

Группа М3216

К работе допущен \_\_\_\_\_

Студент Квачук Сергей и Орлов  
Владимир

Работа выполнена \_\_\_\_\_

Преподаватель Тимофеева Эльвира  
Олеговна

Отчет принят \_\_\_\_\_

**Рабочий протокол и отчет по  
лабораторной работе №1.02**

**Изучение скольжения тележки по  
наклонной плоскости**

**1. Цель работы.**

1. Экспериментальная проверка равноускоренности движения тележки по наклонной плоскости.

2. Определение величины ускорения свободного падения  $g$

**2. Задачи, решаемые при выполнении работы.**

1. Измерение времени движения тележки по рельсу с фиксированным углом наклона.

2. Измерение времени движения тележки по рельсу при разных углах наклона рельса к горизонту.

3. Исследование движения тележки при фиксированном угле наклона рельса. Проверка равноускоренности движения тележки.

4. Исследование зависимости ускорения тележки от угла наклона рельса к горизонту. Определение ускорения свободного падения.

**3. Объект исследования.**

Тележка, скользящая без трения по наклонной рельсе.

**4. Метод экспериментального исследования.**

Множественные измерения интервала времени, за которое тележка проходит заранее заданные расстояния между оптическими воротами, проверка равноускоренности движения по наклонной плоскости путем анализа полученных измерений и расчет ускорения свободного падения на основе полученных экспериментальным путем величин.

**5. Рабочие формулы и исходные данные.**

Зависимость проекции скорости тела  $v_x$  от времени  $t$ :

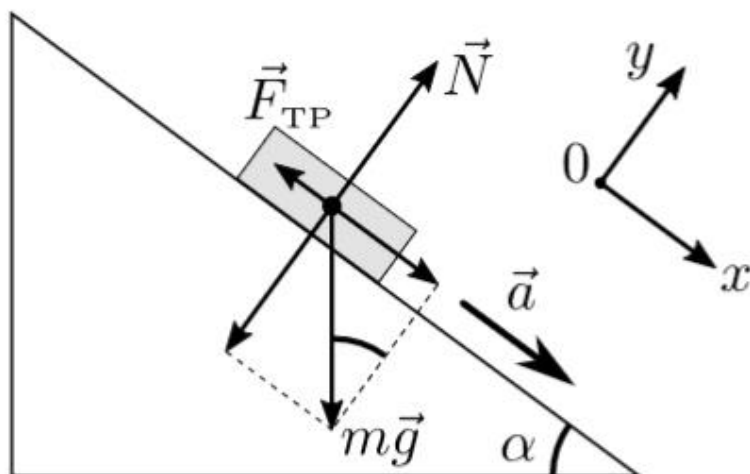
$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t$$

Зависимость координаты тела  $x$  от времени  $t$ :

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Линейная зависимость между перемещением и полуразностью квадратов времени:

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2)$$



Векторная диаграмма сил, действующих на тело, расположенное на наклонной плоскости

Второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

Сила трения:

$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

Проекции второго закона Ньютона на координатные оси:

$$\begin{cases} 0y : 0 = N - mg \cos \alpha \\ 0x : ma = mg \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \end{cases}$$

Ускорение тележки по модулю:

$$\begin{aligned} a &= g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \quad (\cos \alpha \approx 1) \\ a &= -\mu g + g \sin \alpha \end{aligned}$$

Алгоритм расчёта коэффициентов  $a$  и  $b$  в методе МНК:

1. Найти средние значения всех экспериментальных точек:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i$$

2. Найти коэффициенты прямой по следующим формулам:

$$b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

3. Рассчитать параметры  $D$  и  $d_i$ :

$$d_i = y_i - (a + bx_i)$$

$$D = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

4. Определить СКО коэффициентов  $a$  и  $b$ :

$$S_b^2 = \frac{1}{D} \frac{\sum d_i^2}{n-2}$$

$$S_a^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} \frac{\sum d_i^2}{n-1}$$

5. Рассчитать погрешность косвенных измерений:

$$\Delta_a = 2S_a$$

$$\Delta_b = 2S_b$$

Среднее значение времени:

$$\langle t \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$$

Среднеквадратичное отклонение  $t$ :

$$S_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \langle t \rangle)^2}{n(n-1)}}$$

Абсолютная погрешность косвенного значения:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \dots}$$

Коэффициент  $a$  и его среднеквадратичное отклонение (СКО):

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^N Z_i^2}; \quad \sigma a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - a Z_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N Z_i^2}}$$

Абсолютная погрешность коэффициента  $a$  для доверительной вероятности  $\alpha = 0.90$ :

$$\Delta a = 2\sigma a$$

Относительная погрешность ускорения:

$$\varepsilon a = \frac{\Delta_a}{a} * 100\%$$

Случайная погрешность  $t$ :

$$\Delta_{\langle t \rangle} = t_{\alpha, n} S_{\langle t \rangle}$$

Абсолютная погрешность  $t$ :

$$\Delta_t = \sqrt{\Delta_{\langle t \rangle}^2 + \left(\frac{2}{3} \Delta_{\text{ит}}\right)^2}$$

Среднее значение ускорения  $a$ :

$$\langle a \rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2}$$

Погрешность значения ускорения  $a$ :

$$\Delta_a = \langle a \rangle \sqrt{\frac{(\Delta x_{\text{ит}2})^2 + (\Delta x_{\text{ит}1})^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4 \frac{(\langle t_1 \rangle \Delta t_1)^2 + (\langle t_2 \rangle \Delta t_2)^2}{(\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2)^2}}$$

Абсолютная погрешность коэффициента Стьюдента для  $g$  для доверительной вероятности  $\alpha = 0,90$ :

$$\Delta g = 2\sigma_g$$

Табличное значение ускорения свободного падения  $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

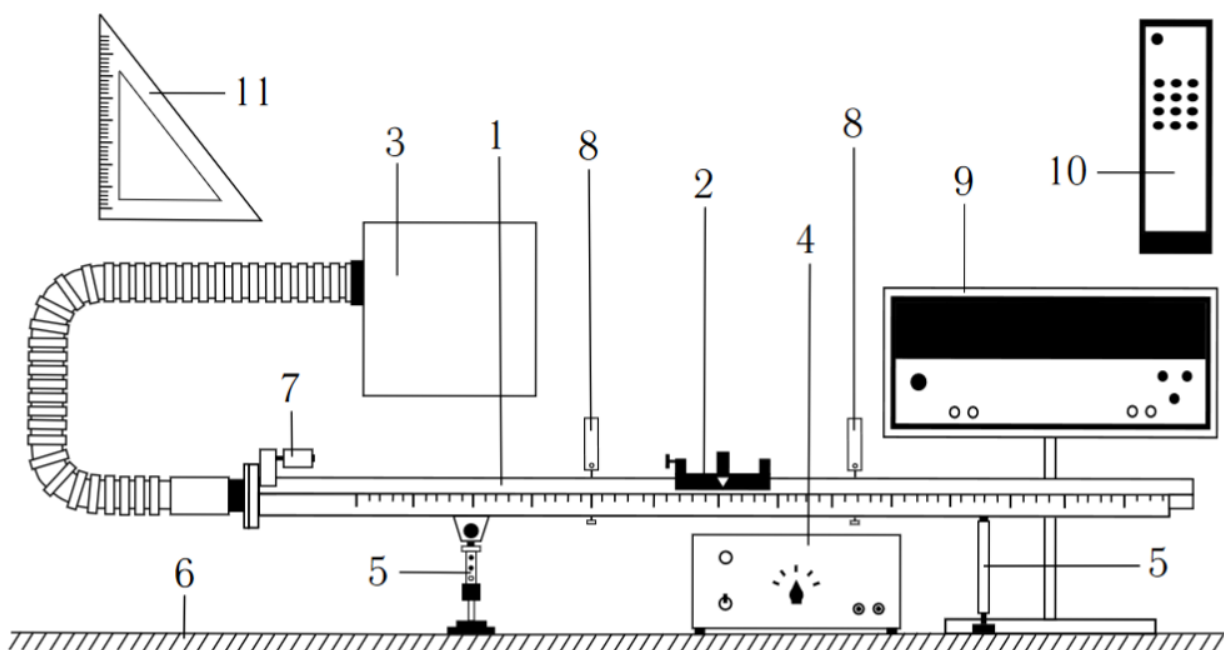
Значение коэффициента Стьюдента для  $\alpha = 0,95$  при  $n = 5$ :  $t_{\alpha, n} = 2,78$

6. Измерительные приборы.

**Таблица 1.**

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора
1	Цифровой измерительный прибор ПКЦ-3	цифровой	0-5с	0.05с
2	Линейка-угольник	физический	0-25см	0.5мм
3	Сантиметровая шкала	физический	0-250см	5мм

7. Схема установки (перечень схем, которые составляют Приложение 1).



1. Рельс с сантиметровой шкалой на лицевой стороне
2. Тележка
3. Воздушный насос
4. Источник питания насоса ВС 4-12
5. Опоры рельса
6. Опорная плоскость (поверхность стола)
7. Фиксирующий электромагнит
8. Оптические ворота
9. Цифровой измерительный прибор ПКЦ-3
10. Пульт дистанционного управления прибором ПКЦ-3
11. Линейка – угольник

По рельсу «1» скользит тележка «2». Для уменьшения трения между поверхностями рельса и тележки создается воздушная подушка с помощью воздушного насоса «3», подключенного к источнику питания «4». Электрические провода, подключающие воздушный насос к источнику питания, на рисунке не показаны. Высота рельса над опорной плоскостью «6» регулируется с помощью винтовых ножек опор «5». Электромагнит «7» фиксирует тележку в начале шкалы. Тележка снабжена флажком с черными вертикальными рисками. Цифровой измерительный прибор «9» фиксирует момент времени, скорость и ускорение тележки при прохождении флажка через оптические ворота «8». Запуск тележки и изменение режимов осуществляется пультом дистанционного управления «10». Угольник «11» используется для измерения вертикальной координаты точек рельса.

8. Результаты прямых измерений и их обработки (*таблицы, примеры расчетов*).

*Таблица 2.*

$x$ , мм	$x'$ , мм	$h_0$ , мм	$h_0'$ , мм
$220 \pm 0.5$	$1000 \pm 0.5$	$196 \pm 0.5$	$196 \pm 0.5$

*Таблица 3. Результат прямых измерений (Задание 1)*

	$x_1$	$x_2$	$t_1$	$t_2$	$(x_2 - x_1), \text{м}$	$\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}, \text{с}^2$
1	0,15	0,4	1,4	2,7	0,25	2,665
2	0,15	0,5	1,4	3,1	0,35	3,825
3	0,15	0,7	1,4	3,6	0,55	5,5
4	0,15	0,9	1,4	4,1	0,75	7,425
5	0,15	1,1	1,4	4,6	0,95	9,6

Ускорение  $a$  тележки ( $n = 5$ ):

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i Y_i}{\sum_{i=1}^n Z_i^2} = \frac{0.66625 + 1.33875 + 3.025 + 5.56875 + 9.12}{7.1022 + 14.63 + 30.25 + 55.13 + 92.16} =$$

$$= 0.098953 \approx 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

СКО ускорения тележки:

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - aZ_i)^2}{(N-1) \sum_{i=1}^N Z_i^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0.000188 + 0.000812 + (3.31E - 5) + 0.000233 + (2.42E - 9)}{4(7.1022 + 14.63 + 30.25 + 55.13 + 92.16)}} = 0.001260461$$

Таблица 4. Результат прямых измерений (Задание 2)

$N_{\text{пл}}$	$h$	$h'$	№	$t_1$	$t_2$
1	207	196,5	1	1,3	4,5
			2	1,4	4,6
			3	1,3	4,6
			4	1,3	4,5
			5	1,3	4,5
2	216	197	1	1	3,1
			2	1	3,2
			3	1	3,1
			4	0,9	3,2
			5	0,9	3,1
3	225	198	1	0,8	2,6
			2	0,8	2,7
			3	0,9	2,6
			4	0,8	2,6
			5	0,8	2,7
4	233	198,5	1	0,7	2,1
			2	0,6	2,2
			3	0,7	2,1
			4	0,6	2,1
			5	0,7	2,1
5	243	199	1	0,6	1,9
			2	0,6	2

			3	0,7	2
			4	0,6	1,9
			5	0,6	2
$N_{\text{пл}}$ - количество планок $h$ – высота на координате $x = 0.22$ м $h'$ - высота на координате $x = 1.00$ м					

9. Расчет результатов косвенных измерений (таблицы, примеры расчетов).

Таблица 5. Результаты расчетов (Задание 2)

Количество пластин	$\sin \alpha$	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$	$a, \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\Delta a$
1	0,013462	1,32	4,54	0,07913503	0,0846836	0,1006932	0,018486
2	0,024359	0,96	3,14	0,08468357	0,0846836	0,2125755	0,039573
3	0,034615	0,82	2,64	0,07913503	0,0846836	0,3017214	0,056025
4	0,044231	0,66	2,12	0,08468357	0,079135	0,4681187	0,08225
5	0,05641	0,62	1,96	0,07913503	0,0846836	0,5495777	0,102398
$N_{\text{пл}}$ - количество пластин $\langle t_{1,2} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_{1,2,i}$							

Коэффициенты  $A$  и  $B$  для  $a = A + B \sin \alpha$ :

$$B \equiv g = \frac{\sum_{i=1}^N a_i \sin \alpha_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i}{\sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^N \sin \alpha_i)^2} =$$

$$= \frac{0,068684876 - \frac{1}{5} * 1,6327 * 0,1731}{0,00711 - \frac{1}{5} * 0,1731^2} = 10,86354$$

$$A = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N a_i - B \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right) = \frac{1}{5} (1,6327 - 10,863254 * 0,1731) = -0,04951$$

Коэффициент СКО для  $g$ :

$$d_i = a_i - (A + B \sin \alpha_i)$$

$$D = \sum_{i=1}^N \sin^2 \alpha_i - \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N \sin \alpha_i \right)^2 = 0,00112$$

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{D(N-2)}} = 0,809978$$

10. Расчет погрешностей измерений (для прямых и косвенных измерений).

Задание 1:

$$\Delta x = 0,005\text{м}; \Delta t = 0,1\text{с}$$

Абсолютные погрешности при  $\alpha = 0,95$ :

$$\Delta x = 0,005\text{м} * \frac{2}{3} = 0,0033\text{м};$$

$$\Delta t = 0,1\text{с} * \frac{2}{3} = 0,067\text{с};$$

Абсолютная погрешность косвенных значений:

$$\Delta(x_2 - x_1) = \sqrt{\left(\frac{\partial(x_2 - x_1)}{\partial(x_2)} \Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial(x_2 - x_1)}{\partial(x_1)} \Delta x_1\right)^2} = \sqrt{(\Delta x_2)^2 + (\Delta x_1)^2} = 0,004714045$$

$$\Delta\left(\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}\right) = \sqrt{(t_2 \Delta t_2)^2 + (t_1 \Delta t_1)^2} = 0,202758751$$

Абсолютная погрешность  $a$  при  $\alpha = 0,90$ :

$$\Delta a = 2\sigma a = 2 * 0.001260461 = 0,002520922$$

Относительная погрешность ускорения тележки:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{a} * 100\% = 2,548\%$$

Задание 2

Абсолютная погрешность  $t_1$  и  $t_2$ :

$$S_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^2 (t_i - \langle t \rangle)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0,008}{5(5-1)}} = 0,02$$

$N_{\text{пл}}$	$S_{\langle t_1 \rangle}$	$S_{\langle t_2 \rangle}$
1	0,02	0,0244949
2	0,024495	0,0244949
3	0,02	0,0244949
4	0,024495	0,02
5	0,02	0,0244949

$$\Delta_t = \sqrt{\Delta_{\langle t \rangle}^2 + \left(\frac{2}{3} \Delta_{nt}\right)^2}$$

$N_{\text{пл}}$	$\Delta t_1$	$\Delta t_2$
1	0,07913503	0,0846836
2	0,08468357	0,0846836
3	0,07913503	0,0846836
4	0,08468357	0,079135
5	0,07913503	0,0846836



Абсолютная погрешность ускорения для каждой серии измерений:

$$\langle a \rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2}$$

$$\Delta a = \langle a \rangle \sqrt{\frac{(\Delta x_{i2})^2 + (\Delta x_{i1})^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4 \frac{(\langle t_1 \rangle \Delta t_1)^2 + (\langle t_2 \rangle \Delta t_2)^2}{(\langle t_2 \rangle^2 - \langle t_1 \rangle^2)^2}}$$

$N_{\text{пл}}$	$\Delta a$
1	0,018486
2	0,039573
3	0,056025
4	0,08225
5	0,102398

Абсолютная погрешность  $g$ :

$$\Delta g = 2\sigma_g = 2 * 0,809978 = 1,619957$$

Относительная погрешность:

$$\varepsilon_g = \frac{\Delta g}{g} * 100\% = 16,2\%$$

Абсолютное отклонение значения  $g$ :

$$|g_{\text{табл}} - g_{\text{эксп}}| = |10 - 10,86354| = 0,86354$$

11. Графики (*перечень графиков, которые составляют Приложение 2*).

График 1. Функция зависимости  $Y$  от  $Z$ :  $Y(Z) = aZ$

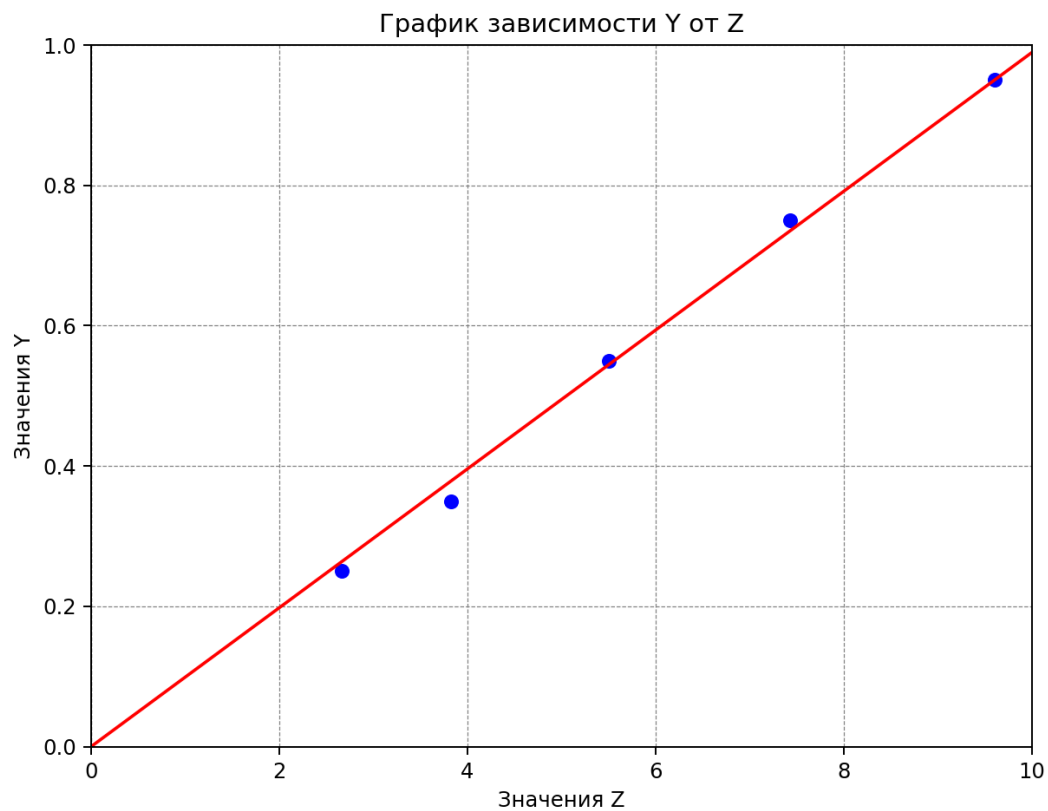
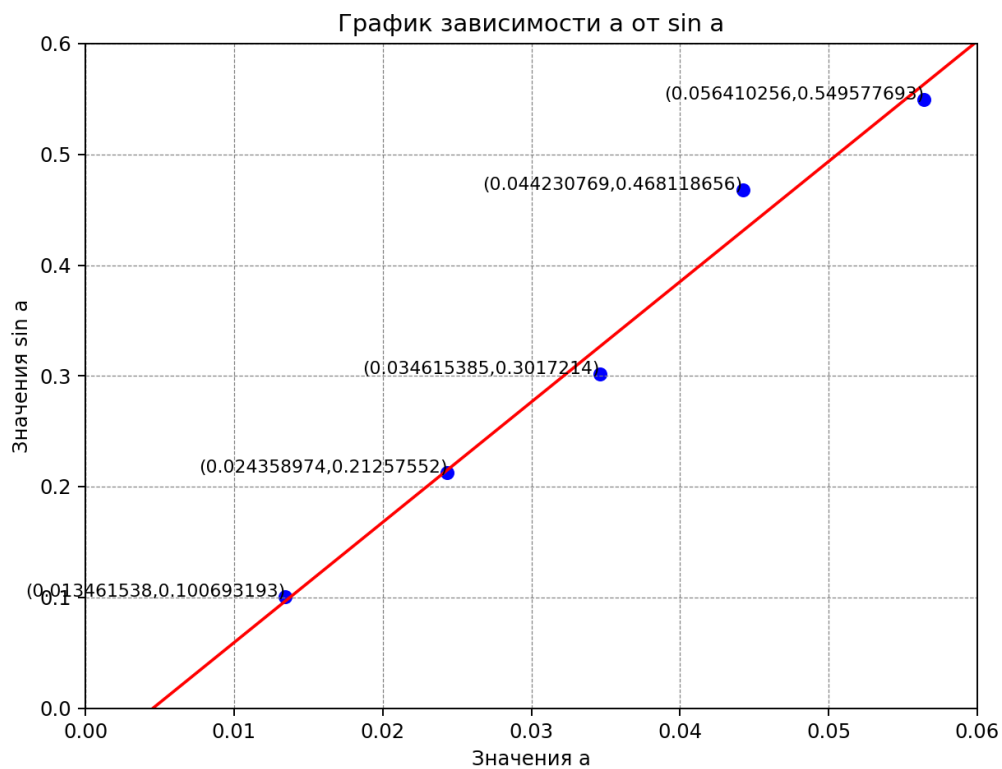


График 2. Функция зависимости  $a$  от  $\sin \alpha$ :  $a(\sin \alpha) = A + B \sin \alpha$



12. Окончательные результаты.

Значение ускорения  $a$  тележки при одном значении угла наклона поверхности:

$$a = (0,1 \pm 0,00252), \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad \varepsilon_a = 2,547\%$$

Значение ускорения свободного падения  $g$  при разных значениях угла наклона поверхности:

$$g = (10,86354 \pm 1,61995), \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad \varepsilon_a = 16,2\%$$

### 13. Выводы и анализ результатов работы.

В результате проведенных измерений и вычислений:

- 1) Был построен график зависимости  $Y$  от  $Z$ . Поскольку график демонстрирует линейную зависимость, а значения абсолютной и относительной погрешностей малы, можно считать движение тележки равноускоренным.
- 2) Был вычислен коэффициент свободного падения  $g$  для Санкт-Петербурга:  
 $g = (10,86354 \pm 1,61995) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . При сравнении с табличным значением ускорения свободного падения было выявлено значительное отклонение, из чего можно сделать вывод, что погрешность вычисленного значения была вызвана неидеальными условиями проведения эксперимента и/или допущенными в ходе вычисления ошибками.

16. Замечания преподавателя (*исправления, вызванные замечаниями преподавателя, также помещают в этот пункт*).