DS作业汇报 Fibonacci堆

detect0530@gmail.com

探究Fibonacci堆对dijkstra算法的优化效果

1. 复杂度分析，与常见堆结构的理论横向对比
2. 实现Fibonacci堆
3. 验证Fibonacci堆的正确性
   - 利用qt实现可视化效果，方便调试
   - 设定check函数，自动检测堆性质以及双向链表的正确性
   - 与其他堆以及stl提供的priority_queue进行对拍比较
4. 将正确性得到保证的Fibonacci堆应用到dijkstra算法中，并在随机&高压数据集上进行测试，并记录实验结构
5. 分析实验结果，得出结论

理论复杂度对比

操作 \ 数据结构	配对堆	二叉堆	左偏树	二项堆	斐波那契堆
插入（insert）	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
查询最小值（find-min）	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
删除最小值（delete-min）	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
合并 (merge)	$O(1)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
减小一个元素的值 (decrease-key)	$o(\log n)$（下界 $\Omega(\log \log n)$，上界 $O(2^{2\sqrt{\log \log n}})$）	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
是否支持可持久化	×	✓	✓	✓	×

在dijkstra算法中，我们需要频繁的进行insert操作，而Fibonacci堆在insert操作上有着极大的优势，因此我们期望Fibonacci堆在dijkstra算法中有着更好的表现。

实现Fibonacci堆

```
template <class T>
class FibHeap{
private:
    int keyNum;
    int maxDegree;
    Fibnode<T> **cons;
public:
    FibHeap();Fibnode<T> *min;
    ~FibHeap();
    void Insert(T key);
    void Removemin();
    void Combine(FibHeap<T> *other);
    bool Minimum(T *pkey);
    void Update(T oldkey,T newkey);
    void Remove(T key);
    bool Contains(T key);
    void Print();
    void Destroy();
    void Check(Fibnode<T> * now);
```

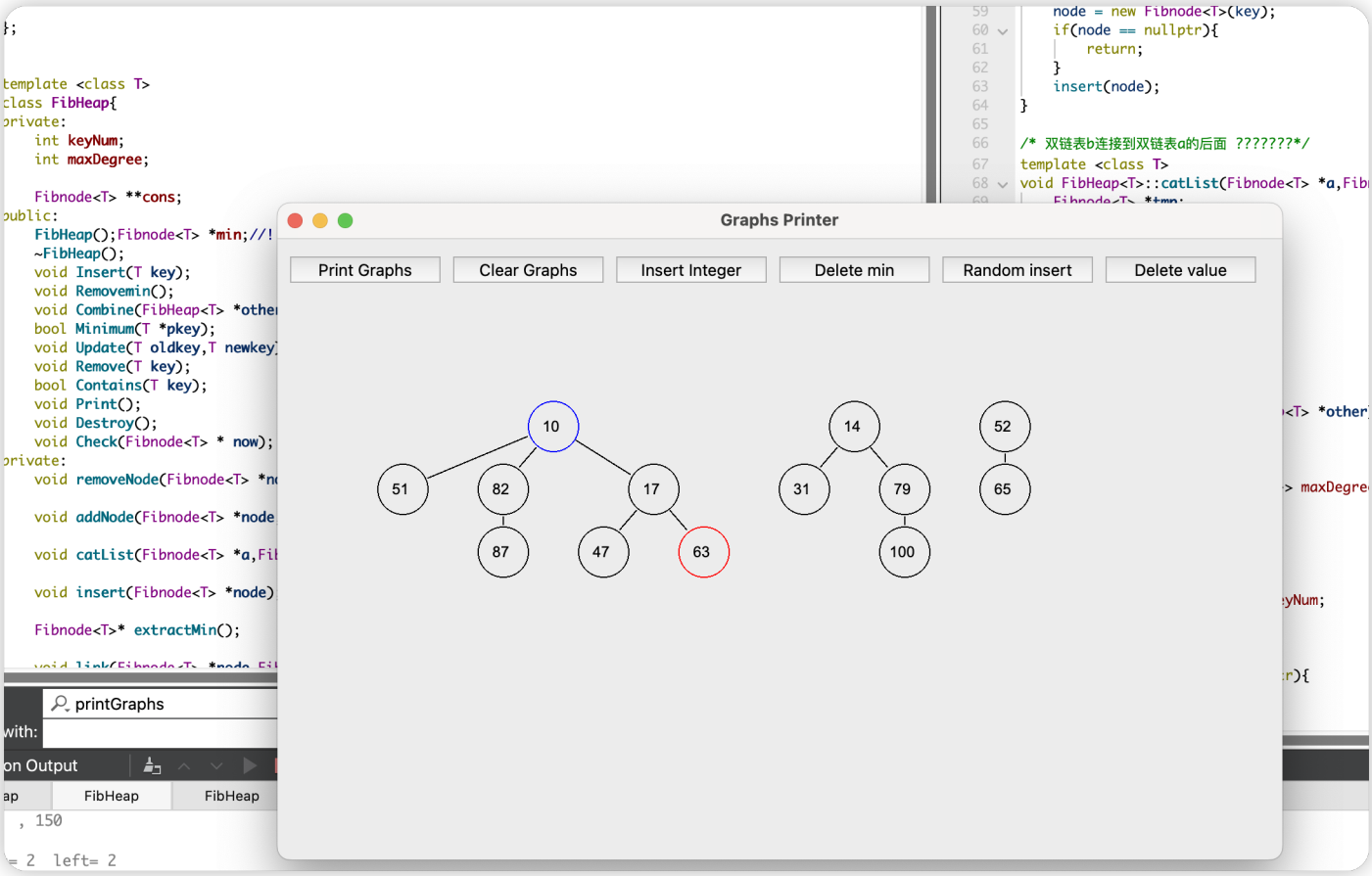
一步步实现即可。

为了更好的可拓展性，对标stl里的priority_queue，我采用template类模板的方式实现了Fibonacci堆。

这样在之后的qt可视化实验以及dijkstra算法的实验中，可以方便的用不同type的实例化调用Fibonacci堆。

验证Fibonacci堆的正确性

Qt实现可视化



- 通过分别计算每个节点的x，y坐标，然后利用QPainter进行绘制线、圆、数字等操作，实现了Fibonacci堆的可视化。
- 会对marked的节点和minimum节点进行特殊颜色标记，方便调试。
- **注意了Fibonacci堆的结偶性，没有在Fibnode内单独添加x,y坐标储存，而是仅利用一次树遍历得到所有的graph信息。**

```
MyWidget::info MyWidget::dfs(Fibnode<int>* now,int beginx,int depth){
    auto child = now ->child;
    int sum=beginx,interval=80;
    if(child==nullptr){
        addCircle(now,beginx,depth);return info(beginx,depth,0);
    }

    Fibnode<int>* start=child;
    vector<pair<double,double> > Linerecorder;
    do{
        Fibnode<int> * copy = child;
        info ans=dfs(copy,sum,depth+50);
        sum += ans.length;
        Linerecorder.push_back(make_pair(ans.x,ans.y));
        sum += interval;
        child = child ->right;
    }while(child!=start);

    double nowx=(double(sum+beginx-interval)/2),nowy=depth;

    for(auto it:Linerecorder){
        Line line=Line(nowx,nowy,it.first,it.second);
        if(nowy!=100) addLine(line);
    }
    Linerecorder.clear();

    addCircle(now,nowx,nowy);

    return info(nowx,nowy,sum-beginx-interval);

}
```

设定check函数

```
template <class T>
void FibHeap<T>::Check(Fibnode<T> * now){
    auto child = now ->child;
    if(child==nullptr){
        return;
    }
    Fibnode<int>* start=child;

    do{
        if(child->key<now->key)
            throw std::runtime_error("Check error");
        Check(child);
        child = child ->right;
        if(child!=child->left->right||child!=child->right->left) throw std::runtime_error("Check error");
    }while(child!=start);
}
```

检查了堆性质以及双向链表的正确性。

将上述两点结合起来，在实现从数据结构转化到graph的transform function里，我们可以方便的调试Fibonacci堆。

```
void MyWidget::Transform(){
    Fibnode<int>* root=new Fibnode<int>(0);
    root->child=Fibheap->min;root->right=root->left=root;
    try {
        Fibheap->Check(root);
    } catch (const std::runtime_error& e) {
        std::cerr << "Exception caught: " << e.what() << std::endl;
        throw(std::runtime_error("Check error"));
    }
    m_lines.clear();
    m_circles.clear();
    root=new Fibnode<int>(0);
    root->child=Fibheap->min;root->right=root;
    dfs(root,100,100);
}
```

与其他堆以及stl提供的priority_queue进行对拍比较

这里我使用大量的随机数据以及强力数据（针对一些极限情况的考虑，比如针对spfa最短路算法的最劣图构造）针对dijkstra算法需要的insert和remove_min操作进行了对拍，确保Fibonacci堆的正确性。

基于不同堆算法的dijkstra算法性能测试

这里我主要对比用priority_queue、Fibonacci堆以及list实现的dijkstra算法在随机图和强力图上的表现。

理论分析：

约定，节点数为n，边数为m。

- list
  insert: $O(1)$
  remove_min: $O(n)$
  max: $O(n^2)$
- priority_queue
  insert: $O(\log n)$
  remove_min: $O(\log n)$
  max: $O((n+m)\log n)$
- Fibonacci堆
  insert: $O(1)$
  remove_min: $O(\log n)$
  max: $O(m+n\log n)$

有了可靠的fibonacci堆，我们得意开展有效的对比实验。

为保证对比实验严谨，我使用完全相同的实现方式（包括io接口），只是在堆的选择上进行了更换。

在较弱数据下的实验结果

从上到下，分别是priority_queue和fibonacci堆在同样的十个数据集上运行的时间总和。

可以看到即使打开了对stl特友好的o2优化，fibonacci堆在较弱数据下也有着优势。list的表现是严重超时。

在强数据下的实验结果

节点在1e5数量级，边在2e5数量级，构图采取了一些极限情况的考虑，比如针对spfa最短路算法的最劣图构造。

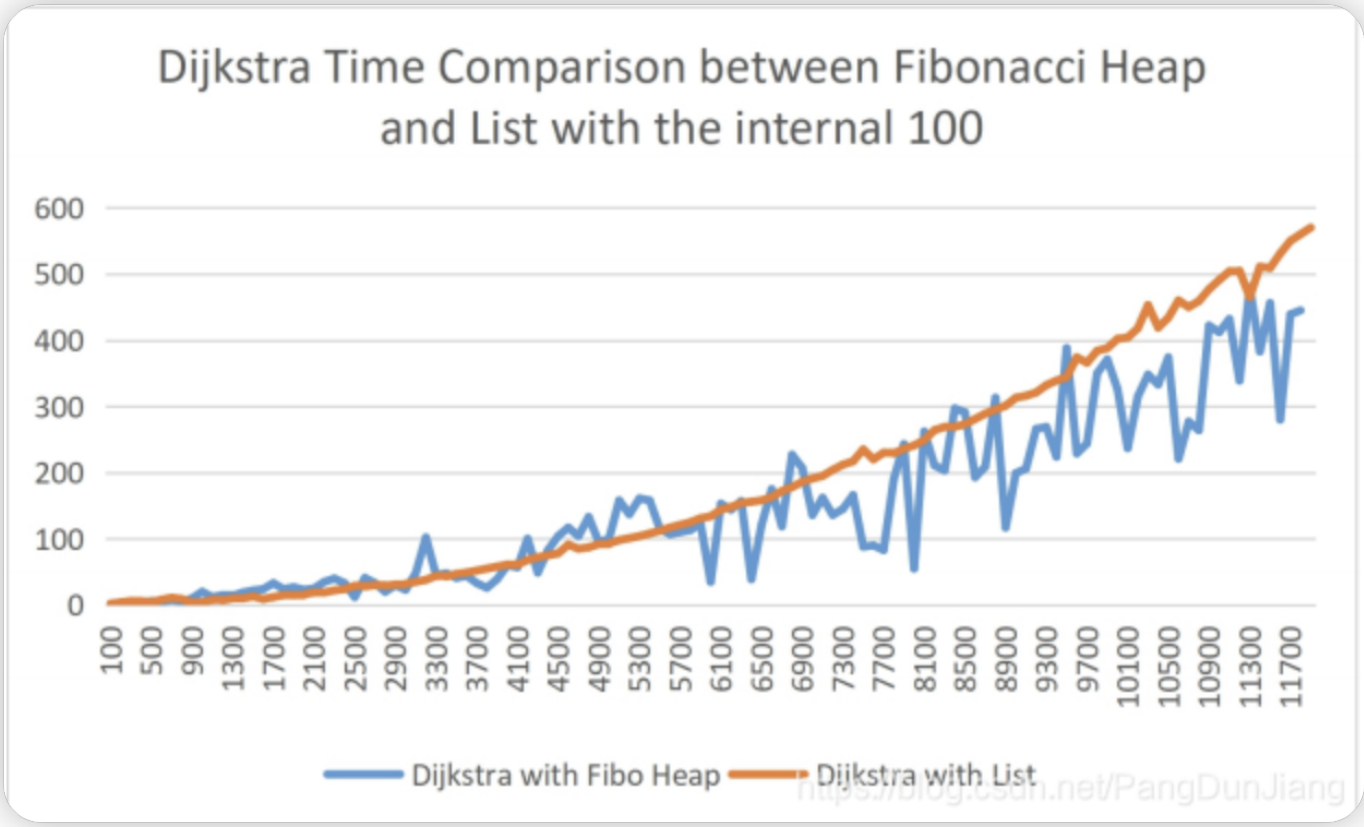
1. priority_queue 915ms
2. fibonacci_heap 692ms
3. priority_queue -o2 341ms
4. fibonacci_heap -o2 454ms
5. list ∞ms

可以看到，在正常编译环境下，fibonacci堆在强数据下有着更为显著的优势(25% off)。

但是打开o2变异优化后，stl中的priority_queue算法完成了反超，o2对stl系列操作优化太大，另外我手撸的fibonacci堆实现比较粗糙，没有进行过多的优化。

针对随机图的实验结果

我引用相关论文的实验结果：



由于随机图有着许多美好的性质，使得list在随机图上的期望运行时间有很好的上限保证，而fibonacci堆常数较大，此消彼长，在随机图上并没有拉开太大的差距。

Summary

最后，对实验结果进行了分析，得出结论：

- Fibonacci堆在dijkstra算法中有着更好的表现，并且随着图越稠密，优势会越大。
- Fibonacci堆比list理论上全方位更优秀，只有在随机图上，list可以接近它的表现。
- Fibonacci堆常数较大，实现复杂，在实际应用中需要权衡。