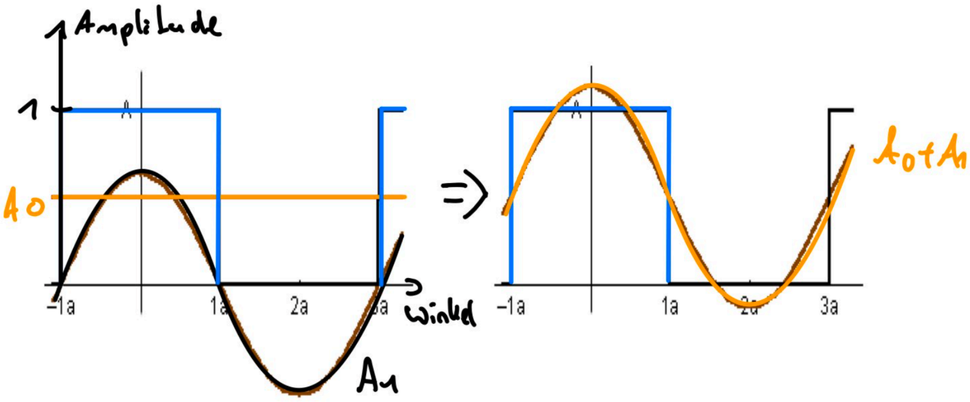
1.6 Furier

Testaufgaben

a.) Grundidee Fouriertransformation. Beispiel mit Rechtecksignal zeichnen.

- Es soll eine gegebene Funktion approximiert werden, durch finden und summieren von passenden sin-/cos-funktionen (mit passender Frequenz/Amplitude)
- Die Idee ist es den Intensitätsverlauf entlang einer Bildzeile (z.B. wie ein Rechtecksignal) als periodische Funktion darzustellen. Als gewichtete Summe von Sinus und Cosinus Termen
- Das Ergebnis ist, dass wir uns immer dem Rechtecksignal annähern. Je mehr Schwingungen wir hinzufügen, desto genauer können wir uns dem Rechtecksignal annähern. Speziell die für die genauen Strukturen (Ecken). Die Grundstruktur kann man mit wenigen Schwingungen abdecken
- $f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}[A_k * \cos(k * w_0 * x) + B_k * \cos(k * w_0 * x)\,]$
- 

b.) Erläutern Sie die Grundidee der Fourier-Transformation für dieses Signal.
Hinweis: Die Formel oder eine Erklärung wie die Koeffizienten berechnet werden ist explizit NICHT gefragt!

a. Wann wird eine Funktion / ein Signal als periodisch bezeichnet?
   - Eine periodische Funktion f wiederholt ihre Muster nach bestimmter Zeit t

b. Was ist die grundlegende mathematische Darstellung der Fourier-Transformation für periodische Signale?
   - Periodische Signale werden in der Fourier-Transformation als Summe gewichteter sin/cos Terme dargestellt

c. Welche Bedeutung hat dabei ein Fourier-Koeffizient?
   - Ak und Bk sind Koeffizienten und für die Amplituden der Sinus und Cosinus Werte, also Gewichtungen. Besonders ist A0, das ist der Mittelwert des Signales

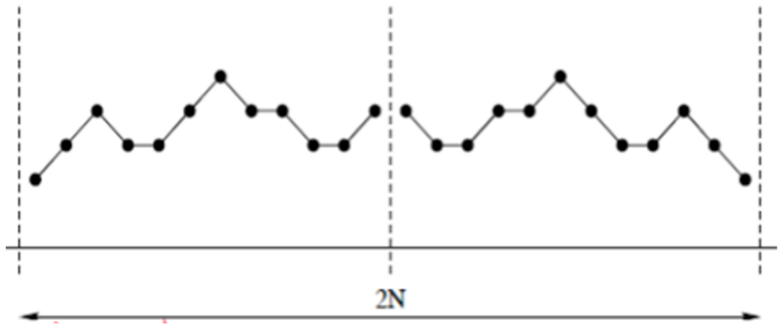
d. Welche Eigenschaft (speziell in Bezug auf die Fourier-Transformation) haben die Argumente der sin/cos Terme?
   - Wichtige Eigenschaften der Argumente von sin/cos Terme ist
     - Die sind immer ganzzahlige vielfache der Grundfrequenz des Signals. Die Winkelgeschwindigkeit bleibt konstant und k wird immer inkrementiert (Iterator). Das bedeutet mit steigendem k wird die Frequenz höher und es können feinere Strukturen angenähert werden
     - Und so kann man ein Signal in mehrere Frequenzen zerlegen. Was später für die Komprimierung wichtig ist

c.) Erläutern Sie kurz wie die diskrete 2D Fouriertransformation auf Basis einer vorhandenen 1D Fouriertransformation (ohne Laufzeitoptimierung) realisiert wird. Welche Laufzeit in O-Notation ergibt sich daraus für ein Bild der Größe M x N?

- Die resultierende 1D Transformation aller Zeilen wird nochmal spaltenweise transformiert
- O-Notation- Fourier-Transformation
  - Zeilenweise: O(M^2*#Zeilen)
  - Spaltenweise: O(N^2*#Spalten)
  - Insgesamt: O(max(M^2*#Zeilen + N^2*#Spalten))
- Es ergibt eine kubische Laufzeit

d.) Erläutern sie anschaulich (ohne Formeln, aber unter Angabe der ausgenutzten mathematischen Eigenschaften), wie eine Cosinus-Transformation aus einer Fourier-Transformation hergeleitet wird.

- Das Ziel ist es, dass es keine komplexen Anteile gibt. Der setzt sich aus 2 Teilen zusammen
  - Der 1. Teil fällt weg, wenn das Eingabesignal reell ist
  - Der 2. Teil fällt weg, indem man die Symmetrie Eigenschaft des Sinus zum Nutzen macht. Wir erzeugen uns künstlich eine gerade Funktion, indem wir die Daten um den Ursprung spiegeln und dann um 1⁄2 verschieben damit der weiterhin symmetrisch ist

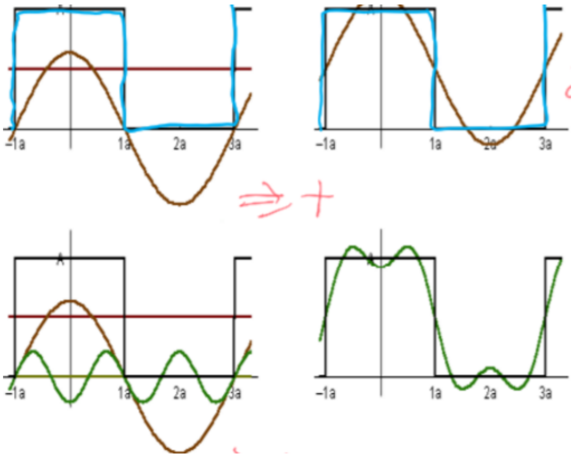


e.) Welche beiden strukturellen Vorteile bietet eine diskrete Cosinus-Transformation gegenüber einer Fourier-Transformation (es ist hier weder Speicherplatz- noch Laufzeitersparnis gemeint)?

- Bei der Cosinus-Transformation führt der Kacheleffekt nicht dazu, dass hohe Intensitätssprünge zwischen den Tändern entstehen. Durch das Spiegeln des Bildes treffen gleiche Intensitätswerte aufeinander
- Keine komplexe Eingabe bei der 2D-Cosinus-Transformation beim Weiterverarbeiten nach der 1D-Transformation, da die 1D Transformation eine relle Ausgabe hat

f.) Erläutern sie kurz, wie man mit einer Fourier-Transformation einen Hochpass-Filter realisiert.

- Der Hochpass-Filter hat Einträge von 0 und 1. Dieser wird auf der Koeffizienten Matrix angewendet und setzt die Koeffizienten im inneren auf die 0. Die äußeren Koeffizienten dürfen bleiben und werden mit 1 multipliziert a.) Rechtecksignal gegeben, Fourier Transformation für K=0,1,2 eintragen

- 

b.) Bild gegeben mit Spektrum: Mit Fouriertransformation oder mit Cosinustransformation erstellt? Begründen warum

- Cosinustransformation
  - (oben links langsame Frequenzen, seitlich gehen die Frequenzen hoch
- Fouriertransformation:
  - mittig symmetrisch (langsame Frequenzen)
  - Spitze Striche können bei DFT auftreten wegen dem Kachel-Effekt