Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт по лабораторной работе №2 по курсу

«Математическая статистика»

Тема Интвервальные оценки.

Студент Сироткина П.Ю.

Номер варианта 12

Группа ИУ7-66Б

Преподаватель Андреева Т.В.

Оценка ______________

Москва — 2022 г.

Лабораторная работа №2

1. Цель работы

Построение доверительных интервалов для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

2. Содержание работы

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ:
   - Вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x_n})$ и $S^2(\vec{x_n})$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;
   - Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x_n})$, $\overline{\mu}(\vec{x_n})$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;
   - Вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x_n})$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x_n})$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX.
2. Вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;
3. Для заданного пользователем уровня доверия γ и N - объема выборки из индивидуального варианта:
   - На координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема выборки, где n изменяется от 1 до N.
   - На другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема выборки, где n изменяется от 1 до N.

3. Теоретические сведения

Формулы для вычисления некоторых требуемых величин:

- Выборочное среднее: $\hat{\mu}(\vec{x}) = \overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$;
- Выборочная дисперсия: $S^2(\vec{x}) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$.

Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть дана случайная величина X, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Интервальной оценкой параметра θ уровня γ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$, таких, что $P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}); \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$.

$\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X}))\}$ называют верхней и нижней границами интервальной оценки соответственно.

γ-доверительным интервалом для параметра θ называют реализацию (выборочное значение) интервальной оценки уровня γ для этого параметра, т.е. интервал вида $(\underline{\theta}(\vec{X}); \overline{\theta}(\vec{X}))$ с детерминированными границами.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания:

$$\underline{\mu}(\vec{x_n}) = \overline{x} - \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{\mu}(\vec{x_n}) = \overline{x} + \frac{S(\vec{x}) \cdot t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}$$

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии:

$$\underline{\sigma}(\vec{x_n}) = \frac{(n-1) \cdot S^2(\vec{x})}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}$$

$$\overline{\sigma}(\vec{x_n}) = \frac{(n-1) \cdot S^2(\vec{x})}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}$$

Обозначения:

- $\overline{x}$ - точечная оценка математического ожидания;
- $S^2(\vec{x})$ - исправленная точечная оценка дисперсии;
- n - объем выборки;
- γ - уровень доверия;
- t_α - квантиль уровня α распределения Стьюдента с n - 1 степенями свободы (St(n-1));
- h_α - квантиль уровня α распределения Хи-квадрат с n - 1 степенями свободы ($\chi^2(n-1)$).

4. Текст программы

```
function main()
    pkg load statistics
    X = [11.89, 9.60,  9.29,  10.06, 9.50,  8.93,  9.58,  6.81,  8.69,...
         9.62,  9.01,  10.59, 10.50, 11.53, 9.94,  8.84,  8.91,  6.90,...
         9.76,  7.09,  11.29, 11.25, 10.84, 10.76, 7.42,  8.49,  10.10,...
         8.79,  11.87, 8.77,  9.43,  12.41, 9.75,  8.53,  9.72,  9.45,...
         7.20,  9.23,  8.93,  9.15,  10.19, 9.57,  11.09, 9.97,  8.81,...
         10.73, 9.57,  8.53,  9.21,  10.08, 9.10,  11.03, 10.10, 9.47,...
         9.72,  9.60,  8.21,  7.78,  10.21, 8.99,  9.14,  8.60,  9.14,...
         10.95, 9.33,  9.98,  9.09,  10.35, 8.61,  9.35,  10.04, 7.85,...
         9.64,  9.99,  9.65,  10.89, 9.08,  8.60,  7.56,  9.27,  10.33,...
         10.09, 8.51,  9.86,  9.24,  9.63,  8.67,  8.85,  11.57, 9.85,...
         9.27,  9.69,  10.90, 8.84,  11.10, 8.19,  9.26,  9.93,  10.15,...
         8.42,  9.36,  9.93,  9.11,  9.07,  7.21,  8.22,  9.08,  8.88,...
         8.71,  9.93,  12.04, 10.41, 10.80, 7.17,  9.00,  9.46,  10.42,...
         10.43, 8.38,  9.01]

    % Уровень доверия
    gamma = 0.9;
    %gamma = input('Введите уровень доверия: ')
    % Объем выборки
    N = length(X);
    % Точечная оценка мат. ожидания
    M = mean(X);
    % Точечная оценка дисперсии
    S2 = var(X);
    % Нижняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
    M_low = find_m_low(N, M, S2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для мат. ожидания
    M_high = find_m_high(N, M, S2, gamma);
    % Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии
    S2_low = find_S2_low(N, S2, gamma);
    % Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии
    S2_high = find_S2_high(N, S2, gamma);

    % Вывод полученных ранее значений
    fprintf('Точечная оценка математического ожидания = %.3f\n', M);
    fprintf('Точечная оценка дисперсии = %.3f\n', S2);
    fprintf('Нижняя граница доверительного интервала для математического ожидания = %.3f\n', M_low);
    fprintf('Верхняя граница доверительного интервала для математического ожидания = %.3f\n', M_high);
    fprintf('Нижняя граница доверительного интервала для дисперсии = %.3f\n', S2_low);
    fprintf('Верхняя граница доверительного интервала для дисперсии = %.3f\n', S2_high);

```

```
    % Массив точечных оценок для математического ожидания
    M_array = zeros(1, N)
    % Массив точечных оценок для дисперсии
    S2_array = zeros(1, N)
    % Массивы для нижних и верхних границ для математического ожидания
    M_low_array = zeros(1, N)
    M_high_array = zeros(1, N)
    % Массивы для нижних и верхних границ для дисперсии
    S2_low_array = zeros(1, N)
    S2_high_array = zeros(1, N)

    for i = 1 : N
    temp_m = mean(X(1:i));
    temp_s2 = var(X(1:i));
    M_array(i) = temp_m;
    S2_array(i) = temp_s2;
    M_low_array(i) = find_m_low(i, temp_m, temp_s2, gamma);
    M_high_array(i) = find_m_high(i, temp_m, temp_s2, gamma);
    S2_low_array(i) = find_S2_low(i, temp_s2, gamma);
    S2_high_array(i) = find_S2_high(i, temp_s2, gamma);
    end

    % Построение графиков
    plot(1 : N, [(zeros(1, N) + M)', M_array', M_low_array', M_high_array']);
    xlabel('n');
    ylabel('y');
    legend('f1', 'f2', 'f3', 'f4');

    figure;

    plot(1 : N, [(zeros(1, N) + S2)', S2_array', S2_low_array', S2_high_array']);
    xlabel('n');
    ylabel('z');
    legend('g1', 'g2', 'g3', 'g4');
end

% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для математического ожидания
function M_low = find_m_low(N, M, S2, gamma)
  M_low = M - sqrt(S2) * tinv((1 + gamma) / 2, N - 1) / sqrt(N);
end
% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для математического ожидания
function M_high = find_m_high(N, M, S2, gamma)
  M_high = M + sqrt(S2) * tinv((1 + gamma) / 2, N - 1) / sqrt(N);
end
% Функция поиска нижней границы доверительного интервала для дисперсии
function S2_low = find_S2_low(N, S2, gamma)
```

```
  S2_low = ((N - 1) * S2) / chi2inv((1 + gamma) / 2, N - 1);
end
% Функция поиска верхней границы доверительного интервала для дисперсии
function S2_high = find_S2_high(N, S2, gamma)
  S2_high = ((N - 1) * S2) / chi2inv((1 - gamma) / 2, N - 1);
end
```

5. Результат расчетов и графики для выборки из индивидуального варианта (при построении графиков принять $\gamma = 0.9$)

- $\hat{\mu}(\vec{x}_n) = 9.487$;
- $S^2(\vec{x}_n) = 1.217$;
- $\underline{\mu}(\vec{x}_n) = 9.320$;
- $\overline{\mu}(\vec{x}_n) = 9.654$
- $\underline{\sigma}(\vec{x}_n) = 0.996$;
- $\overline{\sigma}(\vec{x}_n) = 1.528$

Обозначения на графиках:

- f1: $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$;
- f2: $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$;
- f3: $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$;
- f4: $y(n) = \mu(\vec{x}_n)$;

- g1: $z(n) = S^2(\vec{x}_N)$;
- g2: $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$;
- g3: $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$;
- g4: $z(n) = \sigma^2(\vec{x}_n)$.

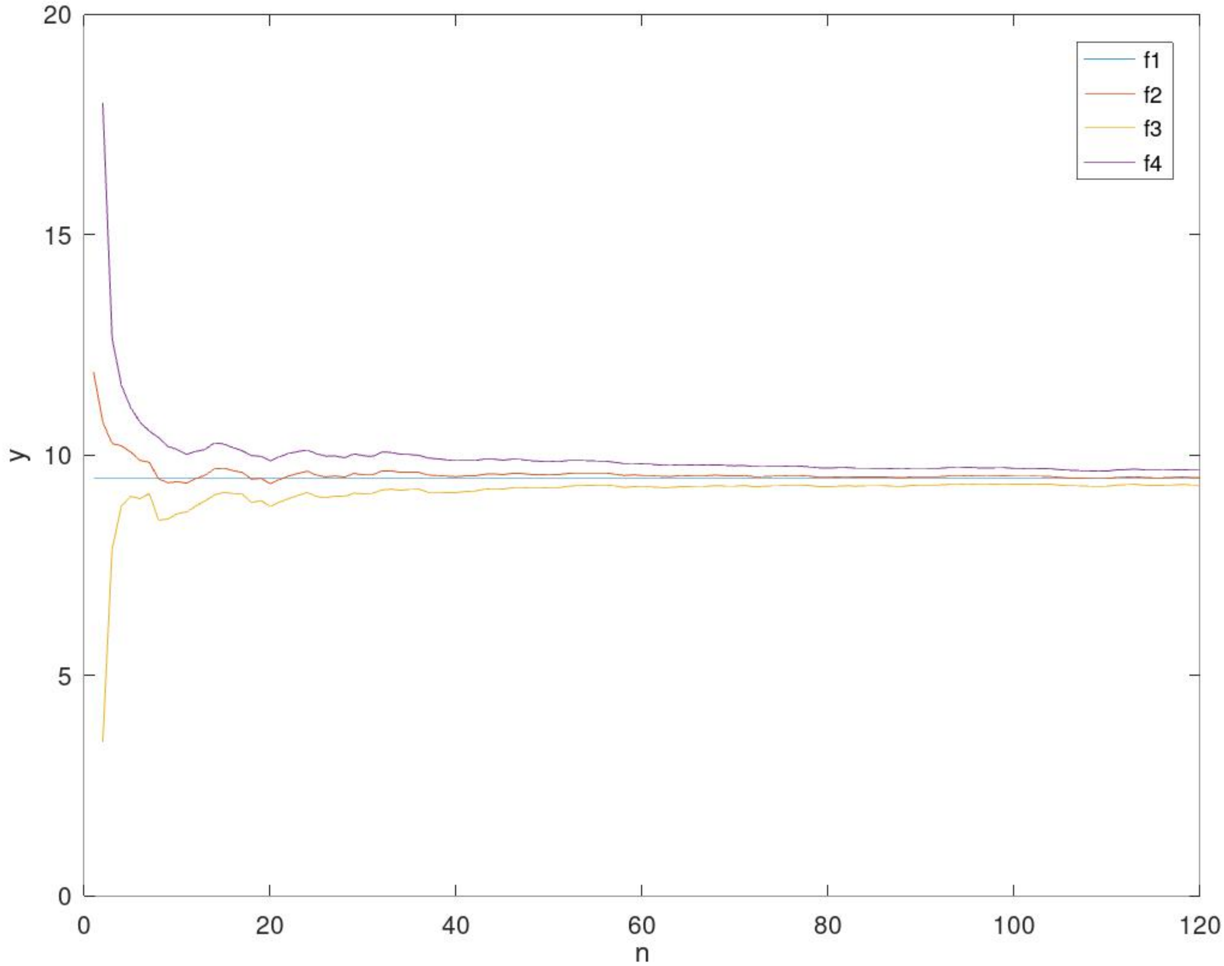

Рис. 1: Прямая $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графики функций $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \mu(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

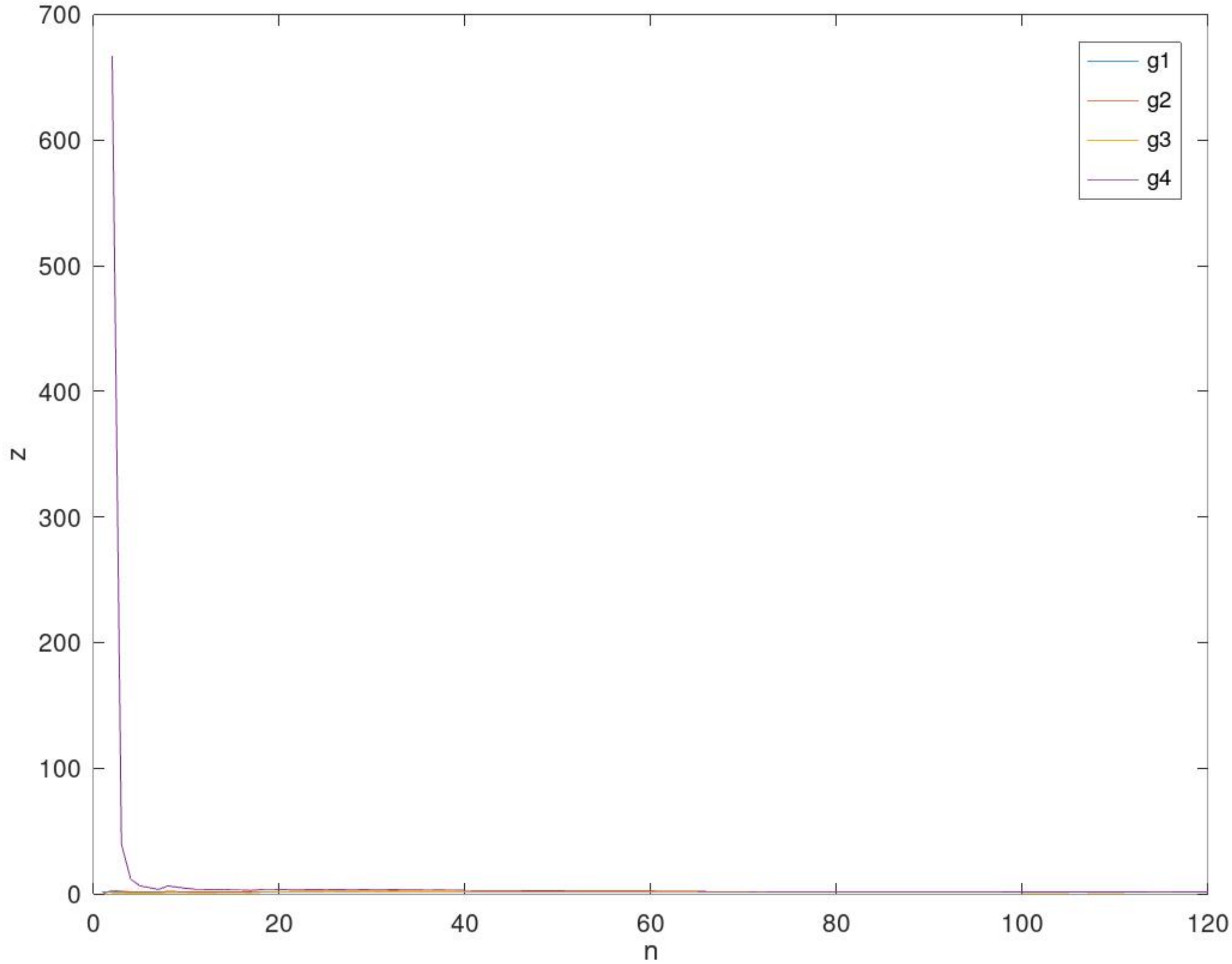

Рис. 2: Прямая $z(n) = S^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \sigma^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

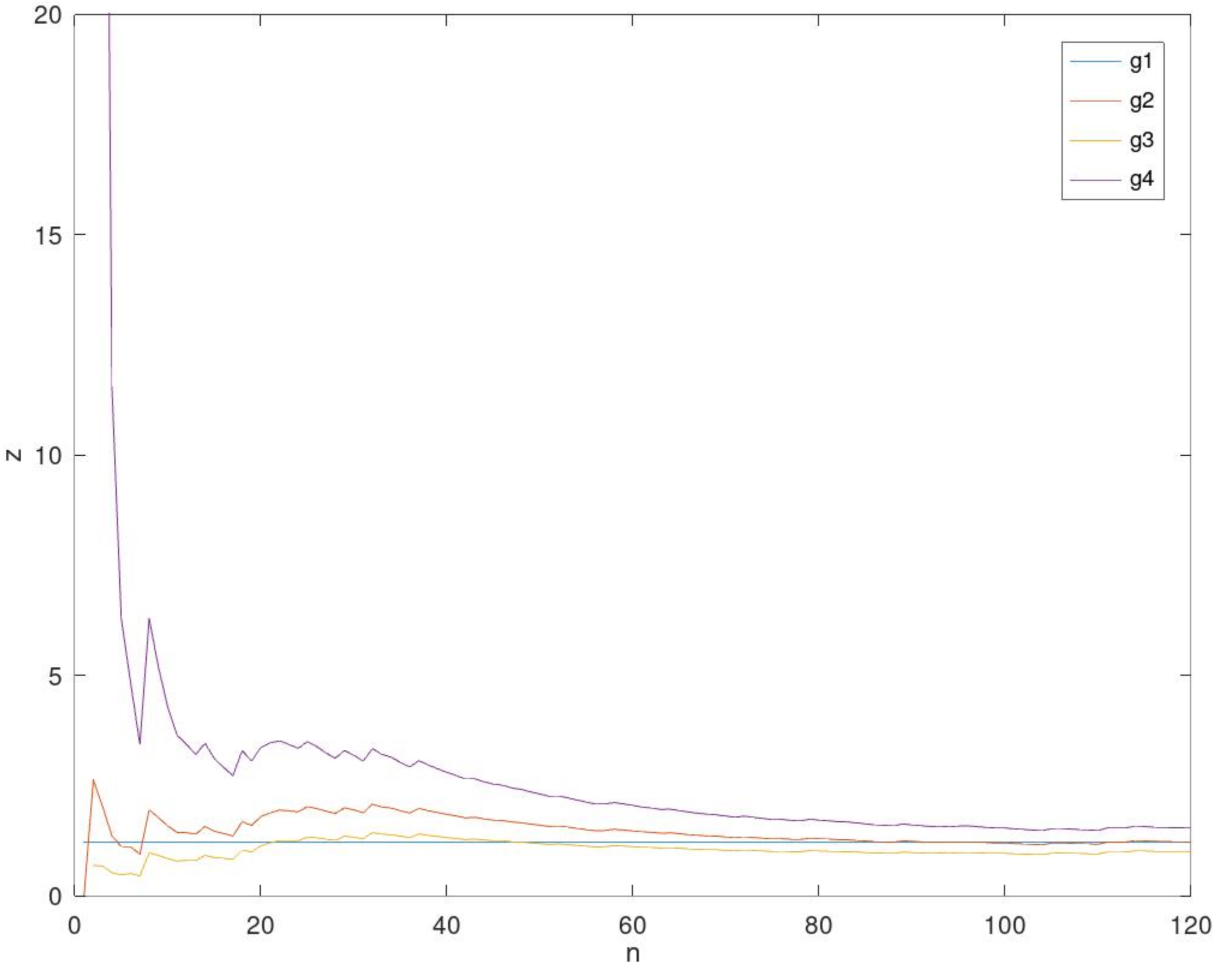

Рис. 3: Прямая $z(n) = S^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \sigma^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N (приближенный к началу координат график)