O TAD image8bit

Dept. de Eletrónica, Telecomunicações e Informática
Universidade de Aveiro

José Diogo Cerqueira, Bernardo Marujo
(76758) c.jose.diogo@ua.pt, (107322) bernardomarujo@ua.pt

26 de novembro de 2023

Conteúdo

Introdução

Neste relatório é apresentado o trabalho prático realizado no âmbito da unidade curricular de Algoritmos e Estruturas de Dados, com dois objetivos principais.

O primeiro é desenvolver desenvolver e testar o TAD (Tipo Abstrato de Dados) `image8bit`, que permite manipular imagens de 8 bits com com níveis de cinzento, em que cada pixel pode tomar valores de intensidade entre 0 e 255.

O segundo é analisar a complexidade computacional da função `ImageLocateSubImage` que permite determinar, caso exista, a localização de uma subimagem numa imagem dada, e da função `ImageBlur` que aplica um filtro a uma imagem e a torna baça.

Estrutura de Dados e Funções do TAD image8bit

1.1 Estrutura de Dados image8bit

A estrutura de dados `image8bit` é composta por um ponteiro para um array de pixeis, um inteiro que representa a largura da imagem, um inteiro que representa a altura da imagem e um inteiro que representa entre que valores vão variar os tons de cinzento dos pixeis, sendo este o valor máximo que um pixel pode assumir, que corresponde à cor branca.

O array de pixeis é um array de unsigned char, em que cada posição do array representa um pixel da imagem, e cada pixel pode tomar valores de intensidade entre 0 e 255 (valor máximo que podemos meter no *maxval*). A posição do pixel (x,y) no array é dada por $x + y$ * (*largura da imagem*).

A estrutura de dados `image8bit` é definida da seguinte forma:

```
struct image {
  int width;
  int height;
  int maxval;   // maximum gray value (pixels with maxval are pure WHITE)
  uint8* pixel; // pixel data (a raster scan)
};
```

Apresentação e Análise da Complexidade Computacional das Funções

2.1 Analise da complexidade da função ImageLocateSubImage

2.1.1 Apresentação

A função `ImageLocateSubImage` permite determinar, caso exista, a localização de uma subimagem numa imagem dada.

Para determinar a localização da subimagem, a função percorre a imagem dada e, para cada pixel da imagem, verifica se a subimagem se encontra nessa posição. Para verificar se a subimagem se encontra nessa posição, a função percorre a subimagem com a função `ImageMatchSubImage` e verifica se os pixeis da subimagem são iguais aos pixeis da imagem na posição (x,y) da imagem. Por este motivo, podemos fazer a análise da complexidade para cada função.

```
int ImageLocateSubImage(Image img1, int* px, int* py, Image img2) { ///
  assert (img1 != NULL);
  assert (img2 != NULL);
  assert (px != NULL);
  assert (py != NULL);

  // Search for the subimage in the image
  for (int i = 0; i <= img1->height - img2->height; i++) {
    for (int j = 0; j <= img1->width - img2->width; j++) {
      // If the subimage is found, set the position and end the search
      if (ImageMatchSubImage(img1, j, i, img2)) {
        *px = j;
        *py = i;
        return 1;
      }
    }
  }
  return 0;
}
```

```
int ImageMatchSubImage(Image img1, int x, int y, Image img2) { ///
  assert (img1 != NULL);
  assert (img2 != NULL);
  assert (ImageValidPos(img1, x, y));
  assert (ImageValidRect(img1, x, y, img2->width, img2->height));

  // Compare the pixels of the subimage with the pixels of the image
  for (int i = 0; i < img2->height; i++) {
    for (int j = 0; j < img2->width; j++) {
```

```
      ADDS += 1;
      // If the pixels are different, return 0, continuing the search
      if (ImageGetPixel(img1, x + j, y + i) != ImageGetPixel(img2, j, i)) {
        return 0;
      }
    }
  }
  return 1;
}
```

2.1.2 Análise Formal da Complexidade

ImageMatchSubImage

A função `ImageMatchSubImage` tem uma complexidade de $O(h \cdot w)$, pois itera por cada pixel da subimagem, sendo h e w a altura e largura da subimagem, respetivamente.

Complexidade da Função ImageLocateSubImage

Melhor Caso

Se a subimagem for encontrada na primeira posição, a função `ImageMatchSubImage` será chamada apenas uma vez. Portanto, a complexidade no melhor caso é $O(h \cdot w)$, escalando o tempo de execução, linearmente, com o tamanho da subimagem.

Pior Caso Num Cenário Real

No pior caso, os ciclos aninhados iteram sobre todas as posições possíveis dentro da imagem, resultando em $(n-h) \cdot (m-w)$ chamadas a `ImageMatchSubImage`, com n e m a altura e largura da imagem, respetivamente. Cada chamada a `ImageMatchSubImage` tem uma complexidade de $O(h \cdot w)$. Portanto, a complexidade do pior caso num cenário real é nos dada pela expressão $(n-h) \cdot (m-w) + h \cdot w$ que resulta numa ordem de complexidade $O(n \cdot m + h \cdot w)$, escalando o tempo de execução, com o tamanho da imagem e da subimagem. Na maioria dos casos existe sempre uma discrepância de aproximadamente 1% no valor que seria esperado, devido ao facto de existirem pixeis que são iguais aos pixeis que ele encontra na subimagem nas primeiras posições, entrando assim na função `ImageMatchSubImage` e acionando o contador. Essa diferença de um 1% são então os pixeis que são iguais aos primeiros pixeis da imagem pequena, parando eventualmente pois só correspondem alguns dos primeiros pixeis.

Para o valor ser exato , teríamos que ter, por exemplo, uma imagem toda preta de base, e uma subimagem, onde o primeiro pixel não é preto. A precisão vai ser de 100%, pois o contador só começa a contar a partir do momento onde de facto a subimagem aparece.

```
for (i=0; i <= n-h; i++){

    for (j=0; j <= m-w; j++){}
}
for (k=0; k <= h; k++){

    for (l=0; l <= w; l++){}
}
```

$$\sum_{i=0}^{n-h-1} \sum_{j=0}^{m-w-1} 1 + \sum_{k=0}^{h-1} \sum_{l=0}^{w-1} 1$$

2.1.3 Testes Experimentais

Exemplo ilustrado para a localização de uma imagem pequena numa grande

Case	Position	time	caltime	memops	adds
Best Case	FOUND (0,0)	0.000246	0.000152	131072	65536
Worst Case	FOUND (1344,944)	0.007787	0.004829	2675784	1337892

Tabela 2.1: Performance Metrics for LOCATE Operations - Small 256x256 in Large 1600x1200

(a) Best Case

(b) Worst Case

Testes para outros tamanhos

Melhor Caso

Images Sizes	Position	time	caltime	memops	adds
Medium 512x512 in Large 1600x1200	FOUND (0,0)	0.000919	0.000571	524288	262144
Large 940x940 in Large 1600x1200	FOUND (0,0)	0.003030	0.001884	1767200	883600
Small 256x256 in Medium 512x512	FOUND (0,0)	0.000232	0.000145	131072	65536
Small 256x256 in Small 300x300	FOUND (0,0)	0.000240	0.000150	131072	65536

Tabela 2.2: Performance Metrics for LOCATE Operations Best Case

Pior Caso Cenário Real

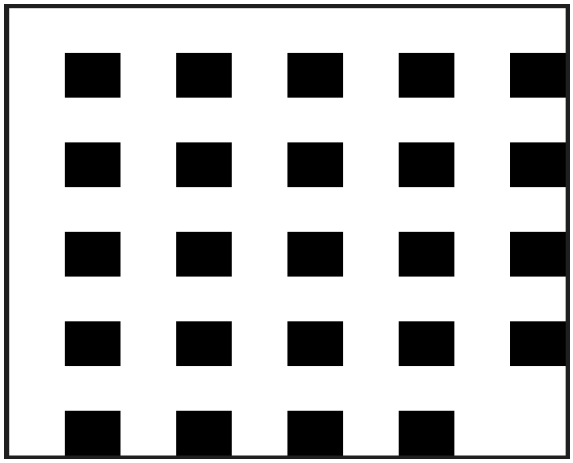
Images Sizes	Position	time	caltime	memops	adds
Medium 512x512 in Large 1600x1200	FOUND (1088,688)	0.005454	0.003396	2033540	1016770
Large 940x940 in Large 1600x1200	FOUND (660,260)	0.004063	0.002522	2112406	1056203
Small 256x256 in Medium 512x512	FOUND (256,256)	0.000635	0.000395	264036	132018
Small 256x256 in Small 300x300	FOUND (44,44)	0.000243	0.000151	135120	67560

Tabela 2.3: Performance Metrics for LOCATE Operations Worst Case

2.1.4 O Pior Caso

A complexidade no pior caso é nos dada pela expressão $(n-h)\cdot(m-w)\cdot h\cdot w$ resultando numa ordem de complexidade igual a $O(n\cdot m\cdot h\cdot w)$ escalando o tempo de execução, quadraticamente, com o tamanho da imagem e da subimagem.

Este cenário não é no entanto realista pois só é possível de ser obtido se a subimagem fosse repetida várias vezes, apenas com o ultimo pixel diferente para a imagem não ser igual, exceto na ultima ocorrência da subimagem, onde de facto ela se encontra. Segue-se um exemplo ilustrativo deste caso.



(a) Main Image 10x10

(b) Subimage 2x2

```
for (i=0; i <= n-h; i++){

    for (j=0; j <= m-w; j++){

    }    for (k=0; k <= h; k++){

        }    for (l=0; l <= w; l++){}
}
```

$$\sum_{i=0}^{n-h-1}\ \sum_{j=0}^{m-w-1}\ \sum_{k=0}^{h-1}\ \sum_{l=0}^{w-1} 1$$

2.1.5 Conclusões

A função ImageLocateSubImage apresenta uma complexidade assintótica significativa, sendo particularmente sensível ao tamanho da imagem e da subimagem. No melhor caso, onde a subimagem é encontrada imediatamente, a complexidade é linear, resultando numa busca eficiente. No entanto, no pior caso (num cenário real), a função escala com as dimensões de ambas as imagens, sendo por isso menos eficiente para, por exemplo, imagens grandes com subimagens pequenas localizadas nas últimas posições da imagem onde está incluída. Por exemplo, para uma imagem pequena (256x256) dentro de uma imagem grande (1600x1200), a quantificação da complexidade do melhor caso é calculada usando apenas as dimensões da imagem pequena, visto esta se encontrar logo no início ($adds = 256 \times 256 = 65536$). Já o pior caso (num cenário real) é calculado usando as dimensões de ambas as imagens ($adds = (1600 - 256) \times (1200 - 256) + 256 \times 256 = 1334272$), existindo aquela discrepância nos valores (aproximadamente 1% nas imagens que usamos).

2.2 Analise da complexidade da função ImageBlur

2.2.1 Apresentação

Esta função aplica um filtro a uma imagem e a torna baça, tomando como argumentos a imagem e o tamanho do filtro, dado por dx e dy.

Para calcular o valor de cada pixel da imagem resultante, a função percorre a imagem e, para cada pixel, calcula a média dos valores dos pixeis da imagem original que se encontram dentro do filtro. Por forma a reduzir a complexidade computacional, a função `ImageBlur` utiliza uma matriz auxiliar `cumSum` que guarda a soma cumulativa dos pixeis anteriores.

Depois de calculada a matriz auxiliar, aplicamos o filtro calculando a média dos valores dos pixeis da imagem original que se encontram dentro do filtro.

A complexidade da função depende apenas do tamanho da imagem, dado que o filtro é calculado percorrendo o array `cumSum` que tem o mesmo tamanho da imagem.

A função `ImageBlur` é definida da seguinte forma:

```
1  void ImageBlur(Image img, int dx, int dy) {
2    assert(img != NULL);
3    assert(dx >= 0);
4    assert(dy >= 0);
5
6    int width = img->width;
7    int height = img->height;
8
9    // Create an array to store cumulative sums
10   double** cumSum = (double**)malloc(height * sizeof(double*));
11   for (int i = 0; i < height; i++) {
12       cumSum[i] = (double*)malloc(width * sizeof(double));
13   }
14
15   // Calculate cumulative sums
16   for (int i = 0; i < height; i++) {
17       for (int j = 0; j < width; j++) {
18           ADDS += 1;
19
20           // Get the value of the current pixel
21           cumSum[i][j] = ImageGetPixel(img, j, i);
22
23           // Add the values of the pixels above and to the left
24           if (j > 0) {
25               cumSum[i][j] += cumSum[i][j - 1];
26           }
27
28           if (i > 0) {
29               cumSum[i][j] += cumSum[i - 1][j];
30           }
31
32           // Subtract the intersection to avoid double addition
33           if (i > 0 && j > 0) {
34               cumSum[i][j] -= cumSum[i - 1][j - 1];
35           }
36       }
37   }
38
39   // Apply the filter
40   for (int i = 0; i < height; i++) {
41       for (int j = 0; j < width; j++) {
```

```
            ADDS += 1;

            // Calculate the coordinates of the rectangle
            int iMin = (i - dy > 0) ? i - dy : 0;
            int iMax = (i + dy < height - 1) ? i + dy : height - 1;
            int jMin = (j - dx > 0) ? j - dx : 0;
            int jMax = (j + dx < width - 1) ? j + dx : width - 1;

            // Calculate the area of the rectangle
            int area = (iMax - iMin + 1) * (jMax - jMin + 1);

            // Calculate the sum of the pixels inside the rectangle
            double sum = cumSum[iMax][jMax];

            // Subtract the values of the pixels outside the rectangle
            if (iMin > 0) {
                sum -= cumSum[iMin - 1][jMax];
            }
            if (jMin > 0) {
                sum -= cumSum[iMax][jMin - 1];
            }

            // Add the value of the intersection to avoid double subtraction
            if (iMin > 0 && jMin > 0) {
                sum += cumSum[iMin - 1][jMin - 1];
            }

            // Calculate the mean and round it
            uint8 roundedValue = (uint8)(round(sum / area));
            ImageSetPixel(img, j, i, roundedValue);
        }
    }

    // Free the allocated memory
    for (int i = 0; i < height; i++) {
        free(cumSum[i]);
    }
    free(cumSum);

}
```

2.2.2 Análise Formal da Complexidade

Inicialização da Matriz de Soma Cumulativa

A inicialização da matriz de soma cumulativa tem uma complexidade de $O(n \cdot m)$, pois itera por cada pixel da imagem, dentro de dois ciclos aninhados, sendo n e m a altura e largura da imagem, respetivamente.

Aplicação do Filtro

A aplicação do filtro tem uma complexidade de $O(n \cdot m)$, pois itera por cada posição da imagem, da mesma forma que a inicialização da matriz de soma cumulativa. Logo, a complexidade da função `ImageBlur` é $O(n \cdot m)$.

Complexidade global

Portanto, a complexidade global da função `ImageBlur` é $O(n \cdot m)$, considerando que o fator que contribui mais para a complexidade é a dimensão da imagem. Isto quer dizer que o desempenho da função `ImageBlur` é linear em relação à dimensão da imagem.

2.2.3 Testes Experimentais

BLUR level	time	caltime	memops	adds
0	0.000678	0.000421	131072	131072
1	0.000710	0.000441	131072	131072
5	0.000592	0.000368	131072	131072
10	0.000605	0.000376	131072	131072
100	0.000580	0.000360	131072	131072

Performance Metrics for BLUR Operations on `bird_256x256.pgm`

BLUR level	time	caltime	memops	adds
0	0.002446	0.001520	524288	524288
1	0.002882	0.001791	524288	524288
5	0.002447	0.001521	524288	524288
10	0.002422	0.001505	524288	524288
100	0.002399	0.001491	524288	524288

Performance Metrics for BLUR Operations on `mandrill_512x512.pgm`

BLUR level	time	caltime	memops	adds
0	0.008697	0.005390	1767200	1767200
1	0.009859	0.006109	1767200	1767200
5	0.008381	0.005194	1767200	1767200
10	0.008336	0.005165	1767200	1767200
100	0.008263	0.005120	1767200	1767200

Performance Metrics for BLUR Operations on `einstein_940x940.pgm`

BLUR level	time	caltime	memops	adds
0	0.018296	0.011327	3840000	3840000
1	0.022019	0.013632	3840000	3840000
5	0.019351	0.011980	3840000	3840000
10	0.018723	0.011591	3840000	3840000
100	0.019255	0.011921	3840000	3840000

Performance Metrics for BLUR Operations on `ireland_03_1600x1200.pgm`

2.2.4 Conclusões

Conseguimos confirmar que se verifica experimentalmente, aquilo que se esperava pela análise formal da complexidade. A quantificação da complexidade, dada por *adds*, escala linearmente com o tamanho da imagem e conseguimos determinar *adds* pela multiplicação de *image_height* por *image_length*. Por exemplo para a imagem `einstein_940x940.pgm` temos $adds = 940 \times 940 = 1767200$.

Verifica-se também que a intensidade de *blur*, não impacta em nada o desempenho da função, sendo igual o número de *memops* e *adds* para todos os níveis de intensidade.

2.3 Análise da complexidade da função ImageWorstBlur

2.3.1 Apresentação

Para aprensentar uma função menos eficiente, criamos a função `ImageWorstBlur`, onde o filtro é calculado sem utilizar a matriz auxiliar, calculando a média dos valores do filtro a cada iteração, percorrendo a imagem original e o filtro.

A função `ImageWorstBlur` é definida da seguinte forma:

```
void WorseImageBlur(Image img, int dx, int dy) {
  assert(img != NULL);
  assert(dx >= 0);
  assert(dy >= 0);

  // Create a copy of the image
  int pixelsize = img->width * img->height;
  Image img_copy = ImageCreate(img->width, img->height, img->maxval);
  img_copy->pixel = (uint8*)malloc(pixelsize * sizeof(uint8));
  memcpy(img_copy->pixel, img->pixel, pixelsize * sizeof(uint8));

  // Apply the filter
  for (int i = 0; i < img->height; i++) {
      for (int j = 0; j < img->width; j++) {
          double sum = 0.0;
          int count = 0;
          // Calculate the coordinates of the rectangle
          for (int k = i - dy; k <= i + dy; k++) {
              for (int l = j - dx; l <= j + dx; l++) {
                  ADDS += 1;
                  // Check if the pixel is inside the image
                  if (ImageValidPos(img, l, k)) {
                    // Add the value of the pixel to the sum
                    sum += ImageGetPixel(img_copy, l, k);
                    count++;
                  }
              }
```

```
            }

            // Calculate the mean and round it
            uint8 roundedValue = (uint8)(round(sum / count));
            ImageSetPixel(img, j, i, roundedValue);
        }
    }
    // Free the allocated memory
    free(img_copy->pixel);
    free(img_copy);
}
```

2.3.2 Análise Formal da Complexidade

Cópia da Imagem

A cópia da imagem tem uma complexidade de $O(n \cdot m)$, onde n e m são a altura e largura da imagem, respetivamente.

Aplicação do Filtro

A aplicação do filtro tem uma complexidade que nos é dada pela expressão $n \cdot m \cdot (2 \cdot dy + 1) \cdot (2 \cdot dx + 1)$, onde n e m são a altura e largura da imagem, respetivamente, dx e dy são a largura e altura do filtro, respetivamente.

O loop externo itera sobre a altura da imagem (n) e o loop interno itera sobre a largura da imagem (m).

Para cada pixel, há um loop adicional que itera sobre uma região retangular de tamanho $(2 \cdot dy + 1) \cdot (2 \cdot dx + 1)$.

Portanto, a complexidade geral da função `WorseImageBlur` tem de ordem $O(n \cdot m \cdot dy \cdot dx)$, que aumenta quadraticamente com o tamanho da imagem e do filtro.

Complexidade global

Em suma, a complexidade global da função `WorseImageBlur` é $O(n \cdot m \cdot dy \cdot dx)$, o que torna a complexidade desta função significativamente maior do que a da função original `ImageBlur` $O(n \cdot m)$, especialmente devido aos loops aninhados para a cópia e à região considerada para a aplicação do filtro.

2.3.3 Testes Experimentais

BLUR level	time	caltime	memops	adds
0	0.000442	0.000273	131072	65536
1	0.001798	0.001111	652292	589824
5	0.017095	0.010563	7827332	7929856
10	0.065231	0.040305	27796292	28901376
20	0.231442	0.143006	101591312	110166016

Performance Metrics for WORSE BLUR Operations on `bird_256x256.pgm`

BLUR level	time	caltime	memops	adds
0	0.001611	0.001002	524288	262144
1	0.007232	0.004499	2615300	2359296
5	0.068682	0.042722	31644548	31719424
10	0.263131	0.163674	113514308	115605504
20	0.932412	0.579981	423469328	440664064

Performance Metrics for WORSE BLUR Operations on `mandrill_512x512.pgm`

BLUR level	time	caltime	memops	adds
0	0.005478	0.003387	1767200	883600
1	0.024206	0.014966	8824724	7952400
5	0.231706	0.143263	107179700	106915600
10	0.885484	0.547493	386220500	389667600
20	3.153342	1.949705	1454018000	1485331600

Performance Metrics for WORSE BLUR Operations on `einstein_940x940.pgm`

BLUR level	time	caltime	memops	adds
0	0.011627	0.007232	3840000	1920000
1	0.051778	0.032206	19183204	17280000
5	0.504233	0.313629	233316900	232320000
10	1.925805	1.197837	842184100	846720000
20	6.851739	4.261733	3181400400	3227520000

Performance Metrics for WORSE BLUR Operations on `ireland_03_1600x1200.pgm`

2.3.4 Conclusões

A função WorseImageBlur apresenta uma complexidade quadrática $O(n \cdot m \cdot dy \cdot dx)$ devido à introdução de uma cópia da imagem e a uma região expandida para aplicação do filtro. Esta contrasta com a versão original ImageBlur, que possui complexidade linear em relação ao tamanho da imagem. Por exemplo para a imagem `einstein_940x940.pgm` aplicando um filtro (20,20) temos, aplicando a expressão $n \cdot m \cdot (2 \cdot dy + 1) \cdot (2 \cdot dx + 1)$, $adds = 940 \times 940 \times (2 \times 20 + 1) \times (2 \times 20 + 1) = 1485331600$.

A eficiência computacional da função é fortemente influenciada pelas dimensões da imagem e do filtro, destacando a importância da otimização algorítmica em operações de processamento de imagem, o que reforça a relevância de abordagens mais simples para alcançar desempenho mais eficaz em cenários intensivos em processamento de imagem.