Tópico 08

Matemática para Computação

Indução Matemática

1. Introdução

Profissionais da computação lidam diariamente com problemas de lógica na elaboração de algoritmos para resolver determinado problema, como a construção de uma condição. Um algoritmo nada mais é do que uma lista de comandos que um computador deve executar e, para isso, muitas vezes utilizamos de ferramentas da matemática, sejam expressões e fórmulas, ou do pensamento lógico e crítico.

Nesse sentido, neste capítulo, iremos inicializar nossos estudos em provas de teoremas na matemática de forma que abordaremos quatro estratégias de provas amplamente utilizadas. Em seguida, vamos avançar com um conceito muito importante na área de ciência da computação, a indução matemática. E, por fim, vamos aplicar o que foi visto com algumas demonstrações indutivas.

2. Teoremas e Provas Informais

A matemática que conhecemos hoje é composta por teoremas e provas que nos permitem entender, por exemplo, diversos fenômenos da natureza. Em geral, os teoremas são apresentados na forma de uma implicação hipótese-conclusão:

Se **P** então **Q**

$$P \Rightarrow Q$$

Sendo que P e Q são proposições que podem ser verdadeiras ou falsas. Podemos dizer que um **teorema** é uma implicação comprovadamente verdadeira. Enquanto uma afirmação não é provada ou invalidada, a chamamos de **conjectura**. De forma matemática, um teorema pode ser descrito como:

$$(\forall x \in D)[P(x) \rightarrow Q(x)]$$

Lemos da seguinte maneira: para todo x pertencente ao domínio D, P(x) implica Q(x).

Provar que uma implicação é verdadeira nem sempre é uma tarefa fácil. Não há fórmulas na construção de provas ou algoritmos especializados para isso. A prática é uma ferramenta fundamental que ajuda a fornecer ideias para chegar na implicação verdadeira.

Estudaremos algumas estratégias interessantes na prova de teoremas. Mas, antes, o que de fato é uma prova matemática? Como escrito pelo matemático brasileiro Paulo Feofiloff, “uma prova é uma argumentação precisa que procura convencer o leitor de que uma certa proposição, previamente enunciada, está correta” (FEOFILOFF, 2007, p. 1). Em outras palavras, uma prova ajuda o leitor a entender os motivos de uma dada afirmação ser verdadeira. Um exemplo intuitivo seria um engenheiro civil ou mestre de obras explicar os motivos de uma determinada decisão, por exemplo, ele deve provar tecnicamente suas razões e por que sua implicação é verdadeira.

Em livros de matemática, é comum encontrar “prove o seguinte teorema”, e o estudante já sabe que é verdade (pois se trata de um teorema). Mas nem sempre encontraremos dessa forma. Pense que, seja por quaisquer outros motivos, você deseja provar alguma afirmação. Uma ideia mais intuitiva para se provar um teorema é você observar vários exemplos em que uma hipótese P implica uma conclusão Q. Quanto mais exemplos você achar, mais confiante você ficará de que de fato de forma generalizada $P \Rightarrow Q$. Esse processo é chamado de **raciocínio indutivo**.

Antes de aprendermos as estratégias de como de fato conseguimos provar um teorema, a pergunta que poderíamos fazer no momento é: como provamos que uma implicação $P \Rightarrow Q$ é falsa? Um jeito muito comum é encontrar um **contraexemplo** que desmonta a implicação, isto é, quando P for verdade, Q é falsa. Um único contraexemplo é suficiente para ''desprovar'' uma conjectura. Vamos a um exemplo intuitivo sobre contraexemplo: podemos encontrar uma afirmação que diz "Todas as flores são vermelhas". O contraexemplo é encontrado em "Lírio é uma flor branca".

Exemplo: suponha a afirmação seguinte:

"Para todo número n inteiro, $n! \leq n^2$"

Lembrando que o fatorial de um número n é definido como:

É importante relembrar também, que definimos 0! como: 0! = 1.

Dessa forma, podemos encontrar um contraexemplo da afirmação testando até achar um número n em que n! não é menor ou igual que n^2. Observe a tabela seguinte:

n	*n!*	*n²*	*n! < n² ?*
1	1	1	verdade
2	2	4	verdade
3	6	9	verdade
4	24	16	falso

Encontramos um contraexemplo tomando n = 4. Não é preciso realizar mais testes, uma vez que já encontramos um exemplo em que torna a conjectura inicial como falsa.

Vamos, agora, definir algumas das estratégias e técnicas de demonstrações mais utilizadas na prova de teoremas.

Prova Exaustiva

utilizar o que chamamos de demonstração ou prova exaustiva (por exaustão). Provamos que a afirmação é verdadeira para todos os possíveis valores de x no domínio que é definida.

Exemplo: seja x um número inteiro definido no domínio D, o intervalo $1 \leq x \leq 5$. Prove a afirmação abaixo:

“Se x pertence ao domínio D, então $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$”

Como temos um domínio pequeno, podemos realizar os testes de maneira exaustiva, isto é, calculando para cada caso se a afirmação é válida ou não. Observe a tabela:

Prova Direta

Nem sempre temos um conjunto finito em que é plausível realizar os testes para todos os casos. Como fazemos de maneira mais geral para provar P à Q? Na prova direta, estabelecemos uma sequência de demonstrações, partindo da afirmação P e chegando à conclusão Q. Usamos, dessa forma, artifícios e definições matemáticas que já conhecemos e sabemos que são verdadeiros. Vamos utilizar o mesmo exemplo passado na prova exaustiva para prová-lo diretamente.

Exemplo: seja x um número inteiro, então:

Partindo da primeira expressão $(x-2)^2$, podemos utilizar a definição de potência:

Assim, aplicando a distributiva, chegamos à expressão:

E, assim, conseguimos provar que:

Essa demonstração direta foi simples, uma vez que apenas utilizamos matemática básica e de conceitos bastante conhecidos para resolver. Veremos a seguir outro exemplo mais elegante.

Exemplo: prove por prova direta a afirmação abaixo:

“x número inteiro par A y número inteiro par = x.y é um número inteiro par”

Lendo essa expressão. temos a afirmação de que, se x e y forem números inteiros pares, o seu produto também é um número inteiro par.

Vamos partir de como podemos definir um número par. Um teorema conhecido nos afirma que se n é um número inteiro par. então, existe k pertencente aos números inteiros, tal que n = 2.k

Suponha dois números inteiros a e b. tais que:

Dessa forma, podemos reescrever o produto como:

Pelo princípio da associatividade, podemos tomar:

Como o produto de dois números inteiros é também um número inteiro, podemos afirmar que o produto (a.2.b) é um número inteiro, isto é, (a.2.b) = k:

Assim, como queríamos demonstrar (c.q.d), temos que x.y também é um número inteiro par.

Contraposição

Quando não é simples a prova direta, uma maneira equivalente de demonstrar a validade de um teorema é utilizando técnicas variantes, uma delas é a contraposição. Na regra de equivalência da contraposição, temos que:

P implica Q é uma equivalência tautológica do não-Q implica não-P. Isto é, se eu demonstrar que o não-Q implica não-P, eu demonstro que P implica Q. A conjectura apenas muda de forma, perceba: a hipótese P antiga se torna a conclusão P negada e a conclusão Q antiga se torna a hipótese Q negada.

Exemplo: Prova o teorema a seguir, considerando x pertencente aos números dos inteiros:

“Dado um número x inteiro, temos que, se x^2 é par então x é par”

Da afirmação, temos P = x^2 é par e Q = x é par.

Por contraposição, podemos negar as duas afirmações e tentar provar que:

“Dado um número x inteiro, temos que, se x é ímpar, então, x^2 é ímpar”

Assim, tempos $\neg Q$ = x é ímpar e $\neg P$ = x^2 é ímpar.

Para todo número x ímpar, temos:

Sendo k um número inteiro qualquer. Agora, pegue outro número qualquer e façamos x = 2a+1 com a sendo um número inteiro qualquer.

Elevando x ao quadrado, temos:

Como ($2.a^2 + 2.a$) é um número inteiro, temos que x é um número ímpar.

Provamos, assim, por contraposição, que a conclusão negada implica a hipótese negada. Isso nos permite afirmar que $P \Rightarrow Q$.

3. Contradição

Também conhecida como prova indireta, a contradição pode ser considerada uma variante da prova direta. Aqui, utilizamos o C como representação de qualquer absurdo, ou contradição que uma conjectura pode apresentar. Temos a seguinte equivalência tautológica:

Traduzindo, temos que provar que P implica Q é equivalente a provar que P e a negação de Q implica o absurdo. Se P é verdade e Q for falso e eu chegar a uma contradição, temos que Q na verdade não é falso e, assim, podemos afirmar que P à Q.

Exemplo: prove a afirmação a seguir:

"Sendo x e y inteiros, temos que, se x e y são ímpares então x + y é par"

Nesse teorema, temos: P = "x e y são ímpares" e Q = "x + y é par". Como estamos lidando com números inteiros, a negação de Q se torna ¬Q = "x + y é ímpar". A ideia aqui é provar que, se x e y são ímpares e x + y é ímpar, implicaremos um absurdo na matemática.

Como fizemos anteriormente, vamos partir da definição de números ímpares. Temos que a e b são números inteiros:

A soma de x e y ficaria:

Colocando o 2 em evidência, temos:

Como a e b são números inteiros, (a + b + 1) também é um número inteiro. E teríamos x + y = 2.k. E, pela definição de números pares, qualquer número inteiro multiplicado por 2 é par. Chegamos assim no absurdo, uma vez que x + y deveria ser ímpar. Logo, concluímos que se x e y são números ímpares, x + y é um número par.

Vale a pena assistir!

Vídeo-aula do conteúdo do Tópico 8 – parte 1

4. Indução

A indução, ou prova por método indutivo, é uma técnica de demonstração de teoremas de suma importância para cientistas da computação. Muitas sentenças na matemática generalizam uma determinada propriedade para todos os números inteiros positivos. Como exemplos, para todo n inteiro positivo:

O método indutivo nos auxilia a provar sentenças do tipo. Vamos começar estudando por um exemplo intuitivo. Imagine que você está caminhando sobre uma escada com muitos degraus. Como saber se você estará apto a chegar a um determinado degrau aleatório da escada? Vamos supor que são dadas duas afirmações verdadeiras sobre o problema Gersting (2003):

1. Você pode alcançar o primeiro degrau.
2. Uma vez que você está em um degrau, sempre poderá ir para o degrau seguinte.

Agora pense: se você pode alcançar o primeiro degrau (primeira afirmação) e sempre que você está em um degrau você consegue ir para o próximo (segunda afirmação), então, você pode alcançar quantos degraus desejar. Note que as duas afirmações são necessárias. A primeira afirmação não diz a respeito da continuidade da subida, e a segunda não diz sobre o começo, ou o degrau inicial. Para concluir que você pode chegar ao degrau que deseja, ambas se complementam e permitem dizer que você irá conseguir.

O método indutivo é semelhante ao caso das escadas. Considere n um número e P(n) uma propriedade de n que queremos demonstrar. Ele é definido por dois passos principais: o passo básico e o passo indutivo. Podemos definir, assim, o primeiro princípio de indução matemática:

DEFINIÇÃO: para provar que $\forall n, P(n)$, no qual n é um inteiro positivo, é verdade, precisamos provar duas sentenças:

1. Passo básico: P(1).
2. Passo indutivo: $\forall k\ (P(k) \Rightarrow P(k+1))$, sendo k um número inteiro positivo.

Ou seja, se formos capazes de provar **as duas sentenças**, podemos generalizar para todos os números inteiros positivos, ou seja, concluir que:

P(n) é válido para todos os números inteiros n

Vamos visualizar melhor o método indutivo com um exemplo.

Exemplo: suponha que, em uma determinada família, todos os membros têm exatamente dois filhos sempre. Seríamos capazes de determinar quantas pessoas existem em uma geração k qualquer? Observe a árvore genealógica seguinte, que representa a partir de um membro qualquer as suas gerações.

Gerações de uma família que sempre tem dois filhos.

Podemos notar que, aparentemente, poderíamos determinar os descendentes na geração k fazendo . Usaremos o método indutivo para provar matematicamente que nosso palpite está correto.

Como visto na definição, o método indutivo é composto por duas etapas, o passo básico e o passo indutivo. Para o passo básico, teríamos:

Isso é válido uma vez que a primeira geração tem dois filhos. Agora, vamos assumir que nosso palpite está correto e para a geração k, teríamos:

E vamos tentar provar que, no passo indutivo, vamos ter:

Como descrito na questão, a família tem a peculiaridade de que todos os membros têm sempre dois filhos. Dessa forma, uma geração futura k tem sempre o dobro que a geração passada (k-1). Assim:

Isso demonstra, via método indutivo, que nosso palpite inicial estava certo, uma vez que conseguimos validar os dois passos do método.

Veja o vídeo seguinte, sobre o método científico indutivo, que traz ideias-chave sobre o método, com exemplos intuitivos.

Vale a pena assistir!

MÉTODO CIENTÍFICO INDUTIVO

5. Demontrações Indutivas

Agora que temos em mãos as ferramentas do método indutivo, podemos demonstrar alguns teoremas não tão óbvios, como é o caso da árvore genealógica vista na sessão anterior. Vamos para alguns exemplos de demonstrações.

Exemplo: demonstre que a equação abaixo é válida para todo n inteiro positivo.

Temos que demonstrar que a propriedade P(n) que nos diz que a soma de todos os termos de 1 até $2n – 1$ deve ser igual a n^2. Poderíamos até utilizar a prova exaustiva, se nosso domínio de interesse fosse menor. Mas, para todo número n inteiro positivo, devemos utilizar o método indutivo para a prova.

O passo básico é direto, e obtemos P(1) como:

$$1 = 1^2$$

Isso é certamente válido. Para o passo indutivo, vamos assumir que a propriedade que queremos demonstrar é válida para um número inteiro k, P(k). Dessa forma, temos:

Pela definição da hipótese indutiva, temos que provar que a propriedade é válida também para o próximo passo, isto é, (k+1):

Utilizamos =? uma vez que não temos certeza ainda sobre o resultado, é justamente o que queremos demostrar. Note que assumimos anteriormente o valor de P(k), sendo a expressão igual a k^2. E observe que a expressão P(k) está contida em P(k+1). Dessa forma, podemos reescrever:

Assim, demonstramos as duas afirmações do método indutivo e conseguimos provar o teorema.

A tabela seguinte mostra um passo a passo resumido de como podemos utilizar o método indutivo para demonstrações em um domínio muito grande de números.

Vale a pena assistir!

Vídeo aula do conteúdo do Tópico 8 – parte 2

6. Conclusão

Neste tópico, abordamos alguns pontos relativos a demonstrações matemáticas. O pensamento crítico por trás dessas demonstrações é de suma importância no dia a dia de profissionais da computação no que diz respeito a construção de algoritmos.

Iniciamos definindo as diferenças entre um teorema e uma conjectura. Um teorema é uma implicação já validada como verdadeira e que de antemão temos ferramentas para provar. Uma conjectura é uma implicação que queremos validar. Vimos algumas provas informais de como podemos validar teoremas, como prova por exaustão, prova direta, contraposição e contradição.

Uma demonstração especial é utilizada quando queremos abranger nossa prova para um número muito grande de números, como o conjunto dos números naturais positivos. Definimos o método indutivo, com o passo básico e o passo indutivo, e aplicamos em algumas demonstrações, seguindo três sequências: a prova do passo básico P(1), assumindo o que queremos provar para P(k) e

7. Referências

FEOFILOFF, Paulo. O que é uma prova? IME/USP 2020. Dísponível em: <https://www.ime.usp.br/~pf/amostra-de-prova/amostra.html>

FREITAS, Daniel S. Fundamentos de matemática discreta para a computação. UFSC/CTC/INE 2007. Notas de Aula. 2007.

ROISENBERG, Mauro. Fundamentos de matemática discreta para computação: Relações. 06 jun. 2009, 01 dec. 2009. Notas de Aula.

GERSTING, Judith L.. Mathematical Structures for Computer Science. 5a edição. Hawai: Michelle Russel Julet, 2003.

Parabéns, esta aula foi concluída!

O que achou do conteúdo estudado?

Péssimo Ruim Normal Bom Excelente

Deixe aqui seu comentário

Mínimo de caracteres: 0/150

Enviar