

DAY 3

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦੋਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਣ।

ਜੇ α ਅਤੇ β ਦੋਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ ਹਨ ਤਾਂ

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 - Sx + P$$

ਜਿੱਥੇ $S =$ ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= \alpha + \beta$ & $P =$ ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ $= \alpha\beta$

1. ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ:

- (i) 3, 1 (ii) -5, 2 (iii) -2, -3 (iv) $5, \sqrt{3}$ (v) 4, -1

ਹੱਲ:- (i) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{aligned} \text{ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ} &= x^2 - (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ})x + (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ}) \\ &= x^2 - (3 + 1)x + 3 \times 1 = x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

(ii) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{aligned} \text{ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ} &= x^2 - (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ})x + (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ}) \\ &= x^2 - (-5 + 2)x + (-5) \times 2 = x^2 + 3x - 10 \end{aligned}$$

(iii) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{aligned} \text{ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ} &= x^2 - (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ})x + (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ}) \\ &= x^2 - (-2 - 3)x + (-2) \times (-3) = x^2 + 5x + 6 \end{aligned}$$

(iv) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{aligned} \text{ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ} &= x^2 - (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ})x + (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ}) \\ &= x^2 - (5 + \sqrt{3})x + 5 \times \sqrt{3} = x^2 - (5 + \sqrt{3})x + 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

(v) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{aligned} \text{ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ} &= x^2 - (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ})x + (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ}) \\ &= x^2 - (4 + (-1))x + 4 \times (-1) = x^2 - 3x - 4 \end{aligned}$$

2. ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ:-

- (i) 3, -4 (ii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $\sqrt{3}, 4$ (iv) -2, -5 (v) $\frac{-2}{3}, 1$

Sol:- (i) ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $= x^2 - (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ})x + (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ})$
 $= x^2 - 3x + (-4) = x^2 - 3x - 4$

(ii) ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $= x^2 - (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ})x + (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ})$
 $= x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

(iii) ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $= x^2 - (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ})x + (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ})$
 $= x^2 - \sqrt{3}x + 4$

(iv) ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $= x^2 - (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ})x + (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ})$
 $= x^2 - (-2)x + (-5) = x^2 + 2x - 5$

$$\begin{aligned}
 \text{(v) ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ} &= x^2 - (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}) x + (\text{ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ}) \\
 &= x^2 - \left(\frac{-2}{3}\right)x + 1 = x^2 + \frac{2}{3}x + 1
 \end{aligned}$$

ਅਭਿਆਸ

1. ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ:

- (i) 4,3 (ii) -2, -5 (iii) -6,3 (iv) $3, \sqrt{2}$ (v) 4, -4
2. Ex 2.2, Q2

DAY 4

ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੁਆਰਾ $a = bq + r$ ਜਾਂ ਭਾਜ = ਭਾਜਕ \times ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

ਪਰ ਯੂਕਲਿਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਸਿਰਫ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਹੈ।

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦੀਆਂ ਦੇ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਬਹੁਪਦੀਆਂ ਦੇ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਜੇ $p(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਦੋ ਬਹੁਪਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ $g(x), p(x)$ ਨੂੰ ਵੰਡਦੀ ਹੈ ਤਾਂ

ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ : $p(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x); r(x) \neq 0$

ਭਾਵ : ਭਾਜ = ਭਾਜਕ \times ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

1. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ $p(x) = 2x^2 + 3x + 1$, ਨੂੰ $g(x) = x + 2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।. [PSEB Ex. 6]

Sol:-

$$\begin{array}{r}
 2x - 1 \text{ (ਭਾਗਫਲ)} \\
 x + 2 \overline{) 2x^2 + 3x + 1} \\
 \underline{\pm 2x^2 \pm 4x} \\
 -x + 1 \\
 \underline{\mp x \mp 2} \\
 3 \text{ (ਬਾਕੀ)}
 \end{array}$$

2. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ $p(x) = 3x^2 + 2x + 4$, ਨੂੰ $g(x) = x - 1$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।.

Sol:-

$$\begin{array}{r}
 3x + 5 \text{ (ਭਾਗਫਲ)} \\
 x - 1 \overline{) 3x^2 + 2x + 4} \\
 \underline{\pm 3x^2 \mp 3x} \\
 5x + 4 \\
 \underline{\pm 5x \mp 5} \\
 9 \text{ (ਬਾਕੀ)}
 \end{array}$$

3. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 10x - 8$, ਨੂੰ $g(x) = x + 5$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

Sol:-

$$\begin{array}{r}
 2x^2 - 13x + 75 \\
 x + 5 \overline{) 2x^3 - 3x^2 + 10x - 8} \\
 \underline{\pm 2x^3 \pm 10x^2} \\
 -13x^2 + 10x \\
 \underline{\mp 13x^2 \mp 65x} \\
 75x - 8 \\
 \underline{\pm 75x \pm 375} \\
 -383
 \end{array}$$

ਇੱਥੇ $q(x) = 2x^2 - 13x + 75, r(x) = -383$
ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੁਆਰਾ $2x^3 - 3x^2 + 10x - 8 = (x + 5)(2x^2 - 13x + 75) - 383$

4. ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 17x + 60$ ਦੇ ਸਿਫਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿਫਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਕਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

Sol.: $p(x) = x^2 - 17x + 60 = x^2 - 12x - 5x + 60$
 $= x(x - 12) - 5(x - 12) = (x - 12)(x - 5)$

$p(x)$ ਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ

ਜੇ $x - 12 = 0$ ਅਤੇ $x - 5 = 0$ i.e. $x = 12, x = 5$

ਜਾਂਚ

ਬਹੁਪਦ $x^2 - 17x + 60$ ਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ 12 ਅਤੇ 5

ਸਿਫਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= 12 + 5 = 17 = \frac{-b}{a}$

ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ $= 12 \times 5 = 60 = \frac{c}{a}$

5. $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇ ਦੋ ਸਿਫਰਾਂ $\pm \sqrt{\frac{5}{3}}$ ਹਨ।

Sol. ਦਿੱਤੇ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਿਫਰਾਂ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ਅਤੇ $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ਹਨ।

$\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ ਦਿੱਤੇ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

$x^2 - \frac{5}{3}$ i.e. $3x^2 - 5$ ਦਿੱਤੇ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ।

ਵੰਡ ਦੁਆਰਾ	$3x^2 - 5$	$x^2 + 2x + 1$
		$3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$
		$\pm 3x^4 \quad \mp 5x^2$
		$6x^3 + 3x^2 - 10x - 5$
		$\mp 6x^3 \quad \mp 10x$
		$3x^2 \quad - 5$
		$\pm 3x^2 \quad \mp 5$
		0

So $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 = (3x^2 - 5)(x^2 + 2x + 1)$
ਬਾਕੀ ਸਿਫਰਾਂ $x^2 + 2x + 1$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਣਨ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$

ਸਿਫਰਾਂ $-1, -1$

ਅਭਿਆਸ 2.2

1. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ $p(x)$ ਨੂੰ $g(x)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ।

- i. $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$; $g(x) = x^2 + 1 + x$
- ii. $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$; $g(x) = x^2 - 2$
- iii. $p(x) = x^4 - 5x + 6$; $g(x) = 2 - x^2$
- iv. $p(x) = 3x^3 + x^2 + 2x + 5$; $g(x) = 1 + 2x + x^2$
- v. $p(x) = 3x^2 - x^3 - 3x + 5$; $g(x) = x - 1 - x^2$

2. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ $p(x)$ ਨੂੰ $g(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਬਹੁਪਦ, ਦੂਜੇ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

- i. $x^2 - 2$; $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$
 - ii. $y - 2$; $2y^3 - 5y^2 - 19y + 42$
3. ਜੇ $\sqrt{2}$ ਅਤੇ $-\sqrt{2}$ ਬਹੁਪਦ $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ ਦੀਆਂ ਸਿਫਰਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਸਿਫਰਾਂ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਨਾਲ ਵੰਡਣ ਤੇ ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $x - 2$ ਅਤੇ $-2x + 4$ ਹਨ। $g(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।