

# INFO-F408: Computability & complexity

Rémy Detobel

2 Octobre, 2017

# 1 Turing machine suite

## 1.1 Non déterministe

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$$

**Voir livre** : théorème 3.16 : chaque NTM as un équivalent DTM.

On va donc faire un parcours de l'arbre en largeur (et non en profondeur).

## 1.2 Reconnaître un langage de Turing

**Voir théorème 3.21 :**

Un langage est "Turing-recognizable" si et seulement si un "enumerator" l'énumère.

### 1.2.1 Démonstration

( $\Leftarrow$ ) Supposons qu'il existe un tel énumérateur "E" :

Soit la machine de Turing M. Informellement : "lorsque l'entrée est w

1. Exécuter E, et chaque fois que E écrit(/output) un string, on le compare avec w
2. si le string contient w, on accepte."

( $\Rightarrow$ ) Supposons qu'il existe une machine de Turing qui reconnaisse le langage L.

E = "ignorer l'entrée"

1. Répéter pour  $i = \mathbb{N}^*$  :

Exécuter M pour i étapes, sur les entrées  $S_1, S_2, \dots, S_i$ .

Si une exécution est acceptée, on affiche le  $S_j$  correspondant.

Au pire on fera i étapes pour afficher un mot, mais il pourra être affiché avant l'étape i

step/input	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
1	x				
2	x	x			
3	x	x	x		
4	x	x	x	x	
5	x	x	x	x	x

## 1.3 Langages réguliers (regular languages)

Langage régulier = reconnaissable par un automate fini (FA : finite automaton)

Langage décidable (= decidable = recursively) = décidable par une machine de Turing.

Langage reconnaissable (recognizable languages = recursively enumerable = RE) =

- reconnaissable par une machine de Turing,
- et admet un énumérateur ("enumerator")

Régulier < décidable < reconnaissable/recognizable

## 2 The Church-Turing thesis

C'est une thèse, pas une preuve.

⇒ La notion intuitive d'un algorithme est égal à un algorithme d'une machine de Turing

### 2.1 Hilbert Problem

Est-ce qu'il existe un algorithme qui décide si un polynôme admet une racine composée uniquement de nombre entiers.

**Exemple :**

$$P(x) = x_1^2 + x_2x_3^4 - 6x_1x_2^3x_3x_4^2 + 7x_1$$

Et on cherche donc des nombres entier  $x_1, x_2, x_3, x_4$

Il s'agit ici d'un problème "recognizable" (reconnaissable). Car si il y a une solution, on pourra la voir. Par contre, il n'est pas "décidable" parce que s'il n'y a pas de solution, il tournera à l'infini.

L'indécidabilité de ce problème à été prouvé en 1970 par Matijasevic.

## 3 Halting problème (problème de l'arrêt)

Point 4.2.

Diagonalization (cantor)  $f : A \rightarrow B$  est :

"un à un" (injective) si tous les élément de A sont projeté de manière distincte sur des éléments de B.

"dans" (surjective) lorsque tous les éléments de B admettent une préimage dans A, i.e. :

$$\forall b \in B : \exists a \in A | f(a) = b.$$

"one-to-one" (un à un) ET "onto" (dans) = "one-to-one correspondance"

C'est équivalent à une bijection.

Une ensemble A est "countable" (dénombrable) s'il existe une correspondance un à un ("one-to-one correspondance") entre A et  $\mathbb{N}$  (ce qui est équivalent à dire qu'il a la même "taille" que  $\mathbb{N}$ ). Un ensemble est "at most countable" (*au plus dénombrable*) s'il est fini OU dénombrable.

**Exemple :** est-ce que :

- les nombres paires sont dénombrable ?  
→ Oui ( $\mathbb{N}/2$ )
- les nombres rationnels ( $\mathbb{Q}$ ) sont dénombrable ?  
→ Oui (pour cela il faut juste mettre un ordre. Pour se faire, on peut parcourir un tableau à double entrées représentant les numérateurs et dénominateurs. Il suffirait donc de simplement définir l'ordre de lecture qui logiquement se ferait plutôt en diagonal). De manière un brin formelle,  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} : m \mapsto \frac{m}{1}$  est

une injection de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{Q}$ , donc  $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ . De même  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : \frac{a}{b} \mapsto (a, b)$  est une injection de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ , donc  $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}|$ . Or  $|\mathbb{Z}| = \mathbb{N}$ , et  $|\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$ . Donc :

$$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|.$$

On en déduit que toutes les quantités ici sont égales, et donc  $|\mathbb{Q}| = \mathbb{N}$ . (Pour démontrer cela rigoureusement, il faudrait expliciter les bijections  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  et  $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  et les composer ; puisqu'une composée de bijections est une bijection, on a finalement une bijection de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{N}$ .)

—  $\mathbb{Z}$  est dénombrable ?

→ Oui (nombre négatif étant des paires, nombre positif étant des impaires. De cette manière on compte tous les nombres) :

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \begin{cases} 2n + 1 & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ -2n & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 3.1 Cantor's Diagonal

Théorème :  $\mathbb{R}$  est non-dénombrable ("not countable").

Prouvons cela par contradiction :

Supposons donc que  $\mathbb{R}$  est dénombrable. On a donc une liste qui fait correspondre tous les nombres naturels ( $\mathbb{N}$ ) à un nombre présent dans  $\mathbb{R}$ . On va donc prouver qu'il existe un  $x \in [0, 1)$  qui n'est pas dans cette liste. Pour construire le  $x$ , on va prendre le

1	0,31415926535
2	1,00000000000
3	22,12312312312
4	323,01010101010
5	4,15026535010
6	...

nom à la position  $i$  et l'incrémenter. Ici  $x$  vaut donc :  $x = 0,41427...$  Donc, par construction, il ne peut pas être dans la liste car il diffère de tous les éléments de la liste.

Prenons  $\mathcal{L}$  comme étant l'ensemble des langages sur l'alphabet  $\Sigma$

Prouver que  $\mathcal{L}$  est indénombrable ("uncountable").