Tópico 02

Matemática para Computação

Operações com conjuntos

1. Introdução

Muitas vezes, quando falamos em operações, lembramo-nos das operações binárias básicas da matemática com os números, como a adição, subtração, multiplicação e divisão. Estamos em contato diariamente com tais operações. Mas veremos nesta lição como podemos realizar operações similares utilizando conjuntos para resolver determinados problemas que podem aparecer quando lidamos com qualquer grupo ou agrupamento de elementos.

Vamos supor que sua empresa está desenvolvendo uma nova versão de um *software* e, antes de seu lançamento, foi feita uma pesquisa com seus clientes frequentes para determinar qual sistema operacional é utilizado por eles. Foram coletadas respostas de 1130 usuários e, após a contagem, obteve-se o seguinte resultado:

- Grupo A – 800 usuários utilizam Windows
- Grupo B – 350 usuários utilizam Linux
- Grupo C – 160 usuários utilizam Mac
- 50 usuários acessam Windows e Mac
- 120 usuários acessam Windows e Linux
- 13 usuários acessam Mac e Linux

Observe que se simplesmente somarmos todos os usuários acima obtemos mais de 1130, uma vez que há usuários que pertencem a dois grupos simultaneamente, como os 50 que utilizam Windows e Mac, isto é, eles estão tanto no Grupo A quanto no Grupo C.

A equipe de marketing da empresa deseja fazer um lançamento especial para os clientes que utilizam os três sistemas operacionais. Como poderíamos determinar a quantidade desse tipo específico de clientes? Esse seria um problema clássico de operações com conjuntos de elementos e veremos mais adiante estratégias e caminhos para soluções.

Sistemas Operacionais: Windowns, MacOS e Linux.

Uma das grandes ferramentas que auxiliam na interpretação de problemas de conjuntos é a representação gráfica por Diagrama de Euler-Venn, proposto formalmente pelo matemático inglês John Venn (1834 – 1923). O nome também traz referência do matemático Leonhard Euler (1707 – 1783), uma vez que há registros em que ele utilizava a mesma estratégia em seus estudos.

O diagrama consiste em representar conjuntos como uma curva fechada e seus elementos em seu interior, isto é, dentro da região limitada pelas bordas do círculo. A relação entre conjuntos também é obtida com a sobreposição dos círculos.

Exemplo:

Podemos observar na imagem abaixo dois exemplos básicos de uso do diagrama. No círculo à esquerda, podemos ver o conjunto único A que contém os estados do Sudeste no Brasil. Já nos círculos à direita, vemos a relação entre os dois conjuntos B e C, descritos por listagem abaixo:

- B = {0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11}
- C = {0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12}

Observe que os números representados no meio formam um conjunto de elementos em roxo que pertencem tanto ao conjunto B quanto ao conjunto C, definiremos este conjunto adiante.

Exemplos de uso de Diagramas de Euler-Venn

2. Operações em conjuntos

Vamos considerar agora um conjunto numérico S = N, ou seja, S é o conjunto dos números naturais. Podemos definir operações binárias e unárias em conjunto de partes de P(S) e assim chamamos o conjunto S de conjunto universal ou universo de discurso.

Uma operação binária em *P*(S) consiste na relação entre dois subconjuntos de S, que produz um novo subconjunto de S. Vamos para um exemplo intuitivo:

Pense na sua escola do ensino médio e o conjunto S como sendo todos os estudantes matriculados. Logo, os elementos de *P*(S) contêm os conjuntos dos estudantes, sendo A um subconjunto de P(S) dos estudantes do 1° ano matutino e B os estudantes do 1° ano vespertino. Podemos pensar em um novo conjunto C com todos os estudantes do 1° ano, independentemente do turno. Esse novo conjunto C é conhecido como a união de A e B. Indo adiante, podemos pensar também em um conjunto D que contém os estudantes do turno integral, que estão matriculados em disciplinas tanto do turno matutino quanto do turno vespertino. Tal conjunto é chamado de interseção de A e B.

Como ficaria o diagrama de Euler-Venn para esse caso?

Veja na imagem a abaixo:

Diagrama de Euler-Venn dos conjuntos de estudantes, união e interseção.

Note que o retângulo externo em roxo S representa o conjunto universo, isto é, no caso da escola, todos os alunos matriculados.

Agora que temos uma noção intuitiva, podemos definir matematicamente as duas primeiras operações com conjuntos.

DEFINIÇÕES: Seja S um conjunto universo, e *P*(S) o conjunto das partes de S. Considere A e B $\in$ *P*(S).

- **UNIÃO**: Definimos a união dos conjuntos A e B como o conjunto com propriedade característica: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ **ou** $x \in B\}$
- **INTERSEÇÃO:** A interseção dos conjuntos A e B é obtida pelo conjunto $A \cap B = \{x \mid x \in A$ **e** $x \in B\}$

Note que na união usa-se como conector a palavra **OU** (em inglês, OR) e, na interseção, **E** (em inglês, AND). Tais **operadores** fazem parte diariamente na vida profissional de programadores na construção de regras e condições nos algoritmos.

Vamos tentar aplicar tais definições em um conjunto de números naturais.

Vale a pena assistir!

Exemplo:

Vamos considerar que o conjunto universo S, ou seja, S = N. Observe os quatro conjuntos mostrados a seguir pela listagem de seus elementos:

- A = {1, 4, 6, 7, 10, 20, 52}
- B = {2, 4, 5, 20, 45, 52, 102}
- C = {0, 20, 40, 50, 60, 70, 80}
- D = {45, 52, 102}

Primeiro, observe que os conjuntos acima são elementos do conjunto de partes P(S). Podemos agora estabelecer as operações binárias entre dois conjuntos distintos, observe:

A união entre A e B é um conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou B.

- A U B = {1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 20, 45, 52}

A interseção entre A e B é um conjunto formado pelos elementos pertencentes a A e simultaneamente a B também.

- A ∩ B = {4, 20, 52}

Equivalente para as demais possibilidades, temos:

- A U C = {0, 1, 4, 6, 7, 10, 20, 40, 50, 52, 60, 70, 80}
- A ∩ C = {20}
- B U D = {2, 4, 5, 20, 45, 52, 102}
- B ∩ D = {45, 52, 102} = D
- C ∩ D = { }

Observe que a interseção entre B e D é o próprio conjunto D! Isso ocorreu uma vez que todos os elementos de D pertencem ao conjunto B, os quais, matematicamente, podemos escrever:

- B U D = D ⇔ D ⊂ B

O conjunto D está contido em B! Veja como essa situação é representada pelo diagrama de Euler-Venn:

Diagrama dos conjuntos B e D.

Sendo S o conjunto universo que, no nosso exemplo, é tido como o conjunto numérico dos naturais.

Repare também que não há elementos que pertencem a ambos os conjuntos C e D. Portanto, a interseção é o conjunto vazio. Quando dois conjuntos quaisquer não possuem elementos em seu conjunto interseção, chamamos de **conjuntos disjuntos**, como o caso de C ∩ D.

Tente construir outras relações com os conjuntos acima. Por exemplo, como ficaria A ∩ D, B U C…? Construa o diagrama de Euler-Venn.

Outra operação binária relevante de ser estudada se trata de quando queremos determinar os elementos que pertencem a um conjunto A e não pertencem ao conjunto B. Em outras palavras, queremos visualizar os elementos diferentes entre dois conjuntos. Dessa forma, temos:

DEFINIÇÃO: Seja um conjunto A, B $\in$ *P*(S). O conjunto formado a partir da diferença entre A e B é obtido pela propriedade característica:

- $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$

Veja o exemplo anterior em que $A = \{1, 4, 6, 7, 10, 20, 52\}$ e $B = \{2, 4, 5, 20, 45, 52, 102\}$. Logo, temos:

- $A - B = \{1, 6, 7, 10\}$

Na representação do diagrama, teríamos:

Diagrama da diferença dos conjuntos A e B.

Assim como para as operações unárias em números, relembre alguns exemplos:

• Raiz quadrada: $\sqrt{4}=2$

• Potenciação: $3^2=9$

• Módulo: |-7|=7

• Trigonometria: cos(60)=0,5

• Fatorial: 6!

Também podemos realizar tais tipos de operações em conjuntos. Vamos ver o conceito de conjunto complementar. Considere ainda o conjunto universo S = N. Veja a definição a seguir:

DEFINIÇÃO: Seja um conjunto A ∈ *P*(S), conhecemos como conjunto complementar de A os elementos pertencentes ao conjunto S que não pertencem a A. As representações possíveis para essa operação são dadas por:

Retomando o nosso primeiro exemplo apresentado na Introdução, sendo S o conjunto de todos os alunos matriculados na escola e A o conjunto da turma do 1° ano do turno matutino, o **complemento de A** consistiria em todos os outros estudantes que não fazem nenhuma disciplina na turma do 1° ano matutino.

Pense em como poderíamos representar conjuntos complementares pelo diagrama de Euler-Venn. Tente desenhar.

Exemplo:

Seja o conjunto universo definido pela propriedade característica:

- $S = \{x \mid x \in Z \text{ e } -10 \leq x \leq 10\}$

E três subconjuntos representados pela listagem de seus elementos por:

- A = { -4, -1, 0, 1, 4}
- B = {-10, 0, 1, 10}
- C = {-4, -3, -2, -1, 2, 3, 4}

Vamos realizar as operações estudadas e verificar as aplicações das definições. Primeiro, para os conjuntos A e B temos como operações binárias:

- A U B = {-10, -4, -1, 0, 1, 4, 10}
- A ∩ B = {0, 1}
- A – B = {-4, -1, 4}
- B – A = {-10, 10}

Para os conjuntos B e C, temos como operações binárias:

- B U C = {-10, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 10}
- B ∩ C = Ø
- B – C = {-10, 0, 1, 10} = B
- C – B = {-4, -3, -2, -1, 2, 3, 4} = C

Para os conjuntos A e C, temos como operações binárias:

- A U C = {-4, -3, -2,-1, 0, 1, 2, 3, 4}
- A ∩ C = {-4, -1, 4}
- A – C = {0, 1}
- C – A = {-3, -2, 2, 3}

Para a operação unária de complemento, temos:

A = {-10, -9, -8, -7, -6, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
B = (-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2,-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
C = {-10, -9, -8, -7, -6, -5, O, 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Também é possível combinar operações. Veja os exemplos abaixo:

- $A \cap (A - C) = \emptyset$

- $(C - A) \cup (B - C) = \{-10, -3, -2, 0, 1, 2, 3\}$

Exemplo:

Questão do ENEM 2020

Vale a pena assistir!

Diagrama de Venn – Operações com conjuntos

Resolução:

Essa é uma típica questão que envolve as operações mais elementares de união e interseção de conjuntos vistas anteriormente. Vamos tentar resolvê-la primeiro construindo as equações matemáticas descritas no enunciado e depois desenhando o Diagrama de Euler-Venn. Podemos definir:

- Conjunto A → Pessoas que possuem antígeno A;
- Conjunto B → Pessoas que possuem antígeno B;
- Interseção entre A e B, isto é, $A \cap B$, à Pessoas que possuem tanto o antígeno A quanto o B (grupo sanguíneo AB)
- Complemento da união dos conjuntos A e B, $(A \cup B)^C$ à Pessoas que não possuem nenhum dos dois antígenos (grupo sanguíneo O)

O problema nos pergunta quantas pessoas possuem apenas o antígeno A. As 100 amostras coletadas que possuem o antígeno A contêm também as pessoas que possuem o antígeno B (tipo sanguíneo AB). O desafio principal é descobrir a quantidade dessas pessoas e retirar desses 100.

Como não sabemos quantas pessoas possuem os dois antígenos, vamos atribuir a variável x. Essa variável representa a interseção entre os dois conjuntos A e B. As equações do nosso problema ficam:

- x → Pessoas que possuem antígeno A e B.

- 100 – x → Pessoas que possuem apenas o antígeno A.
- 110 – x → Pessoas que possuem apenas o antígeno B.
- 20 → Pessoas que não possuem nenhum dos dois antígenos.

Para melhor visualização, desenhamos o diagrama de Euler-Venn mostrado abaixo:

: Diagrama de Euler-Venn grupos sanguíneos. Conjunto A de pessoas com antígeno A, conjunto B com pessoas que possuem antígeno B e conjunto externo pessoas que não possuem nenhum dos dois antígenos.

Como o total de pessoas entrevistadas foi de 200, podemos formar a equação:

$(100 – x) + x + (110 – x) + 20 = 200$

$100 + 110 – x + 20 = 200$

$230 – x = 200$

$x = 30$

Assim, conhecido o número de pessoas que possuem os dois antígenos, basta diminuir do grupo que possuem o antígeno A.

100 – 30 = 70.

Dessa forma, 70 pessoas são do grupo sanguíneo A. Logo, a resposta é a letra C.
A última operação binária de conjuntos que veremos utiliza o conceito de pares ordenados, relembre:

• Par ordenado (a, b) é um par de números em que a ordem é significante e que podem ser representados no plano cartesiano por meio de coordenadas.
o $(-1, 0) \neq (0, -1)$
o $(a, b) = (c, d)$, se e somente se $a = c$ e $b = d$

Considere dois conjuntos numéricos A e B arbitrários. O produto cartesiano entre dois números nada mais é que o conjunto de todos os pares ordenados, sendo que o primeiro elemento pertence ao conjunto A e o segundo elemento pertence ao conjunto B. Leia atentamente a definição formal a seguir:

DEFINIÇÃO: Seja um conjunto $A, B \in P(S)$ e x e y dois elementos de A e B respectivamente. O produto cartesiano de A e B é representado por $A \times B$, é definido por:

• $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$

O produto cartesiano não é considerado uma operação binária, uma vez que o conjunto resultante da operação frequentemente não é necessariamente um subconjunto do conjunto universo S. Uma propriedade necessária para que uma operação seja considerada binária.

Uma simplificação utilizada nos estudos e necessária atenção para não confundir com a potenciação é obtida escrevendo:

• $A \times A = A^2$

Veremos a aplicação em alguns exemplos.

Exemplos:

Considere dois conjuntos A = {0, 1} e B = {4, 5}

- $A \times B = \{(0, 4), (0, 5), (1, 4), (1, 5)\}$
- $B \times A = \{(4, 0), (5, 0), (4, 1), (5, 1)\}$
- $A^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
- $B^2 = \{(4,4), (4,5), (5,4), (5,5)\}$

Observe que $A \times B \neq B \times A$, uma vez que para pares ordenados a ordem dos elementos dos conjuntos em questão é de suma importância.

3. Propriedades das Operações de Conjuntos

Agora que conhecemos as operações binárias e unárias que agem sobre os conjuntos, podemos avançar nossos estudos estabelecendo algumas propriedades importantes dessas operações.

Para todos os exemplos listados, considere novamente três conjuntos A, B e C arbitrários com o conjunto universo S e suas operações apresentadas nas sessões anteriores.

1. Comutativa:

- $A \cup B = B \cup A$

2. Associativa

• (A U B) U C = A U (B U C)

• (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

3. Distributiva

• A U (B ∩ C)=(A U B) ∩ (A U C)

• A ∩ (B U C)=(A ∩ B) U (A ∩ C)

4. Identidade

• A U Ø = A

• A ∩ S=A

5. Complemento

• A U A = S

• A ∩ = Ø

Podemos provar cada uma delas utilizando a definição que a constitui. Iremos ver alguns exemplos:

Para realizar esses tipos de provas matemáticas, é necessária uma generalização dos casos para que não haja lacunas na prova. Usualmente, consideramos um elemento x qualquer pertencente aos conjuntos.

1. A primeira propriedade é direta e podemos escrever:

Vamos supor que o conjunto F é dado pela união de A U B e x sendo um elemento qualquer de F.

• x ∈ F → x ∈ (A U B)

Pela propriedade da união, se x é um elemento da união de A e B, ele deve pertencer a A ou B.

• x ∈ (A U B) → (x ∈ A) ou (x ∈ B)

A ordem nesse caso é irrelevante, uma vez que o elemento de x deve estar em A e B ou B e A… Se o x pertence a F, ele necessariamente deve estar em algum dos dois conjuntos.

- $(x \in A)$ ou $(x \in B) = (x \in B)$ ou $(x \in A)$
- $B \cup A = A \cup B$

Além das propriedades apresentadas acima, duas importantes leis foram provadas pelo matemático inglês Augustus De Morgan (1806-1871) e são conhecidas como Leis de Morgan. São muito utilizadas em questões que envolvem raciocínio lógico e eletrônica digital, que é estendida para a Teoria de Conjuntos.

Considerando os conjuntos A e B, temos:

1 – O complemento da união é igual à interseção dos complementos de dois conjuntos:

- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

2 – O complemento da interseção é igual à união dos seus complementares:

- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Vale a pena assistir!

4. Conclusão

Vimos nesta lição uma importante parte da Teoria dos Conjuntos. Como os números ordinários, os conjuntos também atuam sobre diferentes tipos de operações. Tais operações são ferramentas úteis para resoluções de problemas que envolvem grupos de elementos e relações entre eles.

Começamos pelo exemplo intuitivo da escola, em que as turmas do 1° ano do matutino e vespertino podem ser representadas como dois conjuntos distintos, e que sua união constitui-se em todos os alunos do 1° ano, e sua interseção, os alunos que estão matriculados nos dois turnos (integral). Em seguida, foi mostrada a definição matemática de como essas operações binárias são trabalhadas.

Avançamos nossos estudos para outros tipos de operações, como de complemento, diferença e produto cartesiano. O diagrama de Euler-Venn é um tipo de representação que em muitos casos nos auxilia a visualizar melhor esses tipos de operações.

As propriedades das operações apresentadas são ferramentas relevantes que também irão nos ajudar a traçar meios de simplificações e estratégias de resoluções de problemas reais.

5. Referências

GERSTING, Judith L. Mathematical Structures for Computer Science. 5a edição. Hawai: Michelle Russel Julet, 2003.

GRAHAM, Ronald L.; KNUTH, Donald E.; PATASHNIK, Oren. Matemática concreta: fundamentos para a ciência da computação. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica. 5. ed. São Paulo, SP: Atual, 1999. 440 p. ISBN 85-7056-411-2.

YouTube. (2021). Portal da Matemática OBMEP. Diagrama de Venn. 12min49. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=hL5lBfSsPoc>.

Parabéns, esta aula foi concluída!

O que achou do conteúdo estudado?

Péssimo Ruim Normal Bom Excelente

Deixe aqui seu comentário

Mínimo de caracteres: 0/150

Enviar