

则 $n^3=6\binom{n}{3}+6\binom{n}{2}+\binom{n}{1}$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=6\left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\cdots+\binom{n}{3}\right]+6\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\cdots+\binom{n}{2}\right]+\left[\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\cdots+\binom{n}{1}\right]$$

$$=6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

7. 设 A_1,A_2,A_3 分别表示1到1000能被5、6、8整除的数

$|A_1|=\frac{1000}{5}=200$ $|A_2|=\lfloor\frac{1000}{6}\rfloor=166$ $|A_3|=\lfloor\frac{1000}{8}\rfloor=125$

$|A_1\cap A_2|=\lfloor\frac{1000}{30}\rfloor=33$ $|A_1\cap A_3|=\lfloor\frac{1000}{40}\rfloor=25$ $|A_2\cap A_3|=\lfloor\frac{1000}{24}\rfloor=41$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=\lfloor\frac{1000}{120}\rfloor=8$

则 有 $1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8=600$ 个数满足要求.

8. ① $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$ 为整数n的m项拆分且设 $a_1,a_2,\cdots,a_m\geq 1$

则 $(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_m-1)=n-m$ 为 n-m 的不多于m项的拆分

② $a_1+a_2+\cdots+a_r=n-m$ $(r\leq m)$ 为数 n-m 不多于 m 项的拆分.

则 $\underbrace{(a_1+1)+(a_2+1)+\cdots+(a_r+1)}_{r项}+\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{m-r项}$

$=(n-m+r)+(m-r)=n$ 为数 n 的m项拆分.

综上. n 拆分为 m 项与 n-m 拆分为不多于 m 项 为一一对应, 因此两种拆分的拆分数相等.

8. S_6 的全部共轭类 $(1)^6$、$(6)^1$、$(1)^1(5)^1$、$(1)^1(2)^1(3)^1$、$(1)^2(4)^1$、$(1)^2(2)^2$、$(1)^3(3)^1$、$(1)^4(2)^1$、$(2)^1(4)^1$、$(2)^3$、$(3)^2$ 共11个

$(1)^6$ 的置换个数 $=\frac{6!}{6!}=1$

$(6)^1$ 的置换个数 $=120$

$(1)^1(5)^1$ 的置换个数 $=\frac{6!}{5}=144$

$(1)^1(2)^1(3)^1$ 的置换个数 $=\frac{6!}{2\times 3}=120$

$(1)^2(4)^1$ 的置换个数 $=\frac{6!}{2!\times 4}=90$

$(1)^2(2)^2$ 的置换个数 $=\frac{6!}{2!\times 2!\times 2^2}=\cancel{90}\ 45$

$(1)^3(3)^1$ 的置换个数 $=\frac{6!}{3!\times 3}=40$

$(1)^4(2)^1$ 的置换个数 $=\frac{6!}{4!\times 1^4\times 2^1}=15$

$(2)^1(4)^1$ 的置换个数 $=\frac{6!}{2\times 4}=90$

$(2)^3$ 的置换个数 $=\cancel{\frac{6!}{2\times 3}}=\frac{6!}{3!\times 2^3}=15$

$(3)^2$ 的置换个数 $=\frac{6!}{2!\times 3^2}=40$

11.

绕 XX' 轴旋转180°，得格式为 $(1)^1(2)^2$ 的置换，共5个

绕过中心点O且垂直于正五边形的 YY' 轴旋转 ~~得格式为~~

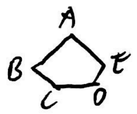
旋转±72°，得格式为 $(5)^1$ 的置换共2个

旋转±144°，得格式为 $(5)^1$ 的置换共2个.

不动置换，格式为 $(1)^5$ 的有1个

用k种颜色涂5个顶点有 $\frac{1}{10}[k^5+2k+2k+5\cdot k^3]$ 种.

当 $k=2$ $n=\frac{1}{10}[2^5+4+4+5\times 2^3]=8$



具体涂色方法 ① A、D、E为黑，B、C为白

② A、B、C为黑，D、E为白

③ A、B、C为白，D、E为黑

④ A、D、E为白，B、C为黑

⑤ A、B、C、D、E全黑

⑥ A、B、C、D、E全白

⑦ A、C、E为黑，B、D为白

⑧ A、C、E为白，B、D为黑

西北工業大學

研究生专业课程考试答题册

得分：58

学　　号 2014250148

姓　　名 李阳

考试课程 组合数学

考试日期 2015.1.9

西北工业大学研究生院

1.解：根据题意

$$R(\ ) = xR(\ ) + R(\ )$$

$$= x\cdot R(⊠)\cdot R(\ ) + R(⊠)\cdot R(\ )$$

$$= [x(1+x)+2x+1]\cdot R(\ )$$

$$= (x^2+3x+1)\cdot[xR(\ ) + R(\ )]$$

$$= (x^2+3x+1)\cdot[x(2x+1) + x\cdot R(\ ) + R(\ )]$$

$$= (x^2+3x+1)[4x^2+2x + xR(⊠) + R(\ )]$$

$$= (x^2+3x+1)[4x^2+2x+x(x+1) + x^2+3x+1]$$

$$= 6x^4+24x^3+25x^2+9x+1$$

$$= 1+9x+25x^2+24x^3+6x^4$$

∴ 故放置方法为 $6! - 9\times5! + 25\times4! - 24\times3! + 6\times2!$

$= 108$种

2.解：根据题意求多项式 $(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^9$ 中 $x_1^3x_2^3x_3x_4^2$ 的系数.

$$\text{系数 } A = C_9^3\cdot(1)^3 \cdot C_9^3\cdot(-1)^3\cdot C_9^1\cdot(2)^1\cdot C_9^2\cdot(-2)^2$$

$$= -8\cdot C_9^1\cdot C_9^2\cdot(C_9^3)^2$$

3.解：从1至20这20个数选3个互不相邻的数 设3个数为 a_1，a_2，a_3

且 $a_1<a_2<a_3$. a_1,a_2,a_3互不相邻 则 $1\le a_1 < a_2-1 < a_3-2 \le 18$

即从1到18这些数里任选3个做不可重复的组合

则有 $\binom{20-3+1}{3} = C_{18}^3 = 816$

4. 解: x^n: $A_n - 5A_{n-1} + 6A_{n-2} = 2^n$

x^{n-1}: $A_{n-1} - 5A_{n-2} + 6A_{n-3} = 2^{n-1}$

$\vdots \qquad \vdots$

x^3: $A_3 - 5A_2 + 6A_1 = 2^3$

x^2: $A_2 - 5A_1 + 6A_0 = 2^2$

设 $G(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n + \cdots$

$$(G(x) - A_1x - A_0) - 5x(G(x) - A_0) + 6x^2\cdot G(x) = (2x)^2 + (2x)^3 + \cdots + (2x)^n + \cdots$$

∵ $A_0 = 1$, $A_1 = 2$

∴ $(1-5x+6x^2)\cdot G(x) + 3x - 1 = \dfrac{4x^2}{1-2x}$

$$G(x) = \frac{10x^2-5x+1}{(1-5x+6x^2)(1-2x)} = \frac{10x^2-5x+1}{(1-2x)(1-2x)(1-3x)}$$

$$= \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-2x} + \frac{C}{(1-2x)^2}$$

$$\begin{cases} 4A+6B=10 \\ -4A-5B-3C=-5 \\ A+B+C=1 \end{cases}$$

解得 A.B.C 分别为 $\begin{cases} A=4 \\ B=-1 \\ C=-2. \end{cases}$

∴ $G(x) = 4\cdot\dfrac{1}{1-3x} + \dfrac{-1}{1-2x} + \dfrac{-2}{(1-2x)^2}$

∴ $A_n(x) = 4\cdot(3x)^n - (2x)^n - 2(n+1)(2x)^n$

$= 4\cdot(3x)^n - (1+2(n+1))(2x)^n$

10

∴ $A_n = 4\cdot 3^n - (3+2n)\cdot(2)^n$

$A_n = 4\cdot 3^n - (3+2n)\cdot(2)^n$

5. 证明：$F_1=1$. $F_2=1$ $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

得 $F_3=2$ $F_4=3$, $F_5=5$

F_{5n} $(n\geq1)$

当 $n=1$ 时 $F_{5n}=5$ 是5的倍数.

假设当 $n=K$ 时成立，即 F_{5K} 是5的倍数

当 $n=k+1$ 时

$F_{5(k+1)}=F_{5k+5}=F_{5k+4}+F_{5k+3}$

$=F_{5k+2}+F_{5k+3}+F_{5k+2}+F_{5k+1}$

$=F_{5k}+F_{5k+1}+F_{5k+2}+F_{5k+1}+F_{5k}+F_{5k+1}+F_{5k+1}$

$=F_{5k}+F_{5k+1}+F_{5k}+F_{5k+1}+F_{5k+1}+F_{5k}+F_{5k+1}+F_{5k+1}$

$=3F_{5k}+5F_{5k+1}$

$\because F_{5k}$ 是5的倍数. 则 $3F_{5k}$ 是5的倍数. 显然 $5F_{5k+1}$ 是5的倍数

$\therefore F_{5(k+1)}$ 是5的倍数.

$\therefore$ 得证.

6. 解：$m^3=a\binom{m}{3}+b\binom{m}{2}+c\binom{m}{1}$

$a\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}+b\cdot\frac{m(m-1)}{2!}+c\cdot m=m^3$

$\frac{a}{6}(m^3-3m^2+2m)+\frac{b}{2}(m^2-m)+cm=m^3$

$\therefore\begin{cases}\frac{a}{6}=1\\-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=0\\\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\b=6\\c=1\end{cases}$

所以 $m^3=6C_m^3+6C_m^2+C_m^1$

$\sum_{i=1}^{n}i^3=1^3+2^3+\cdots+n^3$

接下页

6.拆项

$m^3 = 6C_m^3 + 6C_m^2 + C_m^1$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3$$

$$= 6\left[C_1^3+C_2^3+C_3^3+\cdots+C_n^3\right]+6\left[C_1^2+C_2^2+\cdots C_n^2\right]+\left[C_1^1+C_2^1+\cdots C_n^1\right]$$

$$= 6\left[C_3^3+C_4^3+\cdots+C_n^3\right]+6\left[C_2^2+C_3^2\cdots+C_n^2\right]+1+2+\cdots+n$$

$$= 6\left[1+C_4^3+C_5^3+C_6^3+\cdots+C_{n+1}^3\right]+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 6\left[1+C_4^1+C_5^2+C_6^3+\cdots+C_{n+1}^{n-2}\right]+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 6\left[C_4^0+C_4^1+C_5^2+\cdots+C_{n+1}^{n-2}\right]+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 6\cdot C_{n+2}^{n-2}+\frac{n(n+1)}{2}$$

7.解：不能被5整除的个数为 $|A_1| = 800$ 个

不能被6整除的个数为 $|A_2| = 834$ 个

不能被8整除的个数为 $|A_3| = 875$ 个

不能被5,6整除的个数为 $|A_1 \cup A_2| = 967$ 个

不能被5,8整除的个数为 $|A_1 \cup A_3| = 975$ 个

不能被6,8整除的个数为 $|A_2 \cup A_3| = 959$ 个

不能被5,6,8整除的个数为 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 992$ 个

∴ 不能被5,6,8整除的个数为

$$|A_1|+|A_2|+|A_3| - |A_1\cup A_2| - |A_2\cup A_3| - |A_3\cup A_1| + |A_1\cup A_2\cup A_3|$$

$$= 800+834+875-967-975-959+992$$

$$= 600\text{个}$$

9.解：S_6的全部共轭类

$(6)^1$

$(5)^1(1)^1$

$(4)^1(1)^2$

$(4)^1(2)^1$

$(3)^2$

$(3)^1(1)^3$

$(3)^1(2)^1(1)^1$

$(2)^3$

$(2)^2(1)^2$

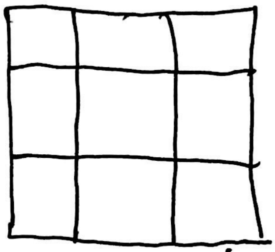
$(2)(1)^4$

$(1)^6$

共11种，不同置换类个数分别为

共轭类	置换个数
$(6)^1$	$\frac{6!}{1\times 6^1} = 5! = 120$
$(5)^1(1)^1$	$\frac{6!}{1\times 5^1\times 1\times 1^1}$
$(4)^1(2)^1$	$\frac{6!}{1\times 4^1\times 1\times 2^1}$
$(4)^1(1)^2$	$\frac{6!}{1\times 4^1\times 2!\cdot 1^2}$
$(3)^2$	$\frac{6!}{2!\cdot 3^2}$
$(3)^1(1)^3$	$\frac{6!}{1\times 3^1\times 3!\times 1^3}$
$(3)^1(2)^1(1)^1$	$\frac{6!}{1\times 3^1\times 1\times 2^1\times 1\times 1}$
$(2)^3$	$\frac{6!}{3!\times 2^3}$
$(2)^2(1)^2$	$\frac{6!}{2!\times 2^2\times 2!\times 1^2}$
$(2)(1)^4$	$\frac{6!}{1\times 2^1\times 4!\times 1^4}$
$(1)^6$	$\frac{6!}{6!\cdot (1)^6}$

10. 证明：将边长为1的正方形如图所示等分成9块



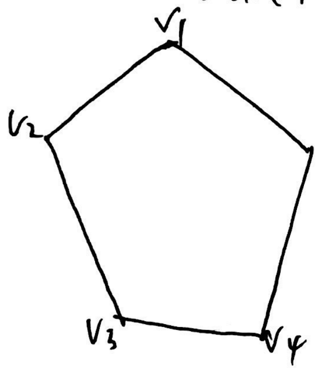
小正方形边长为 $\frac{1}{3}$，对角线为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

任取10个点，根据鸽巢原理，必有两个点落在同一个小正方形里

小正方形对角线长度为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

∴必有两个点距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

11. 解：



不动置换 $(V_1)(V_2)(V_3)(V_4)(V_5)$ $(1)^5$ 1种

旋转 $\pm72^\circ$ $(V_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5)$，$(V_5\ V_4\ V_3\ V_2\ V_1)$ $(5)^1$ 2种

旋转 $\pm144^\circ$ $(V_1, V_3, V_5, V_2, V_4)$ $(V_1, V_4, V_2, V_5, V_3)$ $(5)^1$ 2种

用k种颜色着色方案数 $\frac{1}{5}\times\left[k^5+2\times k+2\times k\right]$

$$=\frac{1}{5}\left(k^5+4k\right)$$

当 $k=2$ 有 $\frac{1}{5}\left(2^5+4\times2\right)=8$ 种

全黑 1种

全白 1种

1黑4白 1种（黑点任意）

1白4黑 1种（白点任意）

2黑3白 2种（2黑分开或在一起）

2白3黑 2种（2白分开或在一起）

共 1+1+1+1+2+2=8 种

西北工業大學

研究生专业课程考试答题册

得分：88

学　　号 2014261827

姓　　名 魏　昕

考试课程 组合数学

考试日期 2015、1、9

西北工业大学研究生院

1. $R(\ ) = R(\ )\cdot R(\ )$

$R(\square)=1+x$ $\quad = [x\cdot R(\square) + R(\ )]\cdot[x\cdot R(\text{日}) + R(\ )]$

$R(\text{日})=1+2x$ $\quad = 1+9x+25x^2-24x^3+6x^4$

∴ 带禁止的排列数为 $6! - r_1 5! + r_2 4! - r_3 3! + \cancel{r_4}\cdot 2! - r_1\cdot 1!$

∴ 放置方法有 $6! - 9\cdot 5! + 25\cdot 4! - 24\cdot 3! + 6\cdot 2!$

用容斥定理 令 P_1：棋子1放在(1,1)， P_2：棋子2放在(2,1)或(2,2)，
P_3：棋子3放在(3,3)或(3,4)， P_4：棋子4放在(4,3)或(4,4)，
P_5：棋子5放在(5,3)或(5,4)， 则可转化为

$$|\overline{P_1}\cap\overline{P_2}\cap\overline{P_3}\cap\overline{P_4}\cap\overline{P_5}|$$
$$=|S|-(|P_1|+|P_2|+|P_3|+|P_4|+|P_5|)$$
$$+(|P_1\cap P_2|+|P_2\cap P_3|+\cdots+|P_4\cap P_5|)$$
$$-(|P_1\cap P_2\cap P_3|+\cdots+|P_3\cap P_4\cap P_5|)$$
$$+(|P_1\cap P_2\cap P_3\cap P_4|+\cdots+|P_2\cap P_3\cap P_4\cap P_5|)$$
$$-|P_1\cap P_2\cap P_3\cap P_4\cap P_5|$$

∴ 放置方法有 $6! - 9\cdot 5! + 25\cdot 4! - 24\cdot 3! + 6\cdot 2!$

2. $(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^9$ 中若不考虑 x_i 前面的系数，则 $x_1^{c_1}x_2^{c_2}x_3^{c_3}x_4^{c_4}$ 的组合系数为 $\dfrac{9!}{c_1!c_2!c_3!c_4!}$，其中 $c_1+c_2+c_3+c_4=9$

则 $(x_1-x_2+2x_3-2x_4)^9$ 中 $x_1^3x_2^3x_3x_4^2$ 项系数为

$$\frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 2!}\cdot(1)^3\cdot(-1)^3\cdot(2)^1\cdot(-2)^2$$

∴ $x_1^3x_2^3x_3x_4^2$ 项系数为

$$\frac{9!}{3!\cdot3!\cdot2!\cdot1!}\cdot(1)^3\cdot(-1)^3\cdot2^1\cdot(-2)^2=-40320$$

3. 从1-20中取3个不相邻的数，令三个数为 a_1, a_2, a_3，

则令 $b_1=a_1-1$，$b_2=a_2-2$，$b_3=a_3-3$，则每一个 a_i 对应一个 b_i，即存在

1-17中三个组合的数量为 C_{20-3+1}^3

则从1-20中取3个不相邻数的方法有 $C_{20-3+1}^3=C_{18}^3=816$ 种. 10

4. 特征方程为 $x^2-5x+6=0$ ∴ $x_1=2$ $x_2=3$

因2为方程的重根，则特解形式为 $A_n^*=c\cdot n\cdot 2^n$.

∴ $cn\cdot2^n=5c(n-1)\cdot2^{n-1}-6c(n-2)\cdot2^{n-2}+2^n$ ∴ $c=-2$

∴ $A(n)=m_1\cdot2^n+m_2\cdot3^n-2n\cdot2^n$ ∵ $A_0=1$，$A_1=2$

∴ $m_2=4$ $m_1=-3$ ∴ $A_n=-3\cdot2^n+4\cdot3^n-2n\cdot2^n$ 10

$$=4\cdot3^n-(3+2n)\cdot2^n.$$

5. 数学归纳法 $F_5=5$ 为5的倍数

假设 $5n=5k$ 时结论成立，即 $F_{5k}\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 5)$

当 $n=k+1$ 时，

$$F_{5(k+1)} = F_{5k+5} = F_{5k+3} + F_{5k+4}$$
$$= F_{5k+1} + F_{5k+2} + F_{5k+1} + F_{5k+2} + F_{5k+2}$$
$$= 5F_{5k+1} + 3F_{5k}$$

$\because$ $F_{5k} \equiv 0 \pmod{}$ $\quad 5F_{5k+1} \equiv 0 \pmod{5}$

$\therefore$ $F_{5k+5} = F_{5(k+1)} \equiv 0 \pmod{5}$

$\therefore$ F_{5n}是5的倍数 证毕.

7. 容斥原理. 在1~1000中.

P_5为数能为5整除
P_6为数能为6整除
P_8为数能为8整除

能被5整除的数有 $\left[\frac{1000}{5}\right] = 200$个.
能被6整除的数有 $\left[\frac{1000}{6}\right] = 166$个
能被8整除的数有 $\left[\frac{1000}{8}\right] = 125$个
能被30整除的数有 $\left[\frac{1000}{30}\right] = 33$个
能被40整除的数有 $\left[\frac{1000}{40}\right] = 25$个
能被24整除的数有 $\left[\frac{1000}{24}\right] = 41$个.
能被120整除的数有 $\left[\frac{1000}{120}\right] = 8$个.

~~四 |S| − (|P₁|~~ .

$$|\overline{P_1} \cap \overline{P_2} \cap \overline{P_3}| = |S| - (|P_1| + |P_2| + |P_3|) + (|P_1 \cap P_2| + |P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_3|) - |P_1 \cap P_2 \cap P_3|$$

$$= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

$\therefore$ 满足条件的有600个

8. 证明.

n拆分成m项的拆分数. 令 $a_1+a_2+\cdots+a_m=n$, 其中 $a_i\geq 1$ $(1\leq i\leq m)$

构造数 $b_i=a_i-1$, 则 $b_1+b_2+\cdots b_m=n-m$, 其中 $b_i\geq 0$ $(1\leq i\leq m)$

由于 b_i 可以为0, 则可以看成 $n-m$ 拆分成不多于m项的拆分数

由 a_i 与 b_i 的线性关系, 则 a_i 与 b_i 一一对应

则 n拆分成m项的拆分数等于 $n-m$ 拆分成不多于m项的拆分数.

9. S_6的共轭类有 $(1)^6$, $(1)^4(2)^1$, $(1)^3(3)^1$, $(1)^2(4)^1$, $(1)^2(2)^2$, $(1)^1(2)^1(3)^1$, $(1)^1(5)^1$, $(2)^3$, $(3)^2$, $(6)^1$, $(2)^1(4)^1$

$(1)^6$ 有 $\frac{6!}{6!}=1$ 种置换.

$(1)^4(2)^1$ 有 $\frac{6!}{4!\cdot 2^1}=15$ 种置换

$(1)^3(3)^1$ 有 $\frac{6!}{3!\cdot 3^1}=40$ 种置换

$(1)^2(4)^1$ 有 $\frac{6!}{2!\cdot 4^1}=90$ 种置换

$(1)^2(2)^2$ 有 $\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2^2}=45$ 种置换

$(1)^1(2)^1(3)^1$ 有 $\frac{6!}{2^1\cdot 3^1}=120$ 种置换

$(1)^1(5)^1$ 有 $\frac{6!}{5^1}=144$ 种置换.

$(2)^3$ 有 $\frac{6!}{3!\cdot 2^3}=15$ 种置换

$(3)^2$ 有 $\frac{6!}{2!\cdot 3^2}=40$ 种置换

$(6)^1$ 有 $\frac{6!}{6^1}=120$ 种置换

$(2)^1(4)^1$ 有 $\frac{6!}{2^1\cdot 4^1}=90$ 种置换

∴共有11个共轭类, 分别为

$(1)^6$ = 1种置换

$(1)^4(2)^1$: 15种置换

$(1)^3(3)^1$: 40种置换

$(1)^2(4)^1$: 90种置换

$(1)^2(2^2)$: 45种置换

$(1)^1(2)^1(3)^1$ 120种置换

$(1)^1(5)^1$ 144种置换

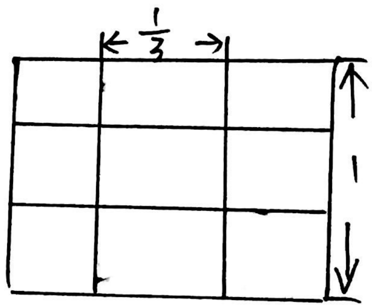
$(2)^3$ 15种置换

$(2)^1(4)^1$ 90种置换

$(3)^2$ 40种置换

$(6)^1$ 120种置换.

10. 证明：将正方形如右图划分为9个 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ 的小正方形，作为9个"鸽巢"。



将10个点投入右方正方形中的9个"鸽巢"中，必有2个点在同一"鸽巢"中，即必有两点在同一个小正方形中

由于边长为 $\frac{1}{3}$ 的正方形内两点最长距离为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

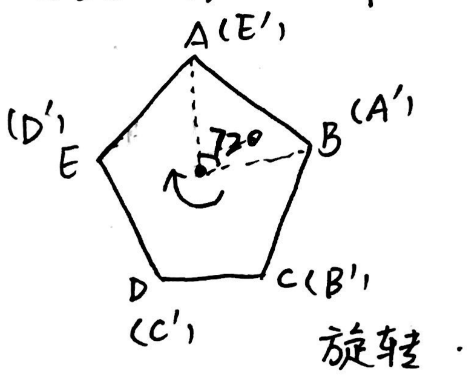
则10点中必有两点距离不大于 $\frac{\sqrt{2}}{3}$，证毕。

11. 由Polya定理，

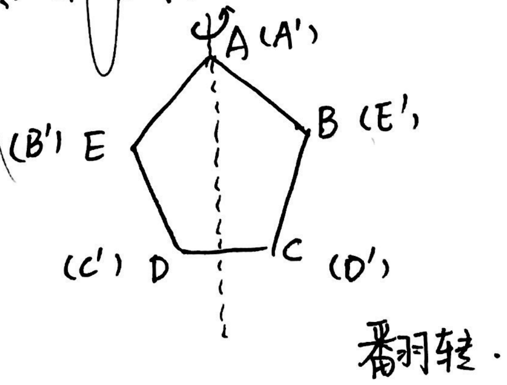
当正五边形不转时，共轭类为 $(1)^5$，有1个置换

当正五边形旋转72°、144°、216°、288°时，共轭类为 $(5)^1$，有4个置换

当正五边形沿点到对边中点的轴翻转时，共轭类为 $(1)^1(2)^2$，有5个置换。



旋转.

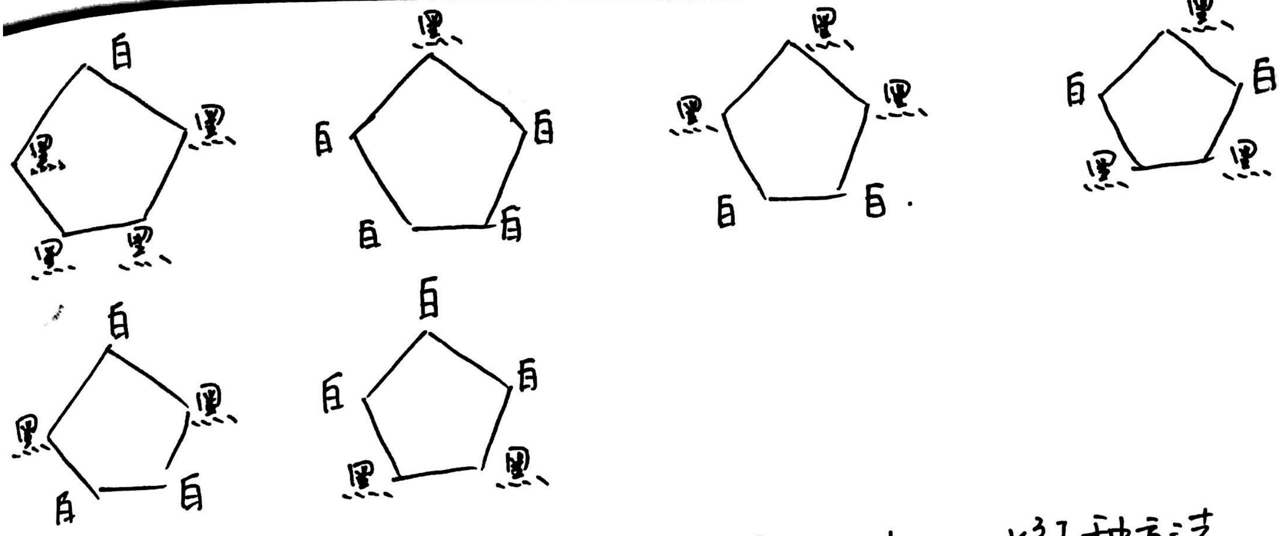


翻转.

∴ 染色方法为 $\frac{1}{10}[k^5+4\times k^1+5\times k^3]$

当 $k=2$ 时，有8种染色方法，分别为

(续下页)



结论：用K种颜色时有$\frac{1}{10}[K^5+4\cdot K^1+5\cdot K^3]$种方法.

当$K=2$时 有8种染色方法.