

INFO-F408: Computability & complexity

Rémy Detobel

27 novembre, 2017

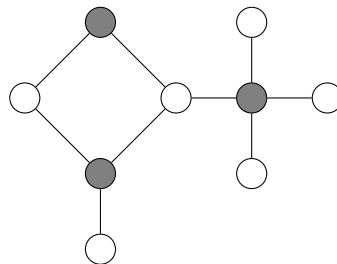
1 NP-Complete problems

- 3-SAT
- CLIQUE
- INDEPENDENT SET (complément de CLIQUE) \equiv CLIQUE in \bar{G}
- VERTEX COVER
- HAMILTONIAN PATH
- SUBSET SUM

1.1 K-Independent Set in G

\equiv CLIQUE in \bar{G}

$\equiv (n - K)$ VERTEX COVER in G



● Vertex cover

Lemme :

Pour $G = (V, E)$

Si $S \subseteq V$ est un vertex cover, alors V_S est un INDEPENDANT SET

1.2 SUBSET SUM

$$= \left\{ \langle S, t \rangle \mid S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \right. \\ \left. \exists \{y_1, \dots, y_l\} \subseteq S \right. \\ \left. \text{tel que } \sum_{s \in S} s = t \right\}$$

Théorème

SUBSET-SUM est NP-Complet

Preuve :

Réduction depuis 3 SAT où $x_1 \dots x_v$ sont des variables et où $c_1 \dots c_n$ sont des clauses (conditions).

		1	2	3	...	v		1	2	3	...	m
x_1	y_1	1	0	0	0	0			1	1		
	z_1	1	0	0	0	0						
x_2	y_2	0	1	0	0	0			1	0		
	z_2	0	1	0	0	0				1		
x_3	y_3	0	0	1	0	0			1			
	z_3	0	0	1	0	0						
*	g_1	0	0	0	0	0		0	0	0	*	0
	h_i	0	0	0	0	0		0	0	0	*	0
t		1	1	1	1	1		3	3	3	3	3

$$C_2 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

$$C_3 = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_4)$$

C_3 contient $\overline{X_2}$

C_2 contient $\overline{X_1}$

*Pour chaque clause/colonne c_i , on inclut deux fois le nombre : 0...010...0 (où le 1 est placé en index i).

- Supposons qu'il existe une instance de SAT :

→ construisons s' comme ceci : $\forall i = 1 \dots V$ si $x_i = T$ prenons y_i dans s' , z_i dans les autres cas.

Jusqu'à ce que cela satisfasse chaque clause où chaque 1, 2 ou 3 littéraux sont égaux à "True".

$\forall i = 1 \dots m$:

— Si c_i a 1 littéral à vrai qui inclut g_i et h_i dans S'

— Si c_i a 2 littéraux à vrai qui inclut g_i seulement.

- Supposons qu'il existe $S' \subseteq S$ tel que $\sum S' = t$. L'assignation est construite telle que :

$X_i = T \Leftrightarrow y_i \in S' (= F \text{ dans les autres cas}) \forall i = 1 \dots V$

Et ceci **n'est pas une assignation valide** pour SAT.

2 Programmation dynamique

Algorithme pour SUBSET-SUM

$x[i]$ est un nombre dans S et t est la somme à calculer.

Table T

$T[i][j] = \text{True} \Leftrightarrow$ il existe un sous-ensemble du premier nombre i où la somme est j

$i = 1 \dots |S|$

$j = 0 \dots \sum_{x \in S} x$

Algorithme

Initialisons T . Pour $i = 1 \dots |S|, j = 0 \dots t$:

$T[i][j] \leftarrow T[i-1][j] \vee T[i-1][j - x[i]]$

Return $T[|S|][t]$.

n a la taille de l'entrée (par exemple : le nombre de bits).

La complexité de l'algorithme DP pour le problème SUBSET SUM : $|S| \times t$

$$n \simeq \left(\sum_{x_i \in S} \log_2 x_i \right) + \log_2 t$$

2.1 Exemple

$$S = \{5\,000\,000\,000, 939\,000\,000, 333\,212\}$$

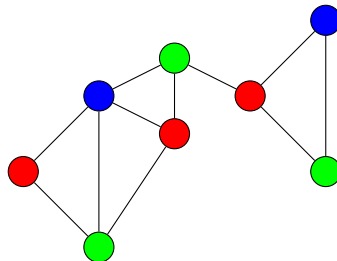
$$t = 5\,939\,333\,212$$

Complexité : $n \leq 4 \times 10 \times 4 = 160$

$$|S| \times t \geq 4 \times 5 \times 10^9$$

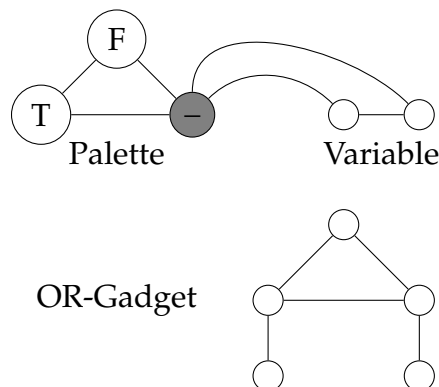
3 3-COLORING

Prenons un simple graphe non dirigé G , peut-on colorier ses points en 3 couleurs tel que deux point adjacents n'ont pas la même couleur ?

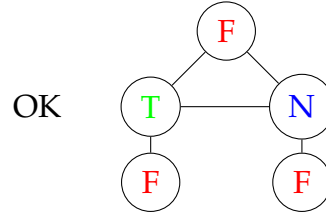
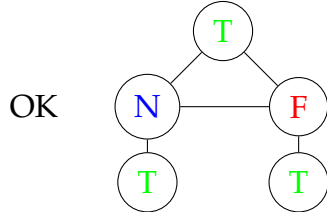
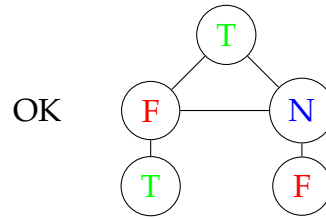
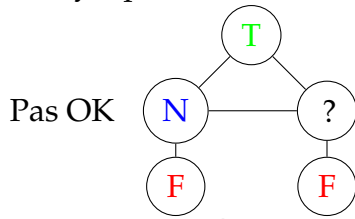


3.1 Exercice 7.27

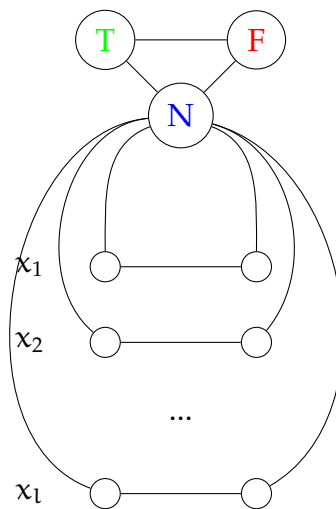
Prouver que 3-COLORING est NP-Complet



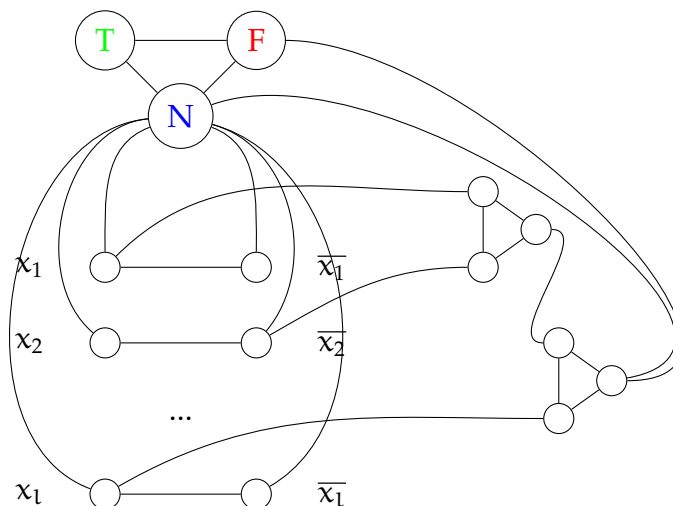
Il y a plusieurs manière de représenter le “OR-GADGET” :



Réduction depuis 3 SAT : 3 CNF formule ϕ , variables : x_1, \dots, x_l :
Preuve :



Par exemple : $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_l)$



$\exists 3\text{-coloring} \Leftrightarrow y$ est satisfaisable.

1. Supposons que ϕ est satisfaisable :

\exists un SAT associé a $f : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{T, F\}$. Colorer la palette en **rouge** **vert** **bleu** comme indiqué.



\forall variable x_i : colorier la variable gadget et : x_i $\overline{x_i}$

Si $f(x_i) = T$ dans les autres cas

\forall "OR-GADGET" : utiliser la couleur A ou B pour le "second" ou gadgets et colorer A, B ou C pour le "premier".

2. Supposons \exists un 3-COLORING colorer en **rouge** (F) **vert** (T) **bleu** (N).

Mettre x_i a vrai si :  et a faux si 