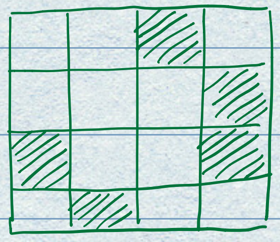
五. 有禁区的排列

eg：对于1.2.3.4的排列 $P_1P_2P_3P_4$，其中 P_1 不允许取3.

P_2 不允许取4，P_3 不允许取1和4



对应到棋盘上

定理：有禁区的排列数为

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots\pm r_n$$

其中 r_i 是有 r_i 个棋子放在禁区的方案数

简单说明公式含义：

P_i 是第 i 个棋子在第 i 行的位置

A_i 是 P_i 落入禁区的事件

① 一个棋子放入禁区，其余 $n-1$ 个无条件排列

$r_1(n-1)!$

② 同理，两个棋子放入禁区

$r_2(n-2)!$

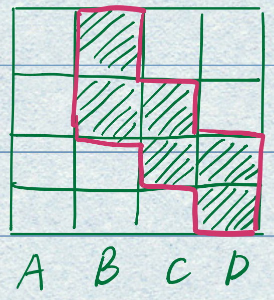
根据容斥原理：

$$|\bar{A_1}\cap\bar{A_2}\cap\bar{A_3}\cap\cdots\cap\bar{A_n}|$$

$$=n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\cdots\pm r_n$$

eg：有P.Q.R.S四个人，A.B.C.D四项任务，P不做B

Q不做B.C，R不做C.D，S不做D，求分配方案



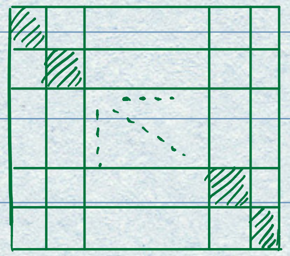
① 先求阴影部分（前面推过）

$$R(C) = 1 + 6x + 10x^2 + 4x^3$$

② $N = n! - r_1(n-1)! + r_2(n-2)! - r_3(n-3)!$

$= 4! - 6\times3! + 10\times2! - 4$

eg：错排问题



错排问题在棋盘里可以表示为对角线禁区

$R(C) = (1+x)^n$ [分隔棋盘算法]

$= 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n$

$r_i = C_n^i \quad i = 1.2.3\cdots\cdot n$

$N = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! - \cdots \pm C(n,n)$

最后看一眼 P_{132} 例3-16 能看懂 $R(C)$ + 排列公式 就OK辣

六、鸽巢原理

即 n+1 只鸽子，只有 n 个巢，则至少有一个巢里有两只鸽子

1. 举例证明

eg：从 1 到 2n 的 2n 个正整数中任取 n+1 个，则这 n+1 个数中至少有一对数，其中一个数是另一个数的倍数

证明：所取的 $n+1$ 个数是

$$a_1, a_2 \cdots a_n, a_{n+1}$$

从该序列中去掉所有数中2的因子，直到剩下一个奇数

（疯狂除2到底）

得到奇数序列：

$$r_1, r_2, \cdots, r_{n+1}$$

因为 $1-2n$ 中只有 n 个奇数，而现在有 $n+1$ 个

故 $r_1, r_2 \cdots r_{n+1}$ 中至少有两个相同　设 $r_i = r_j = r$

$$a_i = 2^m r \quad , \quad a_j = 2^n r$$

若 $a_i > a_j$. a_i 是 a_j 的倍数

eg：设 $a_1 a_2 \cdots a_m$ 是正整数序列，则至少存在整数 k 和 l

$1 \le k \le l \le m$，使得

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l \text{ 是 } m \text{ 的倍数}$$

证明：设 $S_1 = a_1$，$S_2 = a_1 + a_2$　$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \cdots$

$$S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m$$

则 $S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_m$

有两种可能
- ① $S_1 \cdots S_m$ 中有一个是 m 的倍数 $\Rightarrow$ 证毕
- ② $S_1 \cdots S_m$ 都不是 m 的倍数

② 设 r_h 是 S_h 除 m 的余数，其中 $r_1 \cdots r_m$ 都不为0且都小于 m

共有 m 个而小于 m 的整数只有 $m-1$ 个，根据鸽巢原理，

至少存在一对 $r_h = r_k$

则这两个序列相减　$S_h - S_k = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_h$ 是 m 的倍数

2. 鸽巢原理推广

设 k 和 n 都是任意的正整数

若至少有 $kn+1$ 只鸽子分配在 n 个巢中

则至少存在一个巢中有至少 $k+1$ 只鸽子

$\Downarrow$

延伸1：若取 $n(m-1)+1$ 个球放进 n 个盒子

则至少有1个盒子有 m 个球

延伸2：若 $m_1, m_2, \cdots m_n$ 是 n 个正整数，而且

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n} > r-1$$

则 $m_1, m_2, \cdots m_n$ 中至少有1个数不小于 r

（鸽巢原理比较灵活，就面向题库复习吧，前面的推广看一下就算了）