Induktion

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$ - natürliche Zahlen (positive Zahlen)

$\mathbb{N}_0$ - natürliche Zahlen + 0

$\mathbb{Z}$ - ganze Zahlen (negative und positive Zahlen)

$\mathbb{Q}$ - rationale Zahlen (gebrochene Zahlen (endliche oder periodische Dezimalzahlen)

$\mathbb{R}$ - reele Zahlen (endliche oder unendliche Dezimalzahlen)

$\mathbb{I}$ - irrationale Zahlen (unendliche nichtperiodische Dezimalzahlen)

Beweis durch vollständige Induktion

Schema

1. Induktionsanfang: Es gilt $p(a)$
2. Induktionsvorraussetzung: $p(k)$ für ein beliebiges $n = k \geq a$ ist eine wahre Aussage.
3. Induktionsbehauptung: $p(k+1)$ ist eine wahre Aussage
4. Induktionsschritt: $p(k+1)$ mit Vorraussetzung 2 gleichst. mit Behauptung 3 und ausrechnen
5. Induktionsschluss: Gültigkeit von 1-4 => $p(a)$ ist eine wahre Aussage

Summen- und Produktzeichen

- Summe von 1 bis N über a_i;

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N$$

- Produkt von 1 bis N über a_i;

$$\prod_{i=1}^{N} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_N$$

1. Induktions anfang: $n=1$

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{1}{1+1}$$

2) Induktions voraussetzung: Es sei $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{k}{k+1}$$

für ein beliebiges $k \geq 1$ gültig

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

3.) Induktions behauptung: die Aussage gilt dann auch für $k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{k+1}{k+1+1} = \frac{k+1}{k+2}$$

4) Induktions schritt:

42 − 12	12
30	12
18	12
6	12