

INFO-F408: Computability & complexity

Rémy Detobel

13 novembre, 2017

1 Cook-Leving

Rappel : SAT est NP-Complet.

Ce qui signifie que $A \in NP$ et \exists une machine de Turing non déterministe N

$$\phi = \phi_{\text{cell}} \wedge \phi_{\text{start}} \wedge \phi_{\text{accept}} \wedge \phi_{\text{move}}$$

1.1 Exemple

$$\delta(q_1, a) = \{(q_1, b, R)\}$$

Qui signifie que si on lit a sur le ruban, on écrit b en q_1 et on se déplace vers la droite. On a donc ici une machine non déterministe, donc un ensemble de srotie, mais dans les faits cet ensemble n'a qu'un seul élément. Cette transition est donc déterministe.

$$\delta(q_1, b) = \{(q_2, c, L), (q_2, a, R)\}$$

Si on lit b sur le tape, on peut soit écrite c sur q_2 et se déplacer vers la gauche ou aller à droite en écrivant a sur q_2 .

Tableaux :

a	q ₁	b
q ₂	a	c

Ce tableau est légal/valide

#	b	a
#	b	a

Ce tableau est légal/valide

a	q ₁	b
q ₂	a	a

Ce tableau n'est **pas** valide

b	b	b
c	b	b

Ce tableau est légal/valide

a	b	a
a	a	a

Ce tableau n'est **pas** valide

a	q ₁	a
a	b	a

Ce tableau n'est **pas** valide

$$* = \bigvee_{a_1, a_2, \dots, a_6 \text{ est une fenêtre légal}} (X_{i,j-1,a_1} \wedge X_{i,j,a_2} \wedge X_{i,j+1,a_3} \wedge X_{i+1,j,a_4} \wedge \dots \wedge X_{i+1,j+1,a_6})$$

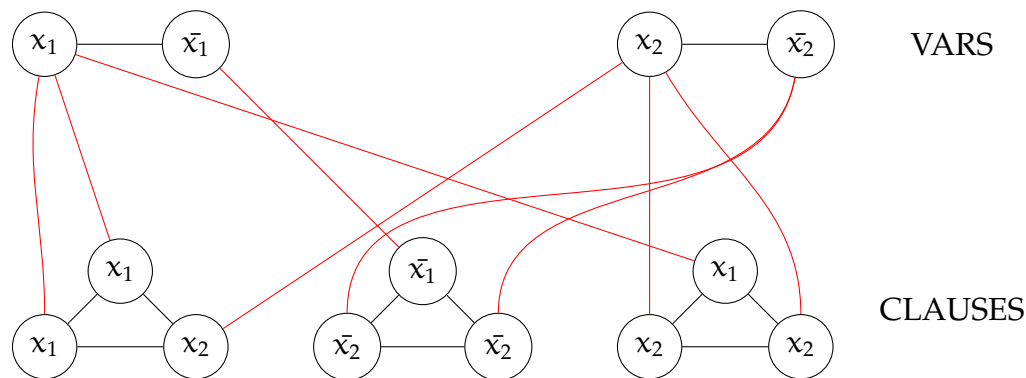
	j-1	j	j+1
i	a ₁	a ₂	a ₃
i+1	a ₄	a ₅	a ₆

Si ϕ as une taille polynomiale, alors ϕ est satisfaisable, de manière équivalente, $\Leftrightarrow w$ est accepté par N .

2 3-SAT

Forme normale conjonctive se note "CNF" en anglais. La formule de la FNC-4 s'écrit :

$$\bigwedge_j (l_{i_1,j} \vee l_{i_2,j} \vee l_{i_3,j})$$



On appelle donc ce qu'il y a dans le grand "ET" une clause, et chaque élément de cette clause s'appelle un littéral et est soit une variable, soit la négation d'une variable.

2.1 3 SAT est NP-Complet

- ϕ peut être écrit en FNC (seulement ϕ_{move} doit être transformé)
 - Maintenant les clauses ne doivent pas avoir une taille de 3. Pourquoi faire ?
- Supposons une clause : $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_l)$

$$\begin{aligned} &(a_1 \vee a_2 \vee Z_1) \wedge \\ &(\overline{Z_1} \vee a_3 \vee Z_2) \wedge \\ &(\overline{Z_2} \vee a_4 \vee Z_3) \wedge \\ &\dots \wedge \\ &(\overline{Z_{l-3}} \vee a_{l-1} \vee a_l) \end{aligned}$$

Exemple $a_4 = T, a_{i \neq 4} = F$

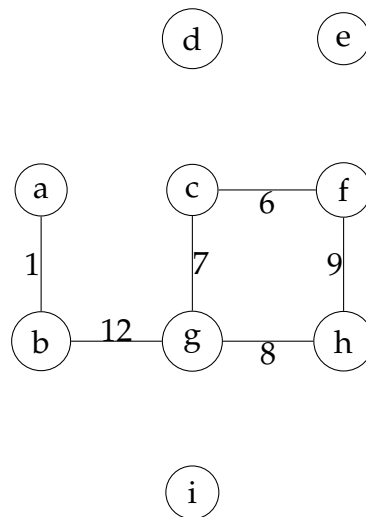
$$\begin{aligned} &(a_1 \vee a_2 \vee Z_1 = T) \wedge \\ &(\overline{Z_1} \vee a_3 \vee Z_2 = T) \wedge \\ &(\overline{Z_2} \vee a_4 = T \vee Z_3 = F) \wedge \\ &(\overline{Z_3} \vee a_5 \vee Z_4 = F) \wedge \\ &(\overline{Z_4} \dots) \end{aligned}$$

3 CLIQUE est NP-Complet

3.1 Vertex Cover

$3 \text{ SAT} \leq_p \text{Vertex Cover}$
K-Vertex cover :

$$\begin{aligned} \phi = &(X_1 \vee x_1 \vee x_2) \wedge \\ &(\tilde{x}_1 \vee \tilde{x}_2 \vee \tilde{x}_2) \wedge \\ &(x_1 \vee x_2 \vee x_2) \end{aligned}$$



Une solution est de mettre $x_1 = T$ et $x_2 = F$

4 Hamiltonian Path

Hamiltonian VS Eulerian

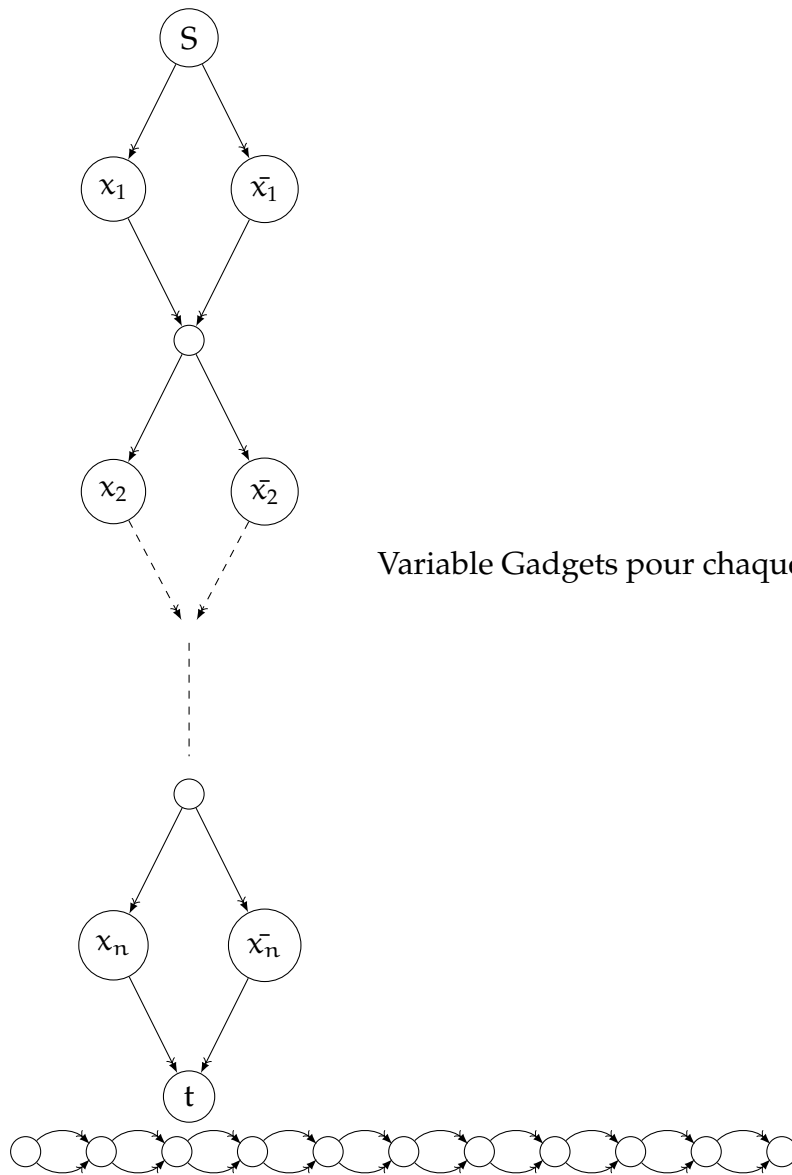
Euler : "Bridge of Königsberg"

$\text{HamPath} = \{ \langle G, S, t \rangle \mid G \text{ est un graphe dirigé avec un chemin Hamiltonien de } S \text{ à } t \}$.

Théorème

Hamiltonian Path est NP-Complet

Pour une formule 3-FNC ϕ , on peut construire G, s, t tels que $\phi \text{ est SAT} \Leftrightarrow G \text{ a un chemin Hamiltonien de } S \text{ à } t$.



"Hard" direction : \exists un chemin Hamiltonien $\Rightarrow \exists$ une assignation (valuation) au problème de SAT.