18. Integrale di Riemann

Definizione (Scomposizione)

> Poniamo $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato dove $a,b\in\mathbb{R}(a<b)$.

Si chiama **scomposizione** di $I=[a,b]$, un *sottoinsieme finito e ordinato* σ di $[a,b]$ *tale che* $a,b\in\sigma$ del tipo

$$\sigma=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}\quad\text{dove}\quad x_0=a,x_n=b$$

assumendo sempre $x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n$, quindi in ordine strettamente crescente.
Queste scomposizioni servono per costruire, pensando al concetto geometrico, i tanti intervalli, basi dei "rettangoli", che approssimano il grafico di una certa funzione.

Sia $I_k=[x_{k-1},x_k]\quad k=1,\dots,n$. Per definizione si pone

$$\text{mis}(I_k)=x_k-x_{k-1}\quad k=1,\dots,n$$

Questa e' detta la *misura*, ossia la lunghezza dell'intervallo.
Da questo risulta

$$\sum_{k=1}^{n}\text{mis}(I_k)=b-a$$

Cioe' la somma delle misure di tutti i sottointervalli e' uguale alla lunghezza dell'intero intervallo originale.
Questo lo si puo' vedere svolgendo la sommatoria, infatti

$$\sum_{k=1}^{n}\text{mis}(I_k)=(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\dots+(x_n-x_{n-1})=b-a$$

Questa particolare sommatoria, in cui i termini si eliminano tra loro, facendo rimanere solo il primo e l'ultimo fattore, e' detta *telescopica*.

Si pone anche

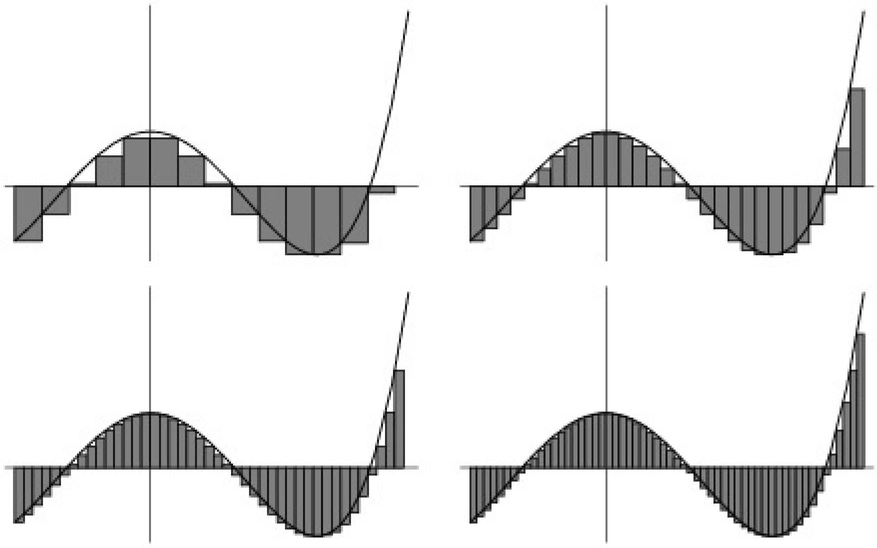
$$|\sigma|=max\{\text{mis}(I_k):k=1,\dots,n\}$$

il numero $|\sigma|$ si chiama **finezza della scomposizione**, ovviamente cerchiamo di mantenere questo numero piu' piccolo possibile, in quanto indica la massima lunghezza tra tutti gli intervalli.

L'insieme di tutte le scomposizioni di $[a, b]$ si indica con $\Omega_{[a,b]}$.

Date $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_{[a,b]}$ due scomposizioni di $[a, b]$ si dice "$\sigma_1 \text{ e' piu' fine di } \sigma_2$" se $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$, cioe' se σ_1 e' piu' grande e contiene almeno tutti i punti di σ_2. Da un punto di vista geometrico se ci sono piu' punti, oltre a quelli in comune, ovviamente la scomposizione e' piu' *fine*.

> Conseguentemente data una scomposizione, e' possibile produrre una scomposizione piu' fine della precedente semplicemente aggiungendo un punto.



> D'ora in poi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e' una funzione **limitata**.

Definizione (Somme superiori ed inferiori)

Sia $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\} \in \Omega_{[a,b]}$.
Allora

$$S(f, \sigma) := \sum_{k=1}^{n} \sup f \cdot \text{mis}(I_k)$$

si dice **somma superiore** di f su $[a, b]$ relativa alla scomposizione σ, ricordando che e' un numero.
Analogamente

$$s(f, \sigma) := \sum_{k=1}^{n} \inf f \cdot \text{mis}(I_k)$$

e' detta **somma inferiore**.

> Se la funzione non fosse limitata il concetto di somme superiori ed inferiori, perde di significato perche', geometricamente parlando,

> l'area dei "rettangoli" in alcuni intervalli potrebbe essere infinita.

Una prima proprieta' evidente e'

$$s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma) \quad \forall \sigma \in \Omega_{[a,b]}$$

In particolare $\inf f \cdot (b-a) \leq \sup f \cdot (b-a)$ sull'insieme $[a,b]$.

Definizione (Integrale superiore ed inferiore)

Per definizione

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \overset{def}{=} \sup\{s(f,\sigma) : \sigma \in \Omega_{[a,b]}\}$$

ed e' chiamato **integrale inferiore** di f su $[a,b]$.

Analogamente

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \overset{def}{=} \inf\{S(f,\sigma) : \sigma \in \Omega_{[a,b]}\}$$

ed e' chiamato **integrale superiore** di f su $[a,b]$.

Entrambe si calcolano al variare delle scomposizioni, dato un intervallo fissato.

Proposizione

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Allora

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Definizione (Integrazione secondo Riemann)

Una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e' integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ se

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Questo significa che le due approssimazioni, inferiore e superiore coincidono allo stesso valore.
D'ora in poi se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e' integrabile si pone

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Lemma

Siano $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_{[a,b]}$ e $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$, quindi σ_1 contiene σ_2. Allora

$$S(f, \sigma_1) \leq S(f, \sigma_2)$$

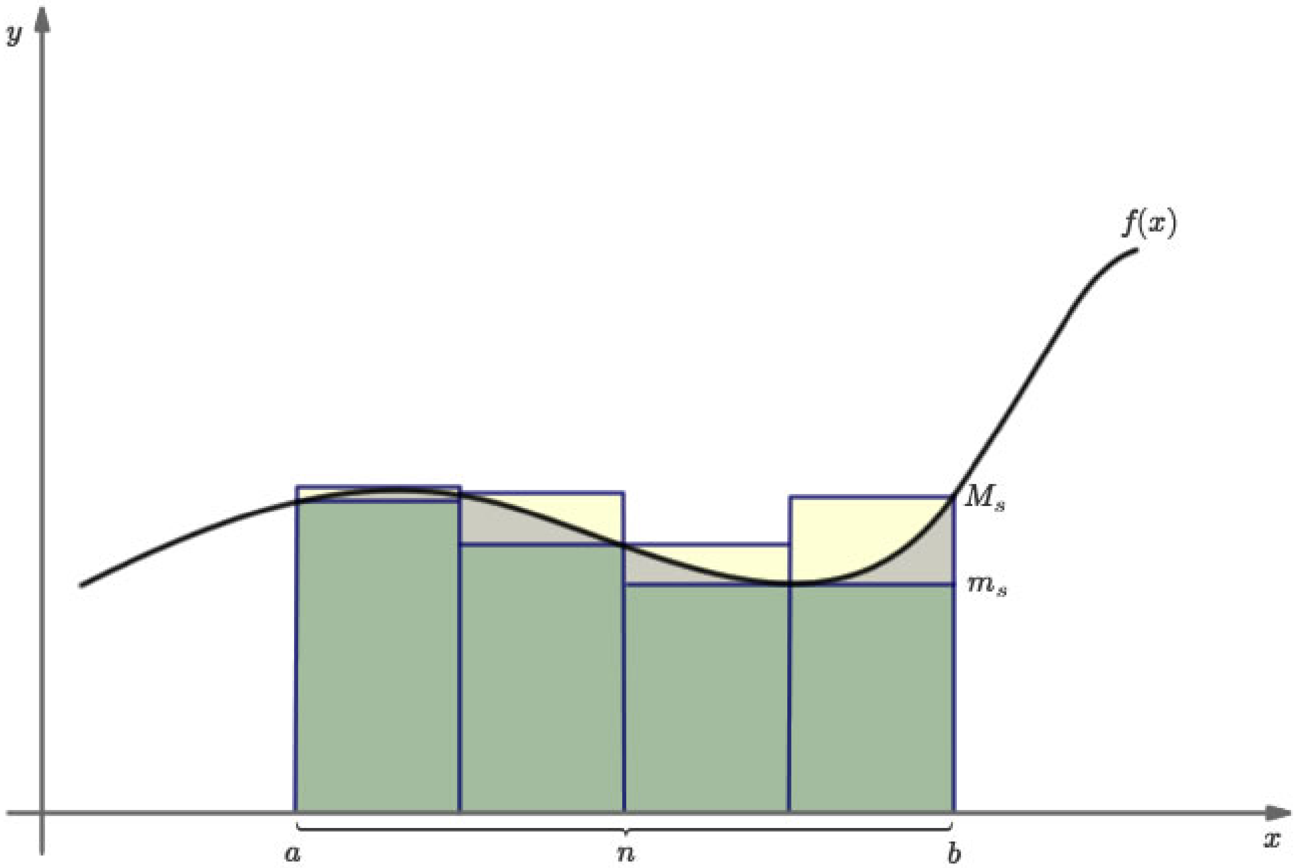
$$s(f, \sigma_2) \leq s(f, \sigma_1)$$

Concettualmente se σ_1 e' piu' fine di σ_2 significa che i singoli "rettangoli" si avvicinano, nel loro intervallo, di piu' alla funzione e questo comporta una migliore approssimazione. Lo stesso accade anche per le somme inferiori, ma al contrario ovviamente.

Dimostrazione

Nella dimostrazione l'idea e' che a partire da σ_2, si provano le disuguaglianze nel caso in cui $\sigma_1 = \{c\} \cup \sigma_2$, dove $c \in [a, b] \setminus \sigma_2$, cioe' aggiungiamo un punto per "raffinare" la scomposizione.
Al di fuori dell'intervallo al quale ho aggiunto il punto non accade nulla, i valori rimangono uguali, di conseguenza, la differenza tra le somme delle due scomposizioni si annulla; dobbiamo solo controllare cosa accade nell'intervallo che abbiamo "diviso" aggiungendo un punto. E' facile vedere che in una meta' dell'intervallo per forza di cose il $\sup$ rimane lo stesso mentre, nell'altra meta' il sup sara' necessariamente piu' piccolo, quindi la differenza tra i due "rettangoli" sara' un numero positivo che rappresenta proprio l'area "rimanente" data da questo "scalino".

> Questa e' la sola prova della prima disuguaglianza. La seconda e' analoga.



Corollario

Per ogni coppia di scomposizioni $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_{[a,b]}$ si ha

$$s(f, \sigma_1) \leq S(f, \sigma_2)$$

Dimostrazione

Chiaramente se consideriamo l'unione $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, allora $\sigma_1 \subseteq \sigma$ e $\sigma_2 \subseteq \sigma$. Per il lemma precedente abbiamo quindi

$$s(f, \sigma_1) \overset{lemma}{\leq} s(f, \sigma) \leq S(f, \sigma) \overset{lemma}{\leq} S(f, \sigma_2)$$

Essendo ora le somme inferiore e superiore svincolate tra loro, posso massimizzare e minimizzare rispettivamente (attraverso il $\sup$ e l'$\inf$) la somma inferiore e la somma superiore, facendo ancora valere la disuguaglianza. Ma il $\sup$ di s e l'$\inf$ di S non sono altro che (rispettivamente) l'integrale inferiore e superiore. Abbiamo quindi dimostrato la proposizione precedente.

> D'ora in poi $\mathcal{R}_{[a,b]}$ denotera' l'insieme delle funzioni limitate $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ che sono integrabili.

Teorema (Riemann)

Questo teorema infatti ci da una *caratterizzazione* delle funzioni integrabili secondo Riemann, come le funzioni monotone o le funzione continue. Ricordiamo che essere integrabile sedcondo Riemann implica che integrale superiore ed inferiore devono coincidere.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora

$$f : [a, b] \in \mathcal{R}_{[a,b]} \iff \forall\, \epsilon > 0, \exists\, \sigma \in \Omega_{[a,b]} : S(f, \sigma) - s(f, \sigma) < \epsilon$$

Per ogni epsilon positivo esiste una scomposizione tale per cui la differenza tra somma superiore ed inferiore e' minore di epsilon, ma certamente deve essere maggiore di 0.

Teorema

Se $f \in C([a, b])$ allora $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

In particolare e' possibile definire un "nuovo limite"

$$\lim_{|\sigma| \to 0} S(f, \sigma) - s(f, \sigma) = 0$$

Teorema

Se una funzione limitata ha solo un numero finito di discontinuita', allora e' integrabile secondo Riemann.

Formalmente sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e tale che l'insieme

$$F = \{x \in [a, b] : f \text{ non e' continua in x}\}$$

e' finito. Allora $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$.

Teorema (di Struttura)

1. L'integrale di una somma di funzioni integrabili e' la somma degli integrali delle due funzioni.
2. Dato uno scalare, il prodotto dello scalare per una funzione integrabile e' ancora integrabile e l'integrale del prodotto e' uguale al prodotto dello scalare per l'integrale della funzione.
3. $f(x) \leq g(x) \text{ su } [a, b] \implies \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Questa proprieta' e' chiamata **monotonia dell'integrale**.
4. Il modulo di una funzione integrabile e' integrabile e si ha che il modulo dell'integrale e' sempre minore o uguale all'integrale del modulo della funzione.

Proposizione

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora $f \in \mathcal{R}_[a, b]$.

> Prendere funzioni monotone in intervalli chiusi ci assicura il fatto che esse siano limitate.
> Se f e' monotona allora le discontinuita' possono essere solo di tipo "salto".
> Si puo' dimostrare che una funzione monotona su un intervallo puo' avere solo un insieme **finito o numerabile** di discontinuita.

Teorema (Addittivita' integrale)

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Sia $c \in [a, b]$. Allora $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ se e solo se $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$. In tal caso si ha

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Assioma

Siano $I \subseteq \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}$ e siano $a, b \in I$. Se $b < a$ poniamo

$$\int_a^b f(x)dx \overset{def}{=} - \int_b^a f(x)dx$$

qualsiasi siano a, b diversi tra loro.

Teorema (della Media Integrale)

Esiste un valor medio tra $\inf$ e $\sup$ che e' uguale al quoziente tra l'integrale di f in $[a, b]$ e la lunghezza dell'intervallo.
Ossia se $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ esiste $\mu \in \mathbb{R}$ tale che

$$\inf_{[a,b]} f \leq \mu \leq \sup_{[a,b]} f \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$