

Relationen und Funktionen

Äquivalenzrelation

reflexiv, symmetrisch, transitiv

- Äquivalenzklasse von x

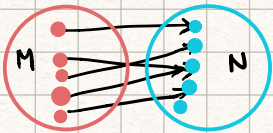
$$\hookrightarrow [x] := \{y \in M : x R y\}$$

\hookrightarrow entweder $[x] = [y]$ gleich oder $[x] \cap [y] = \emptyset$ disjunkt (ungleich)

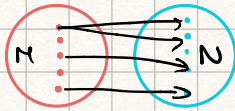
Funktionen

$F \subseteq M \times N$ heißt Funktion / Abbildung vom M in N

Graphische Darstellung von Funktionen



Graphische Darstellung von Relationen



nicht eindeutig \leftarrow \hookrightarrow eindeutig

Definitionsbereich

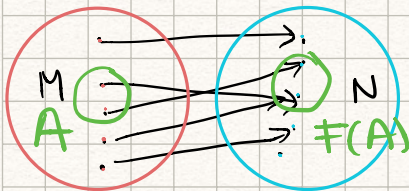
$$D(F) = \{x \in M : \exists y \in N : y = F(x)\} \quad D(F) = M$$

Wertebereich

$$R(F) := \{y = F(x) : x \in M\}$$

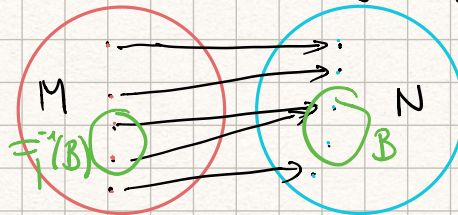
Bild von A:

$$F(A) := \{y = F(x) \in N : x \in A\}$$



Urbild von A:

$$F^{-1}(B) := \{x \in M : \exists y \in B : y = F(x)\}$$

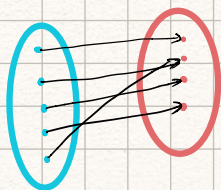


Identität

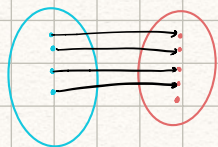
$$\text{id}: M \rightarrow M, \text{id}(x) = x$$

Surjektion

- Wertebereich ist die ganze Zielmenge (alle werden getroffen)



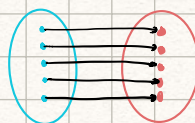
Injektion



- eindeutig

$$F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Bijektion

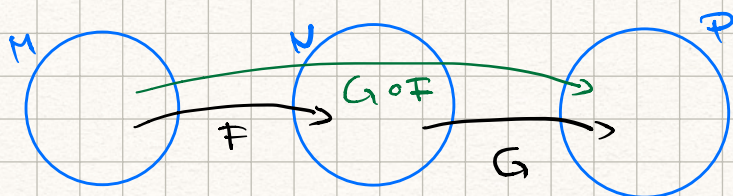


surjektiv + injektiv = bijektiv

Verkettung (Nacheinander ausführen)

$$F: M \rightarrow N \quad G: N \rightarrow P \quad (R(F) \subseteq D(G))$$

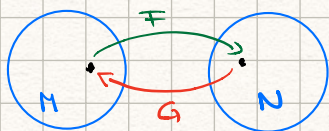
$$(G \circ F): M \rightarrow P \quad (G \circ F)(x) = G(F(x))$$



Inverse (Umkehrfunktion)

$$F: M \rightarrow N$$

$$(G \circ F) = \text{id}_M \quad \text{und} \quad (F \circ G) = \text{id}_N \quad | \quad \text{Je nachdem wo man startet}$$



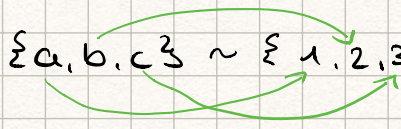
- nur wenn bijektiv ist

F^{-1} vertausche rechnerisch x und y

Mächtigkeit

Bijektion von A auf B \Rightarrow gleich mächtig
 $\hookrightarrow A \sim B$

- n elementige Mengen $\{a, b, c\} \sim \{1, 2, 3\}$



endlich / unendlich

unendlich $\exists B : B \subset A \wedge B \sim A$

endlich wenn es nicht unendlich ist

$\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{Z}$ unendlich

abzählbar / überabzählbar

abzählbar $A \sim \mathbb{N}$

überabzählbar A ist unendlich und $A \not\sim \mathbb{N}$ ($\mathbb{R}, \mathbb{I}, \mathbb{C}$)

Halbordnung - reflexiv, schwach antisymmetrisch und transitiv

Ordnung - reflexiv, schwach antisymmetrisch, transitiv, vollständig