4. Kombinatorik

Die Kombinatorik, die als Kunst des Zählens umschrieben werden kann, spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine wichtige Rolle. Einige typische Fragestellungen sind z. B.:

- Wie viele mögliche Passwörter aus genau 8 Buchstaben und Ziffern gibt es, die mindestens eine Ziffer enthalten?
- Wie viele dieser Stichproben enthalten bei einer Qualitätsprüfung genau 2 defekte Elemente?

4.1. Grundregeln

4.1.1. Fakultät und Binomialkoeffizient

Definition 4.1 (Fakultät, Binomialkoeffizient)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Fakultät (engl. *factorial*) $n!$ definiert durch

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad n = 0, \\ \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{für} \quad n > 0. \end{cases}$$

$0! = 1$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ definiert als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots k}$$

Satz 4.2 (Binomialkoeffizient)
Für den Binomialkoeffizienten gelten folgende Rechenregeln.

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Eine einfache Berechnung der Binomialkoeffizienten ist mit dem **Pascalschen Dreieck** möglich.
Beginnt man die Zählung von Zeilen und Spalten mit 0, so steht in Zeile n und Spalte k im Pascalschen Dreieck gerade der Binmialkoeffizient $\binom{n}{k}$

~~1~~
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
$\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$

Satz 4.3 (Binomischer Lehrsatz)
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

4.1.2. Produktregel

Grundlegend für die weiteren Regeln der Kombinatorik ist die sogenannte Produktregel, die sich aus dem kartesischen Produkt der Mengenlehre ergibt.

Satz 4.4 (Produktregel, Abzähltheorem)
Gebildet werden solle ein k-Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $k \in \mathbb{N}$. Es gebe $n_i \in \mathbb{N}_0$ verschiedene Möglichkeiten für die Wahl des i-ten Elements x_i $(i = 1, \ldots, k)$.

Dann lassen sich insgesamt

$$\prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

verschiedene solcher k-Tupel bilden.

In der Mengenlehre entspricht dies dem kartesischen Produkt; für k = 2 gilt z. B.
|A x B| = |A|·|B|.

Beispiel: Produktregel

Es gebe 3 Wege, um von Hannover nach Göttingen zu fahren, und 2 Wege, um von Göttingen nach Kassel zu fahren. Wie viele mögliche Wege gibt es, um von Hannover nach Kassel zu fahren?

	B1	B2
A1	A1-B1	A1-B2
A2	A2-B1	A2-B2
A3	A3-B1	A3-B2

3·6 = 6 mög.

4.2. Auswahl ohne Wiederholung

4.2.1. Variation und Permutation

Definition 4.5 (Variation, Permutation)

- Eine Auswahl von k Elementen aus einer Menge von n Elementen für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$ *mit* Beachtung der Reihenfolge heißt Variation (auch geordnete Auswahl oder k-Permutation, engl. *permutation*).
- Können Objekte dabei mehrfach ausgewählt werden, spricht man von einer Variation mit Wiederholung, ansonsten von einer Variation ohne Wiederholung.
- Der Spezialfall $k = n$, bei dem alle Elemente ausgewählt werden, heißt Permutation.

Satz 4.6 (Anzahl Variationen ohne Wiederholung)
Die Anzahl der möglichen ***Variationen ohne Wiederholung*** von k aus n Elementen ist gegeben durch

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Für den Spezialfall $k = n$ ist die Anzahl der möglichen ***Permutationen*** (ohne Wiederholung) einer Menge von n Elementen gegeben durch

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!.$$

Beispiel: Permutationen
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Bilder an eine Wand zu hängen, an der sich 5 Haken befinden?

• Für den ersten Haken gibt es 5 mögliche Bilder, für den zweiten Haken bleiben noch 4 mögliche Bilder, etc.
• Folglich gibt es gemäß der Produktregel

5·4·…·1 = 5! = 120

Beispiel: Variationen
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 2 von 5 Bildern an eine Wand zu hängen, an der sich 2 Haken befinden?

• Für den ersten Haken gibt es 5 mögliche Bilder, für den zweiten Haken bleiben noch 4 mögliche Bilder.
• Folglich gibt es gemäß der Produktregel

5·4 = 5 · (5-2+1) = 20

4.2.2. Kombination

Definition 4.7 (Kombination)

- Eine Auswahl von k Elementen aus einer Menge von n Elementen für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$ *ohne* Beachtung der Reihenfolge heißt ***Kombination*** (auch ***ungeordnete Auswahl***, engl. *combination*).
- Können Objekte dabei mehrfach ausgewählt werden, spricht man von einer ***Kombination mit Wiederholung***, ansonsten von einer ***Kombination ohne Wiederholung***.

Satz 4.8 (Anzahl Kombinationen ohne Wiederholung)
Die Anzahl der möglichen ***Kombinationen ohne Wiederholung*** von k aus n Elementen ist gegeben durch

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Beispiel : Kombination (ohne Wiederholung)

Wie oft klingen die Gläser, wenn bei einer Party mit 10 Leuten jeder mit jedem einmal anstößt?

Es handelt sich um eine Kombination, also klingen die Gläser

$$\binom{10}{2} = (10 \cdot 9)/(2 \cdot 1) = 45$$

Beispiel : Kombination (ohne Wiederholung)

Wie viele Möglichkeiten gibt es beim Lotto, 6 aus 49 Zahlen zu ziehen?

Es handelt sich um eine Kombination, also gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot \ldots \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1} \approx 13.98\,\text{Mio.}$$

4.2.3. Hypergeometrische Verteilung

Folgerung 4.10 (Hypergeometrische Verteilung)

- Gegeben sei eine Grundgesamtheit von N Elementen, von denen M eine Eigenschaft W haben und $K = N - M$ eine gegenteilige Eigenschaft S haben ($N, M \in \mathbb{N}_0$ mit $M \leq N$).
- Aus der Menge werde eine Stichprobe vom Umfang n entnommen mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $n \leq N$.
- Dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_m, in der Stichprobe genau m Elemente mit der Eigenschaft W und $k = n - m$ Elemente mit der Eigenschaft S zu haben, gegeben durch
$$P(A_m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{K}{k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}.$$

Eine Lieferung von 10 USB-Sticks enthalte 3 defekte Geräte. Man entnimmt eine Stichprobe im Umfang von 5 Geräten.

1. Wie viele verschiedene Stichproben gibt es?
2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe genau 2 defekte Geräte enthält?
3. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe mindestens 1 defektes Gerät enthält?

1. Kombination, $\binom{10}{5} = 252$ verschiedene Stichproben.
2. Schritt 1: Entnahme von 2 defekten Geräten aus 3 möglichen defekten Geräten, $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten.

   Schritt 2: Entnahme von 3 funktionierenden Geräten aus 7 möglichen funktionierenden Geräten, $\binom{7}{3}$ Möglichkeiten.

   Nach der Produktregel gibt es $\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3} = 105$ mögliche Stichproben mit genau 2 defekten Geräten.

   Da die Stichproben aus unterscheidbaren Elementen bestehen, sind sie alle gleich wahrscheinlich. Es handelt sich also um ein Laplace-Experiment. Sei A_2 das Ereignis, dass die Stichprobe genau 2 defekte Geräte enthält. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist demnach
$$P(A_2) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{3}}{\binom{10}{5}} = \frac{105}{252} \approx 0.417.$$
3. Sei $A_{\geq 1}$ das Ereignis, dass die Stichprobe mindestens 1 defektes Gerät enthält, und seien A_i, $i = 0, \ldots, 3$ die Ereignisse, dass die Stichprobe genau i defekte Geräte enthält. Wir können die Wahrscheinlichkeiten für die disjunkten Ereignisse A_1, A_2 und A_3 wie in der vorherigen Aufgabe berechnen und addieren,
$$P(A_{\geq 1}) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$
   Einfacher ist es jedoch, die Wahrscheinlichkeit des komplementären Ereignisses A_0 zu berechnen und von 1 zu subtrahieren,
$$P(A_{\geq 1}) = 1 - P(\overline{A_{\geq 1}}) = 1 - P(A_0) = 1 - \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = 1 - \frac{1 \cdot 21}{252} \approx 0.917.$$

4.3. Auswahl mit Wiederholung

Variation und Permutation und Kombination

Satz 4.11 (Anzahl Variationen mit Wiederholung)
Die Anzahl der möglichen ***Variationen mit Wiederholung*** von k aus n Elementen ist gegeben durch

$$n^k.$$

Satz 4.12 (Anzahl Kombinationen mit Wiederholung)
Die Anzahl der möglichen ***Kombinationen mit Wiederholung*** von k aus n Elementen ist gegeben durch

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Beispiel: Variation mit Wiederholung
Wie viele 8-stellige Dualzahlen gibt es?
2·2·...·2 = 28 = 256

Beispiel: Kombination mit Wiederholung
Wie viele Möglichkeiten gibt es, bei einer Wahl 3 Stimmen auf 4 Kandidaten zu verteilen? Es dürfen mehrere Stimmen pro Kandidat vergeben werden

$$\binom{4+2}{3} = \binom{6}{3} = 20.$$

Satz 4.13 (Anzahl Permutation mit Wiederholung)
Eine ***Permutation mit Wiederholung*** ist eine Anordnung von n Objekten, von denen manche nicht unterscheidbar sind.

Gibt es s Gruppen, mit jeweils $k_1, \ldots, k_s$ gleichen Objekten, so ist die Anzahl der Möglichkeiten gegeben durch

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_s!}.$$

Beispiel: Passwörter
Wie viele Passwörter aus genau 8 Buchstaben oder Ziffern gibt es, die mindestens eine Zif- fer enthalten? Zwischen Groß- und Kleinbuchstaben soll unterschieden werden. Umlaute und Sonderzeichen sind verboten.

- Zur Auswahl stehen für jede Stelle des Passworts 52 Buchstaben (klein oder groß) und 10 Ziffern, die mehrfach vorkommen dürfen (Auswahl mit Wiederholung). Die Reihenfolge muss beachtet werden.
- Es gibt 62^8 Passwörter aus 8 Buchstaben oder Ziffern sowie 52^8 Passwörter aus 8 Buch- staben ohne Ziffern. Die Anzahl der Passwörter aus 8 Buchstaben mit mindestens einer Ziffer errechnet sich demnach als $62^8 - 52^8 \approx 1.65 \cdot 10^{14}$.

---

	ohne Beachtung der Reihenfolge / ungeordnete Auswahl (Kombination)	mit Beachtung der Reihenfolge / geordnete Auswahl (Variation / k-Permutation)
ohne Wiederholung / ohne Zurücklegen / Einfachauswahl	$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
mit Wiederholung / mit Zurücklegen / Mehrfachauswahl	$\binom{n+k-1}{k}$	n^k