Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{M}$. Dann gilt:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_N \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N \\ \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots + a_{MN}x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \vdots \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots + a_{MN}x_N = b_M \end{pmatrix}.$$

Also lässt sich jedes lineare Gleichungssystem mit M Gleichungen für N Unbekannte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in der Form

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

mit der Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ und den Vektoren $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{M}$ angeben.

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ wird Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems genannt.

Lösung mit Inversen

Ist $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ regulär, existiert also die Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$, dann gilt:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}\,,$$

d. h. das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar und die Lösung ist $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{b}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Inverse rechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gestaffelte Gleichungssysteme

· obere Dreiecksform

Ein Gleichungssystem $\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ und $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ hat die obere Dreiecksform (upper triangular form), wenn es folgendermaßen aussieht:

$$\begin{array}{ccccccccc} u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & \dots & + & u_{1N}x_N & = & b_1 \\ & & u_{22}x_2 & + & \dots & + & u_{2N}x_N & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & u_{NN}x_N & = & b_N \end{array}$$

Die Lösung erfolgt durch Rückwärtseinsetzen, falls alle Elemente auf der Hauptdiagonalen ungleich Null sind $(\forall i \in \{1, \dots, N\} : \; u_{ii} \neq 0)$.

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=i+1}^{N} u_{ik} x_k \right)$$

Ausgeschrieben ergibt die Formel folgendes Bild:

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{1}{u_{NN}} b_N \\ x_{N-1} &= \frac{1}{u_{N-1,N-1}} (b_{N-1} - u_{N-1,N} x_N) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ x_1 &= \frac{1}{u_{11}} (b_1 - (u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \dots + u_{1N}x_N)) \end{aligned}$$

Die Determinante der oberen Dreiecksmatrix ist das Produkte der Elemente der Hauptdiagonalen:

$$\det(\boldsymbol{U}) = \prod_{i=1}^{N} u_{ii} \,.$$

· untere Dreiecksform

Ein Gleichungssystem $\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ besitzt die untere Dreiecksform (lower triangular form), wenn es wie folgt aussieht:

$$\begin{array}{ccccccccc} l_{11} \cdot x_1 & & & & & & & = & b_1 \\ l_{21} \cdot x_1 & + & l_{22} \cdot x_2 & & & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ l_{N1} \cdot x_1 & + & l_{12} \cdot x_2 & + & \dots & + & l_{NN}x_N & = & b_N \end{array}$$

Die Lösung erfolgt durch Vorwärtseinsetzen, falls alle Elemente auf der Hauptdiagonalen ungleich Null sind $(\forall i \in \{1, \dots, N\} : \; l_{ii} \neq 0)$:

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} x_k \right) .$$

Die Determinante der unteren Dreiecksmatrix ist das Produkte der Elemente der Hauptdiagonalen:

$$\det(\boldsymbol{L}) = \prod_{i=1}^{N} l_{ii} \,.$$

Gaußsches Eliminationsverfahren → umformen in Dreiecks-matrix!

- Gleichungen dürfen miteinander vertauscht werden.
- Jede Gleichung darf mit einem beliebigen von Null verschiedenen Faktor multipliziert werden.
- Zu jeder Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung addiert werden.

muss nicht!

Gleichungssystem | Koeffizienten | rechte Seite | Kontrollspalte — Summe der Zeile um Rechenfehler zu vermeiden

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 13 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	b	$\sum$	
1	1	1	2	5	$\cdot(-2)$, $\cdot(-3)$
2	3	1	-1	5	+
3	1	4	13	21	+

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -5 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	b	$\sum$	
1	1	1	2	5	
0	1	-1	-5	-5	$\cdot 2$
0	-2	1	7	6	+

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & -5 \\ & & & - & x_3 & = & -3 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	b	$\sum$
1	1	1	2	5
0	1	-1	-5	-5
0	0	-1	-3	-4

Rückwärts-rechnen ↓

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x_3 = 3 \\ \Rightarrow x_2 = -2 \\ \Rightarrow x_2 = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ einzige Lösung

Gauß-Jordan-Verfahren

Ziel: Hier eliminiert man auch die Elemente oberhalb der Hauptdiagonale und rechnet solange, bis die Koeffizientenmatrix in die Einheitsmatrix übergegangen ist.

Gleichungssystem | Koeffizienten | rechte Seite | Kontrollspalte

0

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= -5 \\ - x_3 &= -3 \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & \sum \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= -5 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & \sum \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \checkmark \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \cdot 1 \quad \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & \sum \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ \cdot(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & \sum \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

Ziel

x_1	x_2	x_3	b
1	0	0	2
0	1	0	2
0	0	1	2

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L} = \{(1, -2, 3)\}$$

Beispiel für keine Lösung

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & b & \sum \\ \hline 3 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -1 & 5 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ & -3 & 3 & -3 & -3 \\ \hline 3 & 1 & 2 & 2 & 8 \\ & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ & & 0 & -6 & -6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \cdot(-\frac{2}{3}) \quad \cdot(-1) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \\ \cdot 9 \\ \leftarrow + \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 &= -\frac{1}{3} \\ 0x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Wiederspruch!

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \emptyset$$

Lösung mit einem Parameter

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & & & x_3 & = & -1 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	b	$\sum$	
2	1	1	1	5	$\cdot(-2)$, $\cdot(-1)$
4	1	2	0	7	$+$
2	0	1	-1	2	$+$
2	1	1	1	5	
0	-1	0	-2	-3	$\cdot(-1)$ sind
0	-1	0	-2	-3	$+$ gleich!
2	1	1	1	5	$\mid :2$
0	-1	0	-2	-3	$\mid \cdot(-1)$
0	0	0	0	0	Nullzeile!
1	0.5	0.5	0.5	2.5	
0	1	0	2	3	

- Streiche Zeilen, in denen nur Nullen stehen (keine Information)
- Normiere Diagonalelemente auf 1
- Ergänze fehlende Zeilen mit Diagonalelement 1 und Parameter auf rechter Seite

$\Rightarrow$

x_1	x_2	x_3	b	$\sum$
1	0.5	0.5	0.5	2.5
0	1	0	2	3
0	0	1	t	$1+t$

$x_3 = t$

x_1	x_2	x_3	b	$\sum$	
1	0.5	0.5	0.5	2.5	$+$
0	1	0	2	3	
0	0	1	t	$1+t$	$\cdot(-0.5)$
1	0.5	0	$0.5-0.5t$	$2-0.5t$	$+$
0	1	0	2	3	$\cdot(-0.5)$
0	0	1	t	$1+t$	
1	0	0	$-0.5-0.5t$	$0.5-0.5t$	
0	1	0	2	3	
0	0	1	t	$1+t$	

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Dreieckschema ist nun wieder vollständig und die Rechnung wird wie im ersten Beispiel (Weg 2) fortgesetzt, nur dass nun in den Rechnungen der Parameter t statt einer Zahl vorkommt.

Also lautet die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, 2, t \right), \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung mit zwei Parameter

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -10 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -10 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -19 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & - & 10x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 10x_4 & = & -19 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -5 \end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$	
1	−3	5	−2	−1	0	$\cdot 2$ $\cdot(-3)$ $\cdot(-1)$
−2	6	−10	4	2	0	+
3	−1	3	−10	−19	−24	+
1	−1	2	−3	−5	−6	+
1	−3	5	−2	−1	0	
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	
0	8	−12	−4	−16	−24	$\cdot(-\frac{1}{4})$
~~0~~	~~2~~	~~−3~~	~~−1~~	~~−4~~	~~−6~~	+

ist das −2 fache von dem ersten?

mehrfachen voneinander

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$	
1	−3	5	−2	−1	0	
0	8	−12	−4	−16	−24	$\mid :8$
0	0	0	0	0	0	
1	−3	5	−2	−1	0	+
0	1	−1.5	−0.5	−2	−3	+
0	0	1	0	t	$1+t$	
0	0	0	1	s	$1+s$	$\cdot 2$ $\cdot 0.5$

zu 1 machen

$x_3 = t$
$x_4 = S$

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$	
1	−3	5	0	$-1+2s$	$2+2s$	+
0	1	−1.5	0	$-2+0.5s$	$-2.5+0.5s$	+
0	0	1	0	t	$1+t$	$\cdot(-5)$ $\cdot 1.5$
0	0	0	1	s	$1+s$	
1	−3	0	0	$-1+2s-5t$	$-3+2s-5t$	+
0	1	0	0	$-2+0.5s+1.5t$	$-1+0.5s+1.5t$	$\cdot 3$
0	0	1	0	t	$1+t$	
0	0	0	1	s	$1+s$	
1	0	0	0	$-7+3.5s-0.5t$	$-6+3.5s-0.5t$	
0	1	0	0	$-2+0.5s+1.5t$	$-1+0.5s+1.5t$	
0	0	1	0	t	$1+t$	
0	0	0	1	s	$1+s$	

Also lautet die Lösungsmenge des Gleichungssystems

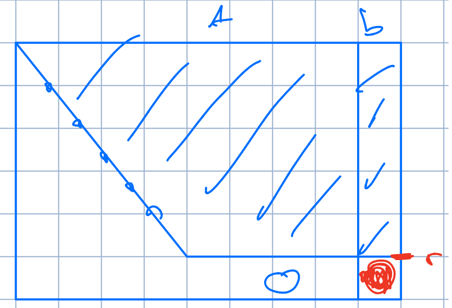
$$\mathcal{L} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}t + \frac{7}{2}s - 7, \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}s - 2, t, s \right) : \ s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad s,t \in \mathbb{R}$$

Beschreibung des Verfahrens

Durch Zeilenvertauschungen und Additionen geeigneter Vielfacher der obersten jeweils relevanten Zeile zu anderen Zeilen erfolgt im Rechenschema die Umformung auf Zeilenstufenform.



$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
\bullet & \star & \star & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \star & b'_1 \\
0 & \bullet & \star & \star & \star & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \star & b'_2 \\
0 & 0 & \bullet & \star & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \star & b'_3 \\
0 & 0 & 0 & \bullet & \star & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \star & b'_4 \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \star & \cdots & \star & b'_r \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & b'_M
\end{array}
$$

rg(A) = r

$b'_{r+1}, b'_{r+2}, \dots, b'_M \neq 0$

=> keine Lösung

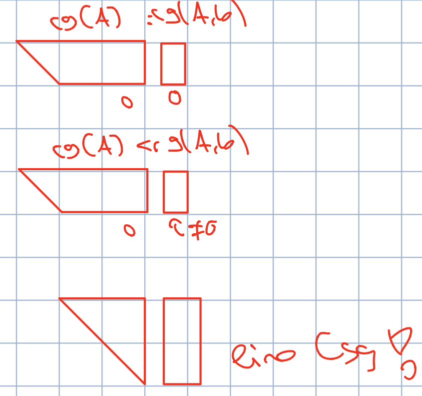
rg A = r

Durch die Äquivalenzumformungen ändert sich zwar die Koeffizientenmatrix, nicht aber ihr Rang. Dieser lässt sich dann an der Zeilenstufenform unmittelbar als $\operatorname{rg} \boldsymbol{A} = r$ ablesen.

Ist $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \ldots = b'_M = 0$, dann geht man folgendermaßen vor:

Die in der Zeilenstufenform zu den Spalten ohne $\bullet$-Stelle gehörenden Unbekannten sind freie Variablen und werden gleich den Parametern $t_1, t_2, \ldots, t_{N-r}$ gesetzt. Die entsprechenden Terme werden im Gleichungssystem auf die rechte Seite gebracht. Anschließend wird das System in Abhängigkeit von den Parametern gelöst.

Lösbarkeitskriterien



Für eine Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ und die rechte Seite $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^M$ nennen wir die Zusammenfassung

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1N} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MN} & b_M \end{array} \right)$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Satz 11.3 (Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme)
Ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$, rechter Seite $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^M$ und unbekanntem Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ ist genau dann ***lösbar***, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ übereinstimmt, also

$$\operatorname{rg}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rg}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})\,.$$

Das Gleichungssystem hat eine ***eindeutig bestimmte Lösung***, wenn zusätzlich der Rang gleich der Anzahl der Unbekannten ist, also

$$\operatorname{rg}(\boldsymbol{A}) = N\,.$$

Im Fall $\operatorname{rg}(\boldsymbol{A}) < N$ müssen $N - \operatorname{rg}(\boldsymbol{A})$ Parameter t_j eingeführt werden. Die Lösung des Gleichungssystems hat die Form

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_s + \sum_{j=1}^{N-\operatorname{rg}(\boldsymbol{A})} t_j \boldsymbol{v}_j \tag{11.1}$$

spezielle Lösung

mit geeigneten Vektoren $\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{v}_j$. Es existieren also ***unendlich viele Lösungen***.

Bemerkung

- Falls $\operatorname{rg}(\boldsymbol{A}) < \operatorname{rg}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, heißt dies, dass auf der rechten Seite nach dem Gauß-Algorithmus ein b'_j $(j > M)$ übrig geblieben ist, das Gleichungssystem also widersprüchlich ist.
- Falls $\operatorname{rg}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rg}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, heißt dies, dass wir nach dem Gauß-Algorithmus die gewünschte Trapezform erhalten haben, nichts übrig geblieben ist und wir durch Rückwärtseinsetzen (evtl. mit Parametern) das LGS lösen können.
- Falls $\operatorname{rg}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rg}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = N$, haben wir eine Dreiecksform erhalten und genau so viele Gleichungen wie Unbekannte, erhalten also genau eine Lösung.
- Ein LGS mit quadratischer Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ besitzt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\boldsymbol{A}$ regulär ist, wenn also $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$.

wenn $rg(A) = rg(A,b)$ => lösbar

wenn $rg(A) = N$ => eindeutig bestimmte Lösung

wenn $rg(A) < rg(A,b)$ => Wiederspruch (-> Parameter)?