8. Stetige Verteilungen

Inhalt

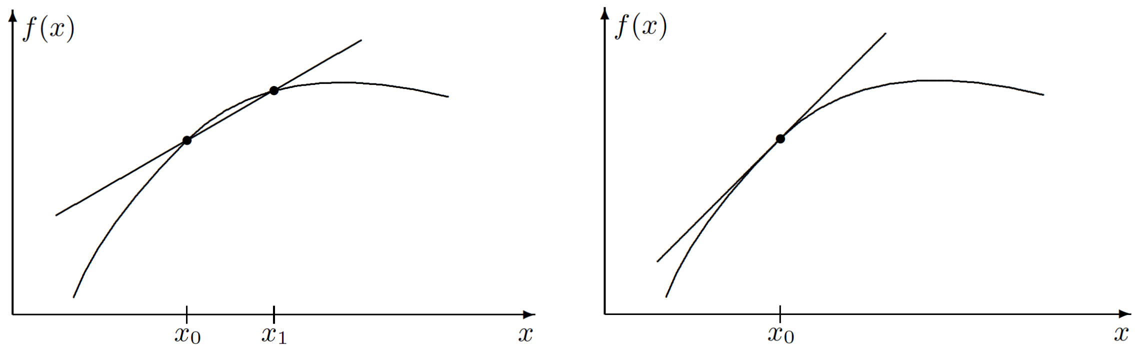
Wir wenden uns nun stetigen Zufallsvariablen und deren Verteilungen zu, d. h. Zufallsvariablen, deren Wertebereich überabzählbar unendlich ist (z. B. Länge oder Zeitdauer in beliebiger Genauigkeit). Dafür benötigen wir ein Grundverständnis der mathematischen Konzepte Ableitung und Integral.

8.1. Exkurs: Ableitung und Integral

Im Folgenden werden die Begriffe Ableitung, Integral und Stammfunktion in aller Kürze erläutert. Mathematisch präzise Definitionen sowie weitere Rechenregeln und Anwendungen folgen in der Lehrveranstaltung *Mathematik 3* (Studiengang Angewandte Informatik). Für die Übungsaufgaben und die Klausur zu *Statistik* werden keine Ableitungen oder Integrale benötigt.

8.1.1. Ableitung

Wie groß ist die Steigung einer Funktion $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0?



Bildquelle: Teschl, G., Teschl, S.: *Mathematik für Informatiker, Band 2*. Springer, Berlin, 3. Aufl., 2014 G. Teschl und S. Teschl 2014.

- Näherung: Sekante durch eng benachbarte Punkte an den Stellen x_0 und $x_1 = x_0 + h$,

$$\textbf{\textit{Differenzenquotient}} \qquad \left.\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right|_{x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- Exakt: Tangente durch Punkt an der Stelle x_0,

$$\textbf{\textit{Differentialquotient}} \qquad f'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

- ***Ableitung*** $f'(x)$:

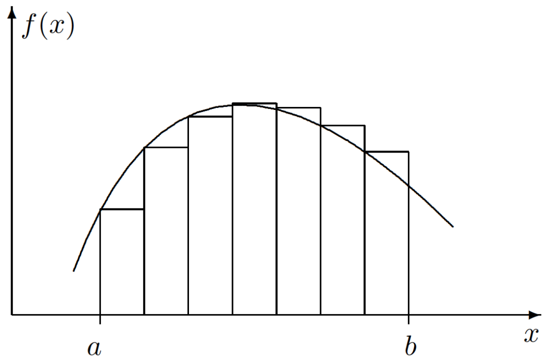
$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

Beispiele für Funktionen und ihre Ableitungen (Steigungen):

Bezeichnung	$f(x)$	$f'(x)$
Konstante	c	0
Lineare Funktion	x	1
Quadratische Funktion	x^2	$2x$
Potenzfunktion ($\alpha \neq 0$)	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
Exponentialfunktion	e^x	e^x
Summenregel	$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
Multiplikation mit Skalar	$cf(x)$	$cf'(x)$
Kettenregel	$f(g(x))$	$g'(x)\cdot f'(g(x))$

8.1.2. Integral und Stammfunktion

Wie groß ist die Fläche unter der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über einem Intervall $[a,b]$?



Bildquelle: Teschl, G., Teschl, S.: *Mathematik für Informatiker, Band 2*. Springer, Berlin, 3. Aufl., 2014 G. Teschl und S. Teschl 2014.

- Näherung: Summe von n Rechteckflächen der Breite $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \text{mit} \quad x_i = a + (i-1)\Delta x$$

- Exakt: ***Integral*** über $[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

- ***Stammfunktion*** $F(x)$ von $f(x)$:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F'(x) = f(x)$$

- Berechnung des Integrals mit Hilfe der Stammfunktion:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Das Bilden der Stammfunktion (auch ***Integration***) ist die inverse Operation zur Ableitung.

Beispiele für Funktionen und ihre Stammfunktionen:

Bezeichnung	$f(x)$	$F(x)$
Konstante	c	$c\,x$
Lineare Funktion	x	$\frac{1}{2}x^2$
Potenzfunktion ($\alpha \neq -1$)	x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
Kehrwertfunktion	x^{-1}	$\ln x$
Exponentialfunktion	e^x	e^x

8.2. Stetige Zufallsvariable

Eine ***stetige Zufallsvariable*** (engl. *continuous random variable*) X ist nach Definition eine Abbildung

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

deren Wertebereich

$$\mathrm{Bild}(X) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$$

überabzählbar unendlich ist.

Wie eine diskrete Zufallsvariable kann auch eine stetige Zufallsvariable durch eine ***Verteilungsfunktion***

$$F : \mathbb{R} \to [0,1], \quad F(x) = P(X \leq x)$$

beschrieben werden.

Eine ***Verteilung*** in der bisherigen Form $(p_i) = (P(X = x_i))$ für eine stetige Zufallsvariable anzugeben, ist jedoch nicht möglich, da es überabzählbar unendlich viele mögliche Werte der Zufallsvariablen gibt, die sich folglich nicht indizieren lassen. Stattdessen kann eine sogenannte ***Dichte*** definiert werden.

8.2.1. Dichte

Definition 8.1 (Wahrscheinlichkeitsdichte)
Sei Ω eine Ergebnismenge eines Zufallsexperiments und X eine *stetige* Zufallsvariable auf Ω mit Verteilungsfunktion $F(x)$.

Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ heißt ***Dichte*** (auch ***Wahrscheinlichkeitsdichte***, engl. *probability density function*, PDF) der Zufallsvariable X, wenn gilt:

- $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- f ist an höchstens endlich vielen Stellen unstetig,
- $\int_{-\infty}^{x} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

höchstens endlich viele stellen

Folgerung 8.2 (Eigenschaften der Dichte)
Sei f die Dichte einer stetigen Zufallvariable X.

(i) Die Dichte ist normiert, d. h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x})\,\mathrm{d}\tilde{x} = 1.$$

(ii) Die Wahrscheinlichkeit, dass X im Intervall $(a,b]$ liegt, beträgt

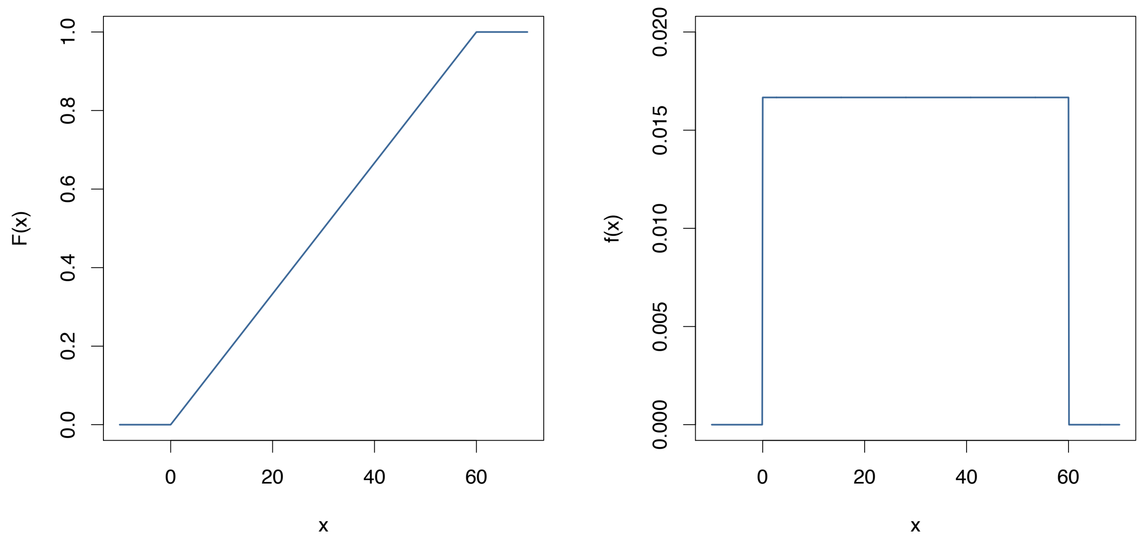
$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. = \Big[F(b)\Big]^b - \Big[F(a)\Big]^a$$

Folgerung 8.3 (Dichte und Verteilungsfunktion)
Ist eine Verteilungsfunktion $F(x)$ differenzierbar, so lässt sich die zugehörige Dichte berechnen als
$$f(x) = F'(x).$$

Folgerung 8.3 kann auch auf einzelne Intervalle stückweise differenzierbarer Verteilungsfunktionen angewendet werden.

Beispiel 8.4 (Gleichverteilung)
Sei X die Zufallsvariable für die Wartezeit an einer Supermarktkasse, die (unrealistisch) als gleichverteilt zwischen 0 und 60 Sekunden angenommen werde.

Für die Verteilungsfunktion und die Dichte folgt
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0, \\ \frac{x}{60} & \text{für} \quad x \in [0,60], \\ 1 & \text{für} \quad x > 60, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60} & \text{für} \quad x \in [0,60], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Diese Verteilung wird ***Gleichverteilung*** (engl. *uniform distribution*) genannt. Wir werden sie in Abschnitt 8.3 noch genauer behandeln.

8.2.2. Erwartungswert

Definition 8.5 (Erwartungswert)
Sei X eine *stetige* Zufallsvariable mit der Dichte $f(x)$.

Dann ist der ***Erwartungswert*** $\mathrm{E}(X)$ definiert als
$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Der Erwartungswert wird häufig mit μ bezeichnet.

Beispiel 8.6 (Erwartungswert bei Gleichverteilung)
Als Dichte der Gleichverteilung hatten wir in Beispiel 8.4 ermittelt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{60} & \text{für} \quad x \in [0,60], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$f(x) = \frac{x}{50}$ $[0,10]$

Für den Erwartungswert erhalten wir

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{60} \int_0^{60} x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{60} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{60} = \frac{1}{60} \left(\frac{60^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 30\,.$$

Die Rechenregeln aus Satz 6.17 gelten mit Ausnahme von Regel 4 auch für stetige Zufallsvariablen. Zusätzlich gilt die die folgende Rechenregel.

Satz 8.7 (Rechenregel)
Seien X eine stetige Zufallsvariable und $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt mit der Dichte $f(x)$ von X

$$\mathrm{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x.$$

8.2.3. Varianz

Die Varianz einer diskreten oder stetigen Zufallsvariablen X wurde definiert als

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}((X-\mu)^2)\,.$$

Die Varianz wird häufig mit σ^2 bezeichnet.

Die Standardabweichung wurde definiert als

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,.$$

Die folgende Aussage für die Varianz einer stetigen Zufallsvariablen folgt aus der Definition des Erwartungswerts.

Folgerung 8.8 (Varianz)
Sei X eine *stetige* Zufallsvariable mit dem Erwartungswert μ und der Dichte $f(x)$. Dann gilt

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Die Rechenregeln aus Satz 6.23 gelten auch für stetige Zufallsvariablen.

Beispiel : Varianz der Gleichverteilung

Für die Gleichverteilung aus den Beispielen 8.4 und 8.6 gilt

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{60}\int_0^{60} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{60}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{60} = 1200$$

und somit

$$\sigma^2 = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 1200 - 30^2 = 300\,,$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{300} \approx 17.3\,.$$

8.2.4. Stetige Verteilungen

Bevor wir spezielle stetige Verteilungen im Detail betrachten, machen wir einige Vorüberlegungen.

Folgerung 8.9 (Stetige Verteilungsfunktion)
Sei X eine stetige Zufallsvariable mit der ***stetigen*** Verteilungsfunktion $F(x)$.

Dann gilt

$$P(X < x) = \lim_{\tilde{x}\to x-} F(\tilde{x}) = F(x) = P(X \leq x)$$

und

$$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - F(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Folgerung 8.10 (Wahrscheinlichkeit für Intervalle)
Sei X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichte $f(x)$.

Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt dann

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

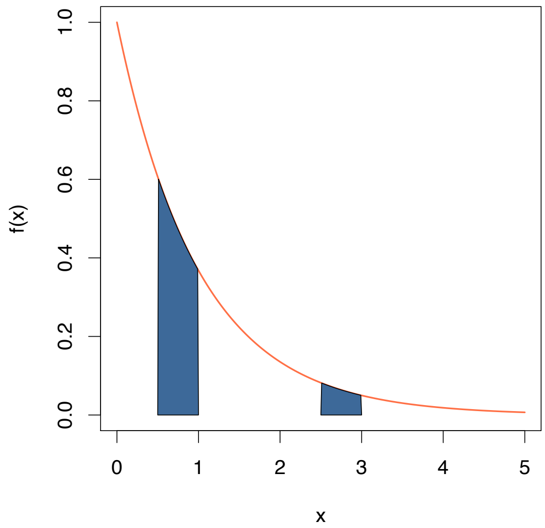
Die Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq b)$ entspricht der Fläche unter der Dichte über dem Intervall $[a, b]$.

Für stetige Zufallsvariablen mit *stetigen* Verteilungsfunktionen entfällt bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit also der Unterschied zwischen den Relationen $<$ und $\leq$ bzw. $>$ und $\geq$ bzw. zwischen offenen und geschlossenen Intervallen.

Für stetige Zufallsvariablen mit *nicht stetigen* Verteilungsfunktionen dagegen besteht dieser Unterschied an den Unstetigkeitsstellen streng mathematisch sehr wohl. Für praktische Anwendungen ist dies jedoch meistens unerheblich.

In der folgenden Abbildung gilt gemäß der Fläche unter der Dichte

$$P(0.5 \leq X \leq 1) > P(2.5 \leq X \leq 3)\,.$$



Die Dichte $f(x)$ ist ein Maß dafür, wie wahrscheinlich ein Wert der Zufallsvariablen X um x herum ist.

Bemerkung: In der englischsprachigen Literatur werden bei stetigen Verteilungen häufig die folgenden Abkürzungen verwendet:

- ***PDF*** (*probability density function*) für die Dichte,
- ***CDF*** (*cumulative distribution function*) für die Verteilungsfunktion.

Die Abkürzung PDF ist leider etwas unglücklich gewählt: Man sollte sich merken, dass PDF *nicht* für *probability distribution function* steht.

8.3. Gleichverteilung

In den Beispielen 8.4 und 8.6 haben wir gleichverteilte Wartezeiten an der Supermarktkasse betrachtet. Wir können die ***Gleichverteilung*** auf ein beliebiges Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ verallgemeinern.

Definition 8.11 (Gleichverteilung)
Eine stetige Zufallsvariable X heißt ***gleichverteilt*** (engl. *uniformly distributed*) auf dem Intervall $[a,b]$, wenn sie für die Parameter $a,b \in \mathbb{R}$ mit $\quad a < b \quad$ die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls} \quad x \in [a,b], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Kurzschreibweise: $\quad X \sim \mathrm{U}(a,b)$.

Mit Hilfe des Integrals über der Dichte lassen sich analog zu den Beispielen in Abschnitt 8.2 die folgenden Zusammenhänge nachweisen.

Satz 8.12 (Erwartungswert und Varianz bei Gleichverteilung)
Für eine gleichverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{U}(a,b)$ gilt

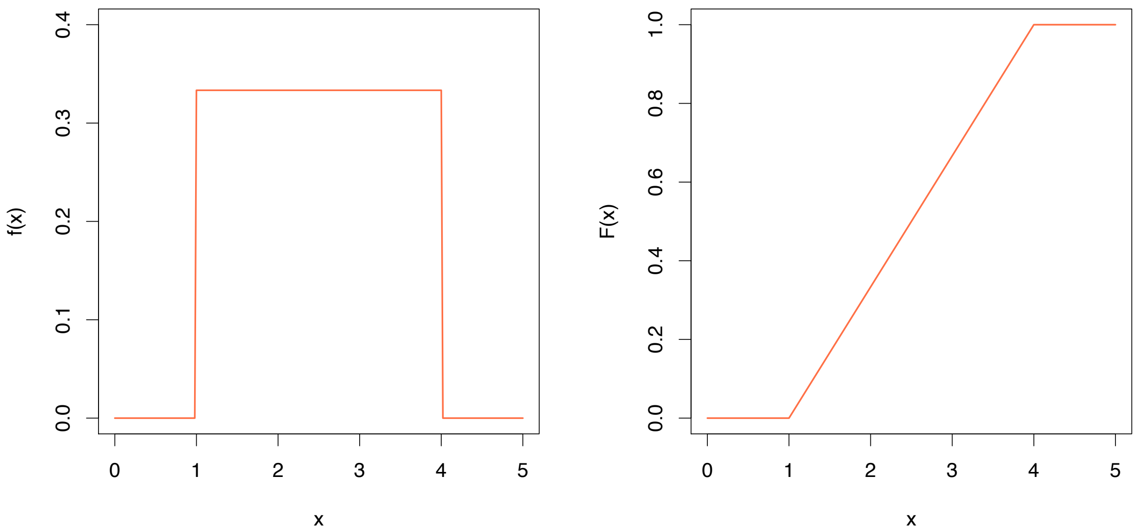
$$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

und

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < a\,, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{falls} \quad x \in [a,b]\,, \\ 1 & \text{falls} \quad x > b\,. \end{cases}$$

Beispiel : Gleichverteilung

$X \sim \mathrm{U}(1,4)\,, \quad \mu = 2.5\,, \quad \sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0.866$



Beispiel : Gleichverteilung – Wartezeit

Wie lange muss man üblicherweise auf den Bus warten, wenn man zu einem zufälligen Zeitpunkt zur Haltestelle geht und weiß, dass der Bus alle 10 min abfährt (aber den Fahrplan nicht im Kopf hat)?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, weniger als 3 min bzw. mehr als 8 min Minuten zu warten?

Die Wartezeit X ist unter diesen Voraussetzungen gleichverteilt auf dem Intervall $[0,10]$, d. h. $X \sim \mathrm{U}(0,10)$. Folglich gilt

$$\mathrm{E}(X) = \frac{10+0}{2} = 5$$

und

$$P(X < 3) = P(X \leq 3) = F(3) = \frac{3-0}{10-0} = \frac{3}{10}\,,$$
$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - F(8) = 1 - \frac{8-0}{10-0} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\,.$$

8.4. Exponentialverteilung

8.4.1. Definition

Definition 8.13 (Exponentialverteilung)
Eine stetige Zufallsvariable X heißt ***exponentialverteilt*** (engl. *exponentially distributed*), wenn sie für einen Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$ die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{falls} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Kurzschreibweise: $\quad X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Satz 8.14 (Erwartungswert und Varianz bei Exponentialverteilung)
Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable $\quad X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \quad$ gilt

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

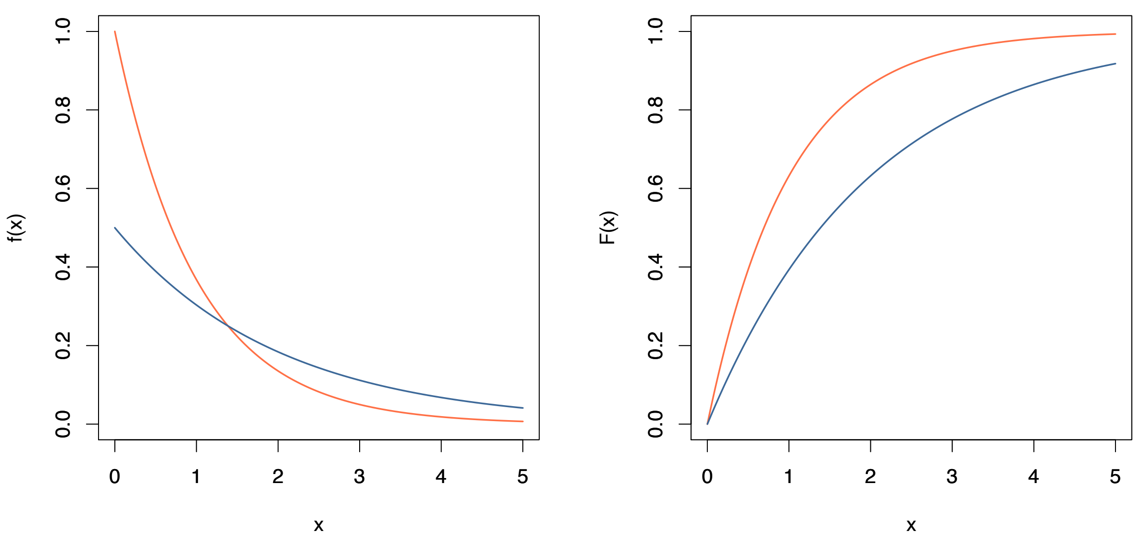
und

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{falls} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel : Exponentialverteilung

Rot: $\quad X \sim \mathrm{Exp}(1), \quad \mu = 1, \quad \sigma = \sqrt{1} = 1$

Blau: $\quad X \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \mu = 2, \quad \sigma = \sqrt{4} = 2$



8.4.2. Zusammenhang mit dem Poisson-Prozess

Eine wichtige Anwendung der Exponentialverteilung ist die Dauer von Zeitintervallen zwischen Ereignissen, z. B. in Warteschlangenmodellen.

Satz 8.15 (Zusammenhang mit Poisson-Prozess)
Sei X_t ein Poisson-Prozess mit Parameter λ, $\quad X_t \sim \mathrm{Po}(t\lambda)$.

Dann ist die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen gegeben durch eine stetige Zufallsvariable T, die exponentialverteilt ist gemäß $\quad T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Beispiel : Zusammenhang mit Poisson-Prozess

In Beispiel 7.18 wurde die Anzahl der Anfragen X_t an einen Server im Zeitintervall $[0,t]$ (in Minuten) als Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda = 2$ modelliert.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen zwei Anfragen weniger als 10 s bzw. mehr als 1 min liegen?

Die Zeit T zwischen zwei Anfragen (in Minuten) ist exponentialverteilt gemäß $\quad T \sim \mathrm{Exp}(2)$.

Mit $\quad 10\,\mathrm{s} = \frac{1}{6}\,\mathrm{min} \quad$ gilt

$$\begin{aligned} P(T < \tfrac{1}{6}) &= P(T \le \tfrac{1}{6}) = F(\tfrac{1}{6}) \\ &= 1 - e^{-2\cdot 1/6} = 1 - e^{-1/3} \approx 0.283\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(T > 1) &= 1 - P(T \le 1) = 1 - F(1) \\ &= 1 - (1 - e^{-2\cdot 1}) = e^{-2} \approx 0.135\,. \end{aligned}$$

Test-8.2) $F(8) = 1 - 0{,}56 \qquad t = 8$

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$0{,}44 = 1 - e^{\lambda \cdot 8} \quad | -1 \; \cdot -1$

$0{,}56 = e^{-\lambda 8} \quad | \ln()$

$\ln(0{,}56) = -\lambda \cdot 8 \quad | : 8$

$\frac{\ln(0{,}56)}{8} = -\lambda$

$\lambda = -\frac{\ln(0{,}56)}{8}$

$= -0{,}072477311$

$E(x) = \frac{1}{\lambda}$

$= 13{,}7974$

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) \qquad f(x) = \frac{x}{50}$

$= \frac{1}{50} \cdot \int_0^{10} x^2$

$= \frac{1}{50} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$

$= \frac{1}{50} \left(\frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$

$= \frac{20}{3}$

Median

$0{,}5 = \int_0^x f(x) = \frac{1}{50} \cdot \int_0^x x = \frac{1}{50} \left[\frac{x^2}{2}\right]$

$0{,}5 = \frac{1}{50} \cdot \frac{x^2}{2} \quad | \cdot 50$

$0{,}5 = \frac{x^2}{100} \quad | \cdot 100$

$50 = x^2 \quad | \sqrt{\;}$

$x = \sqrt{50}$

8.5. Normalverteilung

Die im Folgenden behandelte ***Normalverteilung*** (auch ***Gaußsche Normalverteilung*** oder ***Gauß-Verteilung***) kann ohne Zweifel als die wichtigste Verteilung überhaupt bezeichnet werden. Den Grund für ihre besondere Bedeutung lernen wir im Zusammenhang mit dem zentralen Grenzwertsatz weiter unten kennen. Wichtige Anwendungen sind Messfehler und Sollwert-Abweichungen, die häufig normalverteilt sind oder in guter Näherung als normalverteilt angesetzt werden können.

C. F. GAUSS (1777–1855) hat die Normalverteilung zur Beschreibung von Messfehlern verwendet und ihre Eigenschaften eingehend untersucht. Bekannt war sie allerdings schon vor seiner Zeit aus Arbeiten von A. DE MOIVRE (1667–1754).

8.5.1. Definition

Definition 8.16 (Normalverteilung)
Eine stetige Zufallsvariable X heißt ***normalverteilt*** (engl. *normally distributed*), wenn sie für Parameter $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ die Dichte

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$

besitzt. Die Dichte $f(x)$ wird auch ***Gaußsche Glockenkurve*** (engl. *Gaussian*) genannt.

Kurzschreibweise: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Satz 8.17 (Erwartungswert und Varianz bei Normalverteilung)
Für eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt

$$\mathrm{E}(X) = \mu\,, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

und

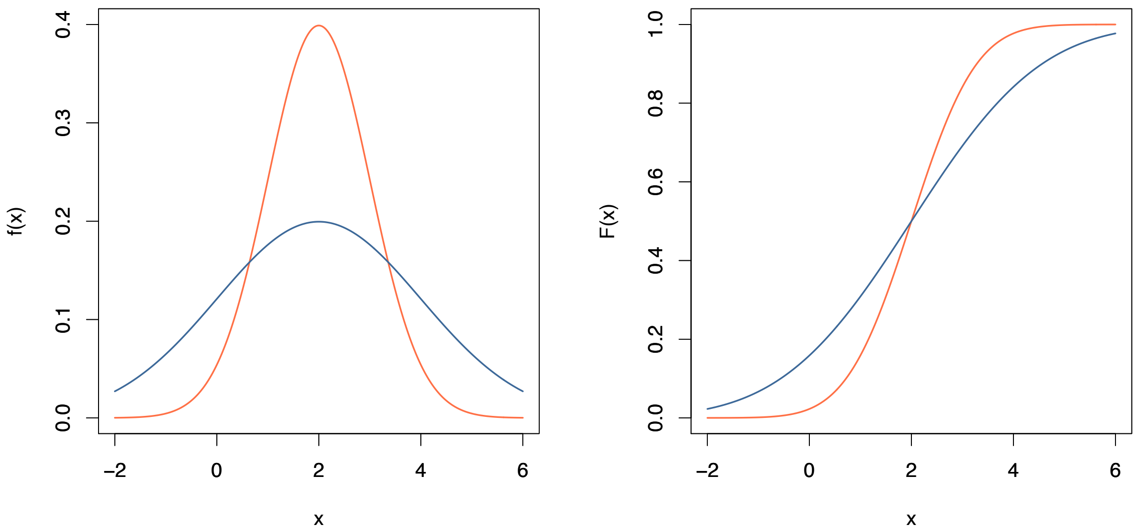
$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\tilde{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\tilde{x}\,.$$

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ der Normalverteilung kann nicht in geschlossener Form (d. h. ohne Integral) geschrieben werden, da die Dichte $f(x)$ der Normalverteilung keine elementare Stammfunktion besitzt.

Beispiel : Normalverteilung

Rot: $X \sim \mathrm{N}(2,1)\,, \quad \mu = 2\,, \quad \sigma = \sqrt{1} = 1$

Blau: $X \sim \mathrm{N}(2,4)\,, \quad \mu = 2\,, \quad \sigma = \sqrt{4} = 2$



8.5.2. Standardnormalverteilung

Definition 8.18 (Standardnormalverteilung)
Eine stetige Zufallsvariable Z heißt ***standardnormalverteilt***, wenn sie normalverteilt mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ ist, also die Dichte

$$\varphi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

besitzt.

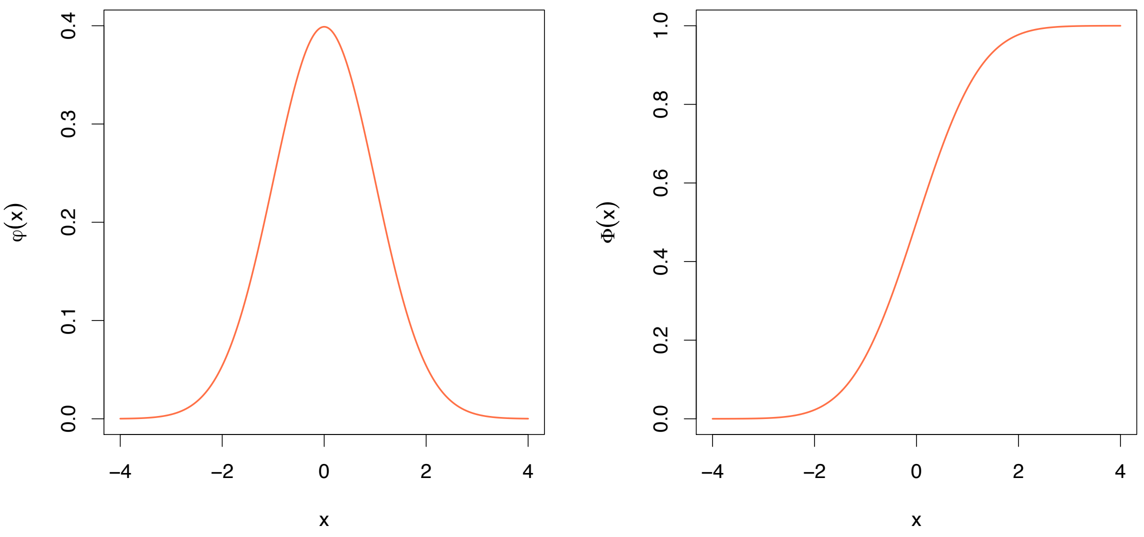
Die zugehörige Verteilungsfunktion lautet

$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}\tilde{z}^2}\, \mathrm{d}\tilde{z}\,.$$

Kurzschreibweise: $\quad Z \sim \mathrm{N}(0,1)\,.$

Die Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung kann nicht in geschlossener Form angegeben werden. Die Werte können aus Tabellen ermittelt werden (siehe Anhang A.1).

Darstellung der Dichte der Standardnormalverteilung $\varphi(z)$ (links) und der zugehörigen Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ (rechts).



Folgerung 8.19 (Symmetrie der Standardnormalverteilung)
Für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung gilt

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)\,.$$

Satz 8.20 (Standardisierte Zufallsvariable)
Für eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ ist die zugehörige standardisierte Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

standardnormalverteilt, $Z \sim \mathrm{N}(0,1)\,.$

Zwischen den Verteilungsfunktionen $F(x) = P(X \leq x)$ und $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ sowie den entsprechenden Dichten $f(x)$ und $\varphi(z)$ gelten die Umrechnungsformeln

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \quad \text{sowie} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma}\,\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Die linke Formel wird genutzt, um Tabellenwerte für die Verteilungsfunktion $\Phi(z)$ der Standardnormalverteilung $\mathrm{N}(0,1)$ auf Normalverteilungen $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ umzurechnen. Wir wenden dies in dem folgenden Beispiel an.

Beispiel : Zugriffszeiten

Für eine Festplatte werde angenommen, dass die Abweichungen der Zugriffszeit T vom Sollwert μ normalverteilt sind gemäß $T \sim N(\mu, \sigma^2)$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zugriffszeit im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ liegt?

$$\begin{aligned}
&P(T \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) = P(\mu - \sigma \leq T \leq \mu + \sigma) \\
&\quad = P(T \leq \mu + \sigma) - P(T \leq \mu - \sigma) \\
&\quad = F(\mu + \sigma) - F(\mu - \sigma) \\
&\quad = \Phi\Big(\frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{\mu - \sigma - \mu}{\sigma}\Big) \\
&\quad = \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&\quad = \Phi(1) - \big(1 - \Phi(1)\big) \\
&\quad = 2\,\Phi(1) - 1.
\end{aligned}$$

Durch Nachschlagen von $\Phi(1)$ im Anhang A.1 erhalten wir

$$P(\mu - \sigma \leq T \leq \mu + \sigma) \approx 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826\,.$$

Für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ ergibt sich entsprechend

$$P(a \leq T \leq b) = \Phi\Big(\frac{b - \mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a - \mu}{\sigma}\Big).$$

Folgerung 8.21 (Standardnormalverteilung)
Für eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt

$$\begin{aligned}
P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) &\approx 0.683\,, \\
P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) &\approx 0.955\,, \\
P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) &\approx 0.997\,.
\end{aligned}$$

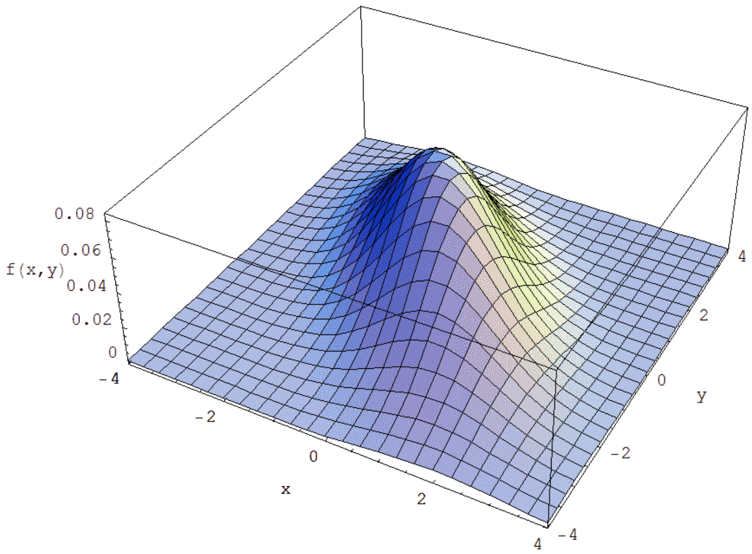
8.5.3. Multivariate Normalverteilung

Gemeinsame Verteilungen mehrerer Zufallsvariablen werden durch ***multivariate*** Verteilungsfunktionen und Dichten beschrieben.

Für zwei Zufallsvariablen X und Y erhalten wir $F(x, y)$ und $f(x, y)$. Neben den einzelnen Erwartungswerten μ_X, μ_Y und Varianzen σ_X^2, σ_Y^2 geht auch die Kovarianz σ_{XY} in die Dichte ein.

Beispiel : Bivariate Normalverteilung

Darstellung der Dichte der bivariaten Normalverteilung $f(x,y)$ mit $\mu_X = \mu_Y = 0$, $\sigma_X^2 = 2$, $\sigma_Y^2 = 3$, $\sigma_{XY} = 1.5$.



Auf Einzelheiten kann hier nicht eingegangen werden.

8.6. Grenzwertsätze

Die besondere Bedeutung der Normalverteilung beruht auf dem ***zentralen Grenzwertsatz***. Zunächst betrachten wir den Additionssatz der Normalverteilung.

8.6.1. Additionssatz der Normalverteilung

Satz 8.22 (Additionssatz der Normalverteilung)
Seien X, Y unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Dann ist $X+Y$ ebenfalls normalverteilt mit

$$X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2).$$

Dass die Summe zweier Zufallsvariablen die gleiche Verteilung besitzt wie die Zufallsvariablen selbst, ist nicht selbstverständlich. Die Summe zweier gleichverteilter Zufallsvariablen ist z. B. dreiecksverteilt, wie wir in Beispiel 6.9 für die (diskrete) Verteilung der Augensumme zweier Würfel gesehen haben.

8.6.2. Zentraler Grenzwertsatz

Satz 8.23 (Zentraler Grenzwertsatz, engl. central limit theorem)
Seien $X_1, \dots, X_n$ (diskrete oder stetige) unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2, und sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ die Summe dieser Zufallsvariablen.

Nach Satz 6.27 gilt $\mathrm{E}(S_n) = n\mu$ und $\mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$.

Dann strebt die Verteilung der zugehörigen standardisierten Zufallsvariablen

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

für $n \to \infty$ punktweise gegen die Standardnormalverteilung:

$$\forall z \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)\,.$$

Die einzelnen X_i müssen nicht normalverteilt sein. Die (näherungsweise) Normalverteilung der Summe von Ergebnissen eines Münzwurfs (also einer Binomialverteilung) haben wir bereits in Beispiel 6.10 beobachtet. Der zentrale Grenzwertsatz liefert nun die Erklärung dafür.

8.6.3. Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace

Ein wichtiger Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes ist der ***Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace***, der die Addition Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen und damit eine binomialverteilte Zufallsvariable beschreibt.

Satz 8.24 (Grenzwertsatz von de Moivre-Laplace)
Sei X eine diskrete, binomialverteilte Zufallsvariable, $\quad X \sim \mathrm{B}(n,p)\,.$

Falls $\quad np(1-p) \gtrsim 9$ (Faustregel), $\quad$ dann gilt in guter Näherung

$$F(x) = P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

sowie

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Die Addition bzw. Subtraktion von $\frac{1}{2}$ wird als ***Stetigkeitskorrektur*** bezeichnet.

Beispiel : Anwendung des Grenzwertsatzes von de Moivre-Laplace

Bei einer Datenübertragung sei die Wahrscheinlichkeit eines Bitfehlers $p = 10^{-5}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als 5 Bitfehler unter 1 Mio. übertragenen Bits?

Die Anzahl der Bitfehler X ist binomialverteilt mit $n = 10^6$ und $p = 10^{-5}$, $\quad X \sim \mathrm{B}(10^6, 10^{-5})$.
Wegen $\quad np(1-p) = 9.9999 > 9 \quad$ ist der Satz von de Moivre-Laplace anwendbar.

Näherungsweise gilt also

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - F(5) \approx 1 - \Phi\left(\frac{5 - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx 1 - \Phi(-1.423) \\ &= \Phi(1.423) \approx 0.922\,. \end{aligned}$$

Die Berechnung mit Hilfe der Binomialverteilung ergibt

$$P(X > 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx 0.933\,.$$

8.7. Übersicht

8.7.1. Eigenschaften stetiger Verteilungen

Name	Kurzschreibweise	Dichte und Verteilungsfunktion	Momente
Gleich-verteilung	$X \sim \mathrm{U}(a,b)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls} \quad x \in [a,b]\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < a\,, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{falls} \quad x \in [a,b]\,, \\ 1 & \text{falls} \quad x > b \end{cases}$	$\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Exponential-verteilung	$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls} \quad x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{falls} \quad x \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\mathrm{E}(X) = 1/\lambda$ $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$
Normal-verteilung	$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\tilde{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}\tilde{x}$	$\mathrm{E}(X) = \mu$ $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$
Standard-normal-verteilung	$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$	$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}\tilde{z}^2}\, \mathrm{d}\tilde{z}$	$\mathrm{E}(Z) = 0$ $\mathrm{Var}(Z) = 1$

8.7.2. Stetige Verteilungen in R

Name	Kurzschreibweise	R-Funktionen

Gleich-verteilung	$X \sim \mathrm{U}(a,b)$	`dunif(x, a, b)`
		`punif(q, a, b)`
		`runif(size, a, b)`

Exponential-verteilung	$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$	`dexp(x, lambda)`
		`pexp(q, lambda)`
		`rexp(size, lambda)`

Normal-verteilung*	$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	`dnorm(x, mu, sigma)`
		`pnorm(q, mu, sigma)`
		`rnorm(size, mu, sigma)`

Standard-normal-verteilung	$X \sim \mathrm{N}(0,1)$	`dnorm(x)`
		`pnorm(q)`
		`rnorm(size)`

* *Zu beachten:* Die R-Funktionen `dnorm()` etc. verwenden als Streuungsparameter die Standardabweichung σ statt (wie in der Kurzschreibweise) der Varianz σ^2.

- `d<name>(x, ...)`: Dichte $f(x)$ zu einem Vektor (x_i) von Realisierungen $x_i \in \mathbb{R}$
- `p<name>(q, ...)`: Verteilungsfunktion $F(q_i)$ zu einem Vektor (q_i) von Quantilen $q_i \in \mathbb{R}$
- `r<name>(size, ...)`: Vektor mit `size` Zufallszahlen gemäß zugehöriger Verteilung

```
x <- seq(-4, 4, by=0.1)                          # Vektor (x_i)
plot(x, dnorm(x, mean=0, sd=1), type="l")  # Standardnormalverteilung
random <- rexp(200, 2)                           # 200 Exp(2)-Zufallszahlen
hist(random)                                      # Histogramm
```

A. Tabellen

A.1. Standardnormalverteilung $\Phi(z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

Symmetrie: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Ablesebeispiele (Dezimalstellen 1 und 2 bestimmen Zeile, Dezimalstelle 3 bestimmt Spalte):

$$\Phi(1.96) \approx 0.9750,$$
$$\Phi(-0.75) = 1 - \Phi(0.75) \approx 1 - 0.7734 = 0.2266.$$

A.2. p-Quantile der Standardnormalverteilung

p	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
$\tilde{z}_p$	0.2533	0.5244	0.8416	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905

Symmetrie: $\tilde{z}_{1-p} = -\tilde{z}_p$.

Ablesebeispiele:

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{z}_{0.975}) = 0.975 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tilde{z}_{0.975} \approx 1.9600\,, \\ \Phi(\tilde{z}_{0.3}) = 0.3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tilde{z}_{0.3} = -\tilde{z}_{0.7} \approx -0.5244\,. \end{aligned}$$