Tópico 01

Matemática para Computação

Noções Básicas de Conjuntos

1. Introdução

No nosso cotidiano, estamos constantemente utilizando a matemática e suas ferramentas, seja fazendo as contas do mês, medindo as proporções dos ingredientes ao fazer uma receita, lendo notícias e observando gráficos e tabelas de uma pesquisa no jornal ou dividindo a conta em um restaurante com amigos.

Para além desse uso direto dos números e das operações matemáticas, todos os equipamentos tecnológicos que utilizamos no nosso dia a dia, como celular, tablet, computadores e máquina de lavar, existem com base em programação e linhas de código, que se baseiam em matemática. Veremos ao longo do curso, como a programação de computadores e a matemática estão muito conectadas.

O matemático britânico Alan Mathison Turing (1912-1954) é conhecido como o pai da ciência da computação e da inteligência computacional. Esse reconhecimento foi dado principalmente por ele ter criado, em teoria matemática, um dispositivo que formou uma estrutura que fundamenta um computador, conhecido como Máquina de Turing.

Vale a pena assistir! Documentário sobre a vida de Alan Turing e seus grandes feitos.

O conceito por de trás da máquina descrita por Turing é muito similar ao de uma função matemática. O modelo especificado é de um dispositivo lógico, capaz de ler, escrever e apagar símbolos baseado em uma lista de instruções, isto é, um algoritmo. Assim como as funções, a máquina recebe valores de entrada e, após a execução das instruções, obtemos um resultado ou uma saída do modelo.

As ferramentas da lógica matemática que Turing utilizou para constituir o primeiro programa de computador são o que programadores utilizam todo dia ao escrever um algoritmo!

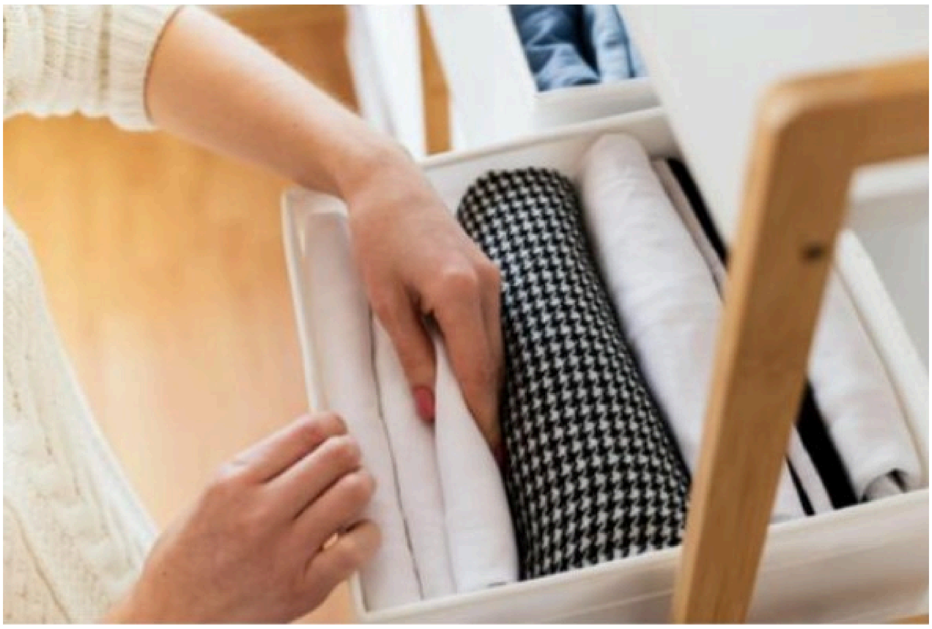
Dessa forma, começaremos nossa discussão da utilização da matemática em computação por um dos conceitos mais fundamentais e que determinam muitas outras operações na matemática, a Teoria de Conjuntos. Muitos problemas no cotidiano são resolvidos utilizando e expressando em linguagem de conjuntos e suas operações. A maioria dos conjuntos de interesse em programação são finitos, embora existam determinados agrupamentos que possuem muitos elementos para serem contáveis.

2. A Notação de Teoria dos Conjuntos

A Teoria dos Conjuntos é uma área da matemática que estuda as coleções e agrupamentos de elementos ou objetos e suas operações e conexões. Desde muito tempo, os matemáticos discutem as propriedades dos números e como é possível organizá-los. Mas podemos dizer que a teoria foi, primeiramente, formalizada pelo matemático alemão Georg Cantor (1845 – 1918) em 1874.

A definição de um conjunto pode ser entendida como qualquer coleção de objetos. Essa coleção de objetos compartilha esse mesmo grupo ou conjunto, por possuírem características e propriedades em comum.

Por exemplo, vamos pensar em um armário com 4 gavetas. Você deseja organizar suas roupas por categorias em cada gaveta. Na primeira você organiza suas roupas íntimas, na segunda camisas, na terceira calças e bermudas e na última roupas para doar. Assim, podemos dizer que cada gaveta é um conjunto e as peças de roupas são elementos do conjunto.



Exemplo intuitivo de conjuntos: organização de vestuário.

Outros exemplos intuitivos de conjuntos podem ser:

- O conjunto das cidades da Grande Vitória;
- O conjunto de Estados no Brasil;
- O conjunto de esportes das Olimpíadas;
- O conjunto de árvores maiores que 2 metros;
- O conjunto de batatas a venda de um feirante;
- O conjunto de números pares;
- O conjunto de números negativos;
- O conjunto de países na América Latina e;
- O conjunto dos números reais, que são solução na equação $x^2 - x - 6 = 0$

Dado os conjuntos listados acima, podemos determinar quais são os elementos que fazem parte deles, ou seja, os elementos que pertencem ao conjunto descrito.

- Vila Velha pertence ao conjunto de cidades da Grande Vitória;
- O Espírito Santo pertence ao conjunto de Estados no Brasil;
- Vôlei pertence ao conjunto de esportes das Olimpíadas;
- Ipê-amarelo pertence ao conjunto de árvores maiores de 2 metros;
- Batata baroa pertence ao conjunto de batatas do feirante;
- O número 10 pertence ao conjunto dos números pares;
- O número -45 pertence ao conjunto dos números negativos;
- Colômbia pertence ao conjunto de países da América Latina e;
- O conjunto {-2,3} são soluções na equação $x^2 - x - 6 = 0$

Um conjunto é representado por uma letra maiúscula do alfabeto. Para nosso conjunto de gavetas, mencionado anteriormente, podemos nomear cada gaveta como os conjuntos A, B, C e D, por exemplo. Os elementos de um conjunto são descritos em forma de listagem, separados por vírgula e entre chaves.

Exemplos:

- Seja A o conjunto das cores do arco-íris, temos:

A = {Vermelho, Laranja, Amarelo, Verde, Azul, Anil, Violeta}

- Seja B o conjunto de cores da bandeira do Brasil:

B = {Branco, Verde, Amarelo, Azul}

- Seja C o conjunto de algarismos do sistema decimal de numeração:

C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Para indicar que um elemento pertence a um determinado conjunto, utilizamos o símbolo $\in$ e para indicar que não pertence, $\notin$.

Exemplos:

- "Vermelho" $\in$ A → lê-se: O elemento "Vermelho" pertence ao conjunto A.
- "Preto" $\notin$ A → lê-se: O elemento "Preto" não pertence ao conjunto A.
- $0 \in$ C.
- $-2 \notin$ C.

A definição dos conjuntos numéricos foi um passo importante para organizar os números de acordo com suas propriedades e semelhanças. Temos 6 conjuntos principais:

1. Conjunto dos números naturais (N): que agrupam os números inteiros não negativos, isto é, utilizados para contagens;

2. Conjunto dos números inteiros (Z): uma ampliação dos números naturais, agrupando também os números negativos;

3. Conjunto dos números racionais (Q): é o que considera os números fracionários, ou seja, números não inteiros finitos;

4. Conjunto dos números irracionais (I): são números que não podem ser escritos em forma de fração, como decimais infinitos e raízes não exatas, como exemplo o famoso número Π, e $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc.;

5. Conjunto dos números reais (R): que é formado pelo agrupamento dos conjuntos racionais com os irracionais e;

6. Conjunto dos números complexos (C): que é a generalização dos números pelo formato $a + bi$, sendo a e b números reais e

Conjuntos numéricos definem como os números estão organizados e agrupam aqueles que possuem características em comum.

Para os conjuntos numéricos temos algumas notações especiais, que tem como objetivo especificar ainda mais o grupo de números que desejamos trabalhar em um determinado problema.

A. Exclusão do zero:

Quando queremos considerar todos os números do conjunto, em exceção ao número 0, temos Z^*, Q^* e R^*, representamos utilizando 8, veja:

- Z^* = conjunto dos números inteiros para todo x diferente de 0.

Em notação matemática, podemos transcrever a frase acima como:

- $Z^* = \{x \in Z \mid x \neq 0\}$ → lê-se: x pertence ao conjunto Z^*, para todo x pertencente ao conjunto Z, tal que x seja diferente de 0.

B. Não negativos:

Quando queremos excluir todos os números negativos do conjunto. Temos $Z+$, $Q+$ e $R+$.

- $Q+$ = conjunto dos números racionais maiores do que 0.

Em notação matemática:

- $Q+ = \{x \in Q \mid x \geq 0\}$ → lê-se: x pertence ao conjunto $Q+$, para todo x pertencente ao conjunto Q, tal que x seja maior ou igual a 0.

C. Não positivos:

Quando queremos excluir todos os números negativos do conjunto. Temos Z-, Q- e R-.

- R- = conjunto dos números reais menores do que 0.

Em notação matemática:

- $R- = \{x \in Q \mid x \leq 0\}$ → lê-se: x pertence ao conjunto R-, para todo x pertencente ao conjunto R, tal que x seja menor ou igual a 0.

D. Combinando notações:

Podemos também fazer algumas combinações, como se quisermos considerar todos os números positivos maiores do que 0, temos:

- R*+ = conjunto dos números reais positivos e maiores do que 0.

Podemos notar que não são os elementos que determinam o conjunto e sim a pertinência dos elementos, isto é, a propriedade que caracteriza o conjunto.

Em algumas linguagens de programação, veremos que os números inteiros são do tipo int e os fracionários são considerados do tipo float.

Não há ordem na representação de conjuntos e cada elemento é mencionado apenas uma vez, dessa forma, seja um conjunto D = {Azul, Verde, Branco, Amarelo}, podemos dizer que B = D. Aqui podemos fazer uma consideração relevante: dois conjuntos são considerados iguais se **(e somente se)** ambos contêm os mesmos elementos.

Além disso, podemos listar três importantes propriedades da igualdade de conjuntos:

1. Reflexiva: $A = A, (\forall A)$ → lê-se “A é igual a A, para todo (∀) conjunto A”
2. Simétrica: $A = B \Rightarrow B = A, (\forall A, B)$
3. Transitiva: $A = B$ e $B = C \Rightarrow A = C, (\forall A, B, C)$

Nem sempre conseguimos apresentar todos os elementos de um conjunto, dessa forma, outra maneira de representar, de maneira mais generalista, é por meio da propriedade de seus elementos, chamado também de **propriedade característica**. Vejamos alguns exemplos:

- Seja P o conjunto dos números pares e I o conjunto dos números ímpares:

$P = \{x \mid x \text{ é par}\}$ → lê-se: x pertence ao conjunto P, **tal que** x é um número par.

$I = \{x \mid x \text{ é impar}\}$

- Seja T o conjunto de números inteiros maiores que 4 e menores do que 500:

$T = \{x \mid x \text{ é número inteiro } 4 < x < 500\}$

Definimos também dois conjuntos especiais:

1. **Conjunto unitário**: os conjuntos que possuem apenas um elemento.

- Exemplo: U é o conjunto de números inteiros entre -5 e -3.

$U = \{-4\}$

2. Conjunto vazio: conjuntos formados por nenhum elemento, podendo ser representado por { } ou Ø.

- Exemplo: conjunto dos números fracionários contidos no conjunto dos números naturais.

Vale a pena assistir!

Vídeo-aula do conteúdo do Tópico 1 – parte 1

3. Subconjuntos e Conjuntos das Partes

Vamos estudar, agora, como podemos definir as relações entre os conjuntos. Podemos pensar em dois conjuntos A = {2,5,7,10,13} e B = {**2,5,7,10,13**,20,24}. Observe que todos os elementos de A também pertencem ao conjunto B (em negrito). Assim, dizemos que A é um subconjunto de B ou A ⊂ B (lê-se: A está contido em B). Também há a notação equivalente B ⊃ A (lê-se: B contém A).

Analogamente, podemos dizer que um conjunto unitário C = {-1} não está contido em A nem em B, ou seja, C ⊄ A e C ⊄ B.

De maneira geral, dizemos que dado dois conjuntos A e B quaisquer, A está contido (ou incluído) em B, se todo o elemento de A for elemento de B.

Exemplo 1: considere 3 conjuntos descritos abaixo:

$A = \{2, 8, 10, 16\}$

$B = \{8, 10\}$

$C = \{8, 10, 20, 21\}$

Podemos estabelecer algumas relações verdadeiras:

- $B \subset A$
- $A \not\subset C$
- $2 \in A$
- $C \not\subset A$
- $(20,21\} \subset C$
- $20 \notin B$
- $\{10\} \subset B$
- $\emptyset \subset B$

Note a última relação listada acima: o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto e, dessa forma, é considerado um subconjunto de qualquer conjunto.

Exemplo 2:

Seja:

P = { x | x ∈ N e x é um número par} = {2, 4, 6, 8…}

Logo, temos que:

P ⊂ N

Outra forma de visualizar as relações de conjunto é utilizando o Diagrama de Euler-Venn. Nesse tipo de gráfico, cada conjunto é representado por um círculo. Assim, temos como mostrado na fig

Exemplos de relações entre conjuntos utilizando o diagrama de Euler-Venn.

Exemplo 3:

Sejam os conjuntos:

B = { x | x ∈ N e x é múltiplo de 2}

$A = \{ x \mid x \in N$ e x é múltiplo de $4\}$

Será que podemos mostrar que $A \subset B$?

Bom, primeiramente vamos pensar em um elemento de $x \in A$, isto é, seja x um elemento **arbitrário** (ou qualquer) do conjunto A. Precisamos mostrar que esse x satisfaz a propriedade característica que define o conjunto B, ou seja, x é um múltiplo de 2.

Temos que a propriedade característica de B pode ser escrita matematicamente como $x = m \,.\, 4$, para qualquer número m inteiro. Essa equação pode ser escrita decompondo o número 4, como: $x = m \,.\, 2 \,.\, 2$ ou $x = k \,.\, 2$, onde $k = m \,.\, 2$.

Isso mostra que x é um múltiplo de 2 e, portanto, $x \in B$.

Existem números (como 18) que são múltiplos de 2, mas não são múltiplos de 4.

$A = \{ x \mid x – k \,.\, 2$ sendo k par$\}$

Podemos encontrar situações onde os elementos de um determinado conjunto, também são conjuntos. Por exemplo:

- $F = \{\{2,3\}, \{5,6\}, \{1\}, \{10,20,50,60\}\}$

Chamamos F de família de conjuntos, cujos elementos são:

- $\{2,3\} \in F$
- $\{5,6\} \in F$
- $\{1\} \in F$
- $\{10,20,50,60\} \in F$

Observe que 5 $\notin$ F e 1 $\notin$ F, uma vez que os elementos de F não são números e sim conjuntos!

Um exemplo intuitivo é pensar na cidade de Vila Velha como sendo o conjunto de capixabas que moram na cidade, entretanto, Vila Velha é um elemento do conjunto de cidades que formam a Grande Vitória (Vitória, Vila Velha, Serra, Cariacica, Fundão, Guarapari e Viana).

Uma cidade é um conjunto de prédios. Mas uma cidade é também um elemento do conjunto de Estados.

Exemplo 4:

Considere duas retas r e s como sendo o conjunto de pontos. O conjunto de retas pode ser considerado uma família de conjuntos.

Duas retas r e s, com pontos A, B, C, D, E, F.

Podemos afirmar:

- O elemento $A \in r$ e $A \in s$;
- O conjunto de pontos da reta $AB \subset r$, isto é, o conjunto de pontos AB é um subconjunto do conjunto de pontos da reta r;
- $F \notin A$ e $F \notin B$;
- O conjunto de pontos da reta $AD \not\subset s$;
- $E \in AE \rightarrow$ O elemento E pertence ao conjunto de pontos da reta AE e;
- $AE \subset s$

Agora, vamos considerar um conjunto L, sendo: $L = \{1,2,3\}$. Podemos definir o conjunto das partes de L, denotado por P(L), como o conjunto de todos os subconjuntos possíveis de formar com os elementos de L. Observe:

$L = \{1,2,3\}$

$P(L) = \{x \mid x \text{ é um subconjunto de } L\}$

Então, os subconjuntos dos elementos de L são uma combinação de seus elementos:

P (L) = {Ø, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {2,3}, {1,3}, {1,2,3}}

Repare que o conjunto Ø sempre está contido no conjunto das partes e o próprio conjunto L está contido no conjunto das partes.

Note que, para um conjunto com 3 elementos, como em L, obtemos um conjunto das partes de 8 elementos. Será que conseguimos descobrir quantos elementos tem o conjunto das partes de um conjunto com 5 elementos ou de maneira mais geral, n elementos?

Na matemática, muitas vezes precisamos indicar para qual conjunto de números estamos trabalhando em determinado problema ou teoria. Para isso, chamamos de conjunto universo todos os elementos que podem ser utilizados. Normalmente, representamos esse conjunto especial pela letra U.

Em equações, por exemplo, esse conjunto universo é conhecido também como o domínio da equação. Vejamos:

Exemplo 5:

A equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ possui os conjuntos soluções:

- S = {-2,-1,1,2} se U = R → isto é, se considerarmos nosso conjunto universo o conjunto dos números reais e;
- S = {1,2} se U = N → apenas os números inteiros positivos se nosso conjunto universo abranger apenas os números naturais.

4. Operações Binárias e Unárias em Conjuntos

Podemos trabalhar com os elementos dos conjuntos de diversas formas. Por exemplo, ao fazer o balanço mensal de uma loja utilizamos operações aritméticas dos números do conjunto dos números racionais Q. Quando fazemos uma operação (subtrair, somar, multiplicar) com dois números de um determinado conjunto, dizemos que é uma operação binária no conjunto.

Exemplo:

Tome o conjunto dos números inteiros Z. Temos:

1 – 3 = -2 é uma operação binária de subtração entre os elementos 1 e 3 do conjunto Z.

Para quaisquer dois números inteiros x e y do conjunto Z, temos apenas uma única resposta. Aqui, diferente quando tratamos de conjuntos, a ordem é muito importante, uma vez que x – y (1 – 3 = -2) não é o mesmo que y – x (3 – 1 = 2). Relembrando que, em conjuntos, {1,3} é a mesma coisa que {3,1}. Dessa forma, chamamos os dois números de uma operação de pares ordenados (x, y).

O conceito de pares ordenados é utilizado em geometria e estudo de funções no plano cartesiano, para indicar um ponto de uma coordenada. Observemos a figura abaixo. O ponto A = (1,2) é diferente do ponto B = (2,1).

Exemplo de par ordenado no plano cartesiano.

Exemplo 6:

Dado o par ordenado $(2x - y, x + y) = (7, 1)$, quais são os valores de x e y?

Precisamos resolver o seguinte sistema de equações lineares com duas equações e duas incógnitas:

$2x - y = 7$

$x + y = -1$

Somando as duas equações, temos que: x = 2 e y = -3.

Formalmente, podemos definir uma operação binária como:

Uma operação sobre um determinado conjunto S é dita como operação binária, denotada por º, se para qualquer par ordenado (x,y) de elementos de S, xºy existe, é único e é um elemento de S.

Exemplo 7:

A adição, subtração e multiplicação são todas operações binárias em Z. Por exemplo, quando realizamos a adição no par ordenados de dois inteiros (x,y), existe, é único e inteiro.

Já, se considerarmos o conjunto dos números naturais N, a subtração não é uma operação binária, uma vez que os valores negativos não abrangem os números naturais, por exemplo:

$3 - 10 = -7$

$-7 \notin N$

De forma semelhante, uma operação unária é uma operação com apenas um elemento de um conjunto. Como exemplos temos as seguintes operações, considerando novamente o conjunto dos números inteiros Z:

- Raiz quadrada: $\sqrt{4} = 2$
- Potenciação: $3^2 = 9$
- Módulo: $|-7| = 7$
- Trigonometria: COS(60) = 0.5
- Fatorial: 6!

Vale a pena assistir!

Vídeo-aula do conteúdo do Tópico 1 – parte 2

5. Conclusão

Ao longo desta lição vimos que a matemática representa a base para a teoria da computação e no desenvolvimento de novas tecnologias. Começamos estudando uma das teorias mais fundamentais da matemática, a Teoria de Conjuntos.

Os conjuntos representam uma forma de organização de objetos, seja números, cidades, estados, soluções de equações, etc. Observamos diferentes formas de representar os conjuntos, como listando seus elementos ou apresentando sua propriedade característica. Definimos as condições de igualdade, pertencimento e família de conjuntos.

Vimos que os subconjuntos representam uma parte de um conjunto maior e que o conjunto das partes são todos os possíveis subconjuntos. Por fim, definimos o que são as operações unárias e binárias e como elas são utilizadas na resolução dos problemas.

6. Referências

YouTube. 2021. DocumentariosCiencial. ALAN TURING – Documentário (documentary). 52min41. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=x2AXca1kPQk>

GERSTING, Judith L. Mathematical Structures for Computer Science. 5ª edição. Hawai: Michelle Russel Julet, 2003.

GRAHAM, Ronald L.; KNUTH, Donald E.; PATASHNIK, Oren. Matemática concreta: fundamentos para a ciência da computação. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica. 5. ed. São Paulo, SP: Atual, 1999. 440 p. ISBN 85-7056-411-2.

Parabéns, esta aula foi concluída!

O que achou do conteúdo estudado?

Péssimo Ruim Normal Bom Excelente

Deixe aqui seu comentário

Mínimo de caracteres: 0/150

Enviar