INFO-F408: Computability & complexity

Rémy Detobel

13 novembre, 2017

1 Cook-Leving

Rappel : SAT est NP-Complet.
Ce qui signifie que $A \in NP$ et $\exists$ une machine de Turing non déterministe N
$\phi = \phi_{cell} \wedge \phi_{start} \wedge \phi_{accept} \wedge \phi_{move}$

1.1 Exemple

$$\delta(q_1, a) = \{(q_1, b, R)\}$$

Qui signifie que si on lit a sur le ruban, on écrit b en q_1 et on se déplace vers la droite. On a donc ici une machine non déterministe, donc un ensemble de sortie, mais dans les faits cet ensemble n'a qu'un seul élément. Cette transition est donc déterministe.

$$\delta(q_1, b) = \{(q_2, c, L), (q_2, a, R)\}$$

Si on lit b sur le tape, on peut soit écrite c sur q_2 et se déplacer vers la gauche ou aller à droite en écrivant a sur q_2.

Tableaux :

a	q_1	b
q_2	a	c

Ce tableau est légal/valide

b	b	b
c	b	b

Ce tableau est légal/valide

#	b	a
#	b	a

Ce tableau est légal/valide

a	b	a
a	a	a

Ce tableau n'est **pas** valide

a	q_1	b
q_2	a	a

Ce tableau n'est **pas** valide

a	q_1	a
a	b	a

Ce tableau n'est **pas** valide

$$* = \bigvee_{a_1, a_2, \ldots, a_6 \text{est une fenêtre légal}} \left(X_{i,j-1,a_1} \wedge X_{i,j,a_2} \wedge X_{i,j+1,a_3} \wedge X_{i+1,j,a_4} \wedge \ldots \wedge X_{i+1,j+1,a_6}\right)$$

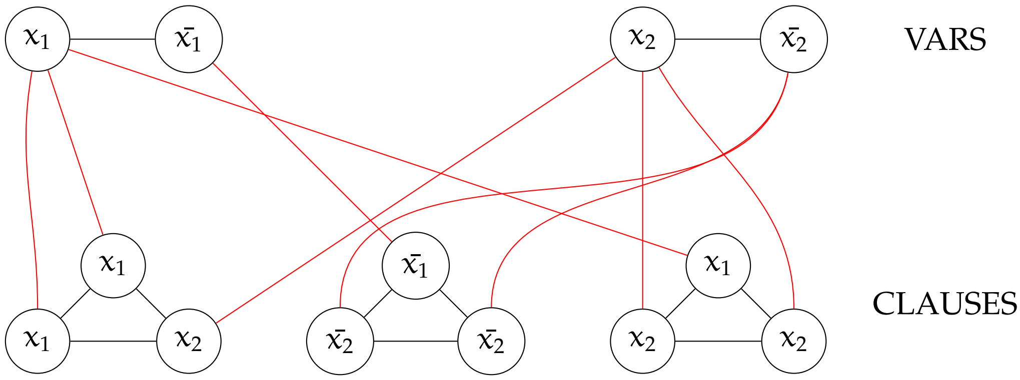
	j-1	j	j+1
i	a_1	a_2	a_3
i+1	a_4	a_5	a_6

Si ϕ as une taille polynomiale, alors ϕ est satisfaisable, de manière équivalente, $\Leftrightarrow$ w est accepté par N.

2 3-SAT

Forme normale conjonctive se note "CNF" en anglais. La formule de la FNC-3 s'écrit :

$$\bigwedge_j \left(l_{i_1,j} \vee l_{i_2,j} \vee l_{i_3,j}\right)$$



On appelle donc ce qu'il y a dans le grand "ET" une clause, et chaque élément de cette close s'appelle un littéral et est soit une variable, soit la négation d'une variable.

2.1 3 SAT est NP-Complet

— ϕ peut être écrit en FNC (seulement ϕ_{move} doit être transformé)
— Maintenant les clauses ne doivent pas avoir une taille de 3. Pourquoi faire ?
Supposons une clause : $(a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_l)$

$$\begin{aligned}&(a_1 \vee a_2 \vee Z_1)\wedge\\&(\overline{Z_1} \vee a_3 \vee Z_2)\wedge\\&(\overline{Z_2} \vee a_4 \vee Z_3)\wedge\\&...\wedge\\&(\overline{Z_{l-3}} \vee a_{l-1} \vee a_l)\end{aligned}$$

Exemple $a_4 = T, a_{i \neq 4} = F$

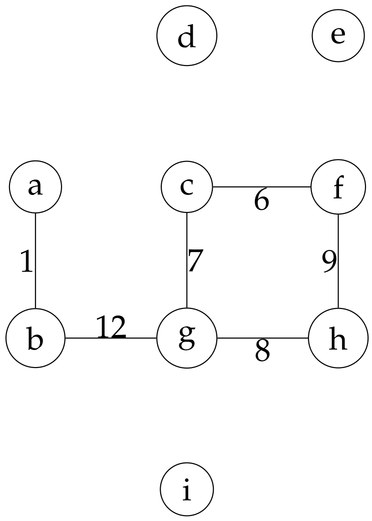
$$\begin{aligned}&(a_1 \vee a_2 \vee Z_1 = T)\wedge\\&(\overline{Z_1} \vee a_3 \vee Z_2 = T)\wedge\\&(\overline{Z_2} \vee a_4 = T \vee Z_3 = F)\wedge\\&(\overline{Z_3} \vee a_5 \vee Z_4 = F)\wedge\\&(\overline{Z_4}...)\end{aligned}$$

3 CLIQUE est NP-Complet

3.1 Vertex Cover

3 SAT $\leqslant_p$ Vertex Cover
K-Vertex cover :

$$\begin{aligned}\phi = &(X_1 \vee x_1 \vee x_2)\wedge\\&(\bar{x_1} \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_2})\wedge\\&(x_1 \vee x_2 \vee x_2)\end{aligned}$$



Une solution est de mettre $x_1 = T$ et $x_2 = F$

4 Hamiltonian Path

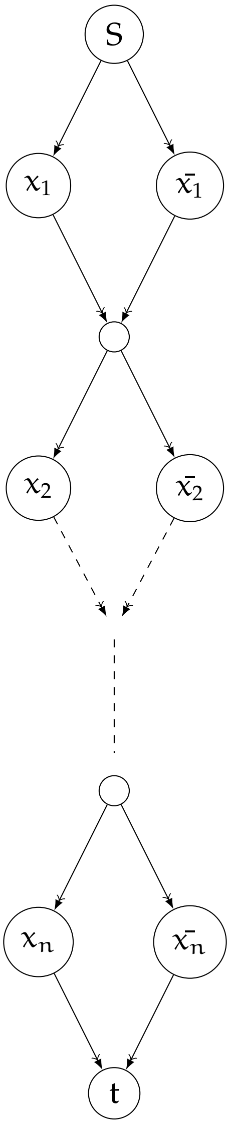
Hamiltonian VS Eulerian
Euler : "Bridge of Königsberg"

$$\mathtt{HamPath} = \{\langle G, S, t\rangle | G \text{ est un graphe dirigé avec un chemin Hamiltonien de S a t}\}.$$

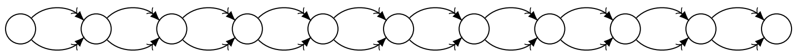
Théorème

Hamiltonian Path est NP-Complet

Pour une formule 3-FNC ϕ, on peut construire G, s, t tels que ϕ est SAT $\Leftrightarrow$ G a un chemin Hamiltonien de S à t.



Variable Gadgets pour chaque variable x_i



"Hard" direction : $\exists$ un chemin Hamiltonien $\Rightarrow$ $\exists$ une assignation (valuation) au problème de SAT.