3. Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie

3.1. Ereignisse

Zufallsexperiment

Definition 3.1 (Zufallsexperiment)
Ein ***Zufallsexperiment*** (auch Experiment, engl. *experiment* oder *trial*) ist ein Vorgang, der beliebig oft unter den gleichen Bedingungen wiederholt werden kann und dessen Ergebnis nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann.

Ergebnismenge

Definition 3.2 (Ergebnismenge)
Die Menge aller möglichen (sich gegenseitig ausschließenden) Ergebnisse eines Zufallsexperiments wird ***Ergebnismenge*** (auch ***Ergebnisraum***, ***Stichprobenraum***, ***Grundgesamtheit***, engl. *sample space*) genannt und mit Ω bezeichnet.

Die möglichen Ergebnisse werden mit $\omega \in \Omega$ bezeichnet.

Ereignis

Definition 3.3 (Ereignisse)
Sei Ω die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments.

- Ein ***Ereignis*** (engl. *event*) A ist eine Teilmenge der Ergebnismenge, $A \subseteq \Omega$. Es tritt ein, wenn das Ergebnis ω des Zufallsexperiments ein Element von A ist, $\omega \in A$.
- Ein ***Elementarereignis*** (engl. *simple event*) $\{\omega\}$ ist ein Ereignis, das aus genau einem Ergebnis besteht.
- Die Ergebnismenge Ω selbst wird ***sicheres Ereignis*** genannt, die leere Menge $\emptyset$ ***unmögliches Ereignis***.

Beispiel : Ereignisse, Elementarereignisse

Ein Zufallsexperiment, das aus einem Wurf eines sechsseitigen Würfels besteht, besitzt die Ergebnismenge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- Elementarereignisse: $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$
- Ereignis „gerade Augenzahl“: $A = \{2,4,6\}$
- Ereignis „Augenzahl mindestens 4“: $B = \{4,5,6\}$

Beispiel : Ereignisse

Die Funktionsprüfung zweier gespiegelter Festplatten (RAID 1) mit den möglichen Ergebnissen „funktionstüchtig“ (f) und „defekt“ (d) besitzt die Ergebnismenge

$$\Omega = \{f,d\} \times \{f,d\} = \{(f,f),(f,d),(d,f),(d,d)\}.$$

- Ereignis „genau eine defekte Festplatte“: $A = \{(f,d),(d,f)\}$
- Ereignis „mindestens eine funktionstüchtige Festplatte“: $B = \{(f,f),(f,d),(d,f)\}$

Beispiel : Ereignisse

Die Messung der Antwortzeit (in Millisekunden) eines Servers besitzt die Ergebnismenge $\Omega = \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$.

- Ereignis „Antwortzeit kleiner als 150 ms“: $A = (0,150)$
- Ereignis „Antwortzeit zwischen 100 ms und 200 ms“: $B = (100,200)$

Verknüpfung von Ereignissen

- Da Ereignisse als Mengen definiert sind, können mit Hilfe der bekannten Mengenoperationen Verknüpfungen von Ereignissen definiert werden

Definition 3.4 (Verknüpfung von Ereignissen)
Sei Ω die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments, und $A,B \subseteq \Omega$ seien Ereignisse.

- Das Ereignis „A oder B tritt ein“ entspricht der Vereinigung (engl. *union*) $A \cup B$.
- Das Ereignis „A und B treten ein“ entspricht dem Durchschnitt (engl. *intersection*) $A \cap B$.
- Das ***Gegenereignis*** (auch ***Komplementärereignis***) „A tritt nicht ein“ wird als $\overline{A}$ (auch A^c) bezeichnet und entspricht dem Komplement $\overline{A} = \Omega \setminus A$.
- Zwei Ereignisse, deren Durchschnitt leer ist, $A \cap B = \emptyset$, heißen ***disjunkt*** (auch ***unvereinbar***, engl. *mutually exclusive*).
- Zwei Ereignisse, deren Durchschnitt nicht leer ist, $A \cap B \neq \emptyset$, heißen ***vereinbar***.

Beispiel : Verknüpfung von Ereignissen

Seien $A,B \subseteq \Omega$ Ereignisse. Das Ereignis C = „genau eines der Ereignisse A oder B tritt ein“ ist gegeben durch

$$C = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

Für einen Würfelwurf und die Ereignisse A = „gerade Augenzahl“ und B = „Augenzahl höchstens 3“ folgt

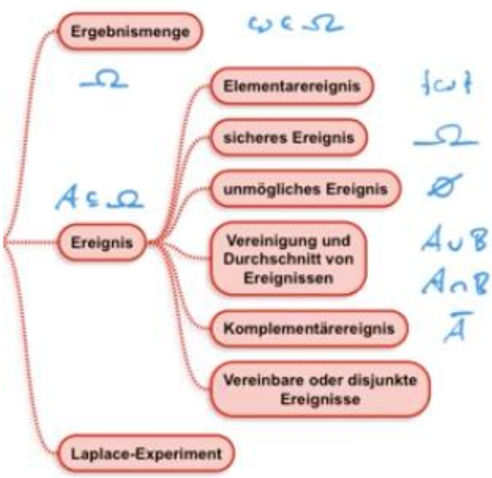
$$\begin{aligned} C &= (\{2,4,6\} \cap \{4,5,6\}) \cup (\{1,3,5\} \cap \{1,2,3\}) \\ &= \{4,6\} \cup \{1,3\} = \{1,3,4,6\}. \end{aligned}$$

Folgerung 3.5 (De Morgansche Regeln)
Seien Ω die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments und $A,B,A_i \subseteq \Omega$, $i = 1,\ldots,n$, Ereignisse.

Es gelten die De-Morganschen Regeln,

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \text{insb.} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \qquad \text{insb.} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$



3.2. Wahrscheinlichkeit

$A \subseteq \Omega$

$P(A)$

3.2.1. Ereignissystem

Definition 3.6 (Ereignissystem)
Seien Ω eine Ergebnismenge eines Zufallsexperiments und $\mathscr{P}(\Omega)$ die Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von Ω.

Die Menge $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ heißt ***Ereignissystem über*** Ω (auch ***Ereignisalgebra***).

Beispiel : Ereignissystem

- $\Omega = \{f, d\}$ (endlich): $\mathscr{A} = \{\emptyset, \{f\}, \{d\}, \{f, d\}\}$. Potenzmenge v. Ω
- $\Omega = \mathbb{N}$ (abzählbar unendlich): $\mathscr{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \mathbb{N}\}$.
- $\Omega = \mathbb{R}$ (überabzählbar unendlich):
  $\mathscr{A} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{-1\}, \ldots, \{0,1\}, \{0,2\}, \ldots, (0,1), (0,1], [0,1], \ldots, \mathbb{R}\}$

Disclaimer: Mathematisch präzise muss statt der Potenzmenge eine σ-Algebra verwendet werden, um pathologische Teilmengen auszuschließen. Für unsere Zwecke ist dies jedoch irrelevant.

3.2.2. Wahrscheinlichkeitsmaß (Ω, A, P)

Definition 3.7 (Wahrscheinlichkeitsmaß, Kolmogorov-Axiome)
Seien Ω eine Ergebnismenge eines Zufallsexperiments, $\mathscr{A}$ ein Ereignissystem über Ω und $A, A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, Ereignisse.

Eine Abbildung $P: \mathscr{A} \to [0,1]$ heißt ***Wahrscheinlichkeitsmaß*** (engl. *probability measure*) über $(\Omega, \mathscr{A})$, wenn gilt:

(i) $\forall A \in \mathscr{A}: P(A) \geq 0$. σ-Additivität $P(A)$

(ii) $P(\Omega) = 1$. $P(A_1 \cup A_2 \cup .. A_n) = P(A_1) + P(A_2) .. P(A_n)$

(iii) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für paarweise disjunkte (unvereinbare) Ereignisse, also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Das System $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ heißt ***Wahrscheinlichkeitsraum*** (auch ***Wahrscheinlichkeitsmodell***).

P(A) wird oft kurz die Wahrscheinlichkeit (engl. probability) des Ereignisses A genannt.
Die dritte Eigenschaft wird als σ-Additivität bezeichnet. Aus ihr folgt als Spezialfall die Additivität

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{für disjunkte Ereignisse,} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Die σ -Additivität ist eine stärkere Forderung als die Additivität. Sie ist für abzählbar und über- abzählbar unendliche Ergebnismengen erforderlich.

Rechenregeln

Satz 3.8 (Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten)
Seien $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathscr{A}$ Ereignisse.

Dann gelten für P die Rechenregeln:

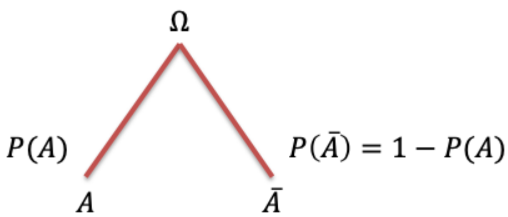
(i) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(\bar{A})$ ist die ***Gegenwahrscheinlichkeit*** (auch ***komplementäre Wahrscheinlichkeit***) zu $P(A)$.

(ii) $P(\emptyset) = 0$. $= P(\bar{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

(iii) $P(A) \in [0,1]$.

(iv) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, P ist also eine monoton wachsende Funktion.

(v) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ für beliebige (vereinbare oder unvereinbare) Ereignisse.



Die Aufteilung der Ergebnismenge in disjunkte Ereignisse lässt sich anschaulich als Baum darstellen, was insbesondere bei mehrstufigen Zufallsexperimenten hilfreich sein wird.

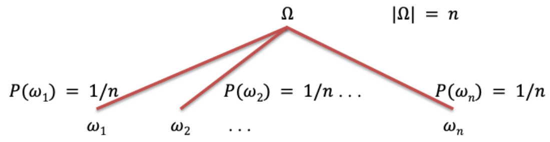
- Die Wurzel entspricht der Ergebnismenge.
- Die Knoten (bzw. Blätter) entsprechen den Ereignissen.
- Die Kanten werden mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten beschriftet.

3.2.3. Laplace-Experiment

Definition 3.9 (Laplace-Experiment)
Ein Zufallsexperiment heißt ***Laplace-Experiment***, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

(i) Die Ergebnismenge Ω ist endlich.

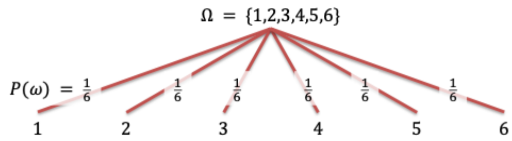
(ii) Alle Ergebnisse in Ω (d. h. alle Elementarereignisse) sind gleich wahrscheinlich.



Satz 3.10 (Laplace-Experiment)
Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ der (endliche) Wahrscheinlichkeitsraum eines Laplace-Experiments. Seien $\omega_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, |\Omega|$, die möglichen Ergebnisse, wobei $|\Omega|$ die Mächtigkeit der Ergebnismenge bezeichnet (also die Anzahl möglicher Ergebnisse).

- Dann besitzt jedes Elementarereignis $\{\omega_i\}$ die Wahrscheinlichkeit
$$P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$
Dabei steht $P(\{\omega\})$ für die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Elementarereignisses.
- Ein beliebiges Ereignis $A \subseteq \Omega$ besitzt die Wahrscheinlichkeit
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \textbf{ \textit{günstigen} } \text{Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}.$$

Beispiel:



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine durch 3 teilbare Augenzahl zu würfeln?
Sei A = {3, 6} das gesuchte Ereignis.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap C)$$

3.2.4. Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit

Die Erfahrung zeigt, dass ein Zusammenhang zwischen der relativen Häufigkeit von Merkmalsausprägungen in Stichproben und der Wahrscheinlichkeit von Elementarereignissen existiert.

Den Ergebnissen $w_j \in \Omega$, j = 1,...,k, eines Zufallsexperiments entsprechen in der beschreibenden Statistik die Merkmalsausprägungen a_j, j=1,...,k.

Wird ein Zufallsexperiment mit den möglichen Ergebnissen w_j , j = 1, . . . , k, n Mal wiederholt, so nähert sich die relative Häufigkeit f_j für große n fast immer der Wahrscheinlichkeit $P(w_j)$ an.

In der Praxis wird daher die relative Häufigkeit einer Stichprobe großen Umfangs oft als Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit verwendet.

Die Einschränkung fast immer kann mathematisch exakt definiert werden; man spricht in dem Zusammenhang von **stochastischer Konvergenz**.

Beispiel: Relative Häufigkeit bei vielen Wiederholungen

Bei einem Experiment mit 20 bzw. 1000 aufeinander folgenden Würfen eines ungezinkten Würfels wurden die folgenden relativen Häufigkeiten ermittelt:

a_j	1	2	3	4	5	6
$f_{j,20}$	0.1	0.15	0.2	0.25	0.0	0.3
$f_{j,1000}$	0.183	0.163	0.178	0.136	0.174	0.166
$P(\omega_j)$	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167

3.2.5. Zusammengesetzte Ereignisse

Bei Experimenten mit zusammengesetzten Ereignissen ist es entscheidend, ob die Reihenfolge der Einzelereignisse (z. B. zweier Würfelergebnisse) eine Rolle spielt oder nicht.

Beispiel: Unterscheidbare Würfel

Es werden gleichzeitig zwei faire Würfel geworfen, von denen einer rot und einer grün sei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 5 zu erhalten?
Die Ergebnismenge ist

$$\Omega = \underbrace{\{1,\ldots,6\}}_{\text{roter W.}} \times \underbrace{\{1,\ldots,6\}}_{\text{grüner W.}} = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}.$$

Jedes der $|\Omega| = 6^2 = 36$ Elementarereignisse $\omega \in \Omega$ ist gleich wahrscheinlich, so dass es sich um ein Laplace-Experiment handelt. Das Ereignis „Augensumme gleich 5" entspricht $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$, so dass wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhalten:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0.111.$$

Beispiel: Nicht unterscheidbare Würfel

Es werden gleichzeitig zwei faire Würfel geworfen, die nicht unterscheidbar seien. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 5 zu erhalten?
Die Ergebnismenge ist kleiner als im vorherigen Beispiel, da jede Kombination von Augenzahlen nur einmal auftritt:

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(1,6),(2,2),(2,3),\ldots,(2,6),$$
$$(3,3),\ldots,(3,6),(4,4),\ldots,(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}.$$

Insgesamt gibt es $|\Omega| = 6+5+\ldots+1 = 21$ Elementarereignisse. Diese sind jedoch nicht gleich wahrscheinlich. Es handelt sich also nicht um ein Laplace-Experiment.
Von den Elementarereignissen sind 6 solche mit einfacher Wahrscheinlichkeit P_1 (die Pässche) und 15 solche mit doppelter Wahrscheinlichkeit $P_2 = 2P_1$ (die Nicht-Pässche). Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 sein muss, folgt

$$1 = 6P_1 + 15P_2 = 6P_1 + 30P_1 = 36P_1 \quad \Rightarrow \quad P_1 = \tfrac{1}{36} \quad \Rightarrow \quad P_2 = \tfrac{1}{18}.$$

Für das Ereignis „Augensumme gleich 5", $A = \{(1,4),(2,3)\}$, erhalten wir

$$P(A) = P((1,4)) + P((2,3)) = P_2 + P_2 = \tfrac{1}{18} + \tfrac{1}{18} = \tfrac{1}{9},$$

das gleiche Ergebnis wie im vorherigen Beispiel.
Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Augensumme hängt also – wie zu erwarten – nicht davon ab, ob die Würfel unterscheidbar sind oder nicht, auch wenn sich die jeweiligen Ergebnismengen unterscheiden.