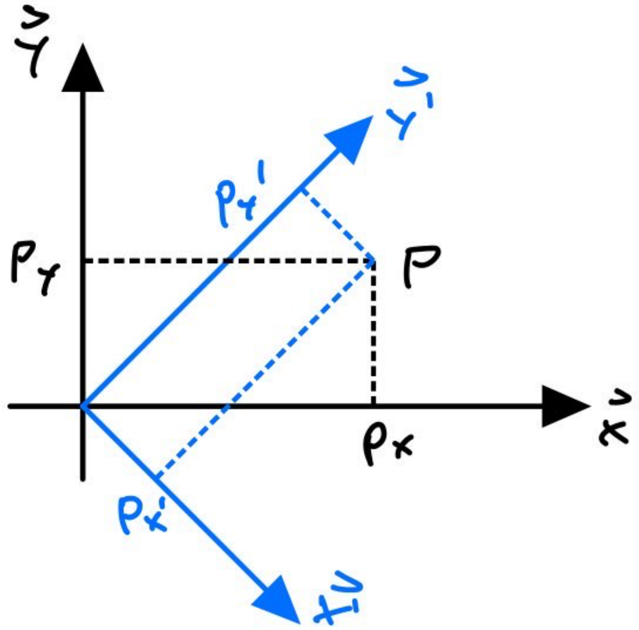
Teilthema 1: Kamera und LookAt-Matrix

a) Erläutern Sie anhand einer Skizze wie die Koordinaten des Weltkoordinatensystems ins Kamerakoordinatensystem umgerechnet werden (es ist Folie 5-150 gemeint) (VZ, 3 P)

- Das Skalarprodukt kann verwendet werden, da das Ergebnis eine Projektion darstellt. Die Achsen des Weltkoordinatensystems und des Kamerakoordinatensystems müssen normiert sein. Die Zeichnung ist in 2D, funktioniert in 3D genauso.
- Schwarz: Weltkoordinatensystem
  Blau: Kamerakoordinatensystem



$P_Y' = P_Y \cdot \vec{Y}'$

$P_X' = P_X \cdot \vec{X}'$

↑ Skalarprodukt

b) Geben Sie die grundlegenden Arbeitsschritte in der richtigen Reihenfolge an, mit denen die Look-At Matrix berechnet wird basierend auf den Eingaben Eye (pos der Kamera), Center (Punkt auf den die Blickrichtung zeiht), Up (Richtung nach oben) - (RP, 4 P)

1. Neue z-Achse w: $w = Center.Eye$ $\quad w.normalize()$
2. Neue y-Achse v: $v = Up$ $\quad v.normalize()$
3. Neue x-Achse u: $u = v \ x \ w$
4. Neues v, da nicht zwangsläufig orthogonal zu w: $v = w \ x \ u$
5. $u.normalize()$
   $v.normalize()$

→ LookAt-Matrix Ergebnis ohne Verschiebung:

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ w_x & w_y & w_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teilthema 2: Projektionen und Normalized Device Coordinates

a) Geben Sie je 4 grundlegende Eigenschaften einer Parallel- und einer Zentralprojektion an. (RP, 4 P)

Parallelprojektion

- Alles ist gleich Groß
- Die Projektionsstrahlen verlaufen parallel
- Projektionszentrum liegt in einem unendlich entfernten Punkt
- Ist ein Spezialfall der Zentralprojektion
- Weniger realistisch, erlaubt aber die Bestimmung von Maßen aus dem Bild

Zentralprojektion

- Die Projektionsstrahlen gehen durch das Projektionszentrum
- Erzeugt eine Tiefenwirkung
- Sieht realistischer aus, weil es dem entspricht, was unser Auge macht

b) Wieso wird bei den Normalized Device Coordinates auch der z-Wert bei der Umrechnung berücksichtigt? (RP, 2 P)

- Verdeckungsproblem lösen, welches Polygon genau gezeichnet werde soll. Der mit dem kleiner z-Wert
- Um von Pixel-Koordinaten, dass Objekt zurück in Weltkoordinaten zu konstruieren. Dafür werden die Werte in einem z-Buffer reingeschrieben

c) Geben Sie an, wie aus Normalized Device Coordinates XNDC die Pixel- Position Xpix als Integer-Wert berechnet wird. Erläutern Sie die verwendeten Variablen-Bezeichner. (RP, 2 P)

$$X_{pixel} = s_x * X_{NDC} + \frac{N_x}{2}$$

$X_{NDC} =$ Normalized Device Coordinate x

$X_{pixel} =$ Pixelposition x

$N_x =$ Anzahl an x-Pixel

$s_x = \frac{N_x}{2}$, ein Skalierungsfaktor um die Hälfte der Anzahl der Pixel in x-Richtung

d) Leiten Sie die Berechnungsvorschrift für Umrechnung der x- Koordinate in Normalized Device Coordinates bei einer Parallelprojektion detailliert her und beachten Sie dabei folgende Teilfragen (RP+VZ, 5 P)

I. Erläutern Sie die verwendeten Variablen-Bezeichner

- l: left, r: right, b: bottom, t: top, n: near, f: far

II. Geben Sie die Herleitung als Rechnung an

$$
\begin{aligned}
& l \leq x \leq r && \mid -l \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq x-l \leq r-l && \mid :(r-l) \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq \frac{x-l}{r-l} \leq 1 && \mid \cdot 2 \\
\Leftrightarrow\ & 0 \leq 2\cdot\frac{x-l}{r-l} \leq 2 && \mid -1 \\
\Leftrightarrow\ & -1 \leq 2\cdot\frac{x-l}{r-l} - 1 \leq 1 && \mid \text{umformen} \\
\Leftrightarrow\ & -1 \leq 2\cdot\frac{x-l}{r-l} - \frac{r-l}{r-l} \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & -1 \leq \frac{2x-2l-r+l}{r-l} \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & -1 \leq \frac{2x-l-r}{r-l} \leq 1 \\
\Leftrightarrow\ & -1 \leq \frac{2x}{r-l} - \frac{r+l}{r-l} \leq 1
\end{aligned}
$$

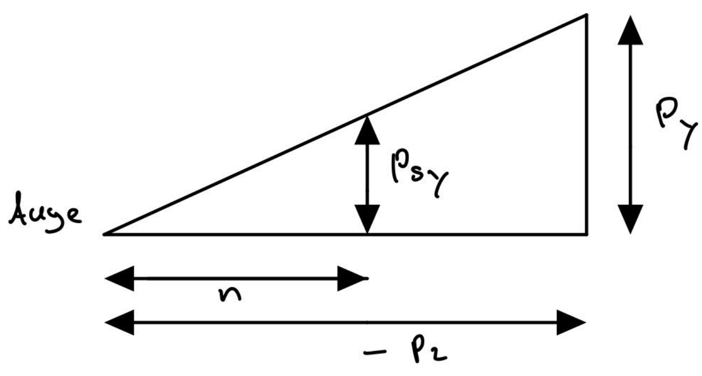
III. Geben Sie das Ergebnis als Zeile einer Matrix an.

$$
\begin{bmatrix}
\frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\
0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\
0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}
$$

IV. Welche **Annahmen** werden bei dieser Berechnung für die Projektion gemacht? (VZ)

- l <= r, also kein Orientierungswechsel

e) Leiten Sie anhand einer beschrifteten Skizze die Abbildungsvorschrift der Zentralprojektion für eine zu projizierende Koordinate Py mit Hilfe des Strahlensatzes her (eine 2D Skizze reicht aus). Geben Sie dazu auch den Strahlensatz an und markieren sie die entsprechenden Größen in ihrer Skizze (RP, 4 P)



$$\frac{P_{sy}}{P_y} = \frac{n}{-P_z}$$

$$\Leftrightarrow\ P_{sy} = \frac{n\cdot P_y}{-P_z}$$

f) Geben Sie das Ergebnis von Aufgabe e) in der Schreibweise als Matrix-Vektor-Multiplikation für alle Koordinaten an. (RP, 4 P)

$$\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \cdot P_x \\ n \cdot P_y \\ 0 \\ -P_z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} n \cdot P_x / -P_z \\ n \cdot P_y / -P_z \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

g) Leiten Sie die Berechnungsvorschrift der dritten Zeile in der Projektionsmatrix zur Erzeugung von Normalized-Device Coordinates für die Zentralprojektion her (es sind die Folien 168-171 gemeint). Folgende Teilaspekte sollen erläutern werden: (RP+VZ, 6 P)

i. Geben Sie die Herleitung der Formel an

ii. Erläutern Sie dabei jeweils die Vorgehensweise

iii. Geben Sie das Ergebnis als Zeile einer Matrix an.

$$\begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ A \cdot P_z + B \\ -P_z \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{normiere}} \begin{bmatrix} \frac{\dots}{-P_z} \\ \frac{\dots}{-P_z} \\ \frac{\dots}{-P_z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es werden Terme gesucht für **A** und **B** mit

- -1 auf der near-Clipping Plane Pz = -n
  - Setzte n die Formel ein $\frac{-n*A+B}{-(-n)} = -1, falls\ P_z = -n$
- 1 auf der far-Clipping Plane Pz = -f
  - Setzte -f in die Formel ein $\frac{-f*A+B}{-(-f)} = +1, falls\ P_z = -f$

→ (1) $-nA + B = -n$
(2) $-fA + B = f$ → Gleichung auslösen

- löse Gleichung (1) nach B auf: $B = -n + An$
- ersetze B in der zweiten Gleichung: $-fA - n + An = f$ und löse nach A auf:

$$-fA + An = f + n \Rightarrow -(f-n)A = f + n \Rightarrow A = -\frac{f+n}{f-n}$$

- da A jetzt bekannt ist, ist B leicht auszurechnen: ersetze A in Gleichung (1) um B zu finden:

$$B = -n + An = -n - \frac{f+n}{f-n} \cdot n = -(1 + \frac{f+n}{f-n}) \cdot n = -\frac{(f-n+f+n) \cdot n}{(f-n)} = -\frac{2fn}{f-n}$$

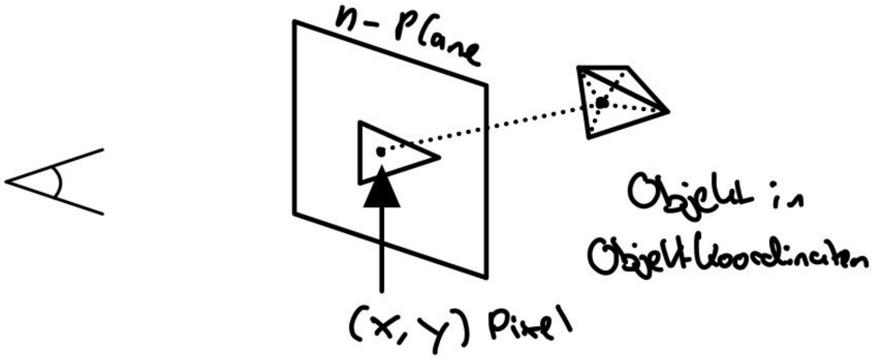
- fasse alle Ergebnisse zur Gesamt-Projektionsmatrix zusammen:

$$\begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Teilthema 3: Picking und Schnittberechnungen

a) Erläutern Sie anhand einer Skizze das Grundfragestellung der Objekt- Selektion durch „Picking". (RP, 3 P)

- Durch einen Mausklick wird eine Pixelposition erhalten. Beim Picking wird nach dem Punkt gesucht, der auf diesen Pixel projiziert wurde. Bzw. der Punkt in lokale Koordinaten des Objektes
- Das Vorgehen grundsätzlich:
  Pixel → NDC / projizierte Koordinaten → Kamerakoordinaten → Weltkoordinaten → Objektkoordinaten



b) Geben Sie die grundlegenden Arbeitsschritte an, mit denen die Weltkoordinaten eines Punktes aus einer gegebenen Pixelposition rekonstruiert werden können. (RP, 3 P)

1. Aus den Pixelkoordinaten X_{NDC} und Y_{NDC} berechnen. Zndc kann aus dem Z-Buffer gelesen werden
2. Auf den Punkt $(X_{NDC},\ Y_{NDC},\ Z_{NDC},\ 1)^T$ die Inverse der Projektionsmatrix anwenden
3. Auf den erhaltenen Punkt die Inverse der Kameramatrix anwenden

⇨ Punkt ist in Weltkoordinaten

c) Welches Problem ergibt sich für die Objektselektion, wenn Sie die Berechnung in b) nur für einen 2D-Punkt (=Pixel) durchführen? (VZ,2P)

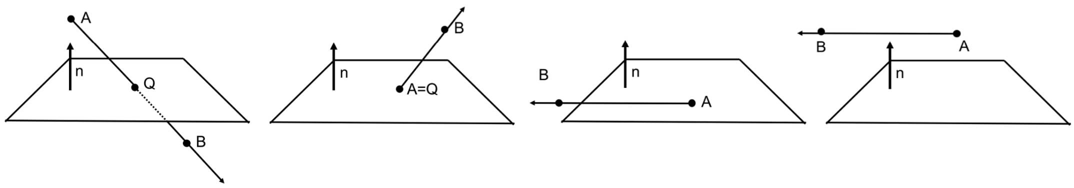
- Das lokale Koordinatensystem ist nicht rekonstruierbar, da nicht bekannt ist, aus welchem Objekt der Punkt abgebildet wurde. Deswegen braucht man einen Strahl, der durch alle lokalen Koordinatensystem geschossen wird

d) Erläutern Sie wie der Picking-Strahl für die Objekt-Selektion in 3D erzeugt und verwendet wird. (Folie 5-180) (RP+VZ, 4 P)

1. Berechne aus den Pixel-Koordinaten Xndc und Yndc. aus
2. Punkte der near clipping plane $\boldsymbol{A} = (X_{NDC},\ Y_{NDC}, -n,\ 1)$
   und far clipping plane $\boldsymbol{B} = (X_{NDC},\ Y_{NDC}, -f,\ 1)$ die Inverse der Projektionsmatrix anwenden
3. Danach die Inverse der Kameramatrix anwenden
4. Der Strahl $\boldsymbol{s(t)} = A + t * (B - A)$. Auf s liegen alle Punkte, die auf X_{NDC} und Y_{NDC} projiziert wurden

Vorgehen: Den Strahl in alle lokalen Koordinatensystem transformieren mit der Inverse der Transformationsmatrizen der Objekte und auf Schnittpunkte prüfen

e) Geben Sie die 4 geometrischen Konfigurationen als Skizze an, wie ein Strahl eine Ebene schneiden kann. (RP, 2 P)



1. Eindeutiger Schnittpunkt t != 0
2. A=Q, also unser Startpunkt ist genau in der Ebene, es gibt aber kein Durchstoss
3. Strahl liegt in der Ebene
4. Strahl liegt parallel zur Ebene aber nicht in der Ebene
5. kein Schnitt: A ∈/ P und R zeigt von Ebene weg (t < 0), ohne Bild.

f) Erläutern Sie die Funktionsweise der Infinity Arithmetik IEEE 754 und erklären Sie wieso sie bei der Schnittpunktberechnung benötigt wird. (VZ, 3 P)

- Die Infinity Arithmetik ist ein Standard wie man mit NaN und INF-Werten rechnen kann, um damit boolesche Operationen oder Rechnungen durchzuführen.
    - z.B. 2+INF = INF, 0/0 = INF, 2+NaN = NaN
    - NaN == X → false
- Die booleschen Operationen können genutzt werden damit man bei der Schnittpunkt Berechnung nicht extra if-Abfragen benötigt, um wischen den verschiedenen Ebene-Strahl Schnitt Arten zu unterscheiden.
- Falls durch 0 geteilt wird oder 0/0 berechnet wird kann es passieren das der Strahl parallel zur Ebene oder in der Ebene liegt.

g) Wieso werden Bounding Volumes verwendet? (VZ, 2 P)
- Ein Bounding Volume umhüllt komplexe Objekte.
- Man benutzt dies um einen billigen Schnitt-Test zu bekommen, es wird geprüft ob das BV geschnitten worden ist und dann erst geschaut ob welche faces geschnitten worden sind.
- Sonst muss man durch alle faces von allen Objekten durchiterieren um zu prüfen ob ein Schnitt vorhanden ist.

h) Erläutern Sie die Vor- und Nachteile von Bounding Boxen in Bezug auf Passgenauigkeit und Rechenaufwand (VZ, 3 P)

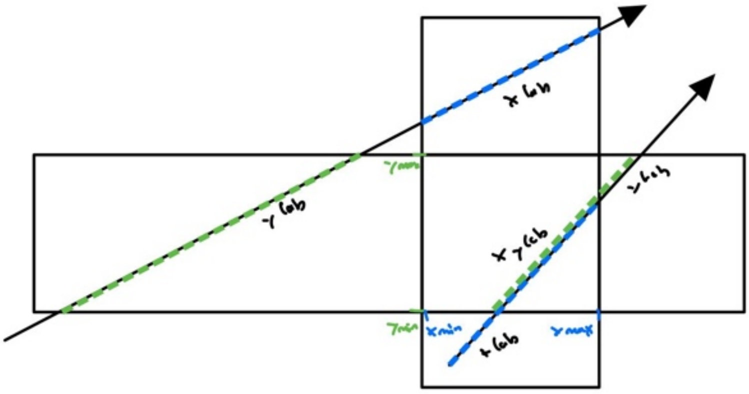
Vorteile:
- Billige Schnitt-Tests, Volume selbst billig zu berechnen
- Enge Passform
- Einfach zu rotieren und transformieren
- Wenig Speicher-Verbrauch

Nachteile:
- Viel Raum in der sich kein Objekt befindet bei einfachen Formen → falscher positiver Test

Je nachdem wie einfach man das BV auswählt hat man eine schlechte Passgenauigkeit jedoch schnellere Berechnungen. Und genau so auch andersrum

i) Erläutern Sie die prinzipielle Vorgehensweise bei der Schnittpunkt- Berechnung eines Strahls mit einer Axis Aligned Bounding Box. Geben Sie dazu die Abfolge der Benötigten Arbeitsschritte an und ergänzen Sie ihre Ausführungen mit einer beschrifteten Skizze. (RP, 4 P)

- Damit ein Strahl eine AABB schneidet, muss er zu einem Zeitpunkt t gleichzeitig im x-, y-,z-Koordinatenbereich sein. Das sind die sogenannten slabs.
- Der Schnitt muss in allen Ebenen vorhanden sein. Wie in der Skizze wo sich x und y lab überlappen. Es wird nicht geprüft, wo der Schnittpunkt ist sondern nur ob es einen gibt.



- Diagramm unten ist es zweidimensional dargestellt. Mathematisch sind mehrere Ebenen-Schnitte der Ein- und Austrittspunkte zu berechnen, die einen Intervall an möglichen t-Parametern darstellen und für die x, y und z-Koordinaten darf am Ende die Schnittmenge an möglichen t's nicht leer sein für einen gültigen Schnittpunkt.