Tópico 06

Matemática para Computação

Funções

1. Introdução

As relações binárias podem ser encontradas de diversas maneiras de acordo com suas propriedades e os conjuntos de elementos envolvidos. Neste tópico, iniciaremos nossos estudos de funções, que são uma classe especial de relações binárias. As funções representam uma parte essencial na matemática e sua ideia-chave está em estabelecer uma relação ou uma “regra” entre duas ou mais grandezas. No nosso cotidiano, encontramos vários exemplos de funções, muitas vezes, nem percebemos que estamos utilizando esse conceito para obter determinadas respostas, iremos ver alguns exemplos.

Assim como nas relações, as funções também possuem propriedades, relacionadas tanto aos conjuntos, do qual fazem parte, quanto aos operadores que compõem as funções. No ensino médio, você deve ter estudado algumas delas, como, por exemplo, começamos normalmente definindo as funções mais simples que são a de 1° e 2° grau. Avançamos com as funções logarítmicas, modular e exponencial. Vamos visualizar como cada uma se comporta, mas antes precisamos determinar a definição conceitual de função e partimos desse ponto geral para os desenvolvimentos dos casos mais específicos.

2. Definição

Como dito na seção anterior, as funções estabelecem uma relação entre duas grandezas, mas o que exatamente isso significa? Vamos para um exemplo. Suponha que Gilberto tenha uma barraca de vendas de copos de água de coco na praia. Cada copo de 500 ml custa R$ 2,30. Para facilitar os cálculos na hora de dar o troco para o cliente, Gilberto montou uma tabela com a relação entre quantidade de copos e valor total da compra. Observe abaixo:

Número de copos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Preço (R$)	2,30	4,60	6,90	9,20	11,50	13,80	16,10

Note que estamos estabelecendo uma relação entre a grandeza número de copos e o valor correspondente. Dessa forma, dizemos que o valor total da compra é função do número de copos de água de coco. Dizemos, também, que o número de copos é o valor de entrada e o valor é a saída desejada do problema. Podemos ainda generalizar, para qualquer número de copos desejado, uma fórmula:

$$y = 2{,}30 * x$$

Em que x é um número de copos e y o valor total da compra. Repare que a fórmula acima estabelece uma relação entre dois conjuntos. O valor de x é um elemento do conjunto dos números naturais, isto é, não é possível comprar 1,4 ou -1 copos. E o número de y deve pertencer ao conjunto dos números racionais positivos. Além disso, a fórmula nos permite a montar pares ordenados (x, y) que compõem uma relação. Podemos verificar pela tabela e montar o conjunto R da relação:

R = {(1, 2.30), (2, 4.60), (3, 6.90), (4, 9.20), (5, 11.50), (6, 13.80), (7, 16.10)}

Outra característica importante é que, para cada valor de x, existe somente um corresponde a y. Uma mesma quantidade de copos não pode ter dois valores totais distintos. Além disso, para todo elemento do conjunto dos números naturais, ou seja, para qualquer quantidade de copos que o cliente deseja, existe um valor correspondente no conjunto dos números racionais positivos. Veremos que tais características são fundamentais no conceito de função.

Um outro exemplo clássico que podemos ilustrar é sobre o valor da corrida de um taxímetro. Vamos supor que tarifa inicial, ou “bandeirada”, de uma companhia de táxi é R$ 5,00, e o valor da corrida é R$ 3,45 por quilômetro rodado. O valor final da corrida está condicionado a quantos quilômetros é o trajeto da viagem, em outras palavras, o valor da corrida é função da distância percorrida. Nesse caso, as duas grandezas relacionadas são os quilômetros e o valor total da corrida. E podemos determinar uma fórmula geral para determinar, para qualquer valor de entrada, qual o valor total correspondente:

Em funções do 1° grau, como a função acima, o número que acompanha a variável x é conhecido como coeficiente angular da reta. E o termo independente de x é conhecido como coeficiente linear.

O conjunto de pares ordenados (x, y) pode ser visualizado por meio do gráfico no plano cartesiano. No eixo y, representamos o valor total da corrida e o eixo x, a quantidade de quilômetros. Observe a figura seguinte:

Plano cartesiano da função y = 2,35x + 5.

O eixo y é conhecido como eixo das ordenadas, ou eixo da imagem da função. E o eixo x é o eixo das abscissas, eixo do domínio da função.

Nesse exemplo, estamos lidando com o conjunto dos números reais positivos. Para qualquer distância x percorrida pelo táxi, teremos um e somente um resultado do valor total em y. Para descobrir o valor da corrida, basta utilizar a fórmula que é definida do problema, fornecendo um valor de entrada x. Por exemplo, se a corrida foi 25 quilômetros, o valor total é dado por:

Pelos exemplos apresentados, podemos notar que uma função é composta por **três** partes: um conjunto de elementos de entrada, ou de valores iniciais (quantidade de copos e distância do trajeto), um conjunto de elementos de saída, que é associado à entrada (valor total da compra e da corrida), e a fórmula que rege a associação. O conjunto de entrada é chamado de **domínio** da função e o conjunto de elementos associados é o **contradomínio** da função.

A figura seguinte mostra uma representação do conjunto domínio S e contradomínio T de uma função f arbitrária. É utilizada a simbologia **f: S à T**. A associação é um conjunto de pares ordenados (s, t) sendo s um elemento pertencente ao conjunto S e t ao conjunto T, que estabelece a relação entre os elementos.

Representação do conjunto Domínio e Contradomínio e sua relação f.

Agora que conhecemos a ideia inicial por trás de funções, podemos definir formalmente.

DEFINIÇÃO: Dados dois conjuntos S e T, e uma relação f entre eles, dizemos que f é uma função de S em T, f: S à T, se e somente se, para todo elemento de S existir um único t pertencente a T, de modo que se forme o par ordenado do subconjunto S x T, (s, t).

- O conjunto S é chamado de **Domínio** da função.
- O conjunto T é conhecido como **Contradomínio** da função.
- Para o par ordenado (s, t) pertencente à relação f, dizemos que t é a **imagem** de s, ou, f(s) = t.
- Todo elemento de S deve ter uma imagem t associada a ele, que é única.

Podemos identificar funções por meio do diagrama de flechas, para exemplificar os conceitos descritos anteriormente. Considere primeiro o conjunto A = {1, 2, 3} e B = {5, 6, 7} e uma relação f entre eles f = {(2,5), (3, 7}}. Nesse caso, f não é considerada uma função, uma vez que o elemento 1, de A, não tem relação com elementos de B, isto é, ele não possui uma imagem em B.

Agora, seja os conjuntos A = {a, b, c} e B = {4, 8, 10, 12} e a relação g entre eles sendo g = {(a, 4), (a, 8), (b, 10), (c, 12)}. Note que g também não é uma função, uma vez que o elemento a possui duas imagens distintas (a, 4) e (a, 8).

Por fim, considere os conjuntos A = {9, 11, 13} e B = {16, 17, 18, 20} e uma relação h = {(9, 16), (11, 16), (13, 18)}. Podemos verificar que h se trata de uma função de A em B, dado que cada elemento de A possui uma única imagem em B. Além disso, note que dois elementos de A possuem a mesma imagem (9, 16), (11, 16), e que dois elementos de B não possuem associações (17 e 20). Esses fatos não fazem com que h não seja considerado uma função, uma vez que a definição permite isso. E veremos mais à frente que é apenas um tipo diferente de função.

Observe a figura seguinte, que mostra as relações f, g e h por meio do diagrama de flechas e perceba a diferença entre eles.

Representação diagrama de setas das relações f, g e h.

A definição de função pode ser estendida para funções com mais de uma variável. Podemos encontrar funções f: S_1 X S_2 X…X S_n à T que associa as n-tuplas de elementos a uma única imagem em T.

Exemplo: seja a função f descrita por

Podemos encontrar a imagem da tupla (-4, 3, 1) substituindo os valores na função, isto é:

Vale a pena assistir!

Função do Primeiro Grau (Função Afim): Conceitos Iniciais (Aula 1 de 9)

Como mencionado anteriormente, uma função é composta por três partes: o conjunto domínio, o conjunto contradomínio e uma associação entre eles. Quando pensamos em função, essa associação traz a ideia de que é uma equação que a descreve, como mostrado no exemplo anterior. Mas é importante notar que nem toda associação de elementos é necessariamente dada por uma equação, e a relação continua sendo uma função. Observe no exemplo do diagrama de setas.

A função h é uma relação que não tem uma equação propriamente definida. Quando a relação de uma função é descrita por uma equação, ela é apenas uma forma de obter a associação entre os dois conjuntos de interesse.

Duas funções com domínios e contradomínios diferentes podem ter a mesma equação que a descreve e terão resultados distintos, uma vez que os pares ordenados estarão em acordo com o domínio e contradomínio das funções.

DEFINIÇÃO: Duas funções são consideradas iguais se, e somente se, compartilharem o mesmo domínio, contradomínio e associação entre os elementos.

Vale a pena assistir!

3. Propriedades das Funções

Como nas relações, as funções também têm algumas propriedades que nos permitem classificá-las de acordo com o tipo de ligação que é estabelecido entre os elementos dos conjuntos. Essas características independem do grau da equação ou da regra de associação da função, mas do comportamento que forma um par ordenado do domínio e a imagem. Temos três principais tipos: sobrejetora, injetora e bijetora.

Seja uma função f: S → T, sendo S o conjunto do domínio e T o conjunto do contradomínio. Como visto em exemplos anteriores, nem sempre todos os elementos de T fazem parte de alguma associação da função. Chamamos de **conjunto imagem** I o conjunto de elementos em T que possuem ligação com pelo menos um elemento do domínio da função. Podemos notar que o conjunto imagem é um subconjunto de T, isto é, está contido em T,

Uma outra forma de definir o conjunto imagem é:

Lemos a formulação acima como: O conjunto imagem I é um (elemento t) f(s) tal que o elemento s pertence ao conjunto domínio S.

DEFINIÇÃO: Uma função é dita sobrejetiva ou **sobrejetora** se para **todo** elemento t no contradomínio T de f houver pelo menos um s no domínio S de f tal que f(s) = t. Ou seja, o conjunto contradomínio T é igual ao conjunto imagem I.

Observe a figura seguinte com a representação do diagrama de setas. Todos os elementos de T possuem pelo menos um elemento associado ao domínio. Note que o elemento c possui duas associações, o que não é um problema. Para a função ser sobrejetora, não pode haver elemento t em T sem setas.

Função sobrejetora

Exemplo: Considere a função f:Q → Q definida por f(x) = 3x + 2. Como podemos verificar se f é sobrejetora ou não? Considere f(x) = q e substituindo na equação da função, temos:

Isolando a variável x, temos:

Podemos notar que, para qualquer valor q número racional, existe um x que pertence ao conjunto dos números racionais, logo, f é sobrejetora.

Se a função fosse definida como f: Z → Q com a mesma equação acima, não poderíamos afirmar que ela é sobrejetora, uma vez que existem diversos valores do conjunto dos números racionais (contradomínio) que não resulta em um número inteiro (domínio). Como exemplo, o próprio 0, se fosse substituído na equação, teríamos um número racional (-2/3), que não pertence ao domínio da função, que demanda um número inteiro.

DEFINIÇÃO: Uma função é chamada de **injetora** quando elementos distintos do domínio S apresentam imagens distintas no contradomínio. Ou seja, nenhum elemento do contradomínio T é imagem de dois elementos distintos do domínio S.

No diagrama de setas seguinte, vemos um exemplo de função injetora. Repare que todos os elementos de S estão associados com elementos distintos em T, essa é a regra principal. Pode ser que existam elementos em T que não são imagem da função.

Função Injetora.

Exemplo: A função f: R → R com a lei de formação f(x): = 2x é injetora, uma vez que, para cada número real x do domínio, gera o seu dobro (multiplicação por 2). E dois números distintos geram resultados diferentes.

Agora, se considerarmos a lei de formação $f(x) = x^2$, com o mesmo domínio e contradomínio descritos anteriormente, percebemos que não se trata de uma função injetora. Se pegarmos o número (-2) e (+2), são elementos distintos do domínio que geram o mesmo resultado 4.

DEFINIÇÃO: Uma função é chamada de bijetora quando apresentar as características de função injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Ou seja, elementos distintos do domínio estão associados a elementos distintos no contradomínio, e o contradomínio é igual ao domínio imagem.

A figura abaixo mostra uma função bijetora. Ela reúne as duas características, injetiva e sobrejetiva.

Função bijetora.

Exemplo: Dada a função F: R → R definida para f(x) = x-1, vamos verificar se trata de uma função bijetora.

Utilizando a mesma estratégia de verificar a bijeção de uma função, substituímos f(x) = q e isolando o x, temos:

Vemos q no contradomínio, o elemento do conjunto dos números reais, e temos um x também do conjunto dos números reais. Logo, o contradomínio é o próprio conjunto imagem e confirmamos que é uma função bijetora.

Agora, observando a função, percebemos que é uma função do 1° grau, isto é, uma reta no plano cartesiano. Em uma reta, notamos que cada valor de entrada no eixo x, possui apenas um valor associado no eixo y, logo, percebemos que se trata de uma função injetora, como mostrado na figura seguinte.

Gráfico da função f(x) = x -1.

É relevante citar que existem funções que não são nem injetoras e nem sobrejetoras. Elas não recebem uma classificação especial e são conhecidas apenas por não apresentarem as características de injeção e sobrejeção.

Podemos resumir o conceito de função e os três tipos de funções vistas por meio da figura mostrada a seguir, com os diagramas de setas. Observe que tudo depende de como os elementos estão sendo associados entre os conjuntos.

Diagrama de setas de relações e funções.

4. Composição de funções

Considere agora duas funções f: T → S e g: T → U . Então, para todo elemento s pertencente ao domínio S, t = f(s) é um elemento de T, que, ao mesmo tempo, T é domínio da função g. Quando temos esses casos, podemos associar a função g à função f, resultando g(t) = g(f(s)). E g(t) é um elemento do contradomínio U.

Fazendo g(f(s)), criamos uma associação S → U, que chamamos de composição de funções ou funções compostas e representamos como g ° f. Se fossem representadas pelos diagramas de setas, teríamos como mostrado na figura seguinte.

Diagrama de setas composição de funções.

As funções compostas nos passam uma ideia de atalho, que liga um conjunto a um outro, que têm uma relação com um conjunto intermediário em comum

Em algumas situações, não temos a equação que descreve a composição, isto é, a função g ° f. Mas veremos que é fácil de determiná-la quando conhecemos as duas funções independentes. Vamos considerar duas funções reais, definidas por:

Para determinar a função composta $h(s) = (g \circ f)(s)$, basta substituir a equação de f em g, veja:

Dessa forma, temos uma função h, na qual o domínio é o conjunto S, e o contradomínio o conjunto U. Para verificar, podemos aplicar alguns valores. Vamos escolher um elemento do domínio S e encontrar sua imagem em T e, com esse valor, aplicar na função g para encontrar a imagem em U. Observe:

Tomando o elemento $s = -2$ do conjunto S, temos:

O elemento 3 agora está no domínio T. Vamos encontrar sua imagem no contradomínio U, por meio da função g:

Pronto! Encontramos o número 8 como imagem do elemento 3. A ideia agora é aplicar o primeiro elemento s = -2 na função composta. Verificamos que o resultado é justamente o 8:

No diagrama de seta, temos a operação ilustrada da seguinte maneira, como mostrado na figura seguinte:

Diagrama de setas de composição de funções.

Vale a pena assistir!

5. Conclusão

Neste tópico, definimos um caso especial de relações binárias, as funções. O estudo dos mais diferentes tipos de funções faz parte de uma gama extensa de aplicações em diversas áreas do conhecimento. Definimos as três partes essenciais que compõem as funções: o conjunto domínio, o contradomínio e uma regra de associação entre eles.

Avançamos nossos estudos apresentando as propriedades das funções obtidas de acordo com a configuração que as associações são formadas. Em funções sobrejetoras, temos que o conjunto do contradomínio é o mesmo que o conjunto de imagens. Nas funções injetoras, cada elemento do domínio está associado com apenas um único elemento do contradomínio e não compartilha com mais nenhum outro elemento do domínio. Por fim, as funções bijetoras possuem ambas as propriedades de injeção e sobrejeção.

Voltamos nossa atenção também para o conceito de composição de funções, quando temos três conjuntos, em que um conjunto é tanto contradomínio de um quanto o domínio de um outro distinto. Dessa maneira, podemos compor uma função que liga os dois conjuntos da borda. Chamamos essa função de função composta. Quando ela não é definida, podemos substituir uma função na outra, para obter sua composição.

6. Referências

EDUCABRAS. Educabras. Relação e Função. 2021. Disponível em: <https://www.educabras.com/vestibular/materia/matematica/aulas/relacao_e_funcao>.

GERSTING, Judith L.. Mathematical Structures for Computer Science. 5ª edição. Hawai: Michelle Russel Julet, 2003.

GRAHAM, Ronald L.; KNUTH, Donald E.; PATASHNIK, Oren. Matemática concreta: fundamentos para a ciência da computação. 2ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica. 5. ed. São Paulo, SP: Atual, 1999.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. Matemática Completa. São Paulo: FTD, 2005.

YouTube. (2021). Ferretto Matemática. Função do Primeiro Grau (Função Afim): Conceitos Iniciais (Aula 1 de 9). 12min49. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=hdMFlAv5GkU&t=185s>.

Parabéns, esta aula foi concluída!

O que achou do conteúdo estudado?

Péssimo Ruim Normal Bom Excelente

Deixe aqui seu comentário

Mínimo de caracteres: 0/150

Enviar