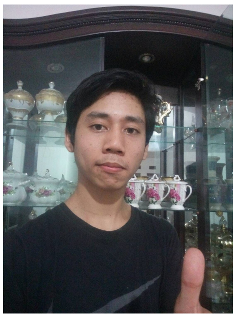
LAPORAN TUGAS BESAR 1
IF2123 ALJABAR LINIER DAN GEOMETRI
Semester I Tahun 2020/2021



Disusun oleh:
Kelompok 61

13519016 Louis Riemenn
13519068 Roy H Simbolon
13519092 Sharon Bernadetha Marbun

Himpunan Mahasiswa Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung
2020

Daftar Isi

Deskripsi Masalah

1.1 Abstraksi

Sistem persamaan linier (SPL) $Ax = b$ dengan n peubah (variabel) dan m persamaan adalah berbentuk

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad & + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \quad & + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \quad & + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

yang dalam hal ini x_i adalah peubah, a_{ij} dan b_i adalah koefisien $\in$ R. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah *Cramer* (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak, atau hanya satu (unik/tunggal).

Sebuah matriks M berukuran $n \times n$

$$
M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}
$$

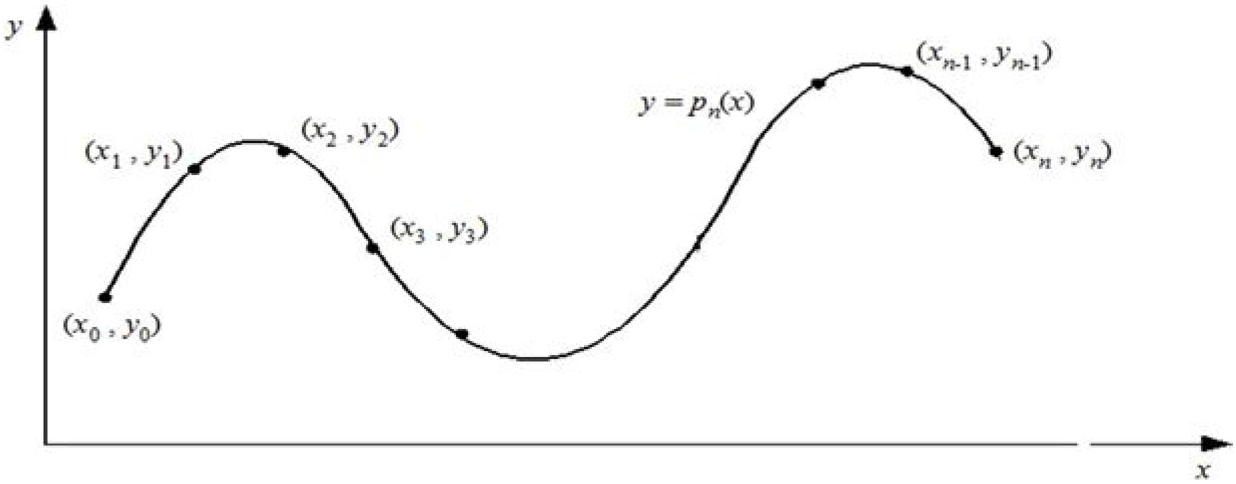
determinannya adalah

$$
\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}
$$

SPL memiliki banyak aplikasi dalam bidang sains dan rekayasa, dua diantaranya diterapkan pada tugas besar ini, yaitu interpolasi polinom dan regresi linier.

1.2 Interpolasi Polinom

Persoalan interpolasi polinom adalah sebagai berikut: Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). Tentukan polinom $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n.



Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di sembarang titik di dalam selang [x_0, x_n].

Polinom interpolasi derajat n yang menginterpolasi titik-titik (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n). adalah berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + … + a_nx^n$. Jika hanya ada dua titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua titik tersebut adalah $p_1(x) = a_0 + a_1x$ yaitu berupa persamaan garis lurus. Jika tersedia tiga titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga titik tersebut adalah $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ atau persaman kuadrat dan kurvanya berupa parabola. Jika tersedia empat titik, (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), dan (x_3, y_3), polinom yang menginterpolasi keempat titik tersebut adalah $p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, demikian seterusnya. Dengan cara yang sama kita dapat membuat polinom interpolasi berderajat n untuk n yang lebih tinggi asalkan tersedia (n+1) buah titik data. Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + … + a_nx^n$ untuk i = 0, 1, 2, …, n, akan diperoleh n buah sistem persamaan lanjar dalam a_0, a_1, a_2, …, a_n,

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_{02} + ... + a_n\ x^{\ n} = y$$

$$a_0 + a_1x_1 + a\ x^{\ 2} + ... + a_nx_1^{\ n} = y_1$$

$$... \qquad\qquad ...$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_{n2} + ... + a_nx^{\ n} = y_n$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini, yaitu nilai a_0, a_1, …, a_n, diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang sudah anda pelajari. Sebagai contoh, misalkan diberikan tiga buah titik yaitu (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513). Tentukan polinom interpolasi kuadratik lalu estimasi nilai fungsi pada $x = 9.2$. Polinom kuadratik berbentuk $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Dengan menyulihkan ketiga buah titik data ke dalam polinom tersebut, diperoleh sistem persamaan lanjar yang terbentuk adalah

$$a_0 + 8.0a_1 + 64.00a_2 = 2.0794$$
$$a_0 + 9.0a_1 + 81.00a_2 = 2.1972$$
$$a_0 + 9.5a_1 + 90.25a_2 = 2.2513$$

Penyelesaian sistem persamaan dengan metode eliminasi Gauss menghasilkan $a_0 = 0.6762$, $a_1 = 0.2266$, dan $a_2 = -0.0064$. Polinom interpolasi yang melalui ketiga buah titik tersebut adalah $p_2(x) = 0.6762 + 0.2266x - 0.0064x^2$. Dengan menggunakan polinom ini, maka nilai fungsi pada $x = 9.2$ dapat ditaksir sebagai berikut: $p_2(9.2) = 0.6762 + 0.2266(9.2) - 0.0064(9.2)^2 = 2.2192$.

1.3 Regresi Linier Berganda

Regresi Linear (akan dipelajari lebih lanjut di Probabilitas dan Statistika) merupakan salah satu metode untuk memprediksi nilai selain menggunakan Interpolasi Polinom. Meskipun sudah ada rumus jadi untuk menghitung regresi linear sederhana, terdapat rumus umum dari regresi linear yang bisa digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap β_i dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$\begin{array}{llllll}
nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + & \cdots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & + & \cdots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\
\vdots \qquad \vdots & \quad \vdots & & \qquad \vdots & \quad \vdots \\
b_0\sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} & + & \cdots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i
\end{array}$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

1.4 Spesifikasi Tugas

Mahasiswa perlu membuat Program Java untuk

1. Menghitung solusi SPL dengan metode eliminasi Gauss, metode Eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan).
2. Menyelesaikan persoalan interpolasi dan regresi linier.
3. Menghitung matriks balikan
4. Menghitung determinan matriks dengan berbagai metode (reduksi baris dan ekspansi kofaktor).

Spesifikasi program adalah sebagai berikut:

1. Program dapat menerima masukan (input) baik dari *keyboard* maupun membaca masukan dari file text. Untuk SPL, masukan dari *keyboard* adalah *m*, *n*, koefisien a_{ij} , dan b_i. Masukan dari *file* berbentuk matriks *augmented* tanpa tanda kurung, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

```
3 4.5 2.8 10 12
-3 7 8.3 11 -4
0.5 -10 -9 12 0
```

2. Untuk persoalan menghitung determinan dan matriks balikan, masukan dari *keyboard* adalah *n* dan koefisien a_{ij}. Masukan dari *file* berbentuk matriks, setiap elemen matriks dipisah oleh spasi. Misalnya,

```
3 4.5 2.8 10
-3 7 8.3 11
0.5 -10 -9 12
```

3. Untuk persoalan interpolasi, masukannya jika dari *keyboard* adalah *n*, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), dan nilai *x* yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung. Misalnya jika titik-titik datanya adalah (8.0, 2.0794), (9.0, 2.1972), dan (9.5, 2.2513), maka di dalam file text ditulis sebagai berikut:

```
8.0 2.0794
9.0 2.1972
9.5 2.2513
```

4. Untuk persoalan regresi, masukannya jika dari *keyboard* adalah *n* (jumlah peubah *x*), semua nilai-nilai x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni}, nilai y_i, dan nilai-nilai x_k yang akan ditaksir nilai fungsinya. Jika masukannya dari file, maka titik-titik dinyatakan pada setiap baris tanpa koma dan tanda kurung.

5. Untuk persoalan SPL, luaran (*output*) program adalah solusi SPL. Jika solusinya tunggal, tuliskan nilainya. Jika solusinya tidak ada, tuliskan solusi tidak ada, jika solusinya banyak, maka tuliskan solusinya dalam bentuk parametrik (misalnya $x_4 = -2$, $x_3 = 2s - t$, $x_2 = s$, dan $x_1 = t$.)

6. Untuk persoalan determinan dan matriks balikan, maka luarannya sesuai dengan persoalan masing-masing

7. Untuk persoalan polinom interpolasi dan regresi, luarannya adalah persamaan polinom/regresi dan taksiran nilai fungsi pada x yang diberikan.

8. Luaran program harus dapat ditampilkan pada layar komputer dan dapat disimpan ke dalam file.

9. Bahasa program yang digunakan adalah Java.

10. Program tidak harus berbasis GUI, cukup text-based saja, namun boleh menggunakan GUI (memakai kakas *Eclipse* misalnya).

11. Program dapat dibuat dengan pilihan menu. Urutan menu dan isinya dipersilakan dirancang masing-masing. Misalnya, menu:

```
MENU
  1.Sistem Persamaaan Linier
  2.Determinan
  3.Matriks balikan
  4.Interpolasi Polinom
  5.Regresi linier berganda
  6.Keluar
```

Untuk pilihan menu nomor 1 ada sub-menu lagi yaitu pilihan metode:

```
  1.Metode eliminasi Gauss
  2.Metode eliminasi Gauss-Jordan
  3.Metode matriks balikan
  4.Kaidah Cramer
```

Begitu juga untuk pilihan menu nomor 2 dan 3.

Teori Singkat

2.1 Sistem Persamaan Linier

Sesuai namanya, yaitu sistem persamaan linier, maka pangkat tertinggi di dalam variabelnya sama dengan 1. Sebuah SPL dengan *m* buah persamaan dan *n* buah variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ berbentuk

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

atau dalam bentuk Ax = b.

SPL dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

atau dalam bentuk perkalian matriks:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{b}$$

SPL dapat dinyatakan secara ringkas dalam bentuk matriks *augmented*:

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

1. Metode Eliminasi Gauss

   Untuk menyelesaikan SPL dengan metode eliminasi gauss, pertama-tama nyatakan SPL dalam bentuk matriks *augmented*, kemudian terapkan OBE pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

Kemudian, persamaan yang koresponden pada matriks eselon baris tersebut dipecahkan dengan teknik penyulihan mundur.

2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

   Metode ini merupakan pengembangan metode eliminasi Gauss. OBE diterapkan pada matriks *augmented* sehingga menghasilkan matriks eselon baris tereduksi.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

   Tidak diperlukan lagi substitusi secara mundur untuk memperoleh nilai-nilai variabel. Nilai variabel langsung diperoleh dari matriks *augmented* akhir.

3. Metode Matriks Balikan

   Pertama-tama, tinjau SPL Ax=b. Kalikan kedua ruas persamaan dengan A^{-1}.

$$(A^{-1})A\mathbf{x} = (A^{-1})\,\mathbf{b}$$
$$I\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b} \qquad (\text{karena } A^{-1}A = I)$$
$$\mathbf{x} = A^{-1}\,\mathbf{b} \qquad (\text{karena } I\mathbf{x} = \mathbf{x})$$

   Jadi, solusi SPL Ax = b adalah $x=A^{-1}b$.

4. Kaidah Cramer

   Jika Ax = b adalah SPL yang terdiri dari n persamaan linier dengan n peubah sedemikian sehingga det(A) 0, maka SPL tersebut memiliki solusi yang unik yaitu

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}\ , \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}\ , \ \dots\ , \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

   yang dalam hal ini, A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

2.2 Determinan

Sebuah matriks *M* berukuran $n \times n$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

determinannya dilambangkan dengan

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}$$

Untuk matriks A berukuran 2x2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

maka $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

1. Metode Reduksi Baris

   Determinan matriks A dapat diperoleh dengan melakukan OBE pada matriks A sampai diperoleh matriks segitiga (segitiga bawah atau atas).

   $$[A] \overset{\text{OBE}}{\sim} [\text{matriks segitiga bawah}]$$

   $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \overset{\text{OBE}}{\sim} \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & a'_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

   maka

   $\det(A) = (-1)^p a'_{11}\, a'_{22}\, a'_{33 \dots}\, a'_{nn}$

   dengan p menyatakan banyaknya operasi pertukaran baris di dalam OBE.

2. Metode Ekspansi Kofaktor

   Misalkan A adalah matriks berukuran n x n.

Didefinisikan:

Mij = minor entri a_{ij}

= determinan upa-matriks (submatrix) yang elemen-elemennya tidak berada pada baris i dan kolom j

Cij = $(-1)^{i+j}M_{ij}$ = kofaktor entri a_{ij}

Dengan menggunakan kofaktor, maka determinan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dapat dihitung dengan salah satu dari persamaan berikut:

$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n}$
$\det(A) = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{2n}C_{2n}$
$\vdots$
$\det(A) = a_{n1}C_{n1} + a_{n2}C_{n2} + \dots + a_{nn}C_{nn}$

$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \dots + a_{n1}C_{n1}$
$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + \dots + a_{n2}C_{n2}$
$\vdots$
$\det(A) = a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + \dots + a_{nn}C_{nn}$

2.3 Matriks Balikan

Jika A dan B adalah matriks persegi sedemikian sehingga AB = BA = I, maka B disebut balikan atau *invers* dari a dan dapat dituliskan B = A^{-1}. Matriks B juga mempunyai balikan yaitu A sehingga dapat dituliskan A = B^{-1}. Jika tidak memiliki balikan, maka matriks tersebut dikatakan matriks tunggal (singular).

1. Metode Eliminasi Gauss Jordan

   Metode eliminasi Gauss-Jordan dapat digunakan untuk menghitung matriks balikan. Untuk matriks A yang berukuran n x n, matriks balikannya, yaitu A^{-1} dicari dengan cara berikut:

   $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$

   yang dalam hal ini *I* adalah matriks identitas berukuran n x n.

2. Metode Adjoin

   Misalkan A adalah matriks berukuran n x n dan Cij adalah kofaktor entri a_{ij}. Adjoin dari A adalah transpose dari matriks kofaktor:

   adj(A) = [matriks kofaktor]^T

   Maka, balikan matriks A dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

2.4 Interpolasi Polinom

Interpolasi merupakan suatu teknik mencari harga suatu fungsi pada suatu titik di antara titik-titik yang nilai fungsinya sudah diketahui. Interpolasi polinom adalah persoalan interpolasi yang apabila diberikan sebanyak $n+1$ buah titik berbeda, (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), akan dicari nilai $p_n(x)$ yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Misalkan akan dicari persamaan polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_n x^n = y$$

dari (n+1) buah titik data.

Dengan menyulihkan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom tersebut, $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, \ldots, n,$ akan diperoleh n+1 buah persamaan lanjar sebagai berikut.

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_{02} + ... + a_n x^n = y$$

$$a_0 + a_1x_1 + a x^2 + ... + a_nx_1^n = y_1$$

$$... \qquad ...$$

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_{n2} + ... + a_nx^n = y_n$$

Solusi sistem persamaan lanjar ini kemudian diperoleh dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

2.5 Regresi Linier Berganda

Regresi Linear Berganda adalah model regresi linear dengan melibatkan lebih dari satu variabel bebas atau peubah. Dalam bahasa inggris, istilah ini disebut dengan *multiple linear regression*. Rumus umum dari regresi linier yang bisa digunakan untuk regresi linier berganda yaitu:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap β_i dapat digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$
\begin{array}{lllll}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{2i} + & \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i
\end{array}
$$

Sistem persamaan linier tersebut diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

Implementasi Program dalam Java

Terdapat tujuh buah class di dalam program ini:

1. public class Tubes1Algeo

   Method yang terdapat di dalam class ini yaitu:

   a. public static void main(String[] args)

      merupakan method utama di dalam program ini yang akan menginisiasi berjalannya program. Method memanggil method bacaMenu.

   b. public static void menu()

      merupakan method yang menampilkan menu utama dari program ke layar;

   c. public static void pil1()

      merupakan method yang menampilkan submenu dari pilihan 1 menu utama program ke layar, yaitu menampilkan pilihan metode untuk Sistem Persamaan Linier.

   d. public static void pil2()

      merupakan method yang menampilkan submenu dari pilihan 2 menu utama program ke layar, yaitu menampilkan pilihan metode untuk Determinan.

   e. public static void pil3()

      merupakan method yang menampilkan submenu dari pilihan 3 menu utama program ke layar, yaitu menampilkan pilihan metode untuk Matriks balikan.

f. public static void subMenu1()

   merupakan method yang menampilkan submenu untuk metode penginputan data ke layar, yang meliputi input melalui keyboard dan input melalui file.

g. public static void bacaMenu()

   merupakan method yang menerima inputan dari pengguna mulai dari menu utama sampai ke submenu-submenu yang diakses. Method ini memanggil method menu.

- Apabila pengguna memberikan masukan 1, akan dipanggil method pil1. Kemudian, akan diterima lagi masukan dari pengguna.
  - Apabila pengguna memberikan masukan 1, akan dipanggil method subMenu1. Kemudian, akan diterima lagi masukan dari pengguna.
    - ➔ Apabila pengguna memberikan masukan 1, akan dipanggil method bacaMatriks1, gauss, dan tulisHasil dari class MATRIKS,java.
    - ➔ Apabila pengguna memberikan masukan 2, akan dipanggil method bacaFile dari class FileMatriks, serta method gauss dan tulisHasil dari class MATRIKS.
  - Apabila pengguna memberikan masukan 2, akan dipanggil method subMenu1. Kemudian, akan diterima lagi masukan dari pengguna.
    - ➔ Apabila pengguna menerima masukan 1, akan dipanggil method bacaMatriks1, gaussJordan, dan tulisHasil dari class MATRIKS,java.
    - ➔ Apabila pengguna menerima masukan 2, akan dipanggil method bacaFile dari class FileMatriks, serta method gaussjordan dan tulisHasil dari class MATRIKS.
  - Apabila pengguna memberikan masukan 3, akan dipanggil method subMenu1. Kemudian, akan diterima lagi masukan dari pengguna.
    - ➔ Apabila pengguna memberikan masukan 1, akan dipanggil method bacaMatriks1 dan balikan dari class MATRIKS.
    - ➔ Apabila pengguna memberikan masukan 2, akan dipanggil method bacaFile dari class FileMatriks dan balikan dari class MATRIKS.
  - Apabila pengguna memberikan masukan 4, akan dipanggil method subMenu1. Kemudian, akan diterima lagi masukan dari pengguna.
    - ➔ Apabila pengguna memberikan masukan 1, akan dipanggil method bacaMatriks1, cramer, dan tulisMatriks1 dari class MATRIKS.
    - ➔ Apabila pengguna memberikan masukan 2, akan dipanggil method bacaFile dari class FileMatriks dan cramer dari class MATRIKS.
- Apabila pengguna memberikan masukan 2, akan dipanggil method pil2. Kemudian, akan diterima lagi masukan dari pengguna.
- Apabila pengguna memberikan masukan 3, akan dipanggil method pil3.
- Apabila pengguna memberikan masukan 4, akan dipanggil method interpol pada class Interpolasi dan method bacaMenu.
- Apabila pengguna memberikan masukan 5, akan dipanggil method regresi pada class Regresi dan method bacaMenu.

- Apabila pengguna memberikan masukan 6, akan ditampilkan “Terima kasih :)” ke layar dan program berakhir.

2. public class Determinan

   Metode yang terdapat di dalam class ini yaitu:

   a. public static double detReduksi(MATRIKS m)

   merupakan method yang menerima parameter sebuah matriks dan mengembalikan sebuah bilangan desimal yang merupakan hasil determinan dari matriks m dengan metode determinan reduksi.

   b. public static double detKofaktor(MATRIKS m)

   merupakan method yang menerima sebuah matriks sebagai parameter dan mengembalikan sebuah bilangan desimal yang merupakan determinan dari matriks tersebut dengan menggunakan metode determinan kofaktor.

3. public class MATRIKS

   Di dalam class ini terdapat struktur matriks yang terdiri dari komponen array berdimensi dua, integer baris yang menunjukkan indeks baris dari array, dan integer kolom yang menunjukkan indeks kolom dari array. Method yang terdapat di dalam class ini yaitu:

   a. public void MATRIKS(int i,int j)
   b. public void makeMATRIKS (int i, intj)

      merupakan method yang membuat matriks tersebut menjadi matriks yang berukuran ixj dengan semua nilainya bernilai 0.

   c. public void makeMATRIKS2(int i, int j)

      merupakan method yang membuat matriks tersebut menjadi matriks yang berukuran ixj dengan semua nilainya bernilai 1.

   d. public int getBrs()

      merupakan method yang mengembalikan jumlah baris dari matriks tersebut.

   e. public int getKol()

      merupakan method yang mengembalikan jumlah kolom dari matriks tersebut.

   f. public double getElmt(int i, int j)

      merupakan method yang mengembalikan nilai elemen dari matriks tersebut pada indeks baris i dan kolom j.

   g. public void bacaMatriks1()

      merupakan method yang menjalankan proses meminta masukan dari keyboard dan mengisikannya ke dalam matriks tersebut termasuk ukuran dari matriks tersebut.

h. public void bacaMatriks2(int i, int j)

   merupakan method yang menjalankan proses meminta masukan dari keyboard dan mengisikannya ke dalam matriks dengan ukuran matriks seperti pada parameter.

i. public void tulisMatriks()

   merupakan method yang melakukan looping sebanyak elemen matriks dan menuliskan matriks ke layar.

j. public void swap(int R1, int R2)

   merupakan method yang melakukan proses penukaran baris R1 dan baris R2 pada matriks tersebut,

k. public void plus(int R1, int R2, double K, double L)

   merupakan method yang melakukan penambahan pada bars R1 dengan rumus sebagi berikut: R1=K*R1 + L*R2

l. public void minus(int R1, int R2, double K, double L)

   merupakan method yang melakukan proses pengurangan pada baris R1 dengan rumus sebagai berikut: R1 = K*R1 - L*R2

m. public void kaliKoef(int R, double X)

   merupakan method yang menjalankan sebuah proses yaitu mengalikan semua elemen pada baris R dengan bilangan X

n. public void kaliKoef2(int R, double X)

   merupakan method yang menjalankan sebuah proses yaitu mengalikan semua elemen pada kolom R dengan bilangan X

o. public boolean isBrsZero(int R)

   merupakan method yang menghasilkan nilai kebenaran, yang mana menghasilkan true jika semua elemen matriks pada baris R bernilai 0, dan false jika tidak

p. public boolean isSquare()

   merupakan method yang menghasilkan nilai kebenaran, yang mana menghasilkan true jika matriks berbentuk persegi

q. public int getLead(int R)

   merupakan method yang menghasilkan indeks pada matriks yang menunjuk pada bilangan pertama yang bukan bernilai 0 pada baris R

r. public void sortMatriks()

   merupakan method yang berfungsi untuk mengurutkan matriks berdasarkan nilai dari getLead pada setiap baris

s. public static MATRIKS kaliMatriks(MATRIKS m1, MATRIKS m2)

   merupakan method yang mengembalikan sebuah matriks yang merupakan hasil kali dari 2 buah matriks

t. public static double[] kaliMatriks(MATRIKS mi, double [] m2)

   merupakan method yang mengembalikan sebuah array (matriks dengan kolom berjumlah 1) yang merupakan hasil perkalian matriks dengan array (matriks dengan kolom 1)

u. public void makeIdentitas(int r)

   merupakan method yang mengubah matriks menjadi matriks identitas dengan ukuran rxr

v. public MATRIKS gabungMatriks(MATRIKS N1, MATRIKS N2)

   merupakan method yang menjalankan proses inputan dua buah matriks sama ukuran dan mengembalikan gabungan dari kedua matriks tersebut.

w. public MATRIKS potongMatriks(int a, int b)

   merupakan method yang menjalankan proses inputan matriks dan mengembalikan setengah matriks yang berada sebelah kanan.

x. public void gauss()

   merupakan method yang berfungsi untuk melakukan eliminasi gauss pada sebuah matriks.

y. public void gaussJordan()

   merupakan method yang berfungsi untuk melakukan eliminasi gauss Jordan pada sebuah matriks.

z. public void tulisHasil()

   merupakan method yang berfungsi untuk menerjemahkan matriks augmented yang telah menerima OBE ke bentuk sebuah solusi

aa. public void cramer()

   merupakan method yang berfungsi untuk melakukan eliminasi metode cramer pada sebuah matriks.

bb. public void balikan()

   merupakan method yang berfungsi untuk melakukan eliminasi dengan metode matriks balikan pada sebuah matriks.

4. public class Matriks_Balikan
   a. public static MATRIKS MatriksBalikanGaussJordan(MATRIKS N)

merupakan method yang menjalankan proses meminta inputan berupa matriks dan mengembalikannya matriks balikan dari matriks tersebut dengan metode gauss Jordan.

b. public static MATRIKS MatriksBalikanAdjoin(MATRIKS m)

merupakan method yang menjalankan proses meminta inputan berupa matriks dan mengembalikannya matriks balikan dari matriks tersebut dengan metode adjoin(transpose kofaktor).

5. public class FileMatriks
   a. public static MATRIKS bacaFile(String fileName)

   merupakan method yang dibuat khusus untuk membaca sebuah matriks yang berada dalam file src dengan nama “sample.txt” dan memasukkan nilainya kedalam matriks yang kemudian akan dikembalikan

Eksperimen

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 1
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer

Pilih angka: 1
1. Input melalui keyboard
2. Input dengan file
Pilih angka: 1
Masukkan jumlah baris: 3
Masukkan jumlah kolom: 4
2
3
-1
5
4
4
-3
3
-2
3
-1
1
X3 = 3.00 ;X2 = 2.00 ;X1 = 1.00 ;
```

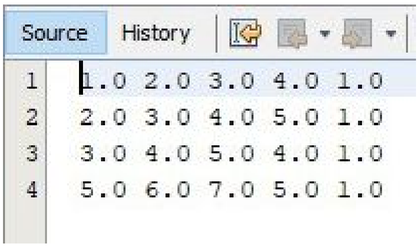
```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 1
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer

Pilih angka: 2
1. Input melalui keyboard
2. Input dengan file
Pilih angka: 1
Masukkan jumlah baris: 3
Masukkan jumlah kolom: 4
5
-3
2
3
8
-5
6
7
3
4
-3
15
X3 = 1.00 ;X2 = 3.00 ;X1 = 2.00 ;
```

Menjalankan SPL Metode Matriks Balikan | Menjalankan SPL Metode Cramer

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 2
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 1
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer

Pilih angka: 4
1. Input melalui keyboard
2. Input dengan file
Pilih angka: 1
Masukkan matriks augmented.
Masukkan jumlah baris: 3
Masukkan jumlah kolom: 4
2
-3
2
3
8
-5
6
7
3
4
-3
15
x1=0.11 ;x2=25.06 ;x3=-0.01 ;
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 1
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer

Pilih angka: 3
1. Input melalui keyboard
2. Input dengan file
Pilih angka: 1
Masukkan matriks augmented.
Masukkan jumlah baris: 3
Masukkan jumlah kolom: 4
1
-3
1
8
2
3
-1
1
3
-2
-2
7
X1 = 3.00 ;X2 = -1.00 ;X3 = 2.00 ;
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 3
1. Metode eliminasi Gauss-Jordan
2. Metode adjoin

Pilih angka: 2
Masukkan jumlah baris: 3
Masukkan jumlah kolom: 3
2
4
3
3
5
2
4
6
3
Matriks balikannya adalah  :
-0.75 -1.50 1.75
0.25 1.50 -1.25
0.50 -1.00 0.50
```


Source
History
1.0 2.0 3.0 4.0 1.0
2.0 3.0 4.0 5.0 1.0
3.0 4.0 5.0 4.0 1.0
5.0 6.0 7.0 5.0 1.0

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 3
1. Metode eliminasi Gauss-Jordan
2. Metode adjoin

Pilih angka: 1
Masukkan jumlah baris: 3
Masukkan jumlah kolom: 3
3
2
-1
1
6
3
2
-4
0
Matriks balikannya adalah  :
0.19 0.06 0.19
0.09 0.03 -0.16
-0.25 0.25 0.25
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 1
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer

Pilih angka: 1
1. Input melalui keyboard
2. Input dengan file
Pilih angka: 2
Pastikan lokasi file sudah berada dalam folder src dengan nama sample.txt
X1 = -1.00 + 3.00c ;X2 = 1.00 + 2.00c ;X3 = 1.00c ;X4 = d ;
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 1
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer

Pilih angka: 2
1. Input melalui keyboard
2. Input dengan file
Pilih angka: 2
Pastikan lokasi file sudah berada dalam folder src dengan nama sample.txt
X1 = -1.00 - 1.00c ;X2 = 1.00 + 2.00c ;X3 = 1.00c ;X4 = d ;
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 1
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer

Pilih angka: 4
1. Input melalui keyboard
2. Input dengan file
Pilih angka: 2
Pastikan lokasi file sudah berada dalam folder src dengan nama sample.txt
x1=NaN ;x2=-0.00 ;x3=-0.00 ;x4=NaN ;
```

```
MENU
1. Sistem Persamaan Linier
2. Determinan
3. Matriks balikan
4. Interpolasi Polinom
5. Regresi linier berganda
6. Keluar

Pilih angka: 1
1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode eliminasi Gauss-Jordan
3. Metode matriks balikan
4. Kaidah Cramer

Pilih angka: 3
1. Input melalui keyboard
2. Input dengan file
Pilih angka: 2
Pastikan lokasi file sudah berada dalam folder src dengan nama sample.txt
X1 = NaN ;X2 = NaN ;X3 = NaN ;X4 = NaN ;
```

Kesimpulan, Saran, dan Refleksi

5.1 Kesimpulan

Terdapat berbagai metode dalam menyelesaikan persoalan sistem persamaan linier, yaitu dengan metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah cramer. Determinan matriks juga dicari dengan metode reduksi baris dan metode ekspansi kofaktor. Matriks balikan dapat dicari dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan. Selain itu, persoalan interpolasi polinom dan regresi linier berganda dapat diselesaikan layaknya menyelesaikan persoalan sistem persamaan linier. Maka, dapat kami simpulkan bahwa kelima persoalan ini memiliki kesinambungan tertentu dalam pemecahan masalahnya

5.2 Saran

Kami percaya bahwa tujuan dari tugas besar ini adalah untuk lebih memahami aplikasi dari apa yang telah dipelajari pada mata kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri, terutama mengenai sistem persamaan linier, matriks balikan, dan determinan. Namun, kami merasa bahwa tugas besar ini membuat kami lebih terfokus dalam mempelajari bahasa pemrograman Java yang belum pernah kami pakai sebelumnya. Oleh karena itu, saran dari kami adalah supaya ke depannya tugas besar disesuaikan dengan bahasa pemrograman yang telah diketahui atau diajarkan sebelumnya kepada mahasiswa.

5.3 Refleksi

Melalui tugas besar ini, kami jadi belajar banyak hal, terutama tentang bahasa pemrograman Java serta cara menggunakannya. Selain itu, kami jadi lebih mengasah pengetahuan kami mengenai sistem persamaan linier, determinan, matriks balikan, interpolasi polinom, serta regresi linier berganda. Kami juga belajar tentang bagaimana pentingnya kemampuan manajemen waktu yang baik, koordinasi, serta kerjasama.