Tópico 07

Matemática para Computação

Tipos de Funções

1. Introdução

As funções na matemática são essencialmente uma relação entre dois conjuntos composta basicamente por três partes: o conjunto domínio, o conjunto contradomínio e a regra de associação entre eles (comumente uma expressão matemática). Neste capítulo continuaremos nossos estudos das funções, apresentando outras diferentes formas que podem ser encontradas em problemas, em especial com relação a sua expressão matemática.

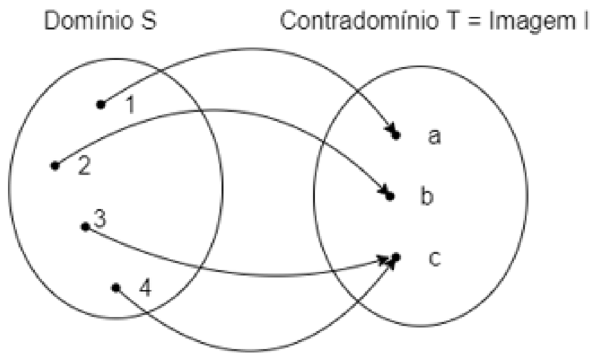
Além disso, iremos verificar e entender a taxa de crescimento das funções e chamaremos de o estudo da ordem de grandezas. Veremos que essa avaliação é de suma importância em análises de algoritmos, isto é, se o problema foi resolvido de forma eficiente e utilizando o mínimo de memória computacional possível. No dia a dia do profissional de computação essa análise é essencial na construção de códigos e algoritmos, sempre levando em conta limitações e buscando a melhor solução para os problemas.

2. Tipos de funções

Na matemática, dividimos as funções de acordo com suas propriedades. Inicialmente podemos classificar em três tipos: funções Sobrejetoras, Injetoras e Bijetoras. Vamos relembrar o que cada uma delas significa:

Sejam A e B conjuntos não vazios distintos, temos:

- As funções sobrejetoras, nas quais o conjunto do contradomínio B é igual ao conjunto imagem. Em outras palavras, todo elemento do domínio A possui pelo menos uma imagem no contradomínio. Observe a figura abaixo com a representação das funções sobrejetoras pelo diagrama de Venn:



Função Sobrejetora

Exemplo: A função f(x) = 4x, definida sobre o conjunto dos números reais, é um exemplo de função sobrejetora, uma vez que cada elemento do domínio possui um correspondente no contradomínio. Se a mesma função fosse definida no conjunto dos números naturais, ela deixaria de ser sobrejetora, uma vez que os elementos 2, 3, do contradomínio, por exemplo, não teriam qualquer correspondente no domínio.

- Nas funções injetoras, todos os elementos do domínio A possuem imagens distintas no conjunto do contradomínio, isto é, nenhum elemento compartilha uma mesma imagem. Nesse caso, o contradomínio não precisa ser necessariamente igual ao conjunto imagem. Simbolicamente podemos escrever:

Abaixo podemos visualizar o diagrama de Venn para as funções injetoras:

Função Injetora

Exemplo: a função $f(x) = 5x + 1$, definida sobre o conjunto dos números reais, é um exemplo de função injetora, uma vez que todos os elementos do domínio possuem correspondentes distintos no contradomínio. Se pegarmos a mesma função e torná-la quadrática, isto é, $f(x) = 5x^2 + 1$, definida no mesmo conjunto numérico, deixaria de ser injetora, pois dois elementos do domínio possuiriam dois elementos correspondentes no contradomínio, por exemplo, $f(1)$ seria igual a $f(-1)$.

- As funções bijetoras são funções que preservam ambas as propriedades das sobrejetoras e das injetoras. O conjunto do contradomínio é igual ao conjunto imagem e nenhum elemento do domínio compartilha dos mesmos elementos associados no conjunto imagem. Observe o diagrama de Venn abaixo:

Função Bijetora.

Exemplo: a função f(x) = 5x + 1, dada como exemplo de função injetora anteriormente, definida sobre o conjunto dos números reais, também é sobrejetora, pois assegura a propriedade de o contradomínio ser igual à imagem, logo, ela se trata de uma função bijetora.

3. Função inversa

As funções bijetoras apresentam uma propriedade importante que permite encontrar uma função g que faz o caminho inverso da função bijetora original. Seja uma função bijetora f: S ⇒ T. Como f é sobrejetora, cada elemento t pertencente ao conjunto T possui uma pré-imagem no conjunto domínio S, e como f é injetora, essa pré-imagem é única. Dessa forma, podemos associar cada elemento t a um único elemento em S, tal que f(s) = t. Tal associação descreve a função g: T ⇒ S. Observe a figura abaixo:

Função inversa g.

A função g é obtida de forma que a composta g(f(s)) mapeia um elemento de S no próprio conjunto S. Podemos escrever:

Essa função mapeia cada elemento de S em S, isto é, g o f: S à S. De forma análoga, temos também o caminho inverso: f o g: T à T. Chamamos a função composta gof(s) de função identidade em S, denotada por i_S. Agora vamos definir matematicamente a função inversa:

DEFINIÇÃO: Seja uma função f, f: S à T. Se existe uma função g: T à S tal que a função composta g o f = i_S e f o g = i_T, então g é chamada de função inversa de f e denotamos g = f^{-1}.

Um teorema importante nos diz que toda função bijetora possui uma função inversa única, isto é, é inversível.

Para determinar a expressão da função inversa, basta isolar a variável dependente da função f e ajustar a notação. Vamos ao exemplo prático.

Exemplo: Determine a inversa das funções abaixo:

Para resolver o problema, primeiramente ajustamos a notação para que o elemento do domínio de f seja imagem e a imagem seja elemento do domínio.

Agora basta isolarmos o y para determinar a inversa f^{-1}:

a) De forma semelhante à alternativa anterior, temos:

Por fim, isolando o y, temos:

4. Função constante

As funções, em geral, retornam valores distintos para diferentes valores de entrada, como em uma corrida de táxi em que o preço total da viagem é em função da distância percorrida. Para cada valor de distância percorrida há um preço associado a ela. Mas existem funções em que, independentemente do valor de entrada, sempre irá retornar o mesmo valor. Em outras palavras, é uma função que associa todos os elementos de seu domínio com apenas um elemento no contradomínio. Chamamos de função constante.

O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo x, passando na ordenada em que a constante é definida. Simbolicamente temos:

Sendo k uma constante qualquer.

Função constante k.

5. Função Modular

Em alguns problemas na matemática, temos interesse em avaliar a distância entre pontos. O valor absoluto ou módulo de um número real *a* determina sua distância até a origem, explicitando sua magnitude. Representamos o módulo de um número por duas barras verticais entre ele e definimos como:

O valor de módulo é sempre positivo ou zero, nunca um número negativo.

Exemplo: Calcule o módulo de:

Temos que a raiz quadrada de 8 é um número maior que 1. Ao fazer a subtração de 1 e um valor maior que 1, obtemos um número negativo. Dessa forma, o módulo da expressão acima é:

Chamamos de função modular uma função que possui em sua expressão matemática o módulo de uma variável. É uma aplicação dada por f(x) = |x|, e definimos f por partes:

O gráfico de f(x) descrito acima pode ser observado na Figura abaixo. Note que a parte negativa de y foi espelhada para a parte positiva. Existem diferentes tipos de gráfico de função modular, sendo importante analisar caso a caso.

Função Modular.

Exemplo: Seja f a função definida no intervalo aberto (-1, 1) por:

Determine f(-1/2):

Vale a pena assistir!

Videoaula do conteúdo do Tópico 7 – parte 1

6. Função exponencial

Conhecemos a função exponencial como toda função que possui uma variável no expoente com um número real na base. Seja R ⇒ R tal que:

Sendo *a* pertencente aos números reais e $0 < \alpha \neq 1$, dependendo do valor de *a*, a função pode ser crescente ou decrescente. Para *a* maior que 1, temos a função crescente e para *a* entre 0 e 1, decrescente. A figura abaixo apresenta o gráfico de ambas as situações.

Função exponencial crescente e decrescente.

Note que as duas curvas tocam o ponto (0,1), uma vez que para todo número real *a* elevado a 0 é igual a 1:

Nesse ponto, é importante relembrar algumas propriedades importantes sobre os expoentes, uma vez que com as funções exponenciais podem aparecer situações em que será necessário utilizar algumas simplificações. Considere x e u números reais e a e b números reais positivos. As Leis dos expoentes são:

Exemplo: dada a função exponencial $f(x) = (k - 4)^x$, sabendo que essa função é decrescente, determine o intervalo de valores possíveis para k.

Sabemos que em funções exponenciais decrescentes, a base do expoente deve ser entre 0 e 1. Dessa forma, o problema se resume a resolver a inequação:

Assim, temos que k deve estar entre 4 e 5.

Vale a pena assistir!

Definição e Propriedades da Função Exponencial

7. Ordem de grandeza de funções

Em estudos de análise de algoritmos, alguns critérios são fundamentais a serem considerados na hora da avaliação de sua qualidade. A primeira pergunta a ser feita é se o algoritmo desenvolvido resolve o problema proposto. Nesse sentido, a fase de testes de software é de extrema importância num projeto de desenvolvimento, uma vez que é nela que é averiguado se o algoritmo, além de solucionar o problema, não apresenta erros e falhas em fluxos de casos distintos. A segunda pergunta diz respeito à eficiência do algoritmo, isto é, se o tempo de processamento do código é aceitável e apropriado. E, por fim, é verificada a quantidade de memória computacional que o algoritmo precisa para ser executado. Nas avaliações de algoritmos, muitas vezes é utilizada uma função que determina quantas operações o algoritmo irá executar em um período de tempo. Saber essa informação é relevante para verificar a complexidade do algoritmo e a eficiência de sua execução.

Realizamos comparações entre funções de avaliação utilizando, por exemplo, o que chamamos de ordem de grandeza, ou taxa de crescimento de uma função. Existem diferentes tipos de ordem de grandeza, como crescimento exponencial e linear. Veremos com mais detalhes tal propriedade.

A ordem de grandeza é uma maneira de comparar a taxa de crescimento de funções distintas. Podemos considerar como exemplo as funções $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ e $f_3(x) = x^3$. Para um mesmo valor de entrada x, a saída f(x) será bem maior em f_3 do que em f_1 e f_2, veja:

Comparação entre as funções $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$.

À medida que aumentamos o valor de entrada x, f_3 sempre será fundamentalmente maior que as outras duas funções. A ideia que queremos verificar aqui é como quantificar essa diferença de crescimento entre as funções.

Exemplo: considere um algoritmo que verifica a transitividade de uma relação R sobre um conjunto A com n elementos.

- Número de passos necessários (média) pelo método 1:

Número de passos necessários (média) pelo método 2:

- A tabela abaixo mostra que s "cresce mais rápido" do que t:

n	*t(n)*	*s(n)*
2	6	2
5	75	78
10	550	1250
100	505000	12500000

Podemos definir um modo de caracterizar a diferença de crescimento das funções por meio de uma relação binária, veja:

Seja S o conjunto de todas as funções com domínio e contradomínio o conjunto dos números reais não negativos. Podemos definir uma relação binária R em S como:

f R g ⇒ existem constantes positivas n_0, c_1 e c_2 tal que para todo $x \geq n_0$, Exemplo (GERSTING, 2003): Seja f e g funções em S:

Considere $n_0 = 2$, $c_1 = 1/100$ e $c_2 = 1$. Dessa forma, para $x \geq 2$, aplicando a relação R apresentada anteriormente, temos:

Assim, temos que f R g.

Em uma tabela, podemos verificar para alguns valores de entrada x:

Desse modo, podemos definir matematicamente a ordem de grandeza de uma função como:

DEFINIÇÃO: Sejam f e g funções de R*+ ⇒ R*+, então f tem a mesma ordem de grandeza de g, escrito como $f = \Theta(g)$, se existe uma constante positiva n_0, c_1, c_2 tal que, para $x \geq n_0$, temos a relação R:

É importante observar que R é uma relação de equivalência e define uma partição no conjunto de todas as funções reais não negativas.

Para ilustrar a definição de ordem de grandeza de forma mais intuitiva, podemos tomar como exemplo a função h(x) = x^2, ilustrada na figura abaixo. Tomando como constantes c_1 = ½ e c_2 = 2, as funções c_1h(x) e c_2h(x) estão ilustradas em linhas pontilhadas na figura, e que formam um encapsulamento entre a função original h(x).

Alterando os valores de ambas as constantes iremos aumentar ou diminuir tal janela de encapsulamento. Se h1(x) for uma função de mesma ordem de grandeza de h(x) (escrevemos: h1 = Θ(h)), então existe uma constante positiva n_0 a partir da qual as funções h e h_1 estão encapsuladas dentro da janela. Observe atentamente os gráficos mostrados abaixo:

Gráfico das funções h(x) e c1h(x) e h2(x).

Primeiramente, é importante analisar as funções. Vemos que f e g se tratam de duas funções quadráticas multiplicadas por uma constante. Pensando em números muito grandes, isto é, caminhando para o infinito, podemos perceber intuitivamente que pouco irão importar as parcelas de (15n – 5) de g e as constantes 2 e 5 de f e g, respectivamente, uma vez que o fator n^2 cresce muito mais rápido. Em outras palavras, duas funções quadráticas quaisquer vão ter a mesma velocidade de crescimento.

Atenção! Velocidade de crescimento é diferente de ser maior ou menor. Na inequação que veremos abaixo, a fim de comparar as funções em questão, olhamos essencialmente para o termo que acompanha a variável de maior potência.

Vamos provar isso utilizando a definição de ordem de grandeza apresentada anteriormente.

Para $n \geq n_0$

Aplicando as duas funções na inequação da relação acima, temos:

Temos que encontrar as duas constantes c_1 e c_2 para que a inequação seja verdade. Para c_2, observe que a função g já é naturalmente maior que f (verificamos o termo que acompanha o n²), então para $c_2 = 1$, conseguimos a validade de ser maior para qualquer valor de n.

Para c1, podemos, por exemplo, multiplicar por $c_2 = 1/5$ e teremos:

Agora, devemos verificar a partir de qual ponto n_0 essa desigualdade se torna verdade. Podemos aplicar alguns valores para isso, observe a tabela abaixo:

Note que a partir de $n = 3$ a função $2n^2$ é sempre maior do que a função n^2+3n-1. Assim, podemos afirmar que a partir desse ponto nossa desigualdade é válida para $c_2 = 1/5$ e $n_0 = 3$.

Agora, para finalizar, vamos observar como aplicamos ordem de grandeza em análise de algoritmos. Suponha que três algoritmos, A, A' e A'', são executados para resolver uma mesma tarefa e que suas complexidades computacionais possuem ordens de grandezas distintas, mostradas na tabela abaixo. Note que à medida que aumentamos o valor do tamanho da entrada o tempo total de processamento dos algoritmos se torna cada vez mais distante. Repare o caso do algoritmo A'' com ordem de grandeza exponencial para tamanho de entrada 100.

Frequentemente é necessário pensar em termos de eficiência se não conseguimos um algoritmo com complexidade computacional de ordem de grandeza menor e que consiga executar a mesma tarefa com menos custo computacional.

Vale a pena assistir!

Videoaula do conteúdo do Tópico 7 – parte 2

8. Conclusão

Neste tópico, avançamos nossos estudos em funções apresentando alguns tipos de funções comuns, como função inversa, função constante, função modular e função exponencial. Vimos as diferentes formas gráficas que elas podem ter, além de verificar aplicações simples.

Vimos que a ordem de grandeza de uma função nos permite fazer comparações entre velocidades de crescimentos de funções. Esse conceito é de suma importância para avaliações e análises de algoritmos, uma vez que podemos construir funções de tempo de processamento ou quantidade de armazenamento de memória de algoritmos e avaliar se o código desenvolvido é eficiente ou não. A definição de ordem de grandeza é uma ferramenta poderosa para tal análise.

9. Referências

FREITAS, Daniel S. Fundamentos de matemática discreta para a computação. Santa Catarina: UFSC/CTC/INE, Notas de Aula, 2007.

ROISENBERG, Mauro. Fundamentos de matemática discreta para computação: Relações. Santa Catarina: Notas de Aula, 2009.

GERSTING, Judith L. Mathematical Structures for Computer Science. 5a edição. Hawai: Michelle Russel Julet, 2003.

Parabéns, esta aula foi concluída!

O que achou do conteúdo estudado?

Péssimo Ruim Normal Bom Excelente

Deixe aqui seu comentário

Mínimo de caracteres: 0/150

Enviar