VL05_Mehrstufige Zufallsexperimente

5.2. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) wird häufig als „Wahrscheinlichkeit von A gegeben B“ ausgesprochen.

Definition 5.1 (bedingte Wahrscheinlichkeit)
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathscr{A}$ Ereignisse mit $P(B) > 0$.

Die ***bedingte Wahrscheinlichkeit*** (engl. *conditional probability*) $P(A|B)$, dass das Ereignis A unter der Bedingung eintritt, dass das Ereignis B eingetreten ist, ist definiert als

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Für jedes feste Ereignis B ist die Abbildung $P(\cdot|B)$ wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathscr{A})$.

Beispiel: Zweimaliges Würfeln
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme min. 10 ist, wenn im 1. Wurf eine 5 geworfen wurde?
P(A) = P({(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)})= 6/36 =1/6
P(B) = P({(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)})= 6/36 =1/6
P(A∩B) = P({(5,5), (5,6)}) = 2/36 = 1/18

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/18}{1/6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

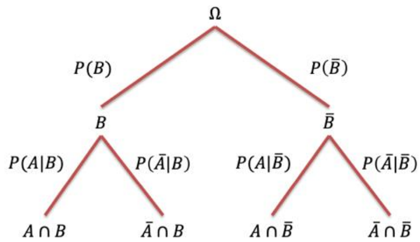
5.2.2. Multiplikationssatz

Wenn wir die definierende Gleichung der bedingten Wahrscheinlichkeit **umformen**, erhalten wir den Multiplikationssatz.

Satz 5.2 (Multiplikationssatz)
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Für zwei Ereignisse $A, B \in \mathscr{A}$ mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ gilt

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B).$$



Für derartige Ereignisbäume gelten folgende Regeln:

1. Die Kindknoten eines Ereignisses bilden eine **Zerlegung** der zu gehörigen Ereignismenge, d. h.
   - die Ereignismengen der Kindknoten sind paarweise disjunkt und
   - die Vereinigung der Ereignismengen der Kindknoten ist gleich der Ereignismenge des Elternknotens.
2. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten an den Kanten eines Elternknotens zu seinen Kindknoten ist gleich eins. P(A|B) + P(ā|B) = 1
3. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses eines Blattknotens ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten des Weges zwischen dem Wurzelknoten W und dem Blattknoten.

1. $(A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset \quad \text{und} \quad (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) = B$
2. $P(A|B) + P(\overline{A}|B) = 1$
3. $P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$

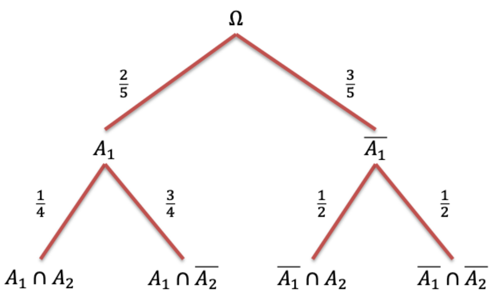
Beispiel: Multiplikationssatz
Von 5 Monitoren seien 2 defekt. Wir wählen nacheinander zwei Monitore aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide ausgewählten Monitore defekt sind?
Ω = {(d1,d2),(d1, f1),(d1, f2),(d1, f3),(d2, f1),(d2, f2),(d2, f3),(f1, f2),(f1, f3),(f2, f3)}

<u>**kombinatorisch**</u>

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{10} = \frac{1}{10}.$$

Lösung 2 (mit bedingter Wahrscheinlichkeit):
$P(A_1) = 2/5$.
Unter der Bedingung, dass der erste ausgewählte Monitor defekt ist, beträgt die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A_2|A_1)$, aus den verbliebenen 4 Monitoren den einzigen defekten auszuwählen, $P(A_2|A_1) = 1/4$.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2|A_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$



5.3. Stochastische Unabhängigkeit

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ $P(B)>0$

$P(A|\bar{B}) = P(A)$ für $P(\bar{B})>0$

Definition 5.3 (Stochastische Unabhängigkeit)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Zwei Ereignisse $A, B \in \mathscr{A}$ heißen ***stochastisch unabhängig*** (engl. *independent*), wenn

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu den Bedingungen

$$\Leftrightarrow \quad P(A|B) = P(A) \quad \text{für} \quad P(B) > 0,$$
$$\Leftrightarrow \quad P(B|A) = P(B) \quad \text{für} \quad P(A) > 0.$$

Definition 5.4 (Stochastische Unabhängigkeit)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Die Ereignisse $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, \ldots, n$, heißen ***stochastisch unabhängig***, wenn für alle Kombinationen $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, $k \leq n$, dieser Ereignisse gilt

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Beispiel: Stochastische Unabhängigkeit
Eine faire Münze mit den Seiten „Wappen" und „Zahl" werde zweimal geworfen. Sind die folgenden Ereignisse paarweise unabhängig? Sind alle drei Ereignisse zusammen unabhängig?
- A: Der erste Wurf ergibt „Wappen".
- B: Der zweite Wurf ergibt „Wappen".
- C: Beide Würfe sind verschieden.

$$\Omega = \{W, Z\}^2,$$
$$\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega),$$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{mit} \quad |\Omega| = 2^2 = 4.$$

Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse,

$$P(A) = P(\{(W,W),(W,Z)\}) = \frac{1}{2},$$
$$P(B) = P(\{(W,W),(Z,W)\}) = \frac{1}{2},$$
$$P(C) = P(\{(W,Z),(Z,W)\}) = \frac{1}{2}.$$

Schließlich prüfen wir die Unabhängigkeit.

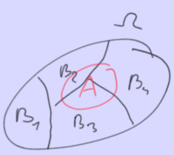
$$P(A \cap B) = P(\{(W,W)\}) = \frac{1}{4} = \overset{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{P(A)P(B)}, \quad \checkmark$$
$$P(A \cap C) = P(\{(W,Z)\}) = \frac{1}{4} = P(A)P(C), \quad \checkmark$$
$$P(B \cap C) = P(\{(Z,W)\}) = \frac{1}{4} = P(B)P(C), \quad \checkmark$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

Die Ereignisse A, B, C sind also paarweise unabhängig, aber nicht alle drei zusammen unabhängig.

5.3.2. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

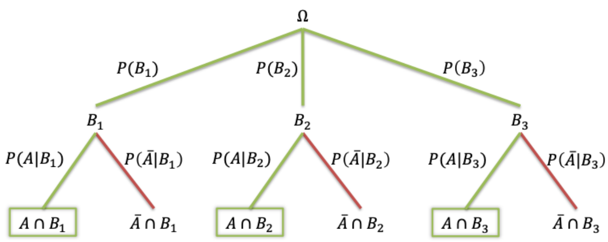
Satz 5.5 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $B_i \in \mathscr{A}$, $P(B_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, Ereignisse, die eine ***Zerlegung*** des Ergebnisraums Ω bilden, d. h.

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \quad \text{und} \quad \forall i, j, i \neq j: \ B_i \cap B_j = \emptyset.$$



Für ein beliebiges Ereignis $A \in \mathscr{A}$ gilt dann

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{P(B_i)P(A|B_i)}_{= P(A \cap B_i)}.$$



$P(A) = P(B)\,P(A|B) + P(\bar{B})\,P(A|\bar{B})$

5.4. Satz von Bayes

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- Für beliebige Ereignisse $A, B \in \mathscr{A}$ mit $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ gilt

$$P(B|A) = \frac{P(B)\,P(A|B)}{P(A)}. \qquad \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{\cancel{P(B)}\,P(A\cap B)}{P(A)\,\cancel{P(B)}} = P(B|A)$$

- Seien $B_i \in \mathscr{A}$, $P(B_i) > 0$, $i = 1, \ldots, n$, Ereignisse, die eine Zerlegung der Ergebnismenge Ω bilden.
  Dann gilt für ein beliebiges Ereignis $A \in \mathscr{A}$ mit $P(A) > 0$ und ein beliebiges B_k $(1 \leq k \leq n)$

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)\,P(A|B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)\,P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\,P(A|B_i)}.$$

5.4.2. Anwendungen

Beispiel: Infektionstest

Ein Test auf Tuberkulose (TBC) falle bei einer infizierten Person mit 99%-iger Sicherheit po- sitiv und bei einer nicht infizierten Person mit 98%-iger Sicherheit negativ aus. Weiterhin sei bekannt, dass insgesamt 0.1 % der Bevölkerung mit TBC infiziert sind.

- Eine Person lässt sich testen, der Test fällt positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlich- keit, dass sie trotzdem nicht mit TBC infiziert ist? Ein solcher Fehler heißt Fehler 1. Art (falsch positiv).
- Eine Person lässt sich testen, der Test fällt negativ aus. Wie groß ist die Wahrscheinlich- keit, dass sie trotzdem mit TBC infiziert ist? Ein solcher Fehler heißt Fehler 2. Art (falsch negativ).

Die Fehler 1. und 2. Art lassen sich mit Hilfe einer Tabelle verdeutlichen. Der „Normalzu- stand" wird in dem Zusammenhang häufig als **Nullhypothese** H_0 bezeichnet, der entsprechende „außergewöhnliche Zustand" als **Alternativhypothese** H_1.

Nullhypothese H_0: Person ist nicht mit TBC infiziert
Alternativhypothese H_1: Person ist mit TBC infiziert

	Test negativ (H_0 wird beibehalten)	Test positiv (H_0 wird verworfen)
Nicht infiziert (H_0 wahr)	Korrekt (richtig negativ)	Fehler 1. Art (falsch positiv)
Infiziert (H_1 wahr)	Fehler 2. Art (falsch negativ)	Korrekt (richtig positiv)

Für eine Person betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ mit

$$\Omega = \{\text{infiziert}, \text{nicht infiziert}\} \times \{\text{Test positiv}, \text{Test negativ}\},$$
$$\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega).$$

Folgende Ereignisse sind für das Problem relevant.

- I (infiziert): eine Person ist mit TBC infiziert,
- $\overline{I}$: eine Person ist nicht mit TBC infiziert,
- T (Test positiv): eine Person wird positiv auf TBC getestet,
- $\overline{T}$: eine Person wird negativ auf TBC getestet.

Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$P(I) = 0.001 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{I}) = 0.999,$$
$$P(T|I) = 0.99 \quad \textit{(Sensitivität)} \quad \Rightarrow \quad P(\overline{T}|I) = 0.01,$$
$$P(\overline{T}|\overline{I}) = 0.98 \quad \textit{(Spezifität)} \quad \Rightarrow \quad P(T|\overline{I}) = 0.02.$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(I|\overline{T})$ für einen Fehler 2. Art (falsch negativ) ergibt sich aus dem Satz von Bayes als

$$P(I|\overline{T}) = \frac{P(I)\,P(\overline{T}|I)}{P(\overline{T})} = \frac{P(I)\,P(\overline{T}|I)}{P(I)\,P(\overline{T}|I) + P(\overline{I})\,P(\overline{T}|\overline{I})}$$
$$= \frac{0.001 \cdot 0.01}{0.001 \cdot 0.01 + 0.999 \cdot 0.98} \approx 1.021 \cdot 10^{-5}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person trotz negativem Testergebnis infiziert ist, ist mit ca. 0.001 % also sehr gering.

Die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{I}|T)$ für einen Fehler 1. Art (falsch positiv) ergibt sich entsprechend als

$$P(\overline{I}|T) = \frac{P(\overline{I})\,P(T|\overline{I})}{P(T)} = \frac{P(\overline{I})\,P(T|\overline{I})}{P(I)\,P(T|I) + P(\overline{I})\,P(T|\overline{I})}$$
$$= \frac{0.999 \cdot 0.02}{0.001 \cdot 0.99 + 0.999 \cdot 0.02} \approx 0.9528.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person trotz positivem Testergebnis nicht infiziert ist, beträgt also über 95 %.