Soluzione Esercizio 1

$$f(x) = \sin(\underbrace{x \lg x}_{=y}) - x = \left(x \lg x + o(x \lg x)\right) - x$$

$$= x \lg x \left(1 + o(1)\right) - x \,. \qquad \text{per } x \to 0^+$$

Ma $\quad x = o(x \lg x) \quad$ per $x \to 0^+$. Infatti $\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x} \lg x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.

Perciò $\quad f(x) = x \lg x + o(x \lg x)$

$$= x \lg x \left(1 + o(1)\right) \qquad \text{per } x \to 0^+,$$

ossia $\quad f(x) \sim x \lg x \quad$ per $x \to 0^+$.

Soluzione Esercizio 2

Si ha $f(x) = \sin(\underbrace{x e^{-\frac{1}{x}}}_{=y}) - x$ .. Usando $\sin y = y + o(y)$, $y \to 0$,

si trova $f(x) = x e^{-\frac{1}{x}} + o(x e^{-\frac{1}{x}}) - x$ per $x \to 0^+$

N.B. $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. Infatti $-\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ e perciò

l'esponenziale diventa infinitesimo.

D'altra parte $x e^{-\frac{1}{x}} = o(x)$ per $x \to 0^+$. Infatti

$$\frac{\cancel{x} e^{-\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 .$$

Quindi $f(x) = -x + o(x) = -x(1 + o(1))$ per $x \to 0^+$,

ossia $f(x) \sim -x$ per $x \to 0^+$.

Soluzione Esercizi 3 e 4

$f(x) = \operatorname{arctg}(x^2) \cdot \lg x$. Dato che $\operatorname{artg} y = y + o(y)$ $(y \to 0)$

si ha $f(x) = \left(x^2 + o(x^2) \right) \cdot \lg x$ per $x \to 0^+$

e quindi $f(x) \sim x^2 \lg x$ per $x \to 0^+$.

D'altra parte $f(x) = \dfrac{\operatorname{artg} x^2}{\lg x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ essendo

prodotto di due funzioni infinitesime.

Usando lo stesso sviluppo di prima si trova

$$f(x) \sim \frac{x^2}{\lg x} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Osservazione Per ogni $\alpha < 2$ si ha

$$\boxed{\alpha < \text{ord}(x^2 \lg x) < 2} \quad \text{per } x \to 0^+$$

Infatti

- $x^2 = o(x^2 \lg x) \implies 2 > \text{ord}(x^2 \lg x)$
- $x^2 \lg x = o(x^\alpha) \implies \text{ord}(x^2 \lg x) > \alpha$

Analogamente, per ogni $\alpha > 2$ si ha

$$\boxed{\alpha > \text{ord}\left(\frac{x^2}{\lg x}\right) > 2} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Infatti

- $\dfrac{x^2}{\lg x} = o(x^2) \implies \text{ord}\left(\dfrac{x^2}{\lg x}\right) > 2$
- $x^\alpha = o\left(\dfrac{x^2}{\lg x}\right) \implies \alpha > \text{ord}\left(\dfrac{x^2}{\lg x}\right).$

Soluzione Esercizio 5

$f(x) = \sin\left(x + e^{-\frac{1}{x}}\right) - x$ per $x \to 0^+$ è infinitesima dato che $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Per ottenere informazioni non banali si deve usare $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3)$ per $y \to 0$.

Cioè
$$f(x) = \cancel{x} + e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{6}\left(x + e^{-\frac{1}{x}}\right)^3 + o\left(\left(x + e^{-\frac{1}{x}}\right)^3\right) - \cancel{x}$$
per $x \to 0^+$. Tuttavia si osservi che per ogni $\alpha \geq 0$

$$\boxed{e^{-\frac{1}{x}} = o(x^\alpha)} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

Per capire meglio quest'ultimo fatto, si noti che posto $y = \frac{1}{x}$

$$e^{-y} = o\left(\frac{1}{y^\alpha}\right) \text{ per } y \to +\infty \iff \frac{y^\alpha}{e^y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0.$$

Ma ciò è evidente, in quanto $y^\alpha = o(e^y)$ per $y \to +\infty$.

In conclusione, si ha

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{6}x^3\left(1 + o(1)\right)$$

ossia $f(x) \sim -\frac{x^3}{6}$ e $\mathrm{ord}(f) = 3$ per $x \to 0^+$,