Analisi Matematica 1

by F. Montefalcone

Vediamo ora la formula di Taylor con *resto di Lagrange*, che è più precisa della precedente nell'esprimere il resto.

La dimostrazione utilizzerà questo lemma.

Lemma ($\diamondsuit$)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, f derivabile n volte su I, $n \geq 1$. Supponiamo che $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $0 \leq k \leq n-1$. Allora

$$\forall\, x \in I \setminus \{x_0\} \;\exists\, y \in \left]x_0, x\right[\;:\; \boxed{\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(y)}{n!}}.$$

Dimostrazione. Per induzione.
Caso $n = 1$. Dato che $f(x_0) = 0$, il teorema di Lagrange implica che

$$f(x) = f'(y)(x - x_0),$$

per qualche $y \in \,]x_0, x[$.

La assumiamo vera nel caso n (è la nostra ipotesi induttiva) e la proviamo nel caso $n + 1$.

L'ipotesi induttiva si può applicare alla derivata f'.
Si ha che $f' \colon I \to \mathbb{R}$ è derivabile n volte e

$$(f')^{(k)}(x_0) = D^{k+1} f(x_0) = 0$$

per $0 \leq k \leq n-1$. Per il Teorema di Cauchy

$$\exists\, z \in]x_0, x[\ : \ \frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f'(z)}{(n+1)(z-x_0)^n}.$$

Usando l'ipotesi induttiva si ottiene che esiste $y \in]x_0, z[$ tale che

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f'(z)}{(n+1)(z-x_0)^n} \underset{hp\,ind.}{=} \frac{(f')^{(n)}(y)}{(n+1)\,n!} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.$$

Questo prova il lemma. $\square$

Teorema (Formula di Taylor con resto di Lagrange)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte su I.
Allora

$$\forall\, x \in I \setminus \{x_0\}\ \exists\, y \in \,]x_0, x[\ :\ \boxed{f(x) = T_n^{x_0}(x) + \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}.$$

Dimostrazione. Posto

$$g : I \to \mathbb{R}, \qquad g \overset{def.}{=} f - T_n^{x_0},$$

si ha che g è derivabile $n+1$ volte su I e $g^{(k)}(x_0) = 0$ per $0 \le k \le n$.

Dal Lemma ($\diamondsuit$) segue che per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$ esiste $y \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}.$$

Ossia

$$\frac{f(x) - T_n^{x_0}(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!}$$

ed il teorema è dimostrato. $\square$

N.B. Si è usato che $T_n^{x_0}$ è un polinomio di grado $\leq n$ e quindi la sua derivata $(n+1)$-esima è nulla su I.

Terminologia. Se il punto iniziale è $x_0 = 0$, allora i polinomi/sviluppi di Taylor si chiamano *polinomi/sviluppi di McLaurin*.

1) Sia $f(x) = e^x$.

Si ha $D^k e^x = e^x \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Quindi, se $x_0 = 0$ si ha

$$D^k f(0) = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Ne segue la formula

$$T_n f(x) \overset{def.}{=} T_n^0 f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Usando i precedenti teoremi si ottiene

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\, x \neq 0, \quad \exists\, y \in]0, x[: \boxed{e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^y}{(n+1)!}\, x^{n+1}}.$$

Inoltre

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}) \quad \text{per } x \to 0.$$

Ma anche

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0.$$

Notare che spesso "bastano" pochi termini: ad es.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ .$$

2) Sia $f :]-1, +\infty[= I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lg(1 + x)$.

Si ha $f \in C^\infty(I)$ e

$$D^k f(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, x > -1.$$

Pertanto

$$f^{(0)}(0) = f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \ldots, f^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

dove $k \geq 1$. Quindi

$$T_n f(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}.$$

Inoltre, come nell'esempio precedente, si ha

$$\forall\, x \in I \quad \exists\, y \in \,]0, x[\, :$$

$$\boxed{\lg(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, \frac{x^k}{k} + (-1)^n \frac{(1+y)^{-(n+1)}}{n+1}\, x^{n+1}}.$$

Ne segue, in particolare, che

$$\lg(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \underbrace{O(x^{n+1})}_{oppure\ \ o(x^n)} \quad (x \to 0)$$

Notare che arrestandosi ai primi termini si ha

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots .$$

Pertanto, ad es.:

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

per $x \to 0$.

3) Sia $f :]-1, +\infty[= I \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si ha che $f \in C^\infty(I)$, e si può verificare che

$$D^k(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1) \cdot \ \dots \ \cdot (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x > -1.$$

Posto

$$\binom{\alpha}{k} \overset{def.}{=} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ \dots \ \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

(questo numero coincide col coefficiente binomiale se $\alpha \in \mathbb{N}$) si ha

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

In particolare, dalla formula di McLaurin con resto di Lagrange segue che

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \underbrace{O(x^{n+1})}_{oppure\ \ o(x^n)} \quad \text{per } x \to 0.$$

Come esempio, si ha $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$.

Per esercizio, sostituire ad α i valori $2, 3, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \pi, e$, etc.

4) Sviluppi delle funzioni trigonometriche sin e cos.

Sia $f(x) = \sin x$. E' facile vedere che in $x_0 = 0$ si ha

$$(T_{2n+1} \sin)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Notare che i coefficienti non nulli sono dispari.

Osservazione

Si ha

$$D \sin x = \cos x, \; D^2 \sin x = -\sin x, \; D^3 \sin x = -\cos x, \ldots$$

Pertanto, in $x_0 = 0$, risultano non nulli (e uguali a ± 1) solo i coefficienti dispari. Precisamente, si ha

$$D^{2k+1} \sin x \big|_{x=0} = (-1)^k.$$

Segue dalla formula di Taylor con resto di Lagrange che

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + O(x^{2n+2}) \quad \text{per } x \to 0.$$

Per esempio, si ha

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \underbrace{O(x^8)}_{\textit{oppure} \ \ o(x^7)} \qquad \text{per } x \to 0$$

N.B. Più precisamente, per la formula di Taylor con resto di Lagrange si ha

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\; \exists\, y \in]0, x[\, :$$

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{2k+1!} + \frac{D^{2n+2}(\sin)(y)}{(2n+2)!} x^{2n+2}}.$$

Notare che $D^{2n+2}(\sin)(y) = (-1)^n \sin(y) = \pm \sin(y)$.

Considerazioni analoghe si svolgono per i polinomio e gli sviluppi di McLaurin della funzione $f(x) = \cos x$. Si ha

$$(T_{2n} \cos)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!}.$$

In generale, dalla formula di McLaurin con resto di Lagrange segue che

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} + O(x^{2n+1}) \quad \text{per } x \to 0.$$

In particolare, si ha

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \underbrace{O(x^7)}_{oppure\ \ o(x^{\mathbf{6}})} \qquad \text{per } x \to 0.$$

Polinomi di Taylor/McLaurin di funzioni elementari

Esercizio

Scrivere gli sviluppi (ed i polinomi) di Taylor delle funzioni iperboliche $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$.

Suggerimento. Ricordare che $D \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$ e $D \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$.