Determinante:

Möglichkeiten:

- 1. die Geraden schneiden sich $\Rightarrow$ eindeutige Lösung
- 2. die Geraden sind gleich $\Rightarrow$ unendliche Lösungen
- 3. die Geraden sind parallel $\Rightarrow$ keine Lösung

Geraden

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$
= Koeffizienten

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

Determinanten 2. Ordnung

$$D := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \quad a_{21})$$

Cramersche Regel

- $D \neq 0 \Rightarrow$ LGS eindeutige Lsg. $\Rightarrow x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \; x_2 = \frac{D_{x_2}}{D} \Rightarrow \mathcal{L} = \{ \frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D} \}$
- $D \wedge D_{x_1} \wedge D_{x_2} = 0 \Rightarrow$ LGS unendlich viele Lsg. $\Rightarrow \mathcal{L} = \{(x_1, x_2) : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\}$
- $D = 0 \wedge (D_{x_1} \vee D_{x_2}) \neq 0 \Rightarrow$ LGS keine Lsg. $\Rightarrow \mathcal{L} = \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} D_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \quad = D \cdot x_1 = D x_1 \\[2ex] D_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - a_{21} b_1 \quad = D \cdot x_2 = D x_2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$$

1. Spalte bsw. 2. Spalte durch rechte Seite von LGS ersetzen

Größere Gleichungssysteme

$$\left.D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Nj} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix}\right\} \text{Determinante N-ter Ordnung}$$

Cramersche Regel (die 2. lol)

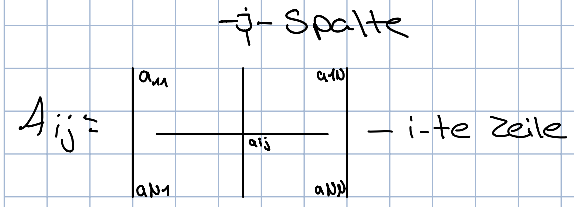
$D \neq 0 \Rightarrow$ eindeutige Lsg. $\left(\frac{D_{x_1}}{D}, \frac{D_{x_2}}{D}, \ldots, \frac{D_{x_v}}{D}\right)$

$D = 0 \wedge$ min. ein $D_{x_k} \neq 0 \Rightarrow$ keine Lsg.

$D = 0 \wedge$ alle $D_{x_k} = 0 \Rightarrow$ unendlich viele Lsg.

Determinantenentwicklungssatz

Adjunkte



i-te Zeile und
j-te Spalte
streichen

Beispiel:

$$D = \begin{array}{c|ccc|} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \frac{1}{3} & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 15 \\ 3 & -2 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 7 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Determinantenentwicklungssatz von Laplace

- Entwicklung nach Zeile i oder Spalte j (fest!)
- Schachbrett $(-1)^{i+j}$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & \cdots & \cdots \\ \cdots & & & \end{vmatrix}$$

- $D = \det(A) = \sum_{i/j=1}^{N} a_{ij} \, (-1)^{i+j} \cdot A_{ij} \qquad i \wedge j \in \{1, 2, \ldots, N\}$

Beispiel:

$$D = \begin{vmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}2 & {}^{+}1 \\ {}^{-}2 & {}^{+}1 & {}^{-}{-2} \\ {}^{+}{-1} & {}^{-}3 & {}^{+}1 \end{vmatrix} \leftarrow$$

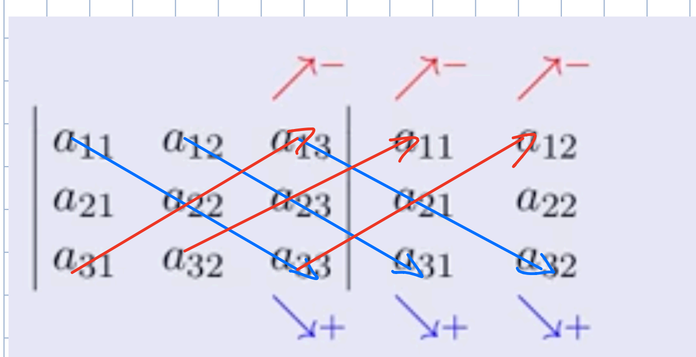
$$D = \underbrace{-1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}\ \underbrace{- 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}\ \underbrace{+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= -(-4-1) - 3(-2-2) + (1-4) = 5 + 12 - 3$$

$$= 14$$

- immer nach Zeile/Spalte entwickeln wo viele Nullen sind.

Regel von Sarrus (für Determinanten 3. Ordnung)



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Rechenregeln

Satz 4.6 (Rechenregeln für Determinanten)

(i) Vertauscht man in einer Determinante Zeilen und Spalten, so ändert sich der Wert der Determinante nicht.

(ii) Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen (bzw. Spalten) miteinander, so ändert sich das Vorzeichen.

(iii) Eine Determinante wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem alle Elemente entweder einer Zeile oder einer Spalte mit dieser Zahl multipliziert werden.

(iv) Addition eines Vielfachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen Zeile (bzw. Spalte) lässt den Wert der Determinante unverändert.

(v) Sind alle Elemente einer Zeile (bzw. Spalte) null, so hat die Determinante den Wert null.

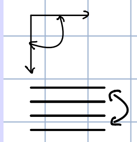
(vi) Sind zwei Zeilen (bzw. Spalten) zueinander proportional (d. h. Vielfache der jeweils anderen oder gleich), dann hat die Determinante den Wert null.

(vii) Hat die Determinante ***Dreiecksgestalt***, d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{NN} \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{vmatrix},$$

so ist ihr Wert gleich dem Produkt der Diagonalelemente, d. h. gleich

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{NN}\,.$$



Beispiel : Rechenregeln für Determinanten

1. Vertauschen von Zeilen und Spalten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

2. Vertauschen zweier Zeilen bzw. Spalten

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

3. Multiplikation mit einer reellen Zahl

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

oder

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

4. Addition von Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte, z. B. (-2)-faches der 1. Spalte zur 2. Spalte

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -7 & 9 \end{vmatrix}$$

5. Nullzeile oder -spalte

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6. Zeile oder Spalte ist gleich dem Vielfachen einer anderen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

7. Dreiecksmatrix

$$\begin{vmatrix} 1 & e & \pi \\ 0 & 2 & 2^{32} \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Beispiel : Rechenregeln für Determinanten

Berechne

$$\begin{vmatrix} 1050 & 550 \\ 168 & 88 \end{vmatrix} = 50 \cdot \begin{vmatrix} 21 & 11 \\ 168 & 88 \end{vmatrix} = 50 \cdot \begin{vmatrix} 21 & 11 \\ 8 \cdot 21 & 8 \cdot 11 \end{vmatrix} = 0$$