Tópico 03

Matemática para Computação

Contagem

1. Introdução

O uso da matemática para contar objetos, recursos e dinheiro é uma das ideias mais intuitivas que podemos ter quando pensamos nos números e nas operações. A importância da contagem e do ramo da matemática conhecida como combinatória se dá muitas vezes quando temos recursos limitados. Imagine que você é responsável pelo time de tecnologia de uma empresa e você precisa garantir que o espaço do banco de dados consuma para uma determinada eficiência desejada ou que o algoritmo que estão desenvolvendo realize a quantidade de cálculos esperada.

Diversos problemas de contagem da vida real podem ser solucionados se aplicarmos os conceitos de conjuntos finitos e determinar a quantidade de seus elementos. Muitas vezes, se temos a propriedade característica do conjunto de interesse ou a listagem de seus elementos, a tarefa de contagem pode ser fácil e demandar poucos cálculos. Nem sempre o problema é simples. Dessa forma, precisamos ter em mãos outras ferramentas que podem nos auxiliar.

2. Conceitos iniciais

Antes de avançarmos no estudo de princípios da adição e multiplicação, vamos estabelecer alguns conceitos importantes sobre lógica. Uma **proposição** é uma sentença que pode ser verdadeira (em inglês, *true*) ou falsa (em inglês, *false*). Veja os exemplos abaixo:

1. A Lua é um satélite natural da Terra.
2. 10 é maior que 2.

3. Beyoncé é uma cantora talentosa.
4. Existe vida alienígena fora do Sistema Solar.
5. Qual a previsão do tempo para hoje?

As sentenças de 1 a 4 são proposições, uma vez que podem ser consideradas verdadeiras ou falsas, mesmo que a gente não saiba a resposta, como na opção 4. Observe que a 5 é uma pergunta e não cabe responder verdadeiro ou falso, portanto, não se trata de uma proposição.

Proposições podem ser conectadas em frases ou combinação de sentenças, em estrutura de antecedente e consequente, por meio das palavras "E", "OU" e "ENTÃO" (em inglês, *and*, *or* e *then* respectivamente). Veja os exemplos:

- "Banana é uma fruta" e "Feijão é uma leguminosa" à Verdade

A proposição acima é composta por duas sentenças verdadeiras, logo ela como um todo é uma proposição verdadeira. Do lado esquerdo, o antecedente, e o lado direito, o consequente. Poderíamos escrever mais da seguinte forma:

- "Banana é uma leguminosa" e "Feijão é uma leguminosa" à Falso
- "Banana é uma fruta" e "Feijão é uma fruta" à Falso
- "Banana é uma leguminosa" e "Feijão é uma fruta" à Falso

Já se considerarmos as proposições acima, são falsas, uma vez que pelo menos uma das proposições não é verdade, o que implica que a sentença como um todo também seja falsa. Para simplificarmos, considere que “Banana é uma fruta” seja a proposição A e “Feijão é uma leguminosa” seja B. Podemos montar o que conhecemos como tabela verdade, que mostra todas as possíveis combinações de resultados que conseguimos obter com as duas proposições. Veja na tabela abaixo:

O símbolo ^ é o conector lógico que representa a palavra “and” ou “e” em português. Outro conector possível de ser encontrado na combinação de sentenças é a palavra “ou”/“or” e utilizamos o símbolo v. Se substituíssemos o conector do exemplo anterior por \`ou“, repare que a sentença combinada será verdadeira se pelo menos uma delas for verdade e falsa apenas se as duas forem falsas. Veja abaixo como fica a tabela verdade:

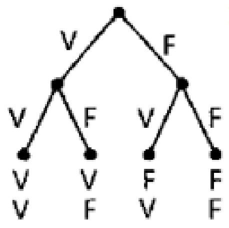
“Banana é uma fruta” ou “Feijão é uma leguminosa” → Verdade

“Banana é uma leguminosa” ou “Feijão é uma leguminosa” → Verdade

“Banana é uma fruta” ou “Feijão é uma fruta” → Verdade

“Banana é uma leguminosa” ou “Feijão é uma fruta” → Falso

Nos exemplos anteriores, tínhamos duas proposições, A e B, e um conector. Podemos estender o caso se considerarmos 3, 4, 5 proposições. Quanto mais sentenças, mais complexo pode vir a ser o problema. Uma estratégia adotada para isso é conhecida como árvore de possibilidades. Vamos pensar no caso mais simples: com uma proposição, temos 2 possibilidades apenas (V ou F), para duas proposições, como visto, temos 4 possibilidades (VV, VF, FV, FF). Veja como é construída a árvore de possibilidades abaixo:



Letras de afirmações	Possibilidades
1	$2 = 2^1$ nós
2	$4 = 2^2$ nós

Árvore de possibilidades para duas proposições

A árvore apresenta todas as possibilidades e caminhos possíveis para uma quantidade n de proposições. Observe que a quantidade de nós na última linha da árvore representa a quantidade de tais possibilidades. Vamos expandir nossa árvore considerando n proposições. Repare na Figura abaixo.

Árvore de possibilidades para três proposições

A quantidade de possibilidades pode ser determinada por meio de uma potência de dois, 2^n, onde n é a quantidade de proposições. A ideia da árvore de possibilidades pode ser utilizada para vários outros contextos. Veremos adiante.

3. Princípios da multiplicação e adição

Vamos supor que para ir à festa de aniversário de Paula, Cristina selecionou, entre as roupas de seu armário, duas opções de blusa, uma preta e a outra rosa (P, R) e três opções de calça, vermelha, branca e cinza (V, B, C). Quantas combinações diferentes ela pode fazer como possibilidade para ir à festa?

Podemos montar a árvore de possibilidade da seguinte forma, como mostrado na Figura abaixo, sendo as cores representadas pelas iniciais em maiúsculo.

Árvore de possibilidades para as opções de conjunto de combinações de blusa e calça.

Pela última linha da árvore de possibilidades, podemos notar que Cristina tem 6 possibilidades de combinações de peças de roupas. Ou seja, esse número pode ser obtido pela multiplicação simples da quantidade de peças que ela dispõe: 2×3 = 6. Essa é a ideia chave do princípio da multiplicação.

DEFINIÇÃO:

Princípio da Multiplicação: se existem n_1 possibilidades para um primeiro evento e n_2 possibilidades para um segundo evento, então o total de possibilidades da combinação dos dois eventos é obtido pela multiplicação $n_1 x n_2$.

Entende-se por evento nesse caso a escolha da blusa e a escolha da calça, como ilustrado no exemplo acima.

No exemplo descrito acima, como seria se Cristina, ao invés de escolher a blusa primeiro, escolhesse a calça? Como ficaria a árvore de possibilidades? Será que alteraria o resultado final de lista de possibilidades?

Exemplo:

Em uma vila, as casas são numeradas com 3 números. Qual a quantidade máxima de casas que podem ser numeradas?

Podemos pensar um número de três dígitos como um total de possibilidades.

Agora suponha que para a festa de aniversário, Paula teve que escolher o sabor do recheio do bolo entre três opções com chocolate e quatro opções com frutas. Podemos considerar, nessa situação, dois eventos: um com três opções com chocolate e o outro com quatro opções de frutas. Observe que não se trata de uma sequência de eventos dos quais desejamos fazer uma composição, como na escolha de conjunto de roupas. Aqui desejamos escolher uma opção dentre os dois conjuntos disjuntos. Dessa forma, a quantidade total de possibilidades é a soma $3 + 4 = 7$. Esse é o princípio da adição.

DEFINIÇÃO:

Seja A um evento com n_1 possibilidades e o evento B com n_2, a quantidade total de possibilidades para o evento A ou B é a soma $n_1 + n_2$.

É importante notar que o princípio da adição pode ser utilizado para o caso de conjuntos disjuntos, isto é, dois conjuntos que não têm intersecção, não possuem elementos em comum entre eles. No caso da escolha de sabor de bolo de Paula, os dois conjuntos se tratam de o grupo que contém chocolate (pense em diferentes tipos, como meio amargo, ao leite com nozes, etc.) e o outro grupo que contém frutas (recheio de morango, ameixa, abacaxi, etc.). O grupo que contém chocolate não contém frutas e o grupo que contém frutas não contém chocolate, logo, são conjuntos disjuntos e podemos aplicar o princípio da adição e somar as possibilidades de ambos os conjuntos. Vamos olhar outro exemplo.

Exemplo:

Para uma noite especial, uma pessoa deseja comprar um vinho entre o catálogo disponível na loja. Há em estoque 15 opções de vinho tinto, 10 opções de vinho rosé e 20 opções de vinho branco. Quantas possíveis escolhas a pessoa pode ter?

Podemos considerar nesse caso três conjuntos disjuntos de vinhos. O conjunto de vinhos tintos, o conjunto de vinhos rosé e o conjunto de vinhos brancos. Repare, são conjuntos disjuntos uma vez que um vinho tinto não pode ser ao mesmo tempo vinho rosé ou branco, assim como vinho rosé não pode ser ao mesmo tempo um vinho branco e etc. Logo, podemos aplicar o princípio da adição e somar todas as possibilidades pertencentes aos conjuntos. Dessa forma, a quantidade total de escolhas possíveis é:

$$15 + 10 + 20 = 45 \text{ possibilidades de escolha}$$

Um símbolo comum utilizado na matemática para representar a quantidade ou a cardinalidade de um conjunto é expresso como duas barras horizontais entre o conjunto. Observe:

Considere que o conjunto de vinhos tintos é T, vinhos rose, R, e vinhos brancos, B:

- |T| = 15
- |R| = 10
- |B| = 20

Como são conjuntos disjuntos, podemos dizer que a cardinalidade da união entre os conjuntos é simplesmente a soma da cardinalidade dos conjuntos individualmente.

|T U R U B| = |T| + |R| + |B|

É importante lembrar que conjuntos vazios possuem cardinalidade nula, uma vez que, por definição, se trata de um conjunto sem elementos.

Vale a pena assistir!

Aula 04 – O que é “contar”?

4. Permutações e combinações

Na seção anterior, vimos no exemplo de aplicação do princípio da multiplicação o caso da numeração das casas de uma vila. Vamos pensar no caso quando excluímos os números repetidos. A casa número 123 é diferente da casa 321, uma vez que a ordem dos dígitos é de suma importância. Na matemática, um arranjo ordenado de objetos é chamado de permutação. A permutação nada mais é do que uma técnica de contagem que utilizamos para determinar de quantas maneiras possíveis podemos ordenar elementos de um conjunto finito. Permutar em português significa “mudar ou trocar reciprocamente”.

Um exercício comum de permutação é determinar quantos anagramas uma determinada palavra pode ter. O anagrama de uma palavra é a troca na ordem de suas letras. Por exemplo, um anagrama possível da palavra AMOR seria MAOR. Podemos determinar a quantidade total de possíveis permutações da palavra AMOR utilizando o mesmo raciocínio das casas na vila. Cada espaço é uma letra possível de escolha e à medida que avançamos na palavra, desconsideramos a letra utilizada anteriormente, até o final. Observe:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ possibilidades}$$

Esse é um exemplo de uma permutação simples e, para simplificar a notação, utilizamos a função fatorial. Para um número inteiro n, seu fatorial é denotado por n! e pode ser descrito como:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1.$$

E, dessa forma, a permutação simples de n elementos pode ser obtida pela expressão:

$$P_n = n!$$

Voltando para o exemplo das casas na vila, podemos observar uma diferença no caso dos anagramas. Note que o número de dígitos das casas (4) é diferente do número total de possibilidades que os campos podem assumir. Em outras palavras, nós queríamos determinar o número de casa, **sem números repetidos**, com 4 objetos distintos com um conjunto de 10 objetos distintos (0 a 9). Utilizamos o princípio da multiplicação e determinamos que o número total de possibilidades era 10x9x8x7. Na permutação, podemos dizer que o número de permutações de **r** objetos distintos escolhidos em **n** objetos distintos é denotado por P(n,r) ou A(n,r), ou para o caso das casas, P(10,4), ou no caso do anagrama do exemplo acima P(4,4). Chamamos esse tipo de permutação de arranjo simples e podemos obter a fórmula geral por:

Ou seja, calculando P(10,4), temos:

Note que para n=r temos no denominador da expressão de permutação 0! e por definição, 0! = 1.

Exemplo:

Fábio trabalha em uma biblioteca e possui a tarefa de organizar livros na seção de programação. Há 5 livros de engenharia de software (ES), 4 livros sobre Python (P), e 6 sobre banco de dados (BD). Ele deve organizar os livros na prateleira considerando que os assuntos em comum devem estar juntos.

Vamos considerar o problema como uma sequência de subtarefas. Primeiro a organização de assuntos, temos 3! = 6 maneiras, observe:

1 – ES, P, BD

2 – ES, BD, P

3 – BD, P, ES

4 – BD, ES, P

5 – P, ES, BD

6 – P, BD, ES

Em segundo, vamos observar a organização interna de cada assunto. Para ES, temos 5! maneiras, 4! para python e 6! para banco de dados. Dessa forma, pelo princípio da multiplicação, o número final de arranjos possíveis é obtido por:

$$(3!) \times (5!) \times (4!) \times (6!) = 12.441.600 \text{ maneiras}$$

No exemplo do anagrama, a palavra AMOR não possui nenhuma letra repetida, logo, não precisamos nos preocupar com eventuais anagramas iguais. Mas agora pense para a palavra ARARA. Temos 3 letras a e 2 letras r, e se utilizarmos o mesmo raciocínio para palavras sem repetição de letras, iríamos considerar que o anagrama RRAAA = RRAAA. Nesse caso, vamos ter que ajustar nossos cálculos. Para desconsiderar palavras repetidas, o conceito de permutação com elementos repetidos deve ser aplicado e a equação que descreve o problema é mostrada abaixo:

Onde n é o número de elementos do conjunto considerado e k,j,…m, são a quantidade de elementos que possuem repetições. Para o caso da palavra ARARA, temos:

Exemplo:

A Figura abaixo apresenta uma malha de 15 células com dois pontos fixos marcados, A e B. Uma pessoa pode andar entre os vértices apenas para cima e para direita, um caminho possível é mostrado na figura. Dando um passo por vez, quantas são as possibilidades de ir de A até B?

Malha com caminhos
possíveis de A a B.

Podemos representar cada passo com a letra D para direita e C para cima e construir o caminho como se fosse um anagrama. Para o caminho mostrado na Figura, teríamos: DDCDDC. Logo, se calcularmos todos os anagramas possíveis dessa sequência, conseguimos descobrir os caminhos. Trata-se de uma permutação com repetição, uma vez que a pessoa necessariamente deve ir duas células para cima e quatro para direita, seja qual caminho for.

Agora imagine que, em uma aula de inglês, a professora pede para que seus alunos formem trios, para uma atividade. Se a turma é composta por 15 estudantes, como podemos determinar a quantidade de trios possíveis de serem formados? Perceba que, nesse caso, a ordem na formação dos grupos não importa… o grupo “Pedro, Marcelo e Fábio” é o mesmo que “Marcelo, Pedro e Fábio”. Esse é o típico exemplo de Combinação. Utilizamos combinação quando desejamos selecionar r elementos de um conjunto com n elementos, sem importar a ordem em que estão arranjados. Denotamos, assim, por C(n,r) e podemos calcular pela seguinte expressão:

É importante ressaltar que o valor de r deve satisfazer $0 \leq r \leq n$. No caso dos grupos da aula de inglês, teríamos C(15,3) e, ao aplicarmos na equação, obtemos:

Os casos especiais para C(n,r) são:

Exemplo:

Sobre uma reta, são marcados 8 pontos e sobre uma outra reta paralela à primeira, marcam-se 5 pontos. Quantos triângulos obteremos unindo 3 pontos quaisquer do total desses pontos?

Retas paralelas r1 e r2

Para formar um triângulo, é preciso ligar dois pontos de uma mesma reta e o outro sobre a outra reta paralela, como mostrado na Figura acima. Observe que o triangulo HIO é o mesmo que IOH. Dessa forma, a ordem não importa e se trata de um problema de combinação.

Vamos dividir esse problema em duas partes, primeiro determinando os triângulos possíveis tendo dois pontos sobre a reta r_1 e depois considerando os dois pontos na reta r_2.

Temos 8 pontos em r_1. Desejamos ligar dois pontos e 5 pontos na reta r_2, pegando apenas 1 ponto, logo, temos C(8,2) x C(5,1) possibilidades. Da mesma forma para a reta r_2, teríamos C(5,2) x C(8,1) possibilidades.

A combinação simples, como mostrado, não admite que os subconjuntos formados tenham elementos repetidos. Lembre-se do exemplo da formação de grupos na sala de aula de inglês, uma pessoa não pode ser contabilizada duas vezes, ela é sempre única em um grupo para formar o trio de alunos. Como na permutação com combinação (anagramas de letras com palavras repetidas), podemos encontrar situações em que a ordem não necessariamente importa, portanto, trata-se de uma combinação, mas em que há elementos iguais no subconjunto de interesse. Vamos para um exemplo mais prático.

Um restaurante vende três sabores de suco: laranja, uva e morango. Em uma mesa com 7 pessoas, de quantas formas o pedido de sucos pode ser feito considerando que todo mundo pediu um sabor?

Primeiramente, observe que a ordenação de sucos não é relevante e temos um caso de combinação. Não poderíamos aplicar combinação simples, pois o subconjunto de interesse pode conter elementos repetidos. Por exemplo, uma das possibilidades seria: 3 de laranja (L), 1 de uva (U) e 3 de morango (M). Como podemos determinar todas as possibilidades?

Uma estratégia comumente utilizada é usar separadores entre os tipos de sabores. No exemplo de possibilidade descrito acima, teríamos:

Outra possibilidade para 4 L, 0 U, 3 M:

Dessa forma, podemos considerar 9 posições (7 asteriscos e duas barras). As possibilidades são representadas pelas diversas formas de organização desses elementos. Assim, podemos visualizar o problema como uma permutação com repetição!

Podemos generalizar essa estratégia de asteriscos e barras da seguinte maneira: em uma combinação de r objetos dentre n elementos distintos, com possibilidade de repetição, existirão n-1 barras. Isso significa que há r + (n-1) posições a serem preenchidas. Portanto:

5. Conclusão

Vimos nessa lição ferramentas importantes no estudo de problemas de contagem de possibilidades e determinação de quantidades em subconjuntos. A Árvore de possibilidades nos permite ter uma visão intuitiva dos caminhos que um problema pode assumir, notando o padrão de seu crescimento, e calcular a quantidade de possibilidades por 2^n, sendo n a quantidade de proposições do problema.

Estudamos dois princípios fundamentais em contagem matemática. O princípio da Multiplicação nos traz que, para n eventos sucessivos, temos que a combinação de possibilidades é obtida pela multiplicação dos elementos dos conjuntos. Já no princípio da adição, para dois eventos quaisquer distintos, isto é, sem intersecção, obtemos a quantidade de combinações pela soma de elementos dos subconjuntos.

Avançamos nossas reflexões com os conceitos de permutação, que leva em consideração a ordem de seus elementos, com o exemplo dos anagramas e a combinação, que não considera a ordem dos elementos, com o exemplo da formação de grupos de estudantes. Em ambos os casos existe a possibilidade de haver repetições e vimos a aplicação de estratégias e caminhos de soluções.

6. Referências

YouTube. 2021. Portal da Matemática OBMEP. Aula 04 – O que é “contar”? 8min07. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=eu6Nf4tRA1w >

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica. 5 ed. São Paulo, SP: Atual, 1999.

GERSTING, Judith L. Mathematical Structures for Computer Science. 5 ed. Hawai: Michelle Russel Julet, 2003.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. Matemática Completa. São Paulo: FTD, 2005.

GRAHAM, Ronald L.; KNUTH, Donald E.; PATASHNIK, Oren. Matemática concreta: fundamentos para a ciência da computação. 2 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

Parabéns, esta aula foi concluída!

O que achou do conteúdo estudado?

Péssimo Ruim Normal Bom Excelente

Deixe aqui seu comentário

Mínimo de caracteres: 0/150

Enviar