Tópico 04

Matemática para Computação

Definições e propriedades das relações algébricas

1. Introdução

Nossa forma de viver no mundo é baseada em diversos tipos de relações. No emprego, o funcionário e o chefe possuem uma relação profissional mútua, nas famílias há vínculos como primos, irmãos e tias, que se conectam com uma relação dual entre duas pessoas ou mais. Na matemática não é diferente, a teoria dos conjuntos e sua universalidade permitem explicar, definir, expandir diversos conceitos importantes em termos de conjuntos, suas operações e diferentes tipos de relações.

Os conjuntos podem ter relações entre si e veremos adiante como isso é definido. A relação entre dois conjuntos é conhecida como função matemática e utilizamos para inúmeros casos, como na modelagem de sistemas, para estudar e entender fenômenos físicos, prever cenários (bolsa de valores, desastres ambientais etc.). As relações entre conjuntos possuem propriedades importantes que as classificam e veremos como aplicar e compreender melhor cada uma delas.

2. Relação binária

No nosso dia a dia podemos notar diversos tipos de relações básicas, que conectam dois elementos com um relacionamento em comum. Por exemplo, vamos dizer que Marta é irmã de Cristina. Observamos uma relação de irmãs, sendo o grau de parentesco a associação entre as duas pessoas. Podemos pensar também em um banco de dados com informações de quanto cada cliente gastou em um mês na sua empresa.

Nesse caso, estamos associando o cliente à quantidade de dinheiro das compras realizadas.

Você pode relembrar o que significa e como funcionam os bancos de dados na leitura do artigo abaixo:

https://www.oracle.com/br/database/what-is-database/

Uma estratégia muito comum, para mostrar graficamente as relações entre elementos, é a utilização de tabelas. Veja o exemplo mostrado abaixo:

Lista de compras	**Preço/unidade**
Arroz	R$ 19,90
Feijão	R$ 8,00
Óleo	R$ 6,00
Pão de forma	R$ 5,50
Suco	R$ 3,00

Na tabela acima relacionamos itens de compras com o preço da unidade de cada um deles. Cada coluna da tabela é um elemento dessa relação. Dizemos que tais conexões existem com base em uma propriedade que as ligam. No exemplo mostrado da tabela seria a propriedade “preço da unidade”.

Começaremos a estudar as relações entre conjuntos considerando apenas dois conjuntos. Fazendo uma analogia ao exemplo acima mostrado na tabela, teríamos o conjunto de produtos a serem comprados e o conjunto de preços da unidade. Podemos agora pensar na operação de produto cartesiano em um conjunto arbitrário S, que pode ser definido como o par ordenado dos elementos de S, que determinam pontos no plano cartesiano. Para relembrar o produto cartesiano e como podemos dispor o resultado no plano cartesiano veja o vídeo abaixo.

VALE A PENA ASSISTIR!

Função – Produto Cartesiano

Suponha S como o conjunto dos números naturais maiores que 0 e menores que 4, isto é, S = {1, 2, 3}. O produto cartesiano de S é obtido como:

Podemos selecionar alguma propriedade que estabeleça uma relação entre os elementos do conjunto de pares ordenados, formando um novo subconjunto. Como exemplo, o subconjunto T com a relação de igualdade dos elementos de S^2. Teríamos T = {(1,1), (2,2), (3,3)}, uma vez que a relação $x = y$ é satisfeita. Outro exemplo seria um subconjunto A, onde a relação seria a soma dos elementos dos pares ordenados que seja maior ou igual a 4. Teríamos A = {(1,3), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)}. Note que o elemento de S^2 (1,1) não pertence ao subconjunto A, uma vez que a propriedade ou a relação estabelecida não é atendida.

Generalizando as relações do exemplo anterior, poderíamos adotar a seguinte notação: **x ρ y**, (ou **x R y**), onde ρ significa a relação desejada. Algumas relações possíveis seriam: $x = y$, $x < y$, $x + 5 = y$. Agora que entendemos a noção de relações, vamos estender para a definição de uma relação binária.

DEFINIÇÃO:

Sejam dois conjuntos A e B, a relação binária de A para B é um subconjunto de A x B, isto é, um conjunto de pares ordenados de elementos de A x B.

- "x está relacionado com y": $x \rho y \rightarrow (x, y) \in \rho$
- "x não está relacionado com y": $x \rho y \rightarrow (x, y) \notin \rho$

O termo "binário" refere-se à relação entre dois conjuntos. É importante notar que os conjuntos podem ser iguais, como no caso do exemplo do conjunto de pares ordenados de S mostrado acima. Normalmente, uma relação binária é definida indicando a propriedade característica ao invés de listar os elementos.

Exemplo: dados os conjuntos A = {1,2} e B = {1,2,3}, a relação binária ρ de A para B é descrita como:

Leia atentamente, se possível mais de uma vez, a transcrição da equação acima e o que quer dizer os símbolos: **"para todo par ordenado (x, y) pertencente ao conjunto A × B, (x, y) pertence ao**

subconjunto de relação ρ, se, e somente se, a soma x + y é um número ímpar".

Agora vamos encontrar o subconjunto da relação. Primeiro temos que:

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$$

O subconjunto ρ, de A × B, que satisfaz a condição estabelecida é:

$$\rho = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$$

Agora, se considerarmos a relação:

Observaremos que ρ' se trata de um conjunto vazio, uma vez que, para os elementos de A × B, não há par ordenado (x, y) que satisfaça a condição $x - y > 5$.

As relações binárias tratam apenas da associação entre dois conjuntos. Mas podemos generalizar ainda mais a definição. Analise a seguinte definição:

Uma relação n-ária ρ ou R, para $n \geq 1$, entre os conjuntos $A_1, \ldots,$ An é um subconjunto do produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{n.}$

- Se n=1, temos que R é uma relação unária de A_1

- Se n=2, temos que R é uma relação binária entre A_1 e A_2
- Se n=3, temos que R é uma relação ternária entre A_1, A_2 e A_3

E assim sucessivamente. Observe os exemplos abaixo:

- Seja A = {1,2,3}, B = {a,b} e C = {1,4,5}. Então: {(1,a,1), (1,a,4), (3,b,5)} é uma relação ternária entre A, B e C.
- Seja A = {1,2,3,4}. Então: {(1,2), (1,3), (4,3)} é uma relação binária em A.
- Seja A = {1,2,3} e B = {a,b}. Então: {(1,a), (3,a), (3,b)} é um exemplo de uma relação binária entre A e B.

Exemplo: seja a relação C de R – R definida como:

Note que o conjunto que estamos trabalhando na relação é o conjunto dos números reais . Dessa forma, devemos encontrar o par ordenado (x,y) que satisfaça a relação.

Não, substituindo na equação percebemos que o par não pertence a C.

Sim, ao substituir vemos que pertence a C.

Podemos traçar o gráfico da relação no plano cartesiano e observar todos os pontos em que a relação é obedecida. O gráfico é mostrado na figura abaixo:

Gráfico da função $y = x^2 + 2x + 20$.

1. Outra estratégia gráfica para representar as relações é conhecido como o diagrama de setas, obtido pelo diagrama de Euler-Venn.

Considere uma relação R de um conjunto A para B, o diagrama de seta para R é obtido:

1. Desenhando uma região limitada para A com elementos no interior e o mesmo para B.
2. Para cada elemento x em A e y em B, desenha uma seta de x para y, se, e somente se, $(x, y) \in R$

Exemplo: sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 5, 7\}$ e a relação descrita abaixo:

- Temos que $S = \{(2,7), (3,5), (3,7)\}$ e o diagrama de setas da relação é mostrado na figura abaixo.

Diagrama de setas da relação S.

Os elementos dos pares ordenados podem ser ordenados de diferentes maneiras, podemos começar a classificar os tipos que podem ocorrer e com o auxílio do diagrama de setas será mais intuitivo de observar. Considere agora dois conjuntos S e T. Temos as seguintes possíveis relações:

- Relação um-pra-um (ou injetiva) se cada elemento de S e cada elemento de T aparecem apenas uma vez na relação.
- Relação um-para-vários se algum elemento de S aparece mais de uma vez no par ordenado do conjunto da relação.
- Relação vários-para-um (ou unívoca) se algum elemento de T aparece mais de uma vez no par ordenado do conjunto da relação.
- Relação vários-para-vários se pelo menos um elemento de S fizer par com mais de um elemento T e pelo menos um de T faça mais que um de S.

Observe a figura abaixo com os diagramas:

Possibilidades de configurações de relações.

Exemplos:

- Sendo S = {(5,2), (7,5), (9,2)} temos uma relação um-para-vários, uma vez que o elemento y = 2 tem relação com x = 5 e x = 9.
- Sendo S = {(1,2), (3,5), (5,7)} temos uma relação um-para-um, uma vez que não há elementos que compartilham o mesmo elemento em relações.

É importante lembrar que como estamos trabalhando com conjuntos, as operações de união, intersecção e complemento continuam podendo ser aplicadas e formar novos subconjuntos de relações.

3. Propriedades das relações

Dentre as relações possíveis de serem encontradas, as binárias aparecem com maior frequência e, dessa forma, iremos nos aprofundar um pouco mais. Uma relação binária em um dado conjunto pode ter algumas propriedades e veremos como identificamos cada uma delas.

Considere R como uma relação binária no conjunto A, temos as seguintes propriedades:

Exemplo: seja S uma relação no conjunto dos números reais , tal que tenha a seguinte propriedade:

Mostre se a propriedade é reflexiva, simétrica e transitiva.

Primeiro, vamos ler a notação matemática descrita acima. A equação nos diz para considerar um par ordenado x, y pertencente aos conjuntos dos números reais, e tal par (x, y) pertence a relação S para todo $x < y$. Vamos por tópicos verificar cada propriedade:

- Relembrando, R é reflexiva sse para todo x pertencente aos números reais, xSx. Pela definição de S, para todo x número real, $x < x$. Isso é falso uma vez que . Vamos pensar em um número… 1 não é menor do que ele mesmo. E isso se estende para todos os números reais, logo S não é reflexiva.
- Já para a simétrica, a definição nos diz que uma relação é simétrica se para todo par (x, y) real, se xSy, então ySx. Ao tentar aplicar para a propriedade de S, x e y teriam que satisfazer: $x < y$ e $y < x$. Isso é falso, uma vez que apenas uma dessas proposições pode ser verdadeira e não as duas simultaneamente. De novo, pense em um número real. $4 < 5$ mas 5
- A definição de antissimetria nos diz se os pares ordenados (x, y) e (y, x) pertencem a relação R, logo $x = y$. Para dois números arbitrários, se $x < y$, e $y < x$, só ocorre se $x = y$. Concluímos que é uma anti-simétrica.
- Por fim, vamos analisar a transitividade. Relembrando, em uma relação transitiva temos, para todo x, y, z números reais, xSy e ySx, então xSz. Aplicando na nossa relação S, teríamos que para todo x, y z: $x < y$ e $y < z$, então $x < z$. Pela ordem dos números reais, podemos notar que é uma afirmação verdadeira. Para $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$, temos: $1 < 2$, $2 < 3$, logo $1 < 3$. Isso se estende a todos os números reais, portanto S é transitiva.

Existem relações especiais em um conjunto S que possuem três propriedades principais simultaneamente, ou seja, a relação é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Para esses casos, chamamos de ordenação parcial em S. Vamos ver um exemplo desse tipo de relação:

Exemplo: considere um conjunto $S = \{0,1\}$ e a relação R descrita abaixo:

Temos que:

- R é reflexiva, uma vez que para todo x elemento de S, 0 e 1, temos que $0 \leq 0^2$ e $1 \leq 1^2$.
- R é anti-simétrica, uma vez que para todo elemento de S, temos que (0, 1) pertence a R, ou seja, $0 \leq 1^2$ e (1, 0) não pertence a R, ou seja, $1 \; 0^2$.
- R é transitiva, uma vez que para todo elemento de S temos que $0 < 1^2$.

Sendo p uma ordenação parcial em S, chamamos o par ordenado (S, p) de um conjunto parcialmente ordenado (em inglês, *poset*). Considere um caso particular de um conjunto parcialmente ordenado (S, ≤). Usaremos o símbolo de menor ou igual para denotar que se trata de um subconjunto menor ao conjunto p, por exemplo. Dessa forma, temos que as três propriedades se asseguram. Pense na relação “x divide y” é uma ordenação parcial no conjunto dos números naturais e, automaticamente, também é uma ordenação parcial num subconjunto arbitrário p’ = {1,2,4,5,15,17}.

Em conjuntos parcialmente ordenados, podemos definir duas terminologias relevantes. Seja (S, ≤) um conjunto parcialmente ordenado. Se $x < y$, então dizemos que x é predecessor de y e y é sucessor de x. Se não existir um elemento z, tal que $x < z < y$, então x é predecessor imediato de y.

Exemplo: considere a relação R “x divide y” do conjunto S = {1, 2, 4, 12}.

Temos os pares ordenados (x, y) da relação:

R = {(1,1), (2,1), (2,2), (4,2), (12,1), (12,2), (12,4), (12,12)}

- Predecessores de 4: {2, 1}, sendo {2} o predecessor imediato de 4.

4. Operações em relações binárias

Banco de dados é uma importante ferramenta de organização de grandes informações e dados estruturados. Grandes empresas utilizam banco de dados para guardar e, principalmente, consultar informações que são relevantes para o negócio, como por exemplo alguma ação de marketing, análise de estratégias e incidentes. Na tarefa de estruturar um banco de dados é necessário identificar as principais características da empresa e modelar um banco que satisfaz os requisitos de negócio.

Exemplo:

Uma escola deseja construir um banco de dados de cadastro de professores e as disciplinas que eles estão aptos a ministrar. Primeiramente é feito uma estrutura que abarque as relações que podem existir no banco. Observe a figura abaixo do modelo criado.

Diagrama conceitual da estrutura do banco de dados a ser criado.

O diagrama apresentado é conhecido como Diagrama Entidade Relacionamento (ER) e conceitualiza o modelo ER. Ele traz informações dos objetos de interesse envolvidos, suas características e como se relacionam. No caso da escola, professor e disciplina são os objetos ou **entidades**. Professores possuem os **atributos** nome, formação e cidade, já a disciplina possui nome, carga horária e curso. Além disso, o diagrama nos mostra que um professor **ministra** N disciplinas. Isso demonstra uma relação binária entre professor X disciplinas, podemos considerar professor e disciplinas como conjuntos. Em outras palavras, podemos obter os pares ordenados (professor, disciplina) da relação.

Um outro modelo possível de representar é chamado de modelo relacional, que pode ser desenvolvido do modelo ER. As relações agora são apresentadas em forma de tabelas que formam um banco de dados relacional com uma coleção dessas tabelas.

Cada linha da tabela contém os atributos de um conjunto de entidades. Uma tabela relacional é entendida como um conjunto de n-linhas e uma linha individual é chamada de tupla. No ponto de vista da matemática, uma relação de um banco de dados pode ser pensada como uma relação n-ária de subconjuntos de entidades e seus atributos.

A tabela abaixo apresenta uma ocorrência possível de utilização do banco de dados para a entidade professor. Um dos atributos pode ser utilizado para identificar, de forma única, cada tupla, como por exemplo, caso não houvesse nomes duplicados no banco, o atributo nome poderia ser uma opção. Esse subconjunto é chamado de **chave primária** da relação.

As relações entre as entidades e seus atributos podem ser obtidas por meio de **chaves estrangeiras**. Supondo que nome de professor e nome de disciplina são chaves primárias das entidades. A chave estrangeira aponta para a chave primária das tabelas, criando uma relação entre elas ou uma única tabela. Podemos fazer o relacionamento de ministra da seguinte forma, como mostrado na tabela abaixo:

Na tabela de ministra temos o atributo nome-disciplina como chave estrangeira da relação disciplina. Fazendo a combinação formamos uma nova tabela professor-disciplina. Veja abaixo o resultado:

Podemos realizar operações com as relações que construímos e visualizar em novas tabelas. As primeiras são operações unárias, conhecidas como *select* (seleciona) e *project* (projeta). A *select* cria uma nova tabela composta pelas linhas da tabela original que obedecem a uma propriedade. Já a *project* cria uma nova tabela composta por colunas da tabela original. Vamos ao exemplo:

Select Professor-Ministra *Where* carga horária = 20 *giving* Disciplina-Ministra

A operação *Where* define uma restrição, podemos entender como se fosse um filtro aplicado na tabela de interesse que queremos obter as informações. O *giving* (dando, em inglês) nos informa a relação desejada.

Project professor *over* (carga horária, curso) *giving* disponibilidade

VALE A PENA ASSISTIR!

5. Conclusão

Neste tópico vimos uma nova forma de olhar para os conjuntos por meio de suas relações. Definimos propriedades e conceitos importantes que nos permitem trabalhar com elementos de conjuntos e suas conexões.

As relações binárias aparecem em uma grande parcela de tópicos da matemática. Podemos definir as mais diversas funções e aplicar em diversos tipos de estudos. Estendemos as relações por meio da definição da relação n-ária, que abrange o conceito para n conjuntos, formando subconjuntos de seu produto cartesiano.

Vimos que por meio do diagrama de setas conseguimos visualizar melhor os diferentes tipos de relações: um-pra-um, um-para-vários, vários-para-um e vários-para-vários. Em seguida, observamos as quatro propriedades fundamentais das relações, a reflexividade, a simetria e a anti-simetria e a transitividade, que permitem classificar a relação que desejamos trabalhar.

Por fim, aplicamos as relações por meio da ideia de banco de dados, utilizando operações que permitem filtrar e criar novas tabelas que buscam informações relevantes desejadas.

6. Referências

YouTube. 2021. Bora passar. Função – Produto Cartesiano 10min12. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=J736CiHdCsA&t=539s >

GERSTING, Judith L.. Mathematical Structures for Computer Science. 5a edição. Hawai: Michelle Russell Juillet, 2003.

GRAHAM, Ronald L. KNUTH, Donald E.; PATASHNIK, Oren. Matemática concreta: fundamentos para a ciência da computação. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica. 5. ed. São Paulo, SP: Atual, 1999. 440 p. ISBN 85-7056-411-2.

GIOVANNI, J. R. BONJORNO, J. R. Matemática Completa. São Paulo: FTD, 2005.

ORACLE. Oracle [S. I.]. Bancos de Dados definidos. Disponível em: <https://www.oracle.com/br/database/what-is-database/>.

Parabéns, esta aula foi concluída!

O que achou do conteúdo estudado?

Péssimo Ruim Normal Bom Excelente

Deixe aqui seu comentário

Mínimo de caracteres: 0/150

Enviar